Nouvelles annales de mathématiques

FAUDOT

Problème. Connaissant les rayons des cercles inscrit et circonscrit à un triangle et sa hauteur, trouver les côtés

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 311-312

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__311_1>

PROBLÈME.

Connaissant les rayons des cercles inscrit et circonscrit à un triangle et sa hauteur, trouver les côtés. (*Géométrie analytique de* Lefebure de Fourcy. 4[e] *édition, page* 140.)

PAR M. FAUDOT,
Ancien professeur de mathématiques dans les Colléges royaux,
docteur ès-sciences.

Soient

h la hauteur, R le rayon du cercle circonscrit, r celui du cercle inscrit, x, y, z les côtés demandés.

Je fais $x+y+z=2p$; la surface du triangle $=$S, on a

$$R=\frac{xyz}{4S}\ (1),\qquad r=\frac{2S}{x+y+z}\ (2),\qquad S=\frac{xh}{2}\ (3),$$

$$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}\qquad (4)$$

(1) et (3) donnent $2Rh=yz$, (2) et (3) $\dfrac{hx}{2r}=p$, (3) et (4)

$$\frac{hx}{2}=\sqrt{\frac{hx}{2r}\left(\frac{hx-2rx}{2r}\right)\left(\frac{hx-2ry}{2r}\right)\left(\frac{hx-2rz}{2r}\right)}$$

$$\frac{h^2x^2}{4}=\frac{hx}{2r}\left(\frac{hx-2rx}{2r}\right)\left(\frac{hx-2ry}{2r}\right)\left(\frac{hx-2rz}{2r}\right)$$

$$4r^4h=(h-2r)(hx-2ry)(hx-2rz),$$

$$4r^4h=h^3x^2-2rh^2xy-2rh^2x^2+4r^2hxy-2rh^2xz+$$
$$+4r^2hyz+4r^2hxz-8r^3yz,$$

$$4r^4=h^2x^2-2rhxy-2rhx^2-2rhxz+4r^2xy+4r^2yz+$$
$$+4r^2xz-8r^3\times 2R,$$

$$4r^4=h^2x^2-2rhx(x+y+z)+4r^2x(y+z)+8hr^2R-16Rr^3.$$

Mais on a

$$x+y+z=\frac{hx}{r},\qquad y+z=\frac{hx-rx}{r};$$

remplaçant, on a

$$4r^4=h^2x^2-2h^2x^2+4rhx^2-4r^2x^2+8hr^2\mathrm{R}-16\mathrm{R}r^3,$$

$$x^2(h^2-4rh+4r^2)=4r^2(-r^2+2\mathrm{R}h)-16\mathrm{R}r^3,$$

$$x^2(h-2r)^2=4r^2(2h\mathrm{R}-4\mathrm{R}r-r^2),$$

$$x=\pm\frac{2r\sqrt{2h\mathrm{R}-4\mathrm{R}r-r^2}}{h-2r}.$$