NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRETON

Démonstration d'un théorème sur les développées de l'ellipse et de l'hyperbole

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 223-229

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__223_1>

DÉMONSTRATION

D'UN THÉORÈME SUR LES DÉVELOPPÉES DE L'ELLIPSE ET DE L'HYPERBOLE.

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussees

Soit une ligne droite mobile dans le plan d'un angle donne, de manière que la somme ou la difference des carrés des por-

---

(*) Cette demonstration diffère peu de celle que *Delambre* a donnée dans ses leçons d'astronomie, elle a ete, toutefois, débarrassee de quelques considerations étrangères qui nuisaient a sa simplicité *tions qu'elle intercepte sur les côtés demeure constante: les coordonnées, rapportées aux mêmes côtés, du lieu géométrique de ses intersections successives, étant multipliées respectivement par deux nombres déterminés, reproduisent celles d'une développée quelconque d'ellipse ou d'hyperbole.*

Appelons ξ, η, les distances du sommet de l'angle aux points de rencontre de ses côtés avec la droite mobile, on aura, d'après l'énoncé même de la proposition,

$$\xi^2 \pm \eta^2 = \gamma^2, \qquad (1)$$

γ étant une longueur constante.

Prenons le sommet pour origine, l'équation de la génératrice sera, en désignant par x', y', ses coordonnées courantes,

$$\frac{x'}{\xi} + \frac{y'}{\eta} = 1. \qquad (2)$$

D'une position à l'autre de cette ligne, les paramètres ξ, η, changent à la fois et deviennent respectivement ξ', η'; et l'on a une nouvelle équation

$$\frac{x'}{\xi'} + \frac{y'}{\eta'} = 1, \qquad (3)$$

qui, combinée avec la précédente, donne les valeurs des coordonnées x', y', appartenant au point d'intersection des deux génératrices. L'on trouve facilement

$$x' = \frac{(\eta' - \eta)\xi\xi'}{\eta'\xi - \eta\xi'}, \quad y' = \frac{(\xi - \xi')\eta\eta'}{\eta'\xi - \eta\xi'}. \qquad (4)$$

Si l'on suppose que les différences $\xi - \xi'$, $\eta - \eta'$ s'évanouissent à la fois, les valeurs ci-dessus se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Cette indétermination tient à ce que les expressions dont il s'agit ont été établies indépendamment de toute relation particulière entre ξ et η. Il suffit pour la faire disparaître, d'avoir égard à l'équation (1), d'où l'on tire d'abord immédiatement, par sa comparaison avec $\xi'^2 + \eta'^2 = \gamma_1^2$,

$$\xi^2 \pm \eta^2 = \xi'^2 \pm \eta'^2,$$

puis, par une simple transposition de termes,

$$\xi^2 - \xi'^2 = \mp (\eta^2 - \eta'^2),$$

et, par la décomposition de chaque membre en facteurs,

$$(\xi - \xi')(\xi + \xi') = \mp (\eta - \eta')(\eta + \eta')$$

Au moyen de cette dernière égalité, après avoir mis le dénominateur commun de x', y' sous la forme

$$\xi(\eta' - \eta) - \eta(\xi' - \xi),$$

on obtient sans peine

$$x' = \frac{(\xi + \xi')\xi\xi'}{\xi(\xi + \xi') \pm \eta(\eta + \eta')}, \quad y' = \frac{(\eta + \eta')\eta\eta'}{\xi(\xi + \xi') \pm \eta(\eta + \eta')},$$

expressions dans lesquelles les signes supérieurs et inférieurs se correspondent.

Posant enfin $\xi - \xi' = 0$ $\eta - \eta' = 0$, il vient

$$x = \frac{\xi^3}{\xi^2 \pm \eta^2} = \frac{\xi^3}{\gamma^2}, \quad y = \frac{\eta^3}{\xi^2 \pm \eta^2} = \frac{\eta^3}{\gamma^2}. \qquad (5)$$

Les variables x, y, sont ici fonctions des variables ξ, η, dont l'élimination donne sur-le-champ

$$x^{\frac{2}{3}} \pm y^{\frac{2}{3}} = \gamma^{\frac{2}{3}}. \qquad (6)$$

Soient maintenant m, n, deux nombres inconnus : faisons dans cette dernière équation,

$$\alpha = mx, \quad \beta = ny, \qquad (7)$$

elle deviendra

$$\left(\frac{\alpha}{m}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{\beta}{n}\right)^{\frac{2}{3}} = \gamma^{\frac{2}{3}}. \qquad (8)$$

D'un autre côté, l'on sait que l'équation

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} \pm (b6)^{\frac{2}{3}} = (c^2)^{\frac{2}{3}}, \qquad (9)$$

dans laquelle a et b représentent les demi-axes d'une ellipse ou d'une hyperbole (a étant $>$ b dans le premier cas) et c la distance du centre au foyer, est, en coordonnées rectangulaires, l'équation de la développée (Voir le bel article de M. *Gerono*, sur les normales aux lignes du 2^e ordre, pages 16, 72, 170). Il sera toujours possible de rendre identiques les équations (8) et (9), moyennant une détermination convenable des nombres m, n; car il suffit de poser, pour obtenir ce résultat,

$$\frac{1}{m\gamma} = \frac{a}{c^2}, \qquad \frac{1}{n\gamma} = \frac{b}{c^2} \qquad (10)$$

ou, ce qui est la même chose,

$$m = \frac{c^2}{a\gamma}, \qquad n = \frac{c^2}{b\gamma}. \qquad (11)$$

Or, d'après ce qui précède, les coordonnées α, 6, ne sont autre chose que les coordonnées x, y, multipliées respectivement par les nombres m, n, toujours réels et positifs, donc, etc. C. Q. F. D.

Corollaire. — Le théorème précédent, qui rattache à un principe unique la génération des développées, fait voir que toutes ces courbes peuvent se déduire de deux d'entre elles une fois construites; de la même manière que l'on déduirait toutes les ellipses et toutes les hyperboles d'une ellipse et d'une hyperbole données. Si même la construction de ces lignes venait à acquérir une importance pratique, rien n'empêcherait de former des tables des coordonnées des deux courbes représentées par la double équation

$$x^{\frac{2}{3}} \pm y^{\frac{2}{3}} = 1,$$

qui serviraient à calculer, par voie de multiplication, celles de toutes les développées.

Mais il y a plus, de telles tables existent, ce sont celles des sinus, cosinus et tangentes. Nommons en effet ψ un angle auxiliaire, l'on s'assurera que les expressions

$$x = \gamma \cos^3\psi, \quad y = \gamma \sin^3\psi,$$

ou

$$x = \gamma\, \text{séc}^3\psi, \quad y = \gamma\, \text{tang}^3\psi,$$

satisfont, à l'équation (6); les deux premières lorsque l'on prend le signe $+$, les deux autres dans le cas contraire. D'où il résulte que les valeurs

$$\alpha = \frac{c^2}{a}\cos^3\psi, \quad 6 = \frac{c^2}{b}\sin^3\psi,$$

$$\alpha = \frac{c^2}{a}\text{séc}^3\psi, \quad 6 = \frac{c^2}{b}\text{tang}^3\psi$$

satisfont aux équations des développées de l'ellipse et de l'hyberbole. L'application des tables de logarithmes aux formules ci-dessus, et leurs constructions graphiques sont trop simples pour insister sur ce sujet; nous nous bornerons à faire remarquer que, dans le cas où les axes des coordonnées sont rectangulaire, l'angle ψ n'est autre chose que l'angle aigu formé par la génératrice avec l'axe des x. Cette simple indication suffit pour montrer comment on a été conduit à faire usage de la variable auxiliaire ψ, car on peut construire les mêmes formules sur les données géométriques de ce cas particulier, et vérifier ensuite leur indépendance en ce qui concerne l'inclinaison des axes l'un sur l'autre.

Scolie. — Les courbes représentées par l'équation (6) pourraient être nommées, lorsque les axes forment un angle droit, les *développées équilatères* de l'ellipse et de l'hyperbole, bien qu'il soit impossible qu'une courbe de cette espèce puisse coïncider avec une développée d'ellipse, les facteurs m, n.

étant *essentiellement inégaux*. L'hyberbole n'est point sujette à la même restriction ; la *développée équilatère* de cette courbe est au contraire toujours *la développée d'une hyperbole équilatère*. L'on peut en dire toutefois autant de l'ellipse, en regardant la développée équilatère de cette courbe comme la développée d'une circonférence de cercle ou *ellipse équilatère* dont le rayon serait infiniment grand.

L'on sait que tout point pris sur la droite mobile avec la condition que ses distances aux extrémités demeurent dans un rapport constant, décrit une ellipse lorsque la somme $\xi^2 + \eta^2$ reste invariable. Lorsque c'est la différence $\xi^2 - \eta^2$ qui ne change pas, le point dont il s'agit décrit une hyberbole, et, dans le cas d'axes rectangulaires, si le rapport des distances devient égal à l'unité, l'hyperbole, qui est alors équilatère, a précisément pour normale la droite mobile et par conséquent pour développée le lieu de ses intersections successives.

Cette circonstance remarquable, qui semble au premier abord n'avoir pas d'analogue dans la génération de l'ellipse, s'y retrouve. Cependant si l'on fait attention qu'il existe, en général, sur la génératrice, deux points tels que leurs distances à ses extrémités (désignées par les axes sur lesquels elles se trouvent), soient dans un rapport donné. Lorsque ce dernier devient égal à l'unité, l'un des points dont il s'agit est à l'infini, et décrit une courbe circulaire à laquelle la génératrice peut être regardée comme normale.

P. Breton.

Théorème à démontrer. — Étant donnés deux axes OY, OX, perpendiculaires entre eux, soient construits sur l'angle droit Y OX, autant de rectangles que l'on voudra OACB, OA′C′B′, OA″B″C″...., dont les côtés présentent la même différence de longueur ; si des sommets C, C′, C″.... on abaisse des perpendiculaires sur les diagonales AB, A'B', A''B''...., opposées à l'angle commun O, et qu'on les prolonge suffisamment, elles iront toutes se couper en un même point.

P. B.