Nouvelles annales de mathématiques

C. E. Page

Détermination des axes principaux dans le cône du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 379-386

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__379_1>

DÉTERMINATION DES AXES PRINCIPAUX

DANS LE CONE DU SECOND ORDRE;

PAR C. E. PAGE,
Professeur à l'École d'artillerie de la Fère (Fin.)

—

7. Nous allons maintenant chercher le lieu géométrique engendré par une droite qui passe par le sommet, et qui se meut de manière que sa projection verticale reste constamment perpendiculaire à la trace verticale de son plan polaire. Pour cela, par le sommet S (*fig.* 69), menons dans le plan vertical une droite quelconque SK que nous considérerons comme la projection verticale de la droite mobile dans une

de ses positions. La trace horizontale devra être située sur la droite Km menée par le point K perpendiculairement à la ligne de terre ; la trace verticale du plan polaire sera la droite SF menée par le sommet perpendiculairement à la projection verticale SK, et sa trace horizontale devra passer par le point F où la droite SF rencontre la ligne de terre. Mais la trace horizontale du plan polaire est la polaire de la trace horizontale de la droite ; il faut donc déterminer sur la perpendiculaire Km un point tel que la polaire de ce point passe par le point F ; or le pôle de toute droite qui passe par le point F est situé sur la polaire de ce point, la trace horizontale cherchée est donc le point m intersection de la perpendiculaire Km avec la droite Gm polaire du point F.

En faisant tourner la droite SK autour du point S, et répétant la même construction pour chaque position de cette droite, on aura le lieu géométrique cherché.

Lorsque la droite SK tourne autour du point S, les deux points K et F glissent sur la ligne de terre, la ligne Gm reste parallèle à la direction conjuguée du diamètre Rq sur lequel se meut le point F, et la ligne Km reste perpendiculaire à la ligne de terre.

Le lieu géométrique est donc engendré par l'intersection de deux droites qui restent chacune parallèle à une même direction fixe et qui sont dirigées dans leurs mouvements par les deux points G et K.

Si l'on pose

$$\mathrm{OP}=a,\ \mathrm{O}q=b,\ \mathrm{PS}=h,\ \mathrm{OG}=\alpha,\ \mathrm{OK}=\beta,\ \mathrm{OF}=\gamma;$$

parce que les deux droites SK et SF sont rectangulaires, on aura

$$\mathrm{KP}\times\mathrm{PF}=\overline{\mathrm{PS}}^2 \quad \text{ou} \quad (\beta-a)(\gamma-a)=h^2,$$

et parce que les deux points G et F sont conjugués, harmoniques, par rapport au diamètre Rq, on aura

$$\mathrm{OG}.\mathrm{OF}=\mathrm{O}q^2 \quad \text{ou} \quad \alpha\gamma=b^2,$$

éliminant γ entre ces deux équations, il vient

$$a\alpha\beta+(h^2-b^2)\alpha-b^2\beta+ab^2=0\,;$$

on voit que les segments variables compris entre le point fixe O et les deux points directeurs K et G sont liés par une équation de la forme (C), (3), il s'en suit que le lieu géométrique engendré par le point d'intersection des deux droites mobiles est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à ces droites.

Lorsque le point K se confond avec le point P, le point F est situé à l'infini, la polaire du point F est le diamètre OL conjugué du diamètre Rq. La courbe passe donc par le point L, où ce diamètre vient rencontrer la perpendiculaire menée par le point P à la ligne de terre.

Lorsque le point K est situé à l'infini, le point F se confond avec le point P, le point C est situé à l'infini sur la polaire du point P, on en conclut que cette polaire du point P est une des asymptotes de la courbe.

Lorsque le point F se confond avec le point O, la polaire de ce point est située à l'infini, et le point C est situé à l'infini sur la position correspondante de la perpendiculaire Km; on en conclut que cette position de la perpendiculaire Km est la seconde asymptote de la courbe.

Notre hyperbole est donc complétement déterminée, puisque l'on connaît un de ses points et ses deux asymptotes.

Lorsque la directrice est une parabole, ce second lieu géométrique est également une hyperbole.

Les solutions du problème sont données par les intersections des deux hyperboles que nous venons de déterminer. Or deux hyperboles se coupent en quatre points; par conséquent, retranchant le point d'intersection L qui est situé sur la perpendiculaire à la ligne de terre menée par le point P, *il reste trois solutions*. Il est vrai que les quatre points d'intersection de deux hyperboles, ou seulement deux de ces points peuvent être imaginaires; mais ici nos deux hyperboles ont déjà un point d'intersection réel en L; elles ont donc nécessairement un second point d'intersection réel; par conséquent nous sommes certains qu'il existe au moins un axe principal; or, nous allons faire voir que l'existence d'un seul axe principal entraîne nécessairement l'existence des deux autres.

En effet, la section faite par un plan perpendiculaire à cet axe est une ellipse ou une hyperbole : supposons que ce soit une ellipse, en prenant cette ellipse pour directrice, nous aurons une cône droit à base elliptique (*fig.* 70); menons par le sommet une droite parallèle à l'un des axes de l'ellipse, cette droite aura pour plan polaire le plan mené par le sommet et par l'autre axe de l'ellipse, comme elle est évidemment perpendiculaire à ce plan, ce sera un axe principal du cône. En outre comme la trace horizontale du plan mené par le sommet et par l'un des axes de l'ellipse, rencontre cette ellipse, les sections faites parallèlement à ce plan sont des hyperboles.

Dans le cas où la base du cône droit est une hyperbole, on démontre de la même manière qu'il existe deux nouveaux axes principaux rectangulaires. Comme la trace horizontale du plan mené par le sommet et par le second axe de l'hyperbole ne rencontre pas cette courbe, les sections faites parallèlement à ce plan sont des ellipses, tandis que les sections faites parallèlement au plan qui passe par le sommet et par le premier axe sont des hyperboles.

§ 8. On voit d'après cela que toute surface conique qui a pour directrice une courbe quelconque du second ordre, a toujours trois axes principaux rectangulaires, que les sections faites perpendiculairement à l'un de ces axes sont des ellipses, tandis que les sections faites perpendiculairement aux deux autres axes sont des hyperboles. Il résulte de là que cette surface est toujours un cône droit à base elliptique.

§ 9. Nous allons chercher actuellement suivant quelle direction la surface d'un cône droit à base elliptique doit être coupée par un plan pour que la courbe d'intersection soit une circonférence.

Le diamètre de la base qui est conjugué à la direction de la trace horizontale du plan coupant, est la projection du diamètre de la courbe d'intersection qui est conjugué à la même direction : or dans le cercle deux directions conjuguées sont toujours rectangulaires ; pour que la courbe soit une circonférence, il faut donc que le diamètre conjugué à la trace horizontale du plan coupant soit perpendiculaire à cette trace, cette condition ne peut être remplie à moins que la trace du plan coupant ne soit perpendiculaire à l'un des deux axes de l'ellipse.

Il est facile de voir que lorsque la trace horizontale du plan coupant est perpendiculaire au grand axe, la courbe d'intersection est une ellipse encore plus allongée que l'ellipse de la base ; il faut donc que cette trace soit perpendiculairé au petit axe.

Soit SABCD (*fig.* 70), un cône droit à base elliptique ; SG et GE, les deux traces d'un plan mené par le sommet, et tel que tout plan qui lui est parallèle coupe la surface suivant une circonférence.

Posons le demi-grand axe de l'ellipse $= a$,
le demi-petit axe $= b$,
la hauteur du cône OS $= h$,
la distance OG $= x$.

Par un point quelconque p de la ligne de terre, menons un plan parallèle au plan SGE, soient mn et pq les deux traces de ce plan ; puisque la courbe d'intersection est une circonférence, on a

$pq^2 = pm.pn$ mais $\frac{pq^2}{a^2} = \frac{pA.pB}{b^2}$ d'où $\frac{pm.pn}{pA.pB} = \frac{a^2}{b^2}$,

à cause des triangles semblables, on a

$$\frac{pn}{pA} = \frac{GS}{GA} \quad \text{et} \quad \frac{pm}{pB} = \frac{GS}{GB};$$

multipliant membre à membre, on a

$$\frac{pm.pn}{pA.pB} = \frac{GS^2}{GA.GB} \quad \text{d'où} \quad \frac{GS^2}{GA.GB} = \frac{a^2}{b^2},$$

mais $GS^2 = h^2 + x^2$, $GA = x + b$ et $GB = x - b$; remplaçant par ces valeurs, il vient

$$\frac{x^2 + h^2}{x^2 - b^2} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \text{d'où l'on tire} \quad x = b\,\frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Cette valeur de x est facile à construire. Prenons une longueur OK égale à la génératrice menée du sommet S au point C, cette génératrice est égale à $\sqrt{a^2 + h^2}$; construisons le foyer F, la distance OF est égale à $\sqrt{a^2 - b^2}$; joignons le point F au point B, et par le point K menons la droite KG parallèle à FB, la distance OG ainsi déterminée sera la valeur de x. Comme la longueur OG peut être portée à droite et à gauche du point O, le problème a deux solutions, c'est-à-dire qu'il y a deux directions différentes suivant lesquelles la surface peut être coupée par un plan de manière que la courbe d'intersection soit une circonférence.

Nous voyons donc que toute surface conique qui a pour directrice une courbe du second ordre est identique avec le cône à base circulaire.

§ 10. Ce fut dans l'école Platonicienne que la théorie des sections coniques prit naissance; les premiers géomètres qui s'occupèrent de ces courbes, les obtinrent en coupant le cône droit à base circulaire par un plan perpendiculaire à l'une des génératrices, il en résultait que pour former les trois courbes, ils étaient obligés de faire varier l'angle d'ouverture du cône, de là vint que ces courbes reçurent d'abord les noms de section du cône acutangle, section du cône rectangle et section du cône obtusangle.

Apollonius de Perge, géomètre de l'école d'Alexandrie, à qui son beau traité des sections coniques mérita le titre de grand géomètre, coupa le cône droit de toutes les manières par un plan, et considéra le premier les sections du cône oblique; mais il se borna au cas où le plan coupant est perpendiculaire à la droite menée du sommet au centre de la base, perpendiculairement au plan de cette base.

Après Apollonius, les géomètres de l'antiquité n'ajoutèrent rien d'important à la théorie des coniques; ce ne fut que dans le dix-septième siècle que Desargues et Pascal présentèrent cette théorie d'une manière nouvelle et beaucoup plus générale. Desargues le premier fit voir que l'on obtenait toujours les mêmes courbes en coupant le cône oblique de toutes les manières possibles par un plan; mais il restait à savoir si tout cône ayant pour directrice une section conique quelconque pouvait toujours être coupé par un plan suivant une circonférence. Desargues proposa ce problème, Descartes le résolut par les nouvelles méthodes de la géométrie analytique, mais seulement pour le cas où la directrice est une parabole. Depuis, d'autres geomètres, le marquis de l'Hôpital, Herman, le père Jacquier, donnèrent des solutions pour le cas où la directrice est une ellipse ou une hyperbole, mais toujours par l'analyse. (*Voy.* Tome I^{er} des *Nouvelles Annales*, page 229).

Il paraît que Desargues lui-même avait donné une solution purement géométrique qui ne nous est pas parvenue (Voy. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie;* par M. Chasles, pages 81 et 546). Au rapport du père Mersenne, il ramenait le problème à la recherche de l'axe principal du cône; c'est-à-dire, de celui qui jouit de cette propriété que tout plan qui lui est perpendiculaire, coupe la surface suivant une ellipse qui a son centre sur cet axe même. Il construisait cet axe au moyen de deux lignes dont il déterminait autant de points qu'il voulait. Cette solution de Desargues était très-probablement la même que celle que nous avons donnée plus haut.

M. Chasles (*Voy.* l'ouvrage déjà cité, p. 82) indique plusieurs solutions de ce problème : ces solutions consistent à construire un second cône ayant mêmes axes principaux que le cône proposé ; en coupant les deux surfaces par un même plan, on a deux courbes du second ordre, les axes principaux rencontrent le plan coupant en trois points qui doivent avoir les mêmes polaires par rapport aux deux courbes. Lorsque les deux courbes se coupent en quatre points, rien n'est plus facile que de déterminer les trois points cherchés; en effet en prenant les quatre points d'intersection des courbes, pour les sommets d'un quadrilatère inscrit, les points de rencontre des côtés opposés et le point de croisement des deux diagonales, donnent trois points qui ont mêmes polaires par rapport aux deux courbes; mais lorsque les points d'intersection des deux courbes sont imaginaires, ce qui peut fort bien arriver, le problème de déterminer les trois points par rapport auxquels les deux courbes ont les mêmes polaires est aussi difficile que le problème proposé.