P. A. G. Colombier

Démonstration du théorème 72

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 468-471

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__468_0>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 72 (page 327, t. II).

PAR P. A. G COLOMBIER.
Regent de mathématiques à Béziers.

—

Théorème. A et B sont deux nombres entiers et positifs ayant plus de la moitié des chiffres à gauche en commun, et $A > B$. On a toujours

$$A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{p},$$

p étant un nombre entier positif.

Démonstration. Il résulte de cet énoncé que A et B ont nécessairement le même nombre de chiffres, et que le nombre des chiffres a droite non communs est le même dans les deux nombres. Désignons-le par k. Appelons α le nombre formé sur la gauche dans A et B par les chiffres communs considérés dans leur valeur relative; et a', b' les nombres formés sur la droite dans A et B pour les chiffres non communs, considérés dans leur valeur relative. On a

$$a' > b' \quad \text{et} \quad A = \alpha + a', \quad B = \alpha + b'.$$

Elevons à la puissance $\frac{1}{p}$ la valeur de A ; il vient

$$A^{\frac{1}{p}} = \alpha^{\frac{1}{p}} + \frac{a'}{p\alpha^{1-\frac{1}{p}}} - \frac{(p-1)\,a'^2}{1.2.p^2\alpha^{2-\frac{1}{p}}} + \frac{(p-1)(2p-1)\,a'^3}{1.2.3.p^3\alpha^{3-\frac{1}{p}}} - \ldots,$$

$$\pm \frac{(p-1)(2p-1)(3p-1)\ldots\ldots(\overline{r-1}\,p-1)\,a'^r}{1\,.\,2\,.\,3\quad\ldots\quad r\,.\,p^r\alpha^{r-\frac{1}{p}}} \mp \ldots$$

On prend les signes supérieurs ou les signes inférieurs, suivant que r est impair ou pair

Le développement de $B^{\frac{1}{p}}$ s'obtiendra en changeant dans celui de $A^{\frac{1}{p}}$, a' en b'. Il vient :

$$B^{\frac{1}{p}} = \alpha^{\frac{1}{p}} + \frac{b'}{p\alpha^{1-\frac{1}{p}}} - \frac{(p-1)\,b'^2}{1.2.p^2\alpha^{2-\frac{1}{p}}} + \frac{(p-1)(2p-1)\,b'^3}{1.2.3p^3\alpha^{3-\frac{1}{p}}} - \dots$$

$$\pm \frac{(p-1)(2p-1)(3p-1)\,\dots\,(\overline{r-1}\,p-1)\,b'^r}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,r\,.\,p^r\,\alpha^{r-\frac{1}{p}}} \mp \dots$$

d'où

$$A^{\frac{1}{p}}-B^{\frac{1}{p}} = \frac{a'-b'}{p\alpha^{1-\frac{1}{p}}} - \frac{(p-1)(a'^2-b'^2)}{1.2.p^2\alpha^{2-\frac{1}{p}}} + \frac{(p-1)(2p-1)(a'^3-b'^3)}{1.2.3.p^3\alpha^{3-\frac{1}{p}}} - \dots$$

$$\pm \frac{(p-1)(2p-1)(3p-1)\,\dots\,(\overline{r-1}\,p-1)\,(a'^r-b'^r)}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,r\,p^r\,\alpha^{r-\frac{1}{p}}} \mp \dots$$

ou bien,

$$p\left[A^{\frac{1}{p}}-B^{\frac{1}{p}}\right] = \frac{a'-b'}{\alpha^{1-\frac{1}{p}}}\left\{1 - \frac{(p-1)\,\frac{a'^2-b'^2}{a'-b'}}{1.2.p.\alpha} + \frac{(p-1)(2p-1)\,\frac{a'^3-b'^3}{a'-b'}}{1.2.3.p^2\alpha^2} - \dots\right.$$

$$\left.\pm \frac{(p-1)(2p-1)(3p-1)\,\dots\,(\overline{r-1}\,p-1)\,\frac{a'^r-b'^r}{a'-b'}}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,r.p^{r-1}\alpha^{r-1}} \mp \dots\right\}$$

La difference $a'-b'$ a au plus k chiffres. $\alpha^{1-\frac{1}{p}}$ sera le plus petit possible, et il en sera de même de $1-\frac{1}{p}$, c'est-à-dire, lorsqu'on aura $p=2$. Dès lors $\alpha^{1-\frac{1}{p}} = \sqrt{\alpha}$. Le nombre de chiffres de α étant $2k+1$, il s'ensuit que $\sqrt{\alpha}$ a $k+1$ chiffres. Ainsi, dans le cas le plus défavorable,

$$\frac{a'-b'}{\alpha^{1-\frac{1}{p}}} < 1.$$

Dans la série entre la parenthèse, un terme se forme sur le précédent, en multipliant ce dernier par

$$\frac{(rp-1)\dfrac{a'^{r-1}-b'^{r-1}}{a'-b'}}{(r-1)p\,.\,\alpha\dfrac{a'^{r}-b'^{r}}{a'-b'}}.$$

Il sera démontré que les termes de la série vont en décroissant, si nous démontrons que ce multiplicateur est moindre que l'unité; et comme $\dfrac{rp-1}{(r+1)p}$ est moindre que l'unité, il suffira de prouver que

$$\frac{a'^{r+1}-b'^{r+1}}{a'^{r}-b'^{r}}<1.$$

En effet, on a l'identité

$$\frac{a'^{r+1}-b'^{r+1}}{\alpha(a'^{r}-b'^{r})}=\frac{a'}{\alpha}+\frac{b'}{\left\{\left(\dfrac{a'}{b'}\right)^{r-1}+\left(\dfrac{a'}{b'}\right)^{r-2}+\ldots+\dfrac{a'}{b'}+1\right\}};$$

En appelant T le nombre entier immédiatement au-dessous de $\left(\dfrac{a'}{b'}\right)^{r-1}+\ldots+1$, il vient

$$\frac{a'^{r+1}-b'^{r-1}}{\alpha(a'^{r}-b'^{r})}<\frac{a'+\dfrac{b'}{\mathrm{T}}}{\alpha}.$$

Le numérateur, dans le deuxième membre, a, au plus, $k+1$ chiffres. Le dénominateur en a $2k+1$; dans le cas le plus défavorable, le deuxième membre est moindre que l'unité; il en est de même, à fortiori, du premier. Donc le multiplicateur qui sert à passer d'un terme au suivant dans la série, est moindre que l'unité; par conséquent les termes de la série sont décroissants; de plus, ils sont alternativement positifs et négatifs, donc, d'après un théorème connu, la quantité entre parenthèses est moindre que son premier terme 1. Donc la valeur de $p\left[A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}}\right]$ est le produit de deux quantités moindres que l'unité, et dès lors il est vrai de dire qu'on a :

$$A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{p}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$