L. Anne

Note sur la résolution de deux équations du second degré à deux inconnues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 195-205

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__195_1>

NOTE

Sur la résolution de deux équations du second degré à deux inconnues ;

PAR M. L. ANNE,

Ancien élève de l'Ecole polytechnique, répétiteur de mathematiques au College royal Louis-le-Grand.

Des applications de cette théorie ont plusieurs fois été proposées au concours général des colléges pour les classes de mathématiques élémentaires et spéciales ; elles conduisent à des observations qui peuvent être utiles aux élèves : c'est uniquement sous ce point de vue que j'ai cru devoir donner plus d'extension à la question déjà traitée dans ce Journal, page 34, t. I.

Voici quelques-unes des équations dont la solution a été proposée au concours :

1° $xy+a(x+y)=p, \quad x^2+y^2+2b(x+y)=q.$

L'addition de ces deux équations, donne :

$$(x+y)^2+(2b+a)(x+y)-(q+2p)=0.$$

En prenant pour inconnues $x+y$, et xy, on obtient facilement les valeurs de x, y.

2° $60.y^2+122.xy+62.x^2-216.y-219.x+189=0.$

$$12.y^2+10.xy+2.x^2-48.y-23.x+21=0.$$

La première donne : $y=\dfrac{61.x-108}{60}\pm\dfrac{x-18}{60}$

Et la seconde : $y=\dfrac{24-5.x}{12}\pm\dfrac{x+18}{12}.$

On reconnaît ainsi que les équations sont décomposables en facteurs rationnels du premier degré; leur résolution se ramène à celle d'équations du premier degré.

3° $$y^2-xy-2x^2+y+4x-4=0.$$
$$y^2+xy-6x^2+3y+12.x-2=0.$$

Leur somme est $y^2+2y-4x^2+8x-3=0$

D'où $y=-1\pm2(x-1).$

Leur différence est $y(x+1)-2.x^2+4x+1=0$, etc, etc.

4° $$y^2-10xy+5y+16x^2+4=0$$
$$3y^2-24.xy-8y+45x^2+30x+5=0.$$

La première donne : $y=\dfrac{5(2x-1)}{2}\pm\dfrac{3(2x-1)}{2}$

Et la seconde : $y=\dfrac{4(3x+1)}{3}\pm\dfrac{(3x-1)}{3},$

Ce qui montre que les équations proposées sont décomposables en facteurs rationnels du premier degré.

5° $$2y^2-5xy+5y+2x^2-x-3=0$$
$$3y^2+10xy-5y+3x^2-7x+2=0.$$

On en déduit : $y = \frac{5(x-1)}{4} \pm \frac{3x-y}{4}$

$$y = \frac{5(-2x+1)}{6} \pm \frac{8x-1}{6}.$$

Considérons les équations générales

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$
$$A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0$$

dont on demande les solutions.

La marche la plus naturelle à suivre est de s'assurer si l'une d'elles, ou toutes deux peuvent se décomposer en facteurs rationnels du premier degré, et pour cela, il suffit de résoudre chacune des équations proposées par rapport à l'une des inconnues.

La première donne

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)}$$

Si le trinôme soumis au radical est un carré, les deux valeurs de y s'expriment en fonction rationnelle de x, de la forme :

$$y' = mx + n, \quad y'' = px + q.$$

La première des équations proposées, peut s'écrire :

$$(y - mx - n)(y - px - q) = 0.$$

Si la seconde peut subir la même décomposition, elle donnera :

$$(y - m'x - n')(y - p'x - q') = 0.$$

Et les solutions demandées s'obtiendront en résolvant chacun des quatre systèmes.

$$1 \quad \begin{cases} y - mx - n = 0 \\ y - m'x - n' = 0 \end{cases} \qquad 2 \quad \begin{cases} y - mx - n = 0 \\ y - p'x - q' = 0 \end{cases}$$

$$3 \quad \begin{cases} y - px - q = 0 \\ y - m'x - n' = 0 \end{cases} \qquad 4 \quad \begin{cases} y - px - q = 0 \\ y - p'x - q' = 0. \end{cases}$$

Remarque. Si, au lieu de résoudre la première équation par rapport à y, on l'avait résolue par rapport à x, il en serait résulté :

$$x = -\frac{By+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{(B^2-4AC)y^2+2(BE-2CD)y+(E^2-4CF)}$$

La condition qui doit être remplie pour que le trinôme, lacé sous le radical, soit un carré, est la même que si l'on avait résolu l'équation par rapport à y. C'est ce qu'il est facile d'établir par un calcul direct. En effet, pour que le trinôme, soumis au radical de l'équation résolue par rapport à y, soit un carré, il faut que $(BD-2AE)^2=(B^2-4AC)(D^2-4AF)$. Effectuant le calcul indiqué, supprimant B^2D^2 dans les deux membres, multipliant ensuite par $\frac{C}{A}$, et ajoutant à chaque membre $B^2E^2+4C^2D^2-4ACE^2$, il vient : $(BE-2CD)^2=(B^2-4AC)(E^2-4CF)$; égalité qui exprime précisément la condition nécessaire et suffisante pour que le trinôme $(B^2-4AC)\,y^2+2\,(BE-2CD\,y)+(E^2-4CF)$ soit un carré.

Analytiquement ce résultat est évident, puisque les égalités dont il s'agit sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation générale du second degré représente le système de deux lignes droites.

Si une des équations proposées, par exemple, la première est seule décomposable en facteurs rationnels du premier degré ; les solutions du système proposé seront données par celles des deux systèmes :

$$(1)\left\{y-mx-n=0,\ A'y^2+B'xy+C'x^2+D'y+E'x+F'=0.\right.$$

$$(2)\left\{y-px-q=0,\ A'y^2+B'xy+C'x^2+D'y+E'x+F'=0.\right.$$

Si aucune des équations proposées n'est décomposable en facteurs du premier degré, on élimine une inconnue par une des méthodes connues, soit par comparaison, soit par réduction. *

Par comparaison. On résout chacune des équations par rapport à la même inconnue, et on égale les valeurs trouvées, puisqu'elles doivent être communes :

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$
$$(2) \qquad A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0.$$

On déduit des valeurs de y de la forme

$$(3) \qquad y = M \pm \sqrt{N} \text{ pour l'équation (1)}$$
$$(4) \qquad y = M' \pm \sqrt{N'} \text{ pour l'équation (2)}$$

M et M' sont du premier degré en x, et N et N' sont du second degré : égalant et opérant :

$$(5) \qquad M \pm \sqrt{N} = M' \pm \sqrt{N'}$$
$$(6) \qquad (M - M')^2 - (N + N') = \pm 2\sqrt{N.N'}$$
$$(7) \qquad [(M - M')^2 - (N + N')]^2 = 4\, N.N'$$

Cette équation, si elle ne s'abaisse pas à un degré inférieur, est évidemment du quatrième degré.

A une valeur de x correspondent deux valeurs de y dans chacune des équations proposées, d'où résultent seize systèmes de valeurs, parmi lesquels quatre seulement sont communs aux deux équations proposées.

En effet, soit $x = \alpha_1$ une des racines de l'équation (7); α_1 substitué à x dans l'équation (7) rend le premier membre identiquement égal au second; cette valeur α_1 substituée à x dans l'équation (6) ne rend le premier membre identiquement égal au second, qu'autant qu'on affecte le second membre du signe du résultat donné par le premier, par exemple, le signe $+$; de là une première restriction. Le produit des radicaux étant positif dans l'équation (6), ils sont de signes contraires dans l'équation (5) ; donc α est solution de l'une des équations

$$M+\sqrt{N}=M'-\sqrt{N'}$$
$$M-\sqrt{N}=M'+\sqrt{N'}$$

et d'une seule, puisque chacune d'elles est incompatible avec l'autre. En effet, par une valeur numérique attribuée à x, M, M', N, N' déviennent des nombres et donnent par exemple

$$M+\sqrt{N}=M'-\sqrt{N'}$$

d'où

$$M-\sqrt{N}<M+\sqrt{N}<M'-\sqrt{N'} \text{ et à fortiori}$$
$$M-\sqrt{N}<M'+\sqrt{N'}$$

Ces restrictions proviennent de ce que chacune des quatre équations

$$M+\sqrt{N}=M'+\sqrt{N'} \qquad M-\sqrt{N}=M'+\sqrt{N'}$$
$$M+\sqrt{N}=M'-\sqrt{N'} \qquad M-\sqrt{N}=M'-\sqrt{N'}$$

dans lesquelles doit se décomposer l'égalité

$$M\pm\sqrt{N}=M'\pm\sqrt{N'}$$

donne la même équation finale.

Analytiquement ce résultat s'explique facilement ; deux sections coniques ne peuvent se couper en plus de quatre points et l'équation finale que l'on vient de trouver est l'équation dont les racines sont les abscisses des points communs aux deux courbes; mais à chaque abscisse correspondent généralement sur la courbe deux points, et alors les quatre abscisses

$$x=\alpha_1 \quad x=\alpha_2 \quad x=\alpha_3 \quad x=\alpha_4$$

donnent donc seize points dont quatre seulement sont communs aux deux courbes, c'est-à-dire ont la même ordonnée et la même abscisse.

Par réduction. Reprenons les équations générales :

$$(1)\quad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$
$$(2)\quad A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0$$

je représente par $M = 0$ et $M' = 0$ ces deux équations ; entre M et M' j'élimine un des carrés, par exemple celui de y ; pour cela, je multiplie M par A' ; M' par A et je les retranche l'une de l'autre, soit le résultat

$$MA' - AM' = 0 = y\,(ax + b) - (cx^2 + dx + f) = 0$$

alors appliquant aux équations $M = 0$, $M' = 0$ les raisonnements connus, on voit que l'on peut remplacer $M = 0$, $M' = 0$ par $M = 0$, $MA' - AM' = 0$.

L'équation $MA' = AM'$ du premier degré par rapport à y, donnera $y = \dfrac{cx^2 + dx + f}{ax + b}$.... (3). Si cette fraction est irréductible on la substitue dans $M = 0$, et il en résultera une équation $M'' = 0$, qui sera généralement du quatrième degré en x. Chacune des racines de $M'' = 0$, substituée dans (3), donnera la valeur correspondante de y. On aura ainsi les quatre systèmes de valeurs sans ambiguïté.

Si $cx^2 + dx + f$ est exactement divisible par $ax + b$, il en résultera

$$y = \frac{cx^2 + ax + f}{ax + b} = px + q.$$

En substituant $px + q$ à y dans $M = 0$, on aura une équation du second degré qui ne donne plus que deux systèmes de solutions ; cette réduction de la valeur de y, réduction que les règles du calcul prescrivent, semble donc avoir fait perdre deux solutions ; mais il n'en est rien. L'équation (3) peut s'écrire $y\,(ax + b) = cx^2 + dx + f = (ax + b)\,(px + q)$;

d'où $(y-px-q)(ax+b)=0$. Donc, les solutions seront données par les systèmes

$$\{y-px-q=0,\ M=0.\},\qquad \{ax+b=0,\ M=0.\}.$$

Et ces solutions seront encore au nombre de quatre.

Si l'on n'avait pas fait cette réduction de la valeur de y, le calcul l'aurait indiquée. Car, en substituant la valeur fractionnaire de y dans $M=0$, on obtient, lorsque $cx^2+dx+f=(ax+b)(px+q)$:

$$(ax+b)^2[A(px+q)^2+(Bx+D)(px+q)+Cx^2+Ex+F]=0,$$

équation dont deux des racines sont égales à $-\frac{b}{a}$.

Cette valeur $-\frac{b}{a}$ de x, substituée dans y, donne $\frac{0}{0}$, ce qui avertit de la présence du facteur commun.

Analytiquement, cela tient à ce que les deux sections coniques, représentées par les équations (1) et (2), se coupent sur deux droites dont une est parallèle à l'axe des y, car l'équation (3)

$$y\,(ax+b)-(cx^2+dx+f)=0,$$

combinaison de (1) et (2) représente une courbe passant par le point commun de (1) et (2), et cette courbe, comme variété d'hyperbole, se réduit à deux droites,

$$y=px+q,\qquad ax+b=0,$$

dont la seconde est parallèle à l'axe des y.

Enfin quelle que soit la méthode employée, elle conduit généralement à une équation du quatrième degré, qui, souvent, ne peut se résoudre sans le secours de la théorie générale des équations. Si l'équation finale en x, à laquelle on arrive, est dans ce cas, alors il faut recommencer les calculs, et éliminer x au lieu de y, parce que l'on peut avoir une équation finale en y que l'on sache résoudre.

Quand une équation du quatrième degré peut se résoudre à la manière du second, ses racines sont de l'une des deux formes,

$$x = \pm\sqrt{a \pm \sqrt{b}} \qquad \text{ou bien } x = c \pm \sqrt{a \pm \sqrt{b}}.$$

Si l'on veut remonter aux équations dont proviennent ces valeurs, on voit que la première provient d'une équation ne contenant que les puissances paires de l'inconnue et de la forme,

$$x^4 + px^2 + q = 0,$$

équation résolue dans toutes les algèbres.

La seconde forme provient d'une équation complète du quatrième degré, mais dont le premier membre est la différence de deux carrés,

$$[(x-c)^2 - a]^2 - (\sqrt{b})^2 = 0,$$

et il est clair que toute équation complète du quatrième degré,

$$x^4 + px^3 + qx^2 + \mathrm{R}x + \mathrm{S} = 0,$$

dont le premier membre pourra se décomposer en deux carrés, soit de la forme

$$(x^2 + ax + b)^2 - c^2 = 0,$$

ou bien de la forme

$$(x^2 + ax + b)^2 - c^2x^2 = 0,$$

pourra se résoudre immédiatement, car elles donnent :

La première, $(x^2 + ax + b + c)(x^2 + ax + b - c) = 0$;
La seconde, $(x^2 + ax + b + cx)(x^2 + ax + b - cx) = 0$.
Premier exemple. $x^4 - 22x^3 + 124x^2 - 33x - 10 = 0$.

Extrayant la racine carrée du premier membre, on a $x^2 - 11x + \frac{3}{2}$ à la racine, et $-\frac{49}{4}$ pour reste ; donc l'équation proposée est identique à

$$\left(x^2-11x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{49}{4}=(x^2-11x+5)\,(x^2-11x-2)=0.$$

Les racines seront données par

$$x^2-11x+5=0 \qquad \text{et } x^2-11x-2=0.$$

Deuxième exemple. $7x^4-40x^3+73x^2-60x+36=0.$

Pour éviter les radicaux, je multiplie par 7,

$$49x^4-280x^3+511x^2-420x+252=0\,;$$

extrayant la racine carrée du premier membre,

on a $7x^2-20x+\frac{111}{14}$ à la racine, et $-\left(\frac{3660}{14}x-\frac{37071}{196}\right)$

pour reste. Comme ce reste n'est pas un carré parfait, le premier membre ne peut subir la décomposition de l'équation précédente, cependant (et cet artifice de calcul est à noter, vu ses nombreuses applications) si l'on retourne l'équation,

$$36-60x+73x^2-40x^3+7x^4=0,$$

et que l'on extraie la racine carrée du premier membre, on trouve $(6-5x+4x^2)$ à la racine, et $-9x^4$ pour reste; donc, l'équation est identique à

$$(6-5x+4x^2)^2-(3x^2)^2=(6-5x+4x^2+3x^2)\,(6-5x+4x^2-3x^2)=0,$$

dont les racines s'obtiennent comme dans l'exemple précédent, en égalant chaque parenthèse à zéro.

Troisième exemple. $x^4-10x^3+23x^2-30x+9=0.$

Dans cet exemple, 30, coefficient de x, est le produit de 10, coefficient de x^3, par 3, racine carrée du terme tout connu. Donc, le premier membre est identique à une expression de la forme $(ax^2+bx+c)^2-d^2x^2=0.$

En effet, complétant le carré, on a

$$(x^2-5x+3)^2-8x^2=0,$$

-5 est la moitié du coefficient de x^3, et 3 la racine carrée du terme tout connu,

$$(x^2-5x+3-2x\sqrt{2})\,(x^2-5x+3+2x\sqrt{2})=0,$$

dont les racines sont données par

$$x^2-(5+2\sqrt{2})\,x+3=0 \quad \text{et} \quad x^2-(5-2\sqrt{2})\,x+3=0.$$

Enfin, il est clair que si, par un moyen quelconque, le premier membre de l'équation

$$x^4+px^3+qx^2+\mathrm{R}x+\mathrm{S}=0,$$

se décompose en deux parties quelconques de la forme

$$\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2=0, \qquad \text{ou bien } \mathrm{M}^2-\mathrm{N}^2=0,$$

dans le premier cas, on posera

$$(\mathrm{M}+\mathrm{N}\sqrt{-1})\,(\mathrm{M}-\mathrm{N}\sqrt{-1})=0,$$

et dans le second, $(\mathrm{M}+\mathrm{N})\,(\mathrm{M}-\mathrm{N})=0$.