

VACHETTE

Question d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 506-507

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__506_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'EXAMEN.

PAR M. VACHETTE.

On a n prismes de même hauteur circonscrits à un tétraèdre régulier dont l'arête est a , et superposés : on demande de trouver leur somme. En faisant $n = \infty$, on trouve la mesure du tétraèdre (*fig. 95 bis*).

Le premier prisme a pour base le triangle équilatéral ABC, et pour hauteur $x = \frac{h}{n}$: le côté de ABC est a .

Le deuxième a pour base A'B'C', et la même hauteur ; le côté de A'B'C' est $a' = a \frac{n-1}{n}$.

Le troisième. $a'' = a \frac{n-2}{n}$.

Ainsi de suite.

La surface de ABC est $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$; le volume du premier prisme sera $\frac{a^2h\sqrt{3}}{4n}$, mais $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$, donc

- | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 1 ^{er} prisme. | $V = \frac{a^3\sqrt{18}}{12n} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4n}$, |
| 2 ^e prisme, a remplacé par $a \frac{n-1}{n}$, n du div ^r . par $(n-1)$, | $\frac{a^3\sqrt{2}}{4(n-1)} \cdot \frac{(n-1)}{n^3}$ |
| 3 ^e $a \frac{n-2}{n}$ $(n-2)$, | $\frac{a^3\sqrt{2}}{4(n-2)} \cdot \frac{(n-2)^2}{n^3}$ |
| 4 ^e | $\frac{a^3\sqrt{2}}{4(n-3)} \cdot \frac{(n-3)^3}{n^3}$ |
| | |

la somme

$$\Sigma = \frac{a^3 \sqrt{2}}{4n} + \frac{a^3 \sqrt{2}}{4n^3} \left\{ (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 2^2 + 1 \right\},$$

or la somme des carrés des n premiers nombres $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

donc on aura, en remplaçant n par $(n-1)$, la quantité entre parenthèses égale à $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$, et

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{a^3 \sqrt{2}}{4n} + \frac{a^3 \sqrt{2}}{4n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{4n} + \frac{a^3 \sqrt{2}}{24n^2} (2n^2 - 3n + 1) \\ &= \frac{a^3 \sqrt{2}}{4n} + \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} - \frac{a^3 \sqrt{2}}{8n} + \frac{a^3 \sqrt{2}}{24n^2}. \end{aligned}$$

Quand on fait $n = \infty$, on a le volume du tétraèdre

$$\begin{aligned} V &= \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \text{ en effet } V = \Lambda BC. \frac{h}{3} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}. \frac{a \sqrt{6}}{3} = \\ &= \frac{a^3 \sqrt{18}}{4 \cdot 3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}. \end{aligned}$$
