Nouvelles annales de mathématiques

Midy

Questions d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 462-467
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__462_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

QUESTIONS D'EXAMEN.

(Suite, v 449.)

PAR M. MIDY,
Professeur de mathématiques.

Deuxième question. Trouver le lieu des foyers et des sommets de toutes les hyperboles qui ont même directrice et une asymptote commune.

Première solution. Soit YAY' l'asymptote donnée, axe des y; DAD' la directrice donnée; A l'origine; XAX' l'axe des x perpendiculaire à l'asymptote; on aura $(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=$ $=(qy+px)^2$ (1). Équation de la courbe; $qy+px=0$ (2). — Équation de la directrice.

Pour exprimer que l'axe des y est une asymptote, nous ferons dans (1) $x=0$, il viendra alors

$$(y-\beta)^2-(qy)^2+\alpha^2=0,$$

et nous écrirons que les deux racines de cette équation sont infinies. Ce qui donne les deux conditions

$$q=1, \quad \beta=0.$$

qui reduisent les deux équations (1) et (2) aux suivantes :

$$(x-\alpha)^2 - p^2x^2 - 2pxy = 0\,, \qquad (3)$$

$$px + y = 0. \qquad (4)$$

De la condition

$$\beta = 0\,,$$

il faut déja conclure que tous les foyers sont sur l'axe des x et qu'ils sont par conséquent en ligne droite avec le point de concours des deux droites données. L'un des lieux est donc déjà trouvé.

L'autre, celui des sommets, sera donné par l'intersection des courbes (3) avec la perpendiculaire menée du foyer sur la directrice.

Or, cette perpendiculaire a pour équation

$$y = \frac{1}{p}(x-\alpha)\,;$$

d'ou l'on tire

$$x - \alpha = py.$$

Substituant cette valeur dans (3), il vient

$$y^2 - \frac{2x}{p}y - x^2 = 0\,, \qquad (5)$$

pour l'équation du lieu.

Cette équation résolue donne

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{p^2+1}}{-p}\,x\,, \qquad (6)$$

équation d'une double droite passant par l'origine sur laquelle se trouvent les sommets. La première divise en deux parties égales l'angle DAF que fait la directrice avec AF, et l'autre, qui lui est perpendiculaire, divise aussi en deux parties égales l'angle FAD', supplémentaire du premier.

C'est sur cette seconde droite que se trouve le second sommet S' correspondant au second foyer.

Deuxième solution. En s'appuyant sur une des propriétés géométriques de la directrice, on sera conduit plus promptement et plus simplement encore aux mêmes résultats.

Soit, en effet, une hyperbole GSH (*fig.* 94), dont nous désignerons le demi-axe transverse par a et l'excentricité par c.

On sait que la directrice est la polaire du foyer. En nommant d la distance de cette droite au centre, on aura donc

$$dc = a^2.$$

Or, si du foyer F on abaisse la perpendiculaire FA sur l'asymptote UCU'; puis du point A, la perpendiculaire AD sur AF, le triangle rectangle CAF, dans lequel $CA = a$, donnera

$$CD \times CF = CA^2,$$

d'où il suit que AD est la directrice.

Donc, puisque pour toutes les hyperboles considérées, les deux droites AD, AU sont invariables, la perpendiculaire AF sur la seconde l'est aussi, et l'une des deux propriétés se trouve ainsi démontrée.

Or, $CA = CS$. Donc, menant AX parallèle à SS', les angles SAX, SAC sont egaux, et, à cause de $CA = CS'$, les angles S'AX', S'AC le sont aussi. Mais puisque l'angle DAU est invariable, les angles CAX, CAX' le sont aussi, et la direction des droites rectangulaires AS, AS' est constante. Donc la seconde propriété se trouve démontrée.

D'ailleurs, cette seconde solution s'accorde avec la solution analytique trouvée.

Car, de l'egalite des angles SAX, SAC, il faut conclure celle des angles SAU, SAX', et, à cause des angles droits FAU, DAX', celle des angles SAF, SAD, et, par suite, celle des angles FAK, FAY'.

Il est facile d'expliquer, par de simples considérations géométriques, pourquoi, dans les deux questions que nous venons de traiter, les lieux cherches sont des droites passant par le point de concours des droites données. Car, dans la première, les paraboles sont, par leur nature, des courbes semblables, et puisqu'elles ont la même directrice, leurs axes sont parallèles. Dans la seconde question, toutes les hyperboles ont leurs axes transverses perpendiculaires à la directrice commune, et par conséquent parallèles. D'ailleurs, puisqu'elles ont une asymptote commune, l'angle des asymptotes est constant, et, par suite, le rapport des axes l'est aussi. Donc, dans les deux cas, les courbes considérées sont semblables et parallèles, et les droites données en sont des lignes homologues. Donc, le point de concours de ces droites est le centre d'homologie commun à toutes ces courbes, et par conséquent tous les points homologues sont en ligne droite avec lui.

Il n'en serait pas de même si l'on cherchait le lieu des foyers ou des sommets de toutes les ellipses qui ont même directrice et une tangente commune, parce que ces données seraient insuffisantes pour déterminer la similitude de toutes ces courbes*. Mais si l'on y ajoutait cette dernière condition, les mêmes conséquences se reproduiraient encore.

Soit, en effet, SBS'B' (*fig.* 95) une des ellipses considérées. Supposons-la rapportée à ses axes. Son équation sera

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2. \qquad (1)$$

Soit LL' la directrice, et TM' une tangente à la courbe. x' et y' désignant les coordonnées du point M de contact, l'équation de cette tangente sera

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2 \qquad (2)$$

En nommant m la tangente de l'inclinaison de cette droite sur l'axe des x, l'on aura

$$m = -\frac{b^2x'}{a^2y'}. \qquad (3)$$

D'ailleurs, puisque le point (x', y') est sur la courbe

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2 \qquad (4)$$

Le point D, où la directrice coupe l'axe, en nommant d

---

* Dans l'ellipse, comme dans l'hyperbole, il suffit, pour la similitude, de connaître la directrice et la position d'un des diamètres conjugués égaux. Im

sa distance au centre, sera déterminée par la relation connue

$$cd = a^2,$$

c désignant l'excentricité. Nommons β l'ordonnée du point A où la tangente rencontre la directrice. En substituant ses coordonnées

$$x = -\frac{a^2}{c} \quad \text{et} \quad y = \beta,$$

dans l'équation (2), celle-ci devient

$$a^2\beta y' - b^2 x' \frac{a^2}{c} = a^2 b^2.$$

On en tire

$$\beta = \frac{b^2(c + x')}{cy'}. \tag{5}$$

Toutes les ellipses devant être semblables, le rapport $\frac{b}{a}$ doit être constant. En le nommant p, l'on aura

$$b = ap.$$

Par suite,

$$c^2 = a^2 - b^2 = a^2(1 - p^2);$$

d'où

$$c = a\sqrt{1 - p^2} \quad \text{et} \quad d = \frac{a}{\sqrt{1 - p^2}};$$

puis

$$\beta = \frac{a^2p^2(c + x')}{cy'} \quad \text{et} \quad m = -\frac{p^2x'}{y'}.$$

Combinant cette dernière relation avec (4), on en tire

$$x' = -\frac{am}{\sqrt{p^2 + m^2}}, \quad y' = \frac{ap^2}{\sqrt{p^2 + m^2}}.$$

Mettant ces valeurs ainsi que celle de c dans β, l'on a

$$\beta = \frac{a(\sqrt{p^2 + m^2}\sqrt{1 - p^2} - m)}{\sqrt{1 - p^2}}.$$

C'est l'ordonnée du point A qui doit varier avec a, c'est-à-dire lorsqu'on fera varier l'ellipse que l'on a considérée.

D'ailleurs,

$$DS = d - a = \frac{a(1-\sqrt{1-p^2})}{\sqrt{1-p^2}}.$$

Supposons maintenant que l'on ait transporté l'origine en A, et que l'on prenne la droite LL′ et la perpendiculaire AX sur cette droite pour axes nouveaux des y et des x, les coordonnées du point S relatives à ces nouveaux axes seront

$$y = -\frac{a(\sqrt{p^2+m^2}\ \sqrt{1-p^2}-m)}{\sqrt{1-p^2}},\quad x = \frac{a(1-\sqrt{1-p^2})}{\sqrt{1-p^2}}.$$

Eliminant a, il vient

$$y = -\frac{\sqrt{p^2+m^2}\ \sqrt{1-p^2}-m}{1-\sqrt{1-p^2}}\,x$$

pour le lieu des sommets S. L'on aurait de même

$$y = -\frac{\sqrt{p+m^2}\sqrt{1-p^2}-m}{1+\sqrt{1-p^2}}\,x$$

pour celui des sommets S′.

L'ordonnée du point F, ou du point F′ est la même que celle du point S. Quant à l'abscisse, l'on a

$$DF = d - c = \frac{a}{\sqrt{1-p^2}} - a\sqrt{1-p^2} = \frac{ap^2}{\sqrt{1-p^2}}$$

et
$$DF' = d + c = \frac{a(2-p^2)}{\sqrt{1-p^2}}.$$

Les lieux des points F et F′ seront donc les droites ayant pour équations

$$y = -\frac{\sqrt{p^2+m^2}\ \sqrt{1-p^2}-m}{p^2}\,x$$

et
$$y = -\frac{\sqrt{p^2+m^2}\ \sqrt{1-p^2}-m}{2-p^2}\,x.$$

Ainsi les lieux cherchés sont encore des lignes droites.

Ce qu il fallait démontrer