Nouvelles annales de mathématiques

Charles Guibal

Question d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 370-372

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__370_1>

QUESTION D'EXAMEN.

PAR GUIBAL (CHARLES),
Elève du collége Saint-Louis.

En quel point d'une table à trois pieds faut-il placer un poids donné, pour que les pressions soient dans un rapport donné? N'y a-t-il qu'une position? (Tome I, p. 350.)

Soient, (*fig.* 77), M,N,P, les points fixes de la table, et O le point cherché tel que les pressions aux points M,N,P soient entre elles comme m,n,p. Appelons M,N,P ces trois pressions qui ont pour résultante, le poids du corps appliqué en O. On sait alors que le point O doit se trouver dans l'intérieur du triangle MNP formé par les points d'appui, et que ces trois

(*) Dans le prochain numéro, nous donnerons une solution très-courte du problème général. Tm.

forces sont représentées proportionnellement, par les trois triangles formés en joignant le point O aux trois sommets ; de telle sorte qu'on a :

$$M : N : P :: NOP : MOP : MON.$$

Mais comme on doit avoir :

$$M : N : P :: m : n : p$$

on aura

$$NOP : MOP : MON :: m : n : p.$$

Le problème est donc ramené à trouver dans un triangle un point tel qu'en le joignant aux sommets, on forme trois triangles dont les aires soient dans les rapports donnés. On y arrive de la manière suivante : soit toujours O le point cherché, menons OQ, OR, parallèles à MN, NP et tirons NQ, NR. Les triangles MON, MQN sont équivalents comme ayant même hauteur et même base MN ; il en est de même des triangles NOP, NRP et par conséquent aussi des triangles restants MOP, NQR. La proportion ci-dessus devient alors :

$$NPR : NQR : NMQ :: m : n : p.$$

Mais ces trois triangles ayant même sommet et leurs bases sur une même droite, ont même hauteur et sont entre eux comme ces bases.

Donc on a :

$$NPR : NQR : NMQ :: PR : RQ : MQ$$

de ces deux dernières proportions, on tire :

$$PR : RQ : MQ :: m : n : p.$$

Donc pour résoudre le problème, il faut partager la base MP en trois parties PR, RQ, MQ proportionnelles à m, n, p, puis mener QO, RO parallèles à MN, PN et le point de rencontre O de ces deux parallèles, sera le point cherché.

Le problème admet six solutions ; en effet, nous avons supposé que les pressions M, N, P correspondaient, la 1re au nombre m, la 2e au nombre n et la 3e à p ; mais on peut prendre ces six quantités deux à deux de six manières différentes. En effet, prenant M et m, on peut prendre en même temps N et n, P et p, ou bien N et p, P et n, ce qui donne deux combinaisons; avec N et m, on peut prendre : ou bien M et n, P et p, ou bien M et p, P et m. Enfin avec P et m on peut prendre M et n, N et p, ou M et p, N et n; ce qui donne bien six solutions. C'est aussi ce que l'on voit d'après la construction à effectuer pour résoudre le problème; car au lieu de partager MP proportionnellement à m,n,p en allant de P vers M, on peut aller de M vers P, ce qui donnera une seconde solution; maintenant, au lieu d'opérer sur le côté MP, opérons sur chacun des deux autres, nous aurons pour chacun d'eux deux solutions, ce qui fait en tout six solutions.

Si, comme cas particulier, on avait $m=n=p$, les trois distances NQ, QR, RP seraient égales et les deux parrallèles QO, RO détermineraient le centre de gravité du triangle qui serait alors le point cherché. Dans ce cas, les six solutions se réduisent à une seule.

Si, en outre, le triangle MNP était équilatéral, le point O serait le centre du triangle, car ce point est en même temps le centre de gravité.