P.-A.-G. COLOMBIER

Note sur le crible d'Ératosthène

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 408-410

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__408_0>

NOTE SUR LE CRIBLE D'ÉRATOSTHÈNE.

PAR P.-A.-G. COLOMBIER,
Regent de Mathematiques, à Beziers

PROBLÈME. Connaissant la suite naturelle des nombres premiers au-dessous d'un nombre donné l, on demande la suite naturelle des nombres premiers au-dessus de l, jusqu'à un nombre donné l'.

Tous les nombres premiers étant nécessairement impairs, il s'ensuit que la suite des nombres premiers qu'on cherche ne pourra se trouver que dans la suite des nombres impairs,

$$a,\ a+2,\ a+4,\ \ldots..\ a+2k. \qquad (1)$$

compris entre l et l'.

Voyons ce qu'on fera pour trouver dans (1) tous les multiples d'un nombre premier d. Divisons a par d, et appelons r le reste de la division. Ce reste peut être pair ou impair. 1° Soit $r=2m$. D'après le mode de formation de la suite (1), que nous concevons prolongée au-dessous de a, il est évident que le $m^{\text{ième}}$ terme au-dessous de a, et à partir de $a-2$, est un multiple de d. Réciproquement, à partir du nombre impair immédiatement au-dessus de ce multiple, a est le $m^{\text{ième}}$ terme. Donc si on compte m, sur a; $m+1$, sur $a+2$; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à d, le nombre sur lequel tombera d sera le premier multiple de d compris entre l et l'; et, en comptant de d en d, on aura tous les multiples de d contenus dans (1). Dans le cas particulier où $r=0$, a est le premier multiple de d. 2° Soit $r=2m+1$. La différence entre ce reste et le diviseur d est toujours un nombre pair $2m'$. Donc, si je compte

1, sur $a+2$; 2, sur $a+4$;..... le nombre sur lequel tombera m' sera le premier multiple de d, compris entre l et l', et en comptant de d en d, on aura tous les multiples de d.

Cela posé, appelons λ la partie entière de la racine carrée de l'. Si λ est $<$ ou $=a$, il ne faudra effacer de la suite (1) que tous les multiples des nombres premiers contenus dans la table, et au-dessous de λ. Tous les nombres de la suite (1) qui n'auront pas été effacés seront premiers, et leur ensemble formera la suite cherchée. Si $\lambda > a$, on commencera par effacer de la suite (1) tous les multiples des nombres premiers donnés par la table ; le premier des nombres de la suite (1) qui n'aura pas été effacé, sera le premier nombre premier de la suite cherchée, puisqu'il n'aura pas de diviseur moindre que lui-même. On effacera de la suite (1) tous ses multiples. Le nombre suivant non effacé est premier, et on en éliminera tous ses multiples. On continuera de la même manière jusqu'à ce qu'on parvienne à un nombre premier plus grand que λ ; dès lors tous les nombres de la suite (1) qui n'auront pas été effacés seront premiers, et leur ensemble formera la suite cherchée.

Scolie 1. Il ne sera pas nécessaire de faire la division dans le cas où $d=3$, $d=5$, $d=7$, $d=11$, $d=a$, $d>a$.

Scolie 2. Lorsque le reste de la division diffère beaucoup du diviseur d, l'opération par laquelle on efface tous les multiples de d peut être considérablement abrégée, en disposant les nombres de la suite (1) par lignes horizontales, de telle sorte que chacune en contienne le même nombre, 10, par exemple, et qu'en outre les nombres de même rang, dans chaque ligne horizontale, soient sur une même verticale. On ajoute encore à cette simplification, en partageant la colonne verticale en tranches de 10 colonnes horizontales chaque. Ce ne sont pas les seules simplifications dont cette opération est susceptible.

Scolie 3. Au lieu de considérer le plus petit nombre a de la suite (1), on aurait pu considérer tout autre nombre de la même suite. Il est aisé de trouver le motif de la préférence qu'on doit donner à a.

Usage. Les tables des nombres premiers les plus étendus que nous connaissions sont celles de Burckhardt. Elles s'étendent jusqu'à 3 036 000. Si on voulait les étendre jusqu'à 5 000 000, on ferait usage du problème précédent, après avoir écrit 982 000 nombres de 7 chiffres. (On abrégerait leur écriture en observant que les nombres qui diffèrent de moins d'une centaine ont leurs cinq chiffres à gauche communs.)