NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. LEFAIVRE

Deux théorèmes sur les transversales dans le cercle

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 362-365
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__362_1>

DEUX THÉORÈMES

SUR LES TRANSVERSALES DANS LE CERCLE,

PAR M. P. LEFAIVRE,
Elève de rhétorique au Collége de Versailles

THEORÈME 1.

(*) Soit ABC (*Fig.* 58) un triangle inscrit au cercle, et dont les côtés AB, AC, BC, prolongés au besoin, soient coupés respectivement aux points F, G, H par une transversale FGH. Si l'on nomme a, b, c, les tangentes menées des points F, G, H à la circonférence, on aura

$$a.b.c. = \mathrm{AG.BF.CH} = \mathrm{AF.BH.GC}.$$

Démonstration. $a^2 = \mathrm{FB.FA}$, $b^2 = \mathrm{GA.GC}$, $c^2 = \mathrm{HB\,HC}$.

Donc, $$a^2.b^2.c^2 = \mathrm{FA.BH.GC.BF.AG.CH}.$$

(*) Il faut remplacer dans la figure P par F.

Or, FA.BH.GC = AG.BF.CH, d'après une propriété bien connue des transversales. Par conséquent, on aura

$$a^2.b^2.c^2 = (AG.BF.CH)^2,$$

et par suite

$$a.b.c = AG.BF.CH,$$

et aussi

$$a.b.c = FA.BH.GC.$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME 2.

Soit une circonférence ABHD (*Fig.* 59) : menons une corde quelconque AB et par les extrémités A, B, deux tangentes AC, BK, et enfin une transversale quelconque CDHK, que je suppose couper la circonférence en D, H et la corde au point G, je dis qu'on aura

$$DG^2 : GH^2 :: CD \times DK : HK \times HC.$$

Démonstration. Faisons $AC = m$, $BK = n$, $CD = c$, $HK = d$, $DG = x$, $GH = y$, nous aurons $AC^2 = CD \times CH$, ou

$$m^2 = c(c + x + y) \qquad (1)$$

et $BK^2 = KH \times KD$, ou $n^2 = d(d + x + y)$ (2)

De l'équation (1), je tire $m^2 - cy = c(c + x)$.

De l'équation (2) $n^2 - dx = d(d + y)$.

Divisant ces deux équations, l'une par l'autre, il viendra

$$\frac{m^2 - cy}{n^2 - dx} = \frac{c(c + x)}{d(d + y)} \qquad (3)$$

Or, si je considère les segments déterminés par la transversale AGB sur les côtés du triangle COK, j'aurai évidemment $(d + y)m.\ AO = AO.n(c + x)$.

Donc $m : n :: c + x : d + y$. (4).

Donc, l'équation (3) devient

$$\frac{m^2 - cy}{n^2 - dx} = \frac{cm}{dn}$$

Chassant les dénominateurs et transposant

$$mx - ny = mn\left(\frac{cn - dm}{dc}\right) \quad (5).$$

Or, la proportion (4) donne

$$my - nx = cn - md \quad (6).$$

J'ai donc les deux équations du premier degré (5) et (6). J'en tire successivement par l'élimination

$$y = m(dc + n)\frac{cn - dm}{dc(m^2 - n^2)}$$

$$\text{et } x = n(dc + m^2)\frac{cn - dm}{dc(m^2 - n^2)}.$$

Donc, évidemment

$$y : x :: m(dc + n^2) : n(dc + m^2);$$

remplaçant n^2 et m^2 par leurs valeurs, il s'en suit

$$y : x :: md(c + x + y + d) : nc(c + x + y + d) :: md : nc;$$

donc $$y^2 : x^2 :: m^2 d^2 : n^2 c^2,$$

ou $$y^2 : x^2 :: cd^2(c + x + y) : dc^2(d + x + y),$$

ce qui donne enfin $y^2 : x^2 :: d(c + x + y) : c(d + x + y)$, proportion qui démontre le théorème.

Car en remplaçant y, x, d, c par leurs valeurs, la proportion qu'on vient d'obtenir donnera évidemment

$$DG^2 : GH^2 :: CD \times DK : HK \times HC. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si la transversale coupait les deux tangentes dans l'angle supplément de AOK, on arriverait toujours à la proportion du théorème général en procédant comme ci-dessus. Il en sera de même, dans quelque autre position qu'elle coupe le système AODHB. Il faut cependant remarquer deux cas particuliers.

1° Si la transversale est parallèle à l'une des tangentes, par exemple à OB (*fig.* 60), on peut regarder son point d'intersection avec elle, comme situé à l'infini, la proportion du théorème général deviendra alors, dans ce cas particulier,

$$y^2 : x^2 :: c+x+y : c, \text{ ou } DG^2 : GH^2 :: CD : CH.$$

Enfin si les points C, K (*fig.* 61) se confondent au point O, où se coupent les tangentes, la proportion générale se réduira à DG:GH::DO:OH, porisme démontré par Robert Simpson, dans son traité *de Prismatibus*, à la proposition LXXIII. Ce géomètre indique en même temps que Pappus avait déjà donné le même porisme dans la proposition 154 du livre septième.