ROCHE

Solution du problème 54

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 37-43

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__37_0>

SOLUTION DU PROBLÈME 54 (p. 521, tome I).

SURFACES ALGÉBRIQUES

Sur lesquelles on ne peut tracer qu'une seule circonférence de cercle.

PAR M. ROCHE,
Professeur de l'artillerie navale.

On trouvera des surfaces susceptibles de remplir cette condition dans les deux équations générales suivantes

$$a^m(y^2+x^2)+z^nx^2=a^nb^2,\quad a^n(y^2+x^2)+z^nxy=a^nb^2.$$

D'après la forme de ces équations, il est évident qu'en y faisant $z=0$, on a l'équation d'un cercle $y^2+x^2=b^2$, ce qui indique qu'elles sont coupées suivant une circonférence de cercle par le plan horizontal des xy. Les cas les plus simples à considérer sont ceux ou $n=1$; on a deux surfaces du troisième degré dont les équations sont :

$$a(y^2+x^2)+zx^2=ab^2,\quad ay^2+ax^2+zxy=ab^2.$$

Pour démontrer qu'elles ne peuvent être coupées suivant un cercle par aucun autre plan que celui des xy, on y substituera pour z une expression de la forme $mx+ny+r$; le résultat de la substitution donnera l'équation de la projection horizontale de la section faite par le plan dont l'équation est $z=mx+ny+r$. On aura pour la première équation

$$ay^2+nx^2y+mx^3+(r+a)x^2-ab^2=0.$$

Pour que cette équation donne celle d'une courbe du second degré, il faudra ou qu'elle soit le système d'une droite et d'une courbe, ou qu'elle se réduise immédiatement à l'équation d'une courbe du second dégré par l'évanouissement des coefficients des termes d'un degré supérieur. Pour reconnaître le premier cas, représentons par $y=px+q$ l'équation de la droite. On divisera le premier nombre de l'équation précédente par $y-px-q$, on aura pour quotient $ay+nx^2+apx+aq$ et pour reste le polynôme

$$(m+np)x^3+[(a(1+p)+nq)+r]x^2+2apqx+a(q^2-b^2)$$

Cette expression devant s'évanouir quel que soit x, tous les coefficients de x et le terme constant devront être nuls, ce qui donnera quatre équations, d'où l'on déduira

$$q=\pm b\,,\ p=0\,,\ m=0 \text{ et } r=-a\mp nb\,;$$

d'après ces valeurs, on verra que le plan dont l'équation est $z+a\pm nb=0$ coupera la surface suivant une droite dont l'équation avec celle du plan sera $y=\pm b$ et une courbe du second degré dont l'équation sera

$$nx^2+a(y-b)=0$$

Cette équation sera celle d'une parabole ; ce qui prouve que pour que l'équation de la section représente une courbe du second degré, il faut que l'on ait immédiatement $p=0$, $m=0$; dans ce cas l'équation de la section se réduit à

$$ay^2+(r+a)\,x^2=ab^2;$$

et pour que cette équation, qui représente une ellipse, soit celle d'un cercle, il faut que l'on ait $r=0$; donc le plan des xy est le seul dont la section avec la surface donne un cercle.

En discutant cette surface, on verra qu'elle contient quatre droites dont les équations sont

$$y=\pm b\,,\ x=0\,,\ y=\pm b,\ z=a\,,$$

et qu'elle s'étend à l'infini dans le sens des trois axes. Quant à la seconde équation du troisième degré, elle deviendra par la substitution de la valeur de z

$$(a+nx)y^2+(mx^2+rx)y+ax^2-ab^2=0$$

En la divisant comme la précédente par le polynôme

$$y-px-q$$

on aura pour quotient

$$(a+nx)\,y+(m+pn)\,x^2+(r+ap+nq)\,x+aq$$

et pour reste le polynôme

$$p(pn+m)x^3+[a+p(r+ap+nq)+q(m+pn)]x^2+[apq+q(r+ap+nq)]x+aq^2-ab^2=0$$

En égalant à zéro les coefficients de cette equation, on aura

$$p=\pm 1,\ m=\pm n,\ q=\pm b,\ r=nb\pm 2a\,;$$

ainsi, le plan dont l'équation sera $z=m\,(x\pm y)\pm 2a\pm mb$ coupera la surface suivant des droites dont les équations seront $y=\pm x\pm b$, et des hyperboles dont les équations seront $(a\pm mx)\,y\pm ax\mp ab=0$. Pour donner une courbe circulaire il faudra, comme pour la précédente, faire

$$m=0,\ n=0,\ r=0.$$

Cette surface comprendra huit lignes droites, savoir : quatre parallèles à l'axe des z dont les équations seront

$$x=0, y=\pm b\,;\ y=0,\ x=\pm b,$$

et quatre autres droites inclinées de 45° aux axes des x et des y, dont les équations seront

$$y=\pm b,\ x=\mp\frac{bz}{a}\,;\ x=\pm b, y=\mp\frac{bz}{a}\,;$$

les quatre plans verticaux représentés par l'équation

$$y=\pm x\pm b$$

avec toutes les combinaisons des signes couperont la surface, suivant trois droites dont deux parallèles à l'axe des z.

Cette surface s'étendra à l'infini dans le sens des trois axes.

Mais pour donner un exemple de la discussion d'une des surfaces comprises dans les formules générales, je choisirai celui de la première espèce ou $n=2$, ce sera une surface du quatrième degré représentée par l'équation

$$a^2y^2+a^2x^2+z^2x^2-a^2b^2=0$$

Pour démontrer que cette surface ne peut être coupée suivant un cercle que par le plan des xy, il faut employer une autre méthode que celle qu'on a employée précédemment qui entraînerait dans des calculs trop compliqués. La substitution de la valeur de z,

$$z=mx+ny+r$$

donnera l'equation

$$(a^2+n^2x^2)y^2+2n(mx^3+rx^2)y+m^2x^4+2mrx^3$$
$$+(a^2+r^2)\,x^2-a^2b^2=0$$

En résolvant cette équation par rapport à y, j'aurai

$$y=\frac{-nx^2(mx+r)\pm\sqrt{-a^2(m^2+n^2)x^4+a^2(b^2n^2-a^2-r^2)x^2-2a^2mrx^3+}}{a^2+n^2x^2}$$

Pour que cette équation puisse, dans une de ses racines, représenter une courbe du second degré, il faut d'abord que le numérateur de son expression soit divisible par $a^2+n^2x^2$; or, la partie rationnelle n'est point divisible par $(a^2+n^2x^2)$, parce que le facteur du second degré est monôme, et que le facteur binôme n'est que du premier degré ; la partie comprise sous le radical ne peut être divisible non plus par le carré de $a^2+n^2x^2$ ou $n^4x^4+2a^2n^2x^2+a^4$, par la raison que le premier et le dernier terme de son expression ont des signes différents. La réduction ne peut donc s'opérer que dans le cas où le coefficient n serait nul, puisque le radical, à cause des signes contraires de ses termes extrêmes, ne peut être un carré parfait d'un polynôme du second degré; mais la supposition de $n=0$ réduit la valeur de y à

$$y=\pm\frac{\sqrt{-a^2m^2x^4-a^2(a^2+r^2)x^2-2a^2mrx^3+a^4b^2}}{a^2}$$

et pour que cette équation se réduise à une équation du second degré en x et y, il faut que l'on ait encore $m=0$, et la valeur de y se réduira à

$$y=\pm\frac{\sqrt{a^2b^2-(a^2+r^2)x^2}}{a}$$

Dans ce cas, l'équation du plan sécant devient à $x=r$, la section est une ellipse qui ne peut se réduire à un cercle qu'en faisant $r=0$, ce qui donne $y=\pm\sqrt{b^2-x^2}$.

L'équation rationnelle de la section est

$$a^2y^2+(a^2+r^2)\,x^2=a^2b^2\,;$$

a mesure que r augmente les axes parallèles aux y des sections elliptiques restent constants et égaux à $2b$; mais les axes parallèles aux x exprimés par $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+r^2}}$ diminuent constamment, de sorte que lorsque $r=\infty$, l'axe parallèle aux x ou le petit axe est zéro, et l'ellipse se réduit à une ligne parallèle à l'axe des y et égale à $2b$.

Si l'on coupe la surface par des plans parallèles à l'axe des yz, en substituant pour x, une valeur $x=p$, l'équation de la section parallèle au plan des yz deviendra

$$a^2y^2+p^2z^2=a^2\,(b^2-p^2)$$

Pour que cette section soit réelle, p doit être moindre que b, quel que soit son signe, ce qui indique que la surface est limitée dans le sens des x positives et négatives; si l'on fait $p=0$, l'équation de la section se réduit à $y^2=b^2$, ce qui représente le système de deux droites parallèles dans le plan des xz et dont les équations sont

$$y=+b, y=-b$$

Si p est plus petit que b, la section est une ellipse dont les deux axes représentés par $2\sqrt{b^2-p^2}$, $\frac{2a\sqrt{b^2-p^2}}{p}$ diminuent constamment.

Si $p=+b$, l'équation se réduit à $a^2y^2+p^2z^2=0$, qui ne peut être satifaite que par $y=0$, $z=0$, c'est-à-dire par les équations d'un point. Ce sont les deux limites de la courbe dans le sens de l'axe des x correspondant à $x=+b$, $x=-b$.

Si l'on coupe la surface par des plans parallèles au plan des xz, en faisant $y=q$ dans l'équation, elle devient

$$(a^2+z^2)x^2=a^2(b^2+q^2) \text{ ou } x=\pm a\sqrt{\frac{b^2-q^2}{a^2+z^2}}.$$

Cette équation représente une courbe analogue à l'hyperbole, car l'axe des x est une double asymptote correspondant à $z=\infty$, qui donne $x=0$; la plus grande valeur de x correspondant à $z=0$, est $x=\sqrt{b^2-q^2}$. Lorsque $q=0$, c'est-à-dire lorsque le plan sécant est celui des xz, on a $x=\pm b$; mais la surface est limitée dans le sens des y positives et négatives puisque q ne peut être plus grand que b, abstraction faite du signe.

Lorsque $q=\pm b$, on a $x=0$, et les sections par les plans

$$y=+b, \text{ et } y=-b$$

se réduisent chacune à une seule ligne droite.

La figure de la surface est donc celle d'un tuyau qui s'étend à l'infini dans le sens des z positives et négatives. Sa coupe par le plan des yz représente deux droites parallèles et sa coupe suivant le plan des yz, représente une courbe quasi fermée à quatre branches qui se touchent suivant l'axe des x par des points de rebroussement, et qui se rapprochent à l'infini en haut et en bas des z; la section du tuyau se réduit, à la limite, à une ligne droite.