EDOUARD MERLIEUX

Démonstration du théorème 64, et recherche de lieux géométriques y relatifs

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 314-318

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__314_1>

DEMONSTRATION DU THÉORÈME 64 (p. 228),

et recherches de lieux géométriques y relatifs.

PAR M. MERLIEUX (ÉDOUARD).

---

1. *Étant donnés deux axes* OX, OY (*fig.* 55), *perpendiculaires entre eux, soient construits sur l'angle droit* YOX, *autant de rectangles que l'on voudra* OACB, OA'C'B', OA''C''B'',... *dont les côtés présentent la même différence de longueur; si, des sommets* C, C', C'',... *on abaisse des perpendiculaires sur les diagonales* AB, A'B', A''B'',... *opposées à l'angle commun* O, *et qu'on les prolonge suffisamment, elles iront toutes se couper au même point.*

En effet, soient les équations de AC et de BC :

$$y=m,\ x=n,$$

d'où celle de AB :

$$\frac{y}{m}+\frac{x}{n}=1.$$

De même soient représentées les droites A'C', B'C', A'B' par les équations :

$$y=m',\ x=n',\ \frac{y}{m'}+\frac{x}{n'}=1.$$

Les perpendiculaires à AB et à A'B', respectivement abaissées des points C et C' seront :

$$y-m=\frac{n}{m}(x-n),\qquad y-m'=\frac{n'}{m'}(x-n'),$$

ou bien

$my - nx = k(m+n)$, en posant $m - n = k$, quantité constante ;

et

$$m'y - n'x = k(m'+n'), \text{ car } m' - n' = m - n = k.$$

Résolvant ces deux équations :

$$y = \frac{n'k(m+n) - nk(m'+n')}{mn' - m'n} = k,$$

$$x = \frac{m'k(m+n) - mk(m'+n')}{mn' - m'n} = -k,$$

valeurs indépendantes de m et de n, donc, etc. C. Q F. D.

2. On voit, en éliminant k, que tous les points de concours se trouvent sur la bissectrice OO′ de l'angle YOx.

3. Le lieu du point C est parallèle à la bissectrice de l'angle YOX ; c'est la droite MN représentée par $y - x = k$.

4. Mais celui du pied D de la perpendiculaire abaissée de C sur AB est une courbe du troisième degré. Pour déterminer son équation, on a les trois relations :

$$my - nx = m^2 - n^2, \quad mx + ny = mn, \quad m - n = k,$$

entre lesquelles, éliminant m et n, il vient, toutes réductions faites :

$$[(k+x)x - (k-y)y]\,(y - x - 2k) = k\,(k-y)\,(k+x).$$

Cette équation se simplifie en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au point de concours des droites, c'est-à-dire en remplaçant $x+k$ par x, et $y-k$ par y ; on a alors, pour l'équation de la courbe rapportée aux axes O′X′, O′Y′ :

$$y^3 - y^2x + yx^2 - x^3 + k\,(y^2 - yx + x^2) = 0.$$

Quand $k=0$, il reste seulement $y^3 - y^2x + yx^2 - x^3 = 0$, ou bien $(y-x)\,(y^2+x^2) = 0$, ce qui représente O′Y″, bissectrice des axes, comme on le voit *à priori*. On peut donc, en laissant cette hypothèse de côté, prendre k pour unité.

La nouvelle équation,

$$y^3-y^2x+yx^2-x^3+y^2-yx+x^2=0,$$

prend une forme très-simple en passant aux coordonnées polaires. En conservant l'axe O'X', et prenant pour pôle l'origine O' des coordonnées rectangulaires, les formules de transformation sont :

$$x=\rho\cos\omega,\quad y=\rho\sin\omega,$$

p'où

$$\rho(\sin^3\omega-\sin^2\omega\cos\omega+\sin\omega\cos^2\omega-\cos^3\omega)+\sin^2\omega-\sin\omega\cos\omega+\cos^2\omega=0,$$

ou bien

$$\rho(\sin\omega-\cos\omega)+1-\sin\omega\cos\omega=0,$$

$$\rho=\frac{\sin\omega\cos\omega-1}{\sin\omega-\cos\omega}.$$

Quand $\omega=0$, $\rho=\frac{-1}{-1}=1$. On a ainsi le point P.

$$\omega=\frac{\pi}{4},\ \rho=\infty.$$

La droite O'Y'', qui fait avec l'axe O'X' un angle de 45°, est donc asymptote à la courbe. Pour connaître la marche du rayon vecteur dans le voisinage du point P, on compare le numérateur et le dénominateur de ρ.

Or, on a les trois formules :

$$\cos\omega=1-2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega,\ \cos\omega=\cos^2\tfrac{1}{2}\omega-\sin^2\tfrac{1}{2}\omega,$$
$$\sin\omega=2\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega,$$

d'où

$$\rho=\frac{1-\sin\omega\cos\omega}{\cos\omega-\sin\omega}=\frac{1-2\sin\frac{1}{2}\omega\cos\frac{1}{2}\omega\,(\cos^2\frac{1}{2}\omega-\sin^2\frac{1}{2}\omega)}{1-2\sin^2\frac{1}{2}\omega-2\sin\frac{1}{2}\omega\cos\frac{1}{2}\omega}$$
$$=\frac{1-2\sin\frac{1}{2}\omega(\cos\frac{1}{2}\omega+\sin\frac{1}{2}\omega)\,(\cos\frac{1}{2}\omega-\sin\frac{1}{2}\omega)\cos\frac{1}{2}\omega}{1-2\sin\frac{1}{2}\omega(\cos\frac{1}{2}\omega+\sin\frac{1}{2}\omega)}$$

Mais les facteurs $(\cos\frac{1}{2}\omega-\sin\frac{1}{2}\omega)$ et $\cos\frac{1}{2}\omega$ diminuent d'autant plus que ω augmente, puisqu'on prend ω entre les limites $\omega=0$, $\omega=\frac{\pi}{4}$. Dans ces limites, ils restent constamment positifs ; donc aussi, dans ces limites, ρ augmente constamment depuis $\rho=1$ jusqu'à $\rho=\infty$; ce qui détermine la branche PS.

De $\omega=\frac{\pi}{4}$ à $\omega=\frac{\pi}{2}$, on voit de même que ρ prendra des valeurs négatives décroissantes. $\omega=\frac{\pi}{2}$ donne $\rho=-1$, au point Q où la branche QS′ rencontre O′Y′.

Enfin, la variation de ω entre $\omega=\frac{\pi}{2}$ et $\omega=\pi$ achève la courbe par la partie PQ où le maximum du rayon vecteur se trouve en R sur la bissectrice O′X″, et aux $\frac{3}{4}$ de la diagonale OO′, car $\omega=\frac{3}{4}\pi$ donne $\rho=-\frac{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$, et il ne faut pas oublier que nous avons pris pour unité la distance O′P$=k$.

Le passage aux coordonnées polaires a d'ailleurs fait disparaître un point conjugué qui se trouve à l'origine des coordonnées rectangulaires O′X, O′Y′, car il est évident que l'équation est satisfaite par le système $x=0$, $y=0$.

Cette courbe est la seconde espèce d'*Euler* (*) et la quarante-quatrième de *Newton* (**), appartenant au groupe qu'il désigne par le nom d'hyperboles conchoïdales.

Pour reconnaître l'identité de son équation avec celle d'*Euler* :

$$x(y^2-2\eta xy+\nu^2x^2)+\alpha x^2+\gamma x+\delta=0,$$

(*) Euler. *Introductio in Analysin infinitorum*, lib. II, cap. IX. *De linearum tertii ordinis subdivisione in species*. Lausanne, 1748.

(**) Newton. *Enumeratio linearum tertii ordinis*. Londres, 1711.— *Opuscula mathematica*, etc. Lausanne et Genève, 1744.

il suffit de prendre pour coordonnées l'asymptote trouvée et sa perpendiculaire à l'origine que la construction de la courbe prouve être un diamètre, et de transporter cet axe $O'X''$ en $O''x''$ à la distance indéterminée a. Profitant de cette indétermination pour faire disparaître le terme en y^2, on pose $a=\frac{\sqrt{2}}{4}$ et l'équation se rapporte au type précédent, dans le cas particulier où $\mu=0$.

5. Enfin, il est facile de voir que l'enveloppe des diagonales AB, A'B', A''B''... est la parabole UTV, tangente aux côtés de l'angle YOx à des distances $y=1$, $x=1$; elle a pour axe la diagonale OO' de cet angle, et pour coordonnées du sommet T : $x=-\frac{1}{4}$, $y=+\frac{1}{4}$.

6. Cette remarque nous permet de considérer la courbe SPRQS' comme le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un même point O' sur les tangentes à la parabole. On voit donc que la courbe, lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les diagonales AB, A'B', A''B''... sera du même genre.

Nota. Cette ligne est donc du genre des *aplanétiques*. M. Vidal, du collége de Montpellier, nous a adressé depuis une démonstration du théorème de M. Breton, identique avec celle de M. Merlieux, sauf la discussion des lieux géométriques.

Toutes les lignes provenant des projections d'un point fixe sur des tangentes mobiles, sont des enveloppes de cercle et jouissent de propriétés communes que nous aurons bientôt occasion de développer. C'est ce qui explique l'existence des points isolés.

Tm.