NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Théorème sur les coniques semblables, et démonstration du théorème 4 de la pag. 57, t. I

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 268-271

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__268_0>

THÉORÈME SUR LES CONIQUES SEMBLABLES,

et démonstràtion du théorème 4 de la pag. 57, t. I.

—

Soient deux coniques concentriques, semblables et semblablement situées dans un même plan; si, par un point quelconque pris sur une de ces coniques, on mène trois droites respectivement conjuguées aux côtés d'un triangle inscrit dans la seconde conique; les points où les droites rencontrent, chacune, le côté correspondant, sont les sommets d'un triangle dont l'aire est constante.

Démonstration. Considérons la proposition inverse.

Soit ABC, un triangle inscrit dans une conique; prenons AB pour axe des x et AC pour axe des y; l'équation de la conique est donc de la forme :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = 0; \qquad (1)$$

Aucune des quantités A, C, D, E n'est nulle.

Soit MNP un triangle inscrit dans le triangle ABC; M est sur le côté AC; N sur le côté AB; et P sur le côté BC.

Coordonnées du point M; $x = 0$; $y = y'$;
Id. N; $x = x''$; $y = 0$;
Id. P; $x = x'''$; $y = y'''$.

Si on désigne par T une quantité constante donnée, on exprime que l'aire du triangle MNP est invariable, en écrivant la relation connue :

$$y'x'' + x''y''' - x''y' + T = 0. \qquad (2)$$

Les équations des droites respectivement conjuguées aux côtés AC, AB, BC et passant par les points M, N, P, sont :

$$2Ay + Bx = 2Ay' \qquad (3)$$

$$By + 2Cx = 2Cx'' \qquad (4)$$

$$Ak'y - Ckx = Ak'y''' - Ckx'''. \qquad (5)$$

(Voir l'équation 5 du t. I, p. 495).

Le point P étant sur la droite BC, on a de plus l'équation

$$AEy''' + CDx''' + DE = 0. \qquad (6)$$

Eliminant y', x'', x''', y'' entre les cinq équations (2), (3), (4), (5), (6), on obtient $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + \frac{4ACLT}{DEm} = 0$ (7), calcul facile, au moyen des *identités* (p. 489, t. I).

Cette équation est celle du lieu géométrique du point de rencontre des trois droites conjuguées, et c'est l'équation d'une conique semblable à la conique donnée par l'équation (1), semblablement située et concentrique; de l'inverse on passe facilement à la proposition directe.

Corollaire 1. Si la seconde conique est la même que la première, on a $T = 0$; alors les trois points M, N, P sont sur une même droite. Ce qui démontre le théorème 4 de la p. 57 (vol. I).

Observation. Dans la parabole on a constamment $m = 0$ et $T = 0$; la proposition est d'une évidence intuitive.

Corollaire 2. On a

$$y' = \frac{2Ay + Bx}{2A}; \quad x'' = \frac{By + 2Cx}{2C}; \quad x''' = \frac{E}{2CL}(Ckx - Ak'y - Dk')$$

$$y''' = \frac{E}{2AL}(Ak'y - Ckx - Ek)$$

Donc lorsqu'on a une relation quelconque entre les quatre quantités y', x'', x''', y''', le lieu géométrique du point d'intersection des trois droites conjuguées est toujours donné par une équation de même degré que la relation, en considérant les quatre quantités comme autant de variables.

Corollaire 3. Transportant l'origine au centre, les équations de la conique donnée et de la conique semblable deviennent :

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+\frac{L}{m}=0 \quad \text{(page 492, t. I)}$$

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+\frac{t^2L}{m}=0,$$

où t désigne le rapport linéaire de similitude.

On a aussi $\frac{t^2L}{m}=\frac{L'}{m}$; L' étant ce que devient L dans la seconde conique; mais $L'=L+m.\ \frac{4ACLT}{DEm}$, donc

$$T=(t^2-1)\frac{DE}{4AC}=(t^2-1)\frac{S}{2\sin\gamma}$$

où S est l'aire du triangle ABC et γ l'angle CAB.

Corollaire 4. Si le centre d'une ellipse est le centre de gravité du triangle inscrit ABC, le théorème de M. Steiner est applicable (théorème 2, p. 57, t. I); c'est ce qu'on voit de suite par la méthode projective; il est facile aussi d'établir directement cette propriété; en effet, les coordonnées du centre de gravité du triangle sont : $\frac{-E}{3C}$ et $\frac{-D}{3A}$; on doit donc avoir $\frac{-E}{3C}=\frac{k}{m}$; $\frac{-D}{3A}=\frac{k'}{m}$; ayant égard à cette relation, l'équation de la courbe prend cette forme :

$$B\,(D^2y^2+DExy+E^2x^2)+DE\,(Dy+Ex)=0; \quad (1)$$

on a ensuite

$$\frac{k}{m}=\frac{-D}{3B};\ \frac{k'}{m}=\frac{-E}{3B};\ y'=\frac{2Dy+EX}{2D};\ x'=\frac{2EX+EY}{2E};$$

X et Y désignant les coordonnées courantes de la conique, la droite qui passant par les points M, N, P, a pour équation :

$$y\,[3BX+D]-x\,[3BY+E]=DY-EX,$$

le diamètre qui passe par le point (X, Y) a pour équation :

$$2D[2EX+DY]y+2E[2DY+EX]x=[2EX+DY][2DY+EX];$$

éliminant x et faisant attention à l'équation (1), il vient

$$y=\frac{Y}{2}-\frac{E}{6B};\ x=\frac{X}{2}-\frac{D}{6B}$$

coordonnées du milieu du demi-diamètre qui aboutit au point (X, Y).

Observation. Dans l'hyperbole, il est impossible que le centre soit le centre de gravité d'un triangle inscrit.

Nota. MM. Querret et Sturm ont démontré le théorème, pour la circonférence seulement (Annales de Gergonne, t. 14, p. 280 et 390, 1823). Le théorème est, je crois, de Lhuillier. La méthode projective peut servir à reconnaître cette propriété dans l'ellipse, mais non dans l'hyperbole. M. Vidal, élève du collége de Montpellier, nous a adressé une démonstration du théorème 4 (p. 57) au moyen de la méthode projective dans l'ellipse; ensuite il démontre directement ce théorème pour l'hyperbole équilatère; et de là, encore par la méthode projective, dans une hyperbole quelconque.

Tm.