NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HUET

Questions d'examen. Modifier une formule géométrique quand les unités de volume, de surface et de ligne changent

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 441-444

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__441_1>

QUESTIONS D'EXAMEN.

Modifier une formule géométrique quand les unités de volume, de surface et de ligne changent.

PAR M. HUET,
Régent de physique au Collége de Pamiers

Plusieurs questions de ce genre sont adressées souvent dans les examens. Pour donner l'idée de la méthode qu'on doit suivre, nous allons particulièrement traiter les deux questions suivantes.

1° Modifier la formule $P = \frac{1}{3}BH$ du volume de la pyramide en prenant la sphère pour unité de volume, son grand cercle pour unité de surface, et son rayon pour unité de longueur; au lieu du cube, de sa face et de son arête, comme on le fait ordinairement et comme le suppose la formule ci-dessus.

2° Ou encore en prenant le tétraèdre régulier pour unité de volume, sa face pour unité de surface, et son côté pour unité de longueur.

Ces deux questions sont les mêmes et peuvent se résoudre d'une manière analogue. Elles se réduisent à comparer $\frac{1}{3}$ BH avec la mesure ordinaire de la sphère, et avec celle du tétraèdre en mettant en évidence les nouvelles unités de surface et de ligne.

Sphère $= \frac{4}{3}$ C.R, C étant son grand cercle.

Donc $\frac{\text{Pyr}}{\text{Sph}} = \frac{\text{BH}}{4\text{CR}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\text{B}}{\text{C}} \cdot \frac{\text{H}}{\text{R}} = \frac{1}{4}\text{B}'\text{H}' = \frac{1}{4}\text{BH}$, en supprimant les accents ; d'où $\text{P} = \frac{1}{4}$ BH, ce qui étonnerait beaucoup en langage ordinaire. Mais le véritable sens de cette nouvelle formule abrégée serait : le rapport de la pyramide à la sphère prise pour unité égale le quart du produit du rapport de sa base au grand cercle par celui de sa hauteur au rayon, comme l'indique la formule $\frac{\text{P}}{\text{Sph}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\text{B}}{\text{C}} \cdot \frac{\text{H}}{\text{R}}$, dans laquelle les trois espèces d'unités sont en évidence, au lieu qu'elles sont sous entendues dans $\text{P} = \frac{1}{4}$ BH : tout comme la première $\text{P} = \frac{1}{3}$ BH est l'abrégé de $\frac{\text{P}}{\text{K}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\text{B}}{q} \cdot \frac{\text{H}}{c}$, K désignant le cube pris pour unité, q l'une de ses faces, et c le côté.

Le tétraèdre régulier ayant pour mesure ordinaire $\frac{1}{3} bh$, en le désignant par t on aura $\frac{\text{P}}{t} = \frac{\text{BH}}{bh} = \frac{\text{B}}{b} \cdot \frac{\text{H}}{h}$. Il reste à évaluer h en c qui est le côté du triangle équilatéral. En désignant par r le rayon du cercle circonscrit à ce triangle, on a

$$h = \sqrt{c^2 - r^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3} c^2} = \frac{1}{3} c \sqrt{6}.$$

Donc

$$\frac{H}{h} = \frac{3H}{c\sqrt{6}} = \frac{H}{c} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{H}{c}.$$

Donc

$$\frac{P}{t} = \frac{1}{2}\sqrt{6}\,\frac{B}{b} \cdot \frac{H}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \,.\, B' \,.\, H' \quad \text{ou} \quad P = \frac{1}{2}\sqrt{6}\,BH,$$

en faisant $b = 1$, $c = 1$, $t = 1$, unités de surface, de ligne et de volume, qu'il ne faudra pas oublier dans l'énoncé et la traduction.

C'est encore ainsi par exemple, qu'un cercle serait mesuré par le carré de son rayon, si on prenait un cercle particulier pour unité de surface et son rayon pour unité de longueur. En effet, en désignant ces deux cercles par C, c, et leurs rayons par R et r, on aurait

$$\frac{C}{c} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{R}{r} \cdot \frac{R}{r} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad \text{d'où} \quad C = R^2,$$

en supposant $c = 1$, $r = 1$. Cette equation serait évidemment fausse, si on l'énonçait ainsi : « Un cercle est égal au carré de son rayon. » Puisque son aire est $> 3R^2$ et $< 4R^2$. On devrait dire : « Un cercle a pour mesure, le carré de son rayon, » ou plus exactement : « Le rapport d'un cercle à un autre, égale le carré du rapport du premier rayon au second, comme l'indique $\frac{C}{c} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$. »

Par la même raison une sphère aurait pour mesure le cube de son rayon, ce qui voudrait dire que le rapport d'une sphère à une autre, égale le cube du rapport des deux rayons.

Si on voulait évaluer un cylindre droit en prenant pour unité de volume un cylindre, sa base pour unité de surface, et sa hauteur pour unité de longueur, on aurait la même formule

$$\frac{\text{Cyl}}{\text{cyl}} = \frac{BH}{bh} = \frac{B}{b} \cdot \frac{H}{h} \quad \text{ou} \quad \text{Cyl} = BH.$$

en supposant cyl $= 1$, $b = 1$, $h = 1$. Mais il faudrait que B fût évalué en b, et H en h.

La géométrie est remplie de ces mesures abrégées, dont le véritable sens est facile à rétablir quand on remonte à leur origine.