NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Note sur l'équation aux sommes des racines, prises deux à deux, d'une équation donnée

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 128-133

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__128_0>

NOTE

SUR L'ÉQUATION AUX SOMMES DES RACINES,

PRISES DEUX A DEUX, D'UNE EQUATION DONNÉE.

Parmi les différentes méthodes que l'on donne pour trouver l'équation aux sommes des racines d'une équation $f(x)=0$, il en est une qui consiste, comme on sait, à éliminer x entre les équations : $f(x)=0$.... (1) et $\dfrac{f(y-x)-f(x)}{y-2x}=0$, ou bien

$$f'(x)+\frac{f''(x)}{1.2}(y-2x)+\ldots..+\frac{f_m(x)}{1.2.3\ldots m.}(y-2x)^{m-1}=0\ldots(2),$$

les polynômes $f'(x)$, $f''(x)$, etc., étant les dérivées de $f(x)$, et m le degré de l'équation proposée. Lorsqu'on fait cette élimination au moyen des fonctions symétriques des racines a, b, c, etc., de $f(x)=0$, l'équation finale en y est du degré $m(m-1)$, ses racines sont les sommes $a+b$, $b+a$, $a+c$, $c+a$, etc.; le premier membre de l'équation en y est alors un carré (*). Mais si l'on élimine par le procédé des divisions successives, l'équation en y, à laquelle le calcul conduit, est seulement du degré $\dfrac{m(m-1)}{2}$; le premier membre n'est plus un carré ; chacune des sommes $a+b$, $a+c$, etc , est racine *simple* de l'équation résultant de l'élimination.

(*) Pour éliminer x, on remplace successivement x, par a, b, c, ..., dans le premier membre de l'équation (2). Il en résulte m polynômes du degré $m-1$ par rapport à y. Leur produit est du degré $m(m-1)$; les coefficients des différentes puissances de y sont des fonctions symétriques de a, b, c, etc., qui s'expriment en fonctions rationnelles des coefficients de $f(x)=0$, au moyen de formules connues.

On a demandé pourquoi l'équation en y, obtenue par ce dernier moyen d'élimination, ne contient, parmi ses racines, qu'une seule fois les sommes $a+b$, $a+c$, etc.? C'est la question que nous allons examiner.

Si les racines a, b, c..., de $f(x)=0$, étaient connues, en remplaçant x par a dans l'équation (2), on obtiendrait une équation à une seule inconnue y du degré $m-1$, dont les racines seraient les sommes $a+b$, $a+c$, etc. De même, la substitution de b à x donnerait une équation en y ayant pour racines $b+a$, $b+c$, etc. Ainsi, à une seule valeur $a+b$ de y correspondent deux valeurs différentes a, b, de x; ou, ce qui revient au même, la substitution de $a+b$ à y donne pour commun diviseur aux premiers membres des équations (1) et (2) le produit du second degré $(x-a)(x-b)$; par conséquent, le dernier reste obtenu par les divisions que l'on fait pour éliminer x devra être annulé lorsqu'on y remplacera y par les sommes $a+b$, $a+c$, etc.; et la substitution de ces valeurs de y dans le reste précédent devra donner successivement pour résultats les produits $(x-a)(x-b)$, $(x-a)(x-c)$..., qui deviennent les plus grands communs diviseurs des premiers membres des équations (1) et (2), correspondants à ces valeurs de y. L'avant dernier reste sera donc du second degré, par rapport à x (*). C'est la seule conséquence que l'on puisse rigoureusement déduire de ce que toute valeur convenable de y donne aux premiers membres des équations (1) et (2) un diviseur commun du second degré en x; et rien n'indique, dans cette méthode d'élimination, que le premier membre de l'équation finale en y, c'est-à-dire le dernier reste des divisions effectuées, doive contenir au

(*) Si l'équation proposée est $x^3+px+q=0$, l'équation (2), devient $x^2-xy+y^2+p=0$, et, après une seule division, on trouve le reste $-y^3-py+q$. L'equation $y^3+py-q=0$, a évidemment pour racines les sommes $a+b$, $a+c$, $b+c$, des racines a, b, c, de $x^3+px+q=0$.

carré les facteurs $y-(a+b)$, $y-(a+c)$, etc.; il résulte, au contraire, de ce calcul même, que si aucun facteur étranger n'a été introduit, le dernier reste ne peut contenir les facteurs $y-(a+b)$, $y-(a+c)$.... à des puissances supérieures à la première. C'est ce qu'il est facile de reconnaître, en exprimant le dernier reste en fonction des premiers membres des équations proposées.

Nous désignerons par A, B, les premiers membres des équations (1), (2), et par R_n le reste indépendant de x, obtenu par les divisions successives. Il est supposé que ces divisions donnent des quotients entiers, sans l'introduction d'aucun facteur dans les dividendes. Les polynômes A, B, R_n seront liés entre eux par les égalités.

$$\begin{aligned}
A &= Bq + R \\
B &= Rq' + R' \\
&\vdots \\
R_{n-2} &= R_{n-1}\, q_n + R_n.
\end{aligned}$$

En exprimant les restes R, R′, en fonction de A, B, on trouvera d'abord $R = A - qB$ et $R' = (qq'+1)B - q'A$. Dans ces valeurs de R, R′, les coefficients de A, B sont, abstraction faite des signes, les termes des deux premières *réduites* de la fraction continue

$$\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{q_n}}}}.$$

Pour démontrer que tous les autres restes R″, R‴, etc., s'expriment de la même manière en fonction de A, B, il suffit de faire voir que si la loi dont il s'agit est applicable à deux restes consécutifs de rangs quelconques, elle convient de même au reste immédiatement suivant.

Soient r, r', r'', trois restes consécutifs; q, q', q'', les quotients correspondants, et $\frac{n}{d}, \frac{n'}{d'}$, les réduites terminées aux quotients incomplets q, q', on aura, par hypothèse :

$$r = nA - dB,\ r' = d'B - n'A,\ r = r'q'' + r'';$$

d'où $$r'' = (n'q'' + n)A - (d'q'' + d)B.$$

Cette dernière égalité montre que la loi observée s'applique à tous les restes ; par conséquent, si l'on désigne par $\frac{N}{D}$ la réduite correspondante au dernier quotient q_n, on aura, en faisant abstraction des signes :

$$R_n = NA - DB \ldots\ldots (3).$$

Il faut de plus observer que les polynômes N, D ne peuvent être annulés à la fois par les mêmes valeurs de x, y ; car, si $\frac{N'}{D'}$ représente la réduite qui précède $\frac{N}{D}$, on a $N'D - ND' = \pm 1$, quelles que soient les valeurs attribuées à x, y.

Cela admis, substituons à x, dans l'égalité (3), une des racines, a, de l'équation (1) ... $A = 0$. Cette égalité se réduit à $R_n = -DB$, et le polynôme B devient le produit $[y - (a+b)][y - (a+c)]\ldots$ Donc, si le facteur $y - (a+b)$ entrait dans R_n à une puissance supérieure à la première, il devrait aussi, lorsque $x = a$, se trouver dans le polynôme D ; ou, ce qui revient au même, le polynôme D serait divisible par $x - a$, lorsque $y = a + b$. Or, la substitution de $(a+b)$ à y, dans (3), donne l'égalité $NA = DB$, et le plus grand commun diviseur de A, B est alors $(x - a)(x - b)$. Par conséquent, si D est divisible par $x - a$, lorsque $y = a + b$, il faut que N admette aussi le diviseur $x - a$. D'où il suit que les équations $D = 0$, $N = 0$ auraient la solution commune $y = a + b$, $x = a$, ce qui est impossible, comme on vient de le voir.

Il résulte de la relation (3) établie entre les polynômes R_n, A, B, que le reste R_n ne peut contenir, à une puissance supérieure à la première, aucun des facteurs $y-(a+b)$, $y-(a+c)$, etc. C'est ce qu'il fallait démontrer.

G.

Observation. Waring est le premier qui ait donné des formules générales pour calculer les fonctions symétriques des racines, et leurs applications pour trouver l'équation qui a pour racine une relation donnée entre les racines de l'équation proposée, telle que les rapports des racines, les différences des racines, etc. Nous extrayons ici les formules qui conviennent à la somme des racines, prises deux à deux (*Meditationes algebraicæ*, *tertia editio*, 1782, p. 27).

Soit l'équation donnée $f(x)=0$ de degré m, et $F(y)=0$ l'équation cherchée ; S_p est la somme connue des puissances p de la première équation, s_p la somme des puissances p des racines de la seconde équation, on a :

$$s_p=(m-2)^{p-1}S_p+pS_{p-1}S_1+\frac{p.p-1}{1.2}S_{p-2}S_2+\frac{p.p-1.p-2}{1.2.3}S_{p-3}S_3+\ldots..$$

Cette série se termine au terme $\dfrac{p.p-1\ldots\ldots\left(\frac{p}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{p}{2}}\dfrac{\left[S_{\frac{p}{2}}\right]^2}{2}$,

pour p pair, et au terme $\dfrac{p.p-1\ldots\frac{p+3}{2}}{1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}}S_{\frac{p+1}{2}}.S_{\frac{p-1}{2}}$, pour p impair. Au moyen de cette formule, on trouve facilement les coefficients de l'équation $F(y)=0$. Ainsi, pour $m=4$, on a :

$$s_1=3S_1\,;\quad s_2=3S_2+2.\frac{S_1^2}{2}\,;\quad s_3=3S_2S_1\,;\quad s_4=-4S_4+4S_3S_1+\frac{6}{2}S_2^2,$$

$$s_5 = -12S_5 + 5S_4S_1 + 10S_3S_2;\ S_6 = -28S_6 + 6.S_5S_1 + 15S_4S_3 + \frac{20.}{2}S_3^2.$$

Il est à remarquer qu'en cherchant l'équation directement par les fonctions symétriques, elle s'élève au degré $\frac{m(m-1)}{2}$; mais en ayant recours à la même méthode pour opérer l'élimination entre les équations (1) et (2), on arrive à une équation de degré $m(m-1)$, mais qui est un carré parfait.

Il est évident que l'équation aux sommes des racines, prises deux à deux, ou quatre à quatre, six à six, etc., a nécessairement quelques racines réelles.

On peut aussi parvenir à l'équation à la somme des racines, prises deux à deux, en cherchant les conditions pour que l'équation proposée admette un diviseur du second degré x^2+px+q : l'équation en p est évidemment l'équation cherchée.

Tm.