Nouvelles annales de mathématiques

Théorèmes et problèmes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 519-521

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__519_1>

THEORÈMES ET PROBLÈMES.

42. Lieu des foyers des paraboles qui ont une tangente commune et une corde commune, parallèle à cette tangente.

43. Lieu du sommet d'un angle droit, dont les côtés sont normaux à une ellipse donnée.

44. Par le foyer d'une parabole, on mène un rayon vecteur quelconque et une perpendiculaire à ce rayon; puis, sur ces deux droites comme côtés, et avec la normale au point pris sur la parabole, comme diagonale, on construit un rectangle. Quel est le lieu du sommet opposé au foyer?

45. Trouver le lieu des intersections successives de toutes les ellipses ayant un diamètre donné de grandeur et de position, et son conjugué, donné de grandeur seulement.

46. *Théorème.* De toutes les pyramides ayant même angle polyèdre au sommet, et même hauteur, la plus petite en volume a pour centre de gravité de sa base, le pied de sa hauteur. (Catalan.)

47. Par un point O, donné dans un angle droit BAC, on mène une droite quelconque NP, terminée aux côtés de l'angle. On construit sur NP un triangle MNP semblable à un triangle donné. Quel est le lieu du sommet M?

48. *Théorème.* **Deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 et 9, ne peuvent être des puissances exactes.** (Catalan.)

49. Combien l'équation transcendante $2(1-\cos x)=x\sin x$, admet-elle de racines réelles positives ?

50. Une corde étant inscrite dans une parabole, le produit des distances des extrémités de cette corde, à un diamètre quelconque est égal à la partie de ce diamètre interceptée entre la courbe et la corde, multipliée par le paramètre de l'axe principal.

51. Soit un carré divisé par des lignes horizontales et verticales en n^2 petits carrés, ayant chacun 2 unités de longueur pour côté. Prenons deux côtés adjacents du grand carré pour axes coordonnés. Les coordonnées du centre d'un petit carré sont exprimées par des nombres entiers impairs; et les coordonnées des sommets par des nombres pairs, désignons par (h, v) le centre d'un petit carré ayant h pour abscisse horizontale et v pour ordonnée verticale; faisant passer une droite par (h, v) et (h', v'), quels sont les carrés que cette droite traversera, et quels sont les centres et les sommets des carrés situés sur cette droite? Étant données les équations de deux droites passant chacune par deux centres, quelles relations doivent exister entre les coordonnées des quatre centres; 1° pour que les deux droites soient parallèles; 2° pour qu'elles se coupent à angles droits; 3° pour que le point d'intersection soit le centre d'un cinquième carré? (Analyse indéterminée).

52. a, b, c étant les trois côtés d'un triangle sphérique, et e l'excès sphérique, l'on a

$$1+2\left[\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c\cos^2\frac{1}{2}e\right]$$
$$=\cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)+\cos(a+c-b)+\cos(b+c-a).$$

53. *Théorème.* Soit un faisceau de n droites convergentes

au point O, et $n-1$ points X_1, X_2, X_3,... X_{n-1}, en ligne droite, le tout dans un même plan; prenez sur OA_1, la première du faisceau, arbitrairement les points A_1, B_1, C_1, etc., en nombre quelconque; du point X_1 comme centre, projetez ces points sur la seconde droite du faisceau en A_2, B_2, C_2, etc.; du point X_2 comme centre, projetez ces dernières sur la troisième ligne du faisceau en A_3, B_3, C_3, etc.; du point X_3 comme centre, projetez ces dernières sur la quatrième ligne, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les points X_1, X_2,... X_{n-1} aient été employés. Soient A_n, B_n, C_n, etc., les dernières projections obtenues du point X_{n-1} comme centre; les droites A_1A_n, B_1B_n, C_1C_n, etc., concourent en un même point situé sur la droite X_1X_{n-1} (*fig.* 103).

Si $n=3$ et X_1 restant fixe, on suppose que X_2 décrive une conique, quel sera le lieu décrit par le point de concours des droites A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3, etc.? (Finck).

54. Trouver une surface algébrique sur laquelle on ne puisse tracer qu'une seule et unique circonférence.

55. L'exposant du binôme de Newton étant de la forme a^p-1, où a est un nombre premier et p un nombre entier positif quelconque, aucun coefficient du binôme n'est divisible par a; si l'exposant est a^p, tous les coefficients (les deux extrêmes exceptés), sont divisibles par a.

56. *Théorème.* Étant donné un système de lignes droites, situées dans l'espace d'une manière quelconque, on peut mener une infinité de plans dont chacun coupe toutes les droites.

57. Étant données sur un plan, les projections cylindriques ou coniques ABC, A'B'C', des intersections d'un cône quelconque par deux plans, et la projection O du sommet du cône, menez un rayon vecteur quelconque OBB', et les tangentes en B, B'; ce rayon tournant autour de O, quel sera le lieu du point X, intersection des tangentes (*fig.* 104)? (Finck.)