Théorèmes à démontrer. Problèmes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 57-59

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__57_0>

THÉORÈMES A DÉMONTRER. — PROBLÈMES.

1 Démontrer que si dans un triangle rectiligne, deux bisectrices angulaires intérieures sont d'égale longueur, le triangle est isocèle.

2 Soit ABC un triangle équilatéral inscrit dans un cercle dont le centre est D; d'un point O de la circonférence, on abaisse sur les côtés AB, AC, BC, des perpendiculaires OM, ON, OP, qui rencontrent ces côtés en des points M, N, P: démontrer que les points M, N, P, sont sur une droite qui passe par le milieu du rayon OD, et que ce milieu est le centre des moyennes distances des pieds des trois perpendiculaires, M, N, P. (Communiqué par M. Steiner.)

3. Si d'un point A d'une ellipse, on abaisse des perpendiculaires AM, AN, sur les diamètres conjugués égaux, la diagonale AP du parallélogramme construit sur AM et AN, comme côtés, est normale à l'ellipse en A. (Communiqué par M. Steiner.)

4. Soit ABC un triangle inscrit dans une section conique, d'un point O de cette courbe, on mène les droites OM, ON, OP, respectivement conjuguées aux côtés AB, BC, CA (1), et rencontrant ces côtés aux points M, N, P : démontrer que les trois points M, N, P, sont sur une même droite.

5. Étant donnée une équation algébrique, d'un degré quelconque, à coefficients réels; chaque racine peut être consi

(1) Deux droites sont dites conjuguées lorsqu'elles sont parallèles à deux diamètres conjugués.

dérée comme la tangente d'un arc réel ou imaginaire, l'unité étant prise pour rayon. On propose : 1° de démontrer que la somme de ces arcs est réelle ; 2° de trouver cette somme à l'aide des tables.

6. Lorsque le coefficient du premier terme d'une équation est l'unité, ~~et le coefficient du second~~ terme un nombre négatif ~~quelconque~~, on sait que pour obtenir une limite supérieure des racines positives de l'équation, il suffit d'ajouter l'unité à la plus grande des valeurs absolues des coefficients négatifs de cette équation ; c'est la règle indiquée par *Maclaurin*. Mais, dans un grand nombre de cas, on aura, en fonction des coefficients, l'expression d'une limite supérieure plus approchée, au moyen de la règle suivante, énoncée par *Lagrange* :

Soient $-Ax^{m-p}$, $-Bx^{m-r}$, $-Cx^{m-s}$, etc., les termes négatifs de l'équation proposée, dont le degré est m : on aura une limite supérieure des racines positives en additionnant les deux plus grandes des quantités

$$\sqrt[p]{A},\ \sqrt[r]{B},\ \sqrt[s]{C},\ \text{etc.}$$

C'est ce que l'on propose de démontrer.

Supposons, par exemple, que l'équation proposée soit $x^3-x^2+x-1000=0$. La règle de *Maclaurin* donne pour limite supérieure 1001 ; et celle de *Lagrange* donne 11. Ce dernier nombre est la plus petite limite supérieure, entière.

7. On donne les projections d'une droite AB, et celles de deux points C, D, non situés dans un même plan, avec la droite : construire les projections d'un point situé sur la droite AB, et tel que la somme de ses distances aux deux points donnés C, D, soit un *minimum*.

8. Exprimer l'aire d'un triangle rectiligne, en fonction des trois lignes menées des sommets aux milieux des côtés opposés.

9. Inscrire dans une ellipse donnée une corde telle que la somme de sa longueur et de la distance de son milieu au centre de l'ellipse, soit un *maximum*. Application au cercle.

10. La base AB d'un triangle rectiligne ABC, est donnée de grandeur et de position ; la somme des deux autres côtés AC, BC, du triangle est égale à une droite donnée ; on suppose que ce triangle tourne autour d'un axe rectiligne tracé sur son plan ; déterminer le sommet C du triangle de manière que la somme des surfaces décrites par les deux côtés AC, BC, adjacents à la base, soit un *maximum*, ou bien un *minimum*.

11. Inscrire dans une ellipse un triangle semblable à un triangle donné ; cas particulier où le triangle donné est équilatéral.

12. Déterminer l'équation d'une ligne telle, qu'en lui menant une tangente en un point quelconque, la partie de cette tangente comprise dans l'intérieur d'un angle donné, soit constamment égale à une droite donnée.

Discuter l'équation de cette ligne lorsque l'angle donné est droit.