Nouvelles annales de mathématiques

Lionnet

Note sur une limite de l'erreur que l'on commet en remplaçant un arc par son sinus

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 216-222

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__216_1>

NOTE

Sur une limite de l'erreur que l'on commet en remplaçant un arc par son sinus;

PAR M. LIONNET,
Professeur au Collége royal de Louis-le-Grand.

En partant de la formule $\sin a = 3 \sin \frac{a}{3} - 4 \overline{\sin}^3 \frac{a}{3}$, M. VINCENT a obtenu la relation $a - \sin a < \frac{a^3}{2.3}$. Je me propose de montrer dans cette note, 1° que cette formule n'est pas la seule qui puisse conduire au même résultat; 2° que $\frac{a^3}{2.3}$ est la plus petite fraction du cube d'un arc, par laquelle on puisse exprimer une limite de l'erreur que l'on commet en remplaçant l'arc par son sinus.

1. Si dans la formule

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

on remplace

$$\cos \frac{a}{2} \text{ par } 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{4},$$

on aura :

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} - 4 \sin \frac{a}{2} \sin^2 \frac{a}{4}.$$

Or, on a

$$\sin \frac{a}{2} < \frac{a}{2}, \ \sin \frac{a}{4} < \frac{a}{4}, \ \sin^2 \frac{a}{4} < \frac{a^2}{16}$$

et, par suite,

$$4 \sin \frac{a}{2} \sin^2 \frac{a}{4} < \frac{a^3}{8};$$

donc

$$(1) \qquad \sin a > 2 \sin \frac{a}{2} - \frac{a^3}{8}.$$

Remplaçant a par $\frac{a}{2}$ dans cette inégalité, dans celle qui en résulte, et ainsi de suite, on a successivement :

$$(2) \qquad \sin \frac{a}{2} > 2 \sin \frac{a}{2^2} - \frac{a^3}{8} \times \frac{1}{2^3}$$

$$(3) \qquad \sin \frac{a}{2^2} > 2 \sin \frac{a}{2^3} - \frac{a^3}{8} \times \frac{1}{2^6}$$

. . . .

. . . .

et, en général,

$$(n) \ \ldots\ldots \sin \frac{a}{2^{n-1}} > 2 \sin \frac{a}{2^n} - \frac{a^3}{8} \times \frac{1}{2^{3(n-1)}}$$

Multipliant les inégalités (2) (3)... (n) respectivement par $2, 2^2, 2^3 \ldots 2^{n-1}$, faisant la somme des inégalités résultantes et de l'inégalité (1), puis supprimant les termes communs aux deux membres, il vient :

$$\sin a > 2^n \sin\frac{a}{2^n} - \frac{a^3}{8}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\sin a}{a} > \frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} - \frac{a^2}{8}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}\right).$$

Cela étant, si l'on suppose que le nombre entier n croisse indéfiniment, le rapport $\dfrac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}$ et la somme

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}\ldots\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}$$

auront pour limites l'unité et la fraction $\frac{4}{3}$; ce qui réduit l'inégalité précédente à

$$\frac{\sin a}{a} > 1 - \frac{a^2}{2.3},$$

d'où l'on tire

$$\sin a > a - \frac{a^3}{2.3}$$

et

$$a - \sin a < \frac{a^3}{2.3}.$$

Donc *l'erreur que l'on commet, en remplaçant un arc positif quelconque par son sinus, est moindre que le sixième du cube de l'arc.*

Remarque. Si, dans la formule

$$\sin a = 5\sin\frac{a}{5} - 20\,\overline{\sin}^3\frac{a}{5} + 16\,\overline{\sin}^5\frac{a}{5}, \quad (*)$$

(*) Dans cette relation et dans les suivantes, on supposera que le rapport a de l'arc au rayon est moindre que l'unité.

on néglige le dernier terme, qui est positif, et qu'on remplace $\sin \frac{a}{5}$ par $\frac{a}{5}$ dans le second terme, qui est négatif, on aura

$$\sin a > 5 \sin \frac{a}{5} - \frac{4a^3}{25}.$$

Remplaçant a par $\frac{a}{5}$ dans cette inégalité, dans celle qui en résulte, et ainsi de suite, on obtiendra, par des calculs analogues à ceux qui ont conduit à la limite $\frac{a^3}{2.3}$, l'inégalité

$$\sin a > 5^n \times \sin \frac{a}{5^n} - \frac{4a^3}{25}\left(1 + \frac{1}{25} + \frac{1}{25^2} + \ldots\ldots\right),$$

et, par suite, $\sin a > a - \frac{4a^3}{25} \times \frac{25}{24},$

ou $\sin a > a - \frac{a^3}{2.3};$

comme précédemment.

En général, on peut obtenir cette relation, en partant de toute autre formule qui donne la valeur du sinus d'un arc en fonction des sinus d'arcs sous-multiples du premier. Pour cela, on néglige tous les termes à partir du troisième, qui est positif, et l'on remplace dans le second terme, qui est négatif, chaque sinus par l'arc correspondant. On est ainsi conduit à une première inégalité de la forme

$$\sin a > m \sin \frac{a}{m} - \frac{m^2 - 1}{6m^2} a^3.$$

Puis on achève le calcul, comme précédemment.

2. Reprenons la formule

$$(1) \qquad \sin a = 2 \sin \frac{a}{2} - 4 \sin \frac{a}{2} \sin^2 \frac{a}{4}.$$

La relation $\sin a > a - \frac{a^3}{2.3}$ donne

$$\sin\frac{a}{2} > \frac{a}{2} - \frac{a^3}{2^4.3},\ \sin\frac{a}{4} > \frac{a}{4} - \frac{a^3}{2^7 \times 3},$$

et, par suite, $\qquad \overline{\sin}^2.\left(\frac{a}{4}\right) > \frac{a^2}{2^4} - \frac{a^4}{2^8 \times 3},$

en négligeant le dernier terme, qui est positif.

On en déduit

$$\sin\frac{a}{2}\ \overline{\sin}^2\left(\frac{a}{4}\right) > \frac{a^3}{32} - \frac{a^5}{2^9},$$

en négligeant encore le dernier terme, qui est positif. Substituant le second membre de cette inégalité à la place du premier dans la formule (1), il vient

$$\sin a < 2\sin\frac{a}{2} - \frac{a^3}{8} + \frac{a^5}{2^7}.$$

Remplaçant a par $\frac{a}{2}$, et opérant comme pour trouver la relation $\sin a > a - \frac{a^3}{2.3}$, on est conduit à

$$\sin a < 2^n \times \frac{a}{2^n} - \frac{a^3}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.}\right) +$$
$$+ \frac{a^5}{2^7}\left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2} + \text{etc.}\right),$$

et, par suite, à

$$\sin a < a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5}.$$

Cela étant, supposons que l'erreur commise, lorsqu'on remplace un arc par son sinus, soit moindre que $\frac{a^3}{2.3} - \frac{a^3}{m}$, m étant un nombre donné aussi grand qu'on voudra. On aurait

$$a - \sin a < \frac{a^3}{2.3} - \frac{a^3}{m};$$

on a d'ailleurs, par ce qui précède,

$$a - \sin a > \frac{a^3}{2.3} - \frac{a^5}{2.3.4.5},$$

d'où il résulterait

$$\frac{a^5}{2.3.4.5} > \frac{a^3}{m} \quad \text{ou} \quad a^2 > \frac{2.3.4\ 5}{m};$$

ce qui est impossible, puisque l'arc a peut être supposé aussi petit qu'on voudra. Donc $\frac{a^3}{2.3}$ *est la plus petite fraction du cube d'un arc par laquelle on puisse exprimer une ltmite de l'erreur que l'on commet en remplaçant l'arc par son sinus.*

Remarque 1. Si, dans l'inégalité

$$\sin a < a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5},$$

on change successivement a en $\frac{a}{2}$, a en $\frac{a}{4}$, et qu'on remplace dans la formule (1) $\sin\frac{a}{2}$ et $\sin\frac{a}{4}$ par leurs limites ainsi obtenues, on trouvera, par des calculs analogues à ceux qu'on a faits précédemment,

$$\sin a > a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4\ 5.6.7}.$$

On voit qu'on peut obtenir, par cette méthode d'approximations successives, autant de termes qu'on voudra de la série

$$\sin a = a - \frac{a^3}{2\ 3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7} \cdots$$
$$\pm \frac{a^{2n+1}}{2.3\ldots(2n+1)} \mp \frac{a^{2n+3}}{2.3\ldots(2n+3)}.$$

Remarque 2. Si, dans la formule

$$\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2},$$

on remplace $\sin\frac{a}{2}$ successivement par chacun des seconds membres des inégalités

$$\sin\frac{a}{2} < \frac{a}{2}, \quad \sin\frac{a}{2} > \frac{a}{2} - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3}{2.3},$$

$$\sin\frac{a}{2} < \frac{a}{2} - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3}{2.3} + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^5}{2.3.4.5}, \text{ etc.},$$

on obtiendra les relations

$$\cos a > 1 - \frac{a^2}{2}, \quad \cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4},$$

$$\cos a > 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6}, \text{ etc.};$$

ce qui montre qu'on peut trouver ainsi autant de termes qu'on voudra de la série

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} \cdots\cdots \pm \frac{a^{2n}}{2.3.4\ldots 2n} \mp \frac{a^{2n+2}}{2.3.4\ldots(2n+2)}.$$