Analyses d'ouvrages

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 431-447

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__431_1>

ANALYSES D'OUVRAGES.

Éléments de Géométrie, par EUGÈNE LIONNET, agrégé de l'Université, professeur de mathématiques au collége royal de Louis-le-Grand (*).

Nous parlerons d'abord du plan de l'ouvrage, clairement indiqué par ce tableau placé tout au commencement

DIVISION DE L'OUVRAGE.

Première partie.	**Deuxième partie.**
GÉOMÉTRIE PLANE.	GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE
Principes.	Principes.
Livre I. *La ligne droite.*	Livre I. *Le plan*
Livre II. *La ligne brisée et les polygones.*	Livre II. *Les angles solides et les polyèdres.*
Livre III. *La circonférence et le cercle.*	Livre III. *Les trois corps ronds.*
Livre IV. *Les polygones semblables et la mesure des angles.*	Livre IV. *Les polyèdres semblables et la mesure des angles.*
Livre V. *La mesure des polygones.*	Livre V. *La mesure des polyèdres.*
Livre VI. *Les polygones réguliers et la mesure du cercle.*	Livre VI. *Les polyèdres réguliers et la mesure des trois corps ronds.*

L'analogie observée ici, autant qu'il est possible, entre la

(*) Chez *Desobry* et *Madeleine*, libraires, rue des Maçons-Sorbonne, n° 1, Paris. Six livraisons lithographiées avec les figures dans le texte.

géométrie plane et celle de l'espace, par la correspondance des livres et des matières traitées ; la subdivision, à la fois naturelle et méthodique, de chacune des deux parties, témoignent du soin que l'auteur a mis à faciliter l'étude de la géométrie, par l'ordre et le rapprochement des idées.

Le premier livre est précédé d'une exposition complète des principes : *définitions, axiomes, demandes:* qui doivent servir de base aux démonstrations. — Distinguer nettement ce que *l'on admet*, de ce qu'on veut établir, est sans doute la première règle à suivre pour la précision et la clarté du raisonnement. Si cette règle, circonscrite dans de justes limites, est incontestable pour tous ceux qui ont une idée exacte de l'objet d'une démonstration, il faut approuver l'auteur de l'avoir strictement observée.

M. *Lionnet* est partisan des démonstrations rigoureuses. C'est un point sur lequel nous sommes entièrement d'accord avec lui.

On a dit qu'une extrême rigueur a de graves inconvénients ; qu'elle rend les démonstrations difficiles, retarde les progrès des élèves, s'oppose à l'avancement des sciences : nous croyons précisément le contraire, car il nous semble que le moyen le plus certain d'arriver à l'évidence est d'être complétement rigoureux. En mathématiques, comme dans tout le reste, les raisonnements les plus difficiles à suivre, sont les mauvais raisonnements

Mais il faut voir la rigueur où elle est réellement ; il faut ne pas confondre avec les préceptes d'une logique sévère des règles qui n'ont aucun caractère sérieux. En admettant donc tous les avantages de la rigueur géométrique, il resterait à examiner si elle aurait à perdre dans la suppression de quelques Axiomes (*), Demandes, Démonstra-

(*) L'auteur n'a pas mis au nombre de ses axiomes : *le tout est plus grand que* tions du livre que nous analysons ; mais l'auteur doit, dans une introduction à son ouvrage, développer ses idées à cet égard, et c'est pour nous un motif suffisant de remettre à un autre article l'examen dont il s'agit.

Les définitions, placées au commencement de chaque livre, sont exprimées en termes clairs et parfaitement connus. La ligne droite n'a pas été définie, et c'est ce que nous préférons encore à la définition qu'on en donne ordinairement (**). La propriété caractéristique, essentielle de la ligne droite, est celle que l'auteur énonce dans sa troisième *Demande;* propriété tellement essentielle, que si l'on diffère à la mentionner, on court le danger d'être inintelligible et d'entrer en matières par un cercle vicieux.

Le premier livre contient les propositions relatives à la situation des droites. La théorie des parallèles, présentée avec beaucoup d'ordre, s'appuie sur une *Demande* qui revient à celle-ci : *par un point, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite.* Toutefois, les propositions qui peuvent être établies sans le secours d'une demande, ont d'abord été exposées, et la demande est seulement énoncée lorsqu'elle devient nécessaire à la théorie.

L'auteur a fait, avec raison, disparaître des premiers éléments d'une science où l'on doit rechercher à la fois l'exac-

---

la partie; et certes, nous sommes loin de croire que ses démonstrations s'en soient trouvées affaiblies. Ce singulier Axiome énoncé d'abord par *Euclide*, a été reproduit par *Thomas Simpson* qui l'a accompagné de celui-ci : *le tout est égal à la somme de ses parties;* tous deux, adoptés par *Legendre*, ont facilement passé dans la plupart des traités de géométrie qui, depuis, ont été publiés. M. *Lionnet* n'a pas jugé utile de dire : il est évident que *le plus grand est plus grand que le plus petit.*

(**) Les anciens géomètres n'ont jamais défini la ligne droite : *le plus court chemin d'un point à un autre. Euclide* la définit autrement; *Archimède* n'en donne aucune définition. Dans son livre de la Sphère et du Cylindre, il dit : je prends pour *principe* la proposition suivante : la ligne droite est la plus courte de toutes celles qui ont les mêmes extrémités.

titude et la clarté, cette prétendue démonstration fondée sur la comparaison d'étendues indéfinies, formées d'angles et de zones. En confondant ainsi les notions d'aire et de surfaces non fermées, on établit une fausse synonymie, propre à égarer l'esprit des commençants Nous n'aurions pas eu à distinguer ici cette démonstration de plusieurs autres relatives au même objet et qui ne valent pas mieux, sans la persévérante assistance que lui donne, encore aujourd'hui, l'enseignement de quelques colléges

Le second livre a pour objet principal l'égalité des polygones et la détermination de la somme de leurs angles. On y trouve aussi quelques propositions sur l'inégalité des côtés des triangles, conduisant aux premieres notions des lieux géométriques. Ces différents theorèmes sont bien énonces et démontrés d'une manière très-simple. Nous approuverions tout ce qui resterait dans ce livre, si l'on supprimait la Proposition 28, et les trois premières relatives à la convexité des polygones.

Dans le troisieme livre, consacré à la circonférence et au cercle, on trouve les premières propositions sur la situation relative d'une circonference et d'une droite, et de deux circonférences, les relations de grandeur des angles inscrits, ou formés par une tangente et une corde, et de l angle au centre correspondant au même arc ; des théorèmes sur l'égalité et l inégalité des cordes · et enfin, 28 problèmes qui se rapportent aux trois premiers livres du traité.

La plupart des theorèmes démontrés dans ce livre sont d'une utilite incontestable ; quelques-uns, cependant, pourraient être supprimés, et, parmi ces derniers, nous comprendrons le theorème 3 · « *Deux circonférences concentriques, qui ont le même rayon, coïncident dans toute leur etendue et ne forment qu'une seule et même circonférence.* » On ne voit pas pourquoi un semblable théorème serait préféré à une foule d'autres du même genre et dont l'exactitude n'est pas plus évidente.

Le livre IV traite de la similitude des polygones et de la mesure des angles. L'auteur a conservé la définition des polygones semblables, donnée par *Euclide*, et adoptée par *Thomas Simpson* et *Legendre;* il démontre, Proposition XV, que l'on peut construire des polygones semblables à un polygone donné. On a reproché à cette définition de la similitude, de comprendre un trop grand nombre de conditions; l'objection ne nous semble pas prise dans une notion exacte du véritable objet des définitions (*) ; elle ne peut être fondée pour ceux qui ne reconnaissent dans les définitions données en géométrie, qu'une simple imposition de nom à des choses clairement désignées (**).

Au reste, les partisans absolus du nombre précis des conditions suffisantes ne peuvent être admis à changer une définition seulement : il faut encore qu'ils arrangent selon leur système, qu'ils altèrent d'autres définitions consacrées par l'usage. Pour être conséquents, ils ne peuvent plus dire : *le carré est un quadrilatère qui a ses angles droits et ses côtés égaux*; le même motif doit les conduire à épurer les définitions des polygones équiangles, des polygones réguliers, car elles renferment aussi un trop grand nombre de conditions.

(*) « Les géomètres et tous ceux qui agissent méthodiquement, n'imposent des » noms aux choses que pour abréger le discours, et non pour diminuer ou » changer l'idée des choses dont ils discourent ; et ils prétendent que l'esprit » supplée toujours la définition *entière aux termes courts qu'ils n'emploient que* » pour éviter la confusion que la multitude des paroles apporte. » (*Pascal*, Livre des Pensées.)

(**) « Les définitions des mathématiciens, regardées comme définitions de nom, » sont absolument arbitraires, c'est-à-dire qu'on peut donner aux objets des » mathématiques, tel nom, et aux mots tel sens qu'on veut. Cependant il faut, » autant qu'il est possible, se conformer à l'usage de la langue et des savants : il » serait ridicule, par exemple, de définir le triangle une figure ronde, quoiqu'on » pût faire, à la rigueur, des éléments de géométrie exacts (*mais ridicules*), en » appelant triangle ce qu'on appelle ordinairement cercle. » *D'Alembert*. Encyclopédie méthodique.)

La théorie des lignes proportionnelles précède, dans l'ouvrage, la mesure des surfaces; cette disposition présente un avantage réel.—Les démonstrations relatives à l'égalité des rapports incommensurables, sont exposées avec tous les détails nécessaires à la clarté; des notions plus étendues sur ce sujet n'auraient pas été à leur place dans un traité de Géométrie.— La mesure des angles par des arcs de cercle, est établie avec précision.—Le livre IV est terminé par des problèmes bien choisis.

Les propositions principales des deux derniers livres, concernent la mesure des polygones et du cercle, et les rapports des contours des figures semblables.

L'auteur a placé au nombre des notions primitives, indéfinissables, l'égalite d'étendue des figures de formes quelconques; et, cela admis, il définit la *longueur* d'une ligne, *le rapport de son étendue à celle de l'unité linéaire;* et pareillement l'*aire* d'une surface, *le rapport de son étendue à celle de l'unité superficielle*

On trouve à la fin de chacun de ces livres, des problèmes qui servent de complément a la théorie. Le dernier probleme du sixième livre, a pour objet de déterminer une valeur approchée du rapport de la circonference au diamètre. La solution adoptée par l'auteur est indépendante de la mesure des surfaces, elle derive simplement des relations de grandeur précédemment établies entre les périmètres des polygones inscrits, et circonscrits au cercle.

Nous ne donnerons pas une analyse detaillée des six livres de la seconde partie; il serait difficile de le faire, sans reproduire la plupart des observations deja consignées dans cet article. Car, ce qui distingue surtout le plan de l'ouvrage, c'est l'analogie constamment observée, entre la geométrie plane et celle de l'espace, elle se trouve d'abord indiquée par les titres des livres, et par la disposition des théorèmes qu'ils renferment ; et, autant que possible, elle a été suivie dans les définitions, et dans les démonstrations des théorèmes. L'analogie a conduit l'auteur aux définitions qu'il donne de l'angle dièdre, de l'angle solide, et des polyèdres semblables. Toutes les objections qu'on opposerait à ces définitions, toutes les subtilités que l'on imaginerait à leur égard, ne peuvent rien contre le principe qui les a dictées. Seulement, après avoir défini les polyèdres semblables, *des polyèdres qui ont les angles dièdres égaux chacun à chacun, et situés dans le même ordre, et les faces homologues semblables*; il eût, peut-être, été convenable d'ajouter que les polyèdres dont les faces sont semblables, ont nécessairement leurs angles solides égaux ou symétriques (*).

L'ordre suivi dans cette seconde partie de l'ouvrage, a plus d'une fois servi à simplifier les raisonnements, et encore à éviter la complication des figures. Nous citerons, comme exemple, la disposition des théorèmes qui se rapportent à la mesure des prismes.—Aucune observation utile n'a été négligée ; pour s'en convaincre il suffit de lire la *remarque* 2 sur la définition 38 du livre intitulé : *Les angles solides et les polyèdres*. L'objet de cette remarque est de prouver que si un angle solide est convexe, il est toujours possible de conduire un plan qui rencontre à la fois toutes les arêtes, sans passer par le sommet.

La théorie des figures symétriques a été présentée d'une manière complète. L'auteur a successivement considéré la symétrie par rapport à un point, à une ligne, et à un plan. Cette théorie est une des plus importantes de la géométrie élémentaire ; les propositions qui la concernent méritent d'être remarquées.

(*) La démonstration de ce theorème a eté donnee par M. Cauchy, dans le 16e cahier du *Journal de l'Ecole polytechnique*.

Enfin, les démonstrations indirectes, dont le caractère est de convaincre sans éclairer, ont été évitées lorsqu'il a été possible de déduire de la notion même de l'objet considéré les propriétés qu'il s'agissait d'établir.

En écartant de notre rapport les questions de métaphysique, dont la solution n'est pas encore assez éclaircie pour qu'il ne soit plus permis d'avoir à leur égard des opinions différentes, nous dirons que les éléments de géométrie de M. Lionnet nous ont semblé remplir les conditions les plus utiles des ouvrages de ce genre, en réunissant l'ordre à la rigueur et à la clarté Si quelques améliorations sont encore à désirer, on peut les attendre de l'auteur. G

Études sur les propriétés de quelques fonctions et sur la représentation des racines des équations, par des intersections de courbes; par M. Prouhet (E), licencié ès sciences mathématiques; 24 pages, lithog., juillet 1842.

Moivre (Abraham) (*), géomètre français, forcé en 1685 par la révocation de l'édit de Nantes, de chercher un refuge en Angleterre, est le premier qui nous ait appris qu'une équation trinôme de la forme $Ax^{2m} + Bx^m + C = 0$, est décomposable en m facteurs réels trigonométriques du second degré. C'est une conséquence du théorème qui porte son nom, et qui est une généralisation de celui de Côtes (**),

---

(1) Moivre (Abraham de), né à Vitry-sur-Marne en 1667; mort en 1754. Son théorème est énoncé sans démonstration dans son ouvrage: *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis* Lond. 1734, in-4.

(2) Côtes (Roger), né en Angleterre en 1682; mort en 1716. Son théorème est énoncé sans démonstration dans l'ouvrage posthume · *Harmonia mensurarum sive Analysis et Synthesis per rationum et angularum mensuras promotæ.* Cambrige. 1722, in-4 (édité par Robert Smith). Cet ouvrage a été paraphrasé en français, par Walmsley (Charles), bénédictin anglais, sous le titre: l'Analyse des mesures, des rapports et des angles, ou réduction des intégrations aux logarithmes et aux arcs de cercle. Paris in-4. 1747.

relatif aux équations binômes $x^{2m}+a=0$; sa proposition est-elle vraie pour des équations de degré pair d'une forme quelconque ? Les géomètres se sont longtemps occupés de cette question, que l'illustre Gauss est parvenu à résoudre d'une manière satisfaisante. Mais d'Alembert le premier a proposé une solution qui contient la base de tout ce qu'on a fait depuis (voir l'Histoire de l'Académie de Berlin, 1746, p. 182, et aussi le traité de *Calcul intégral* de Bougainville, 1754, tome I, p. 47 ; ouvrage toujours très-recommandable). L'illustre philosophe suppose que le dernier terme de l'équation en x soit une variable y, alors l'équation devient celle d'une courbe, il remplace x par $p+q\sqrt{-1}$, ce qui donne deux équations en y, p, q, il en déduit par l'élimination deux autres, l'une en y, p, et l'autre en y, q ; et il cherche à prouver par des considérations géométrico-infinitésimales, que quelle que soit la valeur de y, on trouvera pour p et q des valeurs réelles.

Trois années après, Euler aborda le même sujet (dans les Mémoires de la même Académie, 1749, p. 223, imprimés en 1751). Il propose deux moyens : le premier consiste à prouver que tout polynôme de degré $2m$, m étant une puissance de 2, et dont le second terme est nul, peut se décomposer en deux facteurs réels du degré m ; en effet, soit le polynôme $x^{2m}+A_2x^{2m-2}+\ldots A_{2m}=X$, prenant les deux facteurs

$$x^m+\alpha x^{m-1}+\alpha_2 x^{m-2}+\ldots\alpha_m,$$
$$x^m-\alpha x^{m-1}+\beta_2 x^{m-2}+\ldots\beta_m.$$

Ces deux facteurs contiennent $2m-1$ coefficients, la comparaison avec le polynôme fournit autant d'équations ; Euler avance que tous les coefficients α_2, α_3,... β_2, β_3, etc., peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de α (*voy.* p. 331). Mais α étant la somme de m racines, l'équation en

α sera du degré $\frac{2m.2m-1\ldots m+1}{1.2.3\ldots m}$, nombre essentiellement impairement pair.

Car, m étant une puissance de 2, le dénominateur ne contient que le facteur pair 2^{m-1}, et le numérateur, le facteur pair $2m$; de plus, cette équation n'a pas de termes de degré impair ; car si p est la somme de m racines, $-p$ sera la somme des m autres racines ; donc l'équation en α étant formée par un nombre impair de facteurs de la forme α^2-p^2 le dernier terme est négatif ; α a donc au moins deux valeurs réelles dont l'une positive ; par conséquent les coefficients α_2, α_3,... β_2, β_3,... sont aussi réels ; donc la décomposition en deux facteurs du degré m existe ; or m étant une puissance de 2, peut encore se décomposer en deux facteurs de degré $\frac{m}{2}$ et ainsi de suite ; si le degré du polynôme n'est pas une puissance paire de 2, on le rendra tel, en le multipliant par un polynôme à facteurs premiers rationnels ; soit P ce polynôme et X le polynôme donné ; PX est décomposable en facteurs réels du second degré, donc X est aussi décomposable en facteurs réels de ce degré.

2. Comment démontrer en général la réalité de p? C'est une objection grave que Foncenex (*) a faite contre la démonstration d'Euler. Il en a substitué une autre dans les *Miscellanea phys. mathem.*, Taurin, tome I, 1759 ; démonstration modifiée par Laplace, et que M. Lacroix a insérée dans son excellent complément d'Algèbre. Lagrange a complété cette théorie d'Euler dans les Mémoires de Berlin de 1772, et dans la Résol. des E. num., note IX, 14.

3. Enfin, en 1799, Charles Frédéric Gauss fit son appari-

(1) Foncenex (François Daviet de), né à Thonon (Savoie) en 1774 ; mort à Casal en 1799. On croit que les principaux travaux mathématiques de cet auteur sont dus en grande partie à l'illustre Lagrange, son compatriote. Voir la biographie universelle, art. Foncenet.

tion par cette dissertation capitale devenue extrêmement rare · *Demonstratio nova Theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse.* Helmstadt, in-4° de 40 pages, une planche. L'auteur fait une revue critique extrêmement lumineuse de toutes les démonstrations qui ont précédé la sienne et en fait ressortir les défauts ; ainsi d'Alembert suppose la possibilité d'un développement en séries, ensuite la convergence de ces séries, deux assertions nullement prouvées ; ensuite la transition de l'infiniment petit au fini, laisse aussi subsister quelques nuages. Euler suppose que le second terme manquant, la somme des $2m$ racines est nulle, mais quel sens attacher à l'expression *somme des racines*, quand la possibilité de l'existence d'une racine est encore un sujet de doute ; et qui sait s'il y a précisément $2m$ racines ? Lagrange ne fait pas disparaître cette difficulté, la méthode est de plus sujette à des embarras d'élimination, qui jettent des doutes sur le résultat final.

4. M. Gauss établit sa propre théorie sur ces deux lemmes.

Lemme 1. m étant un nombre entier positif quelconque, la fonction $\sin\varphi.\, x^m - \sin m\varphi.r^{m-1}x + \sin(m-1)\varphi.r^m$, est toujours divisible par le trinôme $x^2 - 2\cos\varphi.rx + r^2$.

Démonst. Il suffit d'effectuer la division ; les deux premiers termes du quotient mettent en évidence la loi des termes du quotient, la loi des restes et la vérité du lemme. Si $m=1$, la fonction devenant nulle est divisible par un facteur quelconque.

Lemme 2. Si la quantité r et l'angle φ satisfont à ces deux équations :

$$r^m\cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + Br^{m-2}\cos(m-2)\varphi + \ldots Kr^2\cos 2\varphi + $$
$$+ 4r\cos\varphi + M = 0, \qquad (\mathrm{U}),$$
$$r^m\sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + Br^{m-2}\sin(m-2)\varphi + \ldots Kr^2\sin 2\varphi + $$
$$+ 4r\sin\varphi = 0. \qquad (\mathrm{T}),$$

Alors la fonction

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots Kx^2 + 4x + M,$$

sera divisible par le trinôme $x^2 - 2\cos\varphi . rx + r^2$; pourvu que $r\sin\varphi$ ne soit pas nul.

Démonstration. Chacune des quantités suivantes

$$\begin{array}{lll}
\sin\varphi\, rx^m & -\ \sin m\varphi\, r^m x & +\sin(m-1)\,\varphi\, r^{m+1}, \\
A\sin\varphi\, rx^{m-1} & -\ A\sin(m-1)\,\varphi r^{m-1}x & +\ A\sin(m-2)\,\varphi\, r^m, \\
B\sin\varphi\, rx^{m-2} & -\ A\sin(m-2)\,\varphi\, r^{m-2}x & +\ A\sin(m-4)\,\varphi\, r^{m-1}, \\
\quad \text{etc} \ldots & & \\
K\sin\varphi\, rx^2 - & K\sin 2\varphi\, r^2 x & +K\sin\varphi\, r, \\
L\sin\varphi\, rx - & L\sin\varphi\, rx & +0, \\
M\sin\varphi r - & 0 & +M\sin(-\varphi)\, r,
\end{array}$$

est divisible, d'après le lemme précédent, par $x^2 - 2\cos.\varphi.rx + r^2$; donc la somme de ces quantités est aussi divisible par ce trinôme; or, la première colonne verticale est $r\sin\varphi . X$; la seconde colonne est xT, et la troisième colonne $= r\,(U\sin\varphi - T\cos\varphi)$; donc, etc.

Si $r=0$; alors $M=0$, et X est divisible par x; si $\sin\varphi=0$, alors $\cos\varphi=\pm1$; $\cos 2\varphi=+1$; $\cos 3\varphi=\pm1$, et généralement $\cos n\varphi = \cos^n\varphi$; à cause de l'équation (U), X devient donc nul en fesant $x=\cos\varphi$; X est donc divisible par $x - \cos\varphi$; donc en général X est divisible par $x - r\cos\varphi$ lorsque $r\sin\varphi=0$; il est évident d'ailleurs, en remplaçant les sinus des arcs multiples par des puissances, que T est divisible par $r\sin\varphi$.

5. L'auteur considère ensuite les U et T comme les équations polaires de deux courbes, évidemment algébriques, et si l'on remplace $r\sin\varphi$ par y et r, $\cos\varphi$ par x, on a les équations en coordonnées rectangulaires, chacune du degré n ; mais l'équation T se décompose en une droite $y=0$ axe des x et une ligne du degré $m-1$; posant $\sin m\varphi=0$, on obtient m droites passant par l'origine et rencontrant la ligne T à l'infini ; donc cette ligne est formée de $2\,m$ branches infinies

l'axe polaire est une de ces droites; la seconde droite fait avec cet axe un angle de $\frac{180^\circ}{m}$; la troisième un angle de $2 . \frac{180^\circ}{m}$, la quatrième de $\frac{180^\circ}{m}$ et ainsi de suite.

Posant $\cos m\varphi = 0$, c'est le système de m droites passant par l'origine et faisant successivement avec l'axe des angles de $\frac{90^\circ}{m}$, $\frac{3.90^\circ}{m}$, $\frac{5.90^\circ}{m}$, etc., et rencontrant la courbe U à l'infini; elle est donc aussi composée de $2m$ branches infinies. Ainsi, un cercle de rayon infini, ayant son centre à l'origine, rencontre les deux courbes, chacune en $2m$ points se succédant de telle sorte que chaque point d'intersection d'une courbe se trouve toujours entre deux points d'intersection consécutifs d'une autre courbe.

De cette disposition géométrique, l'on conclut avec évidence que les deux courbes U et T se rencontrent en m points; et par conséquent r et φ sont réels, et la fonction X est décomposable en facteurs trinômes de la forme $x^2 - 2xr\cos\varphi + r^2$, ou en d'autres termes cette fonction a toujours des racines binômes de la forme $a + b\sqrt{-1}$.

6. L'illustre géomètre démontre de plus, par des considérations très-simples, très-ingénieuses, que ces points d'intersection ne surpassent pas le nombre m, et qu'on peut assigner le nombre de points d'intersection qui tombent dans l'intérieur d'un cercle de rayon fini, ayant le pôle pour centre. M. Cauchy a depuis généralisé ce théorème en remplaçant le cercle par une courbe quelconque (*). l'auteur après avoir énoncé seulement d'autres propriétés de ces courbes, par exemple, qu'elles se coupent mutuellement à angles droits, et que si plusieurs branches d'une de ces courbes passent par le même point, il y aura un nombre

(*) Liouville. Journal, t. 3, 1837.

égal de branches de l'autre courbe qui passeront par ces points, et elles se couperont sous des angles égaux, ajoute *Denique observo, minimè impossibile esse, ut demonstratio præcedens, quàm hìc principiis geometricis superstruxi, etiam in forma mere analytica exhibeatur* (p. 28); c'est cette forme *mere analytica* qui est l'objet des belles études de M. Prouhet, que nous devons faire connaître.

7. Soit $f(z)=0$; et faisant $z=x+y\sqrt{-1}$; on obtient $P+Q\sqrt{-1}=0$; $P=0$, $Q=0$; et P et Q étant des fonctions de x et y, identiques aux fonctions U et T exprimées en coordonnées rectangulaires; les études sont divisées en sept chapitres dont le premier (1 à 2) ne contient que les définitions; l'auteur nomme *points-racines* les intersections des lignes P et Q; le second chapitre (2—6) contient les relations entre les dérivées *partielles* de divers ordres de P et de Q; elles sont de deux genres; celles qui existent entre les dérivées de P et celles de Q, et celles qui existent entre les dérivées de la même fonction. On a

$$\frac{dz}{dx}=1,\quad \frac{dz}{dy}=\sqrt{-1},$$

d'où

$$\frac{dfz}{dx}=f'z\frac{dz}{dx}=f'z=\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dx}\sqrt{-1},$$

$$\frac{dfz}{dy}=f'z\frac{dz}{dy}=f'z\sqrt{-1}=\frac{dP}{dy}+\frac{dQ}{dy}\sqrt{-1},$$

d'où

$$\frac{dP}{dx}=\frac{dQ}{dy};\quad \frac{dP}{dy}=-\frac{dQ}{dx}.$$

De ces deux équations fondamentales, on déduit facilement

$$\frac{d^nP}{dx^kdy^{n-k}}=-\frac{d^nQ}{dx^{k-1}dy^{n-k+1}},\quad \frac{d^nQ}{dx^kdy^{n-k}}=-\frac{d^nP}{dx^{k-1}dy^{n-k+1}}$$

$$\frac{d^nP}{dx^kdy^{n-k}}=-\frac{d^nP}{dx^{k-2}dy^{n-k+2}};\quad \frac{d^nQ}{dx^kdy^{n-k}}=-\frac{d^nQ}{dx^{k-2}dy^{n-k+2}}$$

Ainsi les valeurs absolues des dérivées de même ordre pour la même fonction sont égales.

Le paragraphe III (6 — 8), est consacré aux différences et aux différentielles totales. Supposons que dans fz, on remplace z par $z + \Delta x + \Delta y \sqrt{-1}$, et prenons

$$\Delta x + \Delta y \sqrt{-1} = r(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1}), \quad r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

on trouve facilement par le théorème de Taylor, en égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires,

$$\Delta P = \sum_1^n \frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^nP}{dx^n}\cos n\theta + \frac{d^nP}{dx^{n-1}dy}\sin n\theta\right) + R_1,$$

$$\Delta Q = \sum_1^n \frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^nP}{dx^n}\sin n\theta - \frac{d^nP}{dx^{n-1}dy}\cos n\theta\right) + R_2,$$

R_1 et R_2 désignant les restes de la série ; on a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cot\theta$, passant aux infiniment petits, et désignant par ω la limite de θ, ΔP et ΔQ deviennent les différentielles totales du $n^{ième}$ ordre divisée par le produit $1.2.3\ldots n$, donc

$$\frac{d^nP}{dy^n} = \frac{\frac{d^nP}{dx^n}\cos n\omega + \frac{d^nP}{dx^{n-1}dy}\sin n\omega}{\sin^n\omega}.$$

$$\frac{d^nQ}{dy^n} = \frac{\frac{d^nP}{dx^n}\sin n\omega - \frac{d^nP}{dx^{n-1}dy}\sin n\omega}{\sin^n\omega}.$$

Au moyen de ces expressions analytiques, l'auteur déduit facilement dans le paragraphe IV (8—13), les propriétés des courbes P et Q (U et T de M. Gauss). Il démontre : 1° que lorsque l'équation donnée $f(z) = 0$, a n racines égales, il y a dans chacune de ces courbes un point-racine multiple où passent n branches ayant chacune une tangente distincte, et deux tangentes consécutives comprennent un angle égal à $\frac{\pi}{n}$, et entre deux tangentes consécutives à la courbe P, il y a toujours une tangente à la courbe Q ; et lorsqu'un point racine est simple, les courbes P et Q se coupent à angles droits, propriétés énoncées aussi ci-dessus ; M. Prouhet démontre de plus qu'aucun point-racine ne peut être ni un point d'arrêt, ni un point isolé ; ce qui est bien mentionné, mais ne semble pas solidement établi dans la dissertation de l'illustre professeur de Gottingue. Le paragraphe V (13—16), contient les propriétés des courbes données par les équations $P - Q = 0$, $P + Q = 0$; ces propriétés sont identiques aux précédentes. A l'aide de ces courbes, M. Prouhet démontre le beau théorème de M. Cauchy mentionné ci-dessus. Le nombre des points-racines situés dans l'intérieur d'un contour fermé, en supposant qu'il ne s'en trouve aucun sur ce contour même, est égal à la demi-différence entre le nombre des variations descendantes et ascendantes du rapport $\frac{P}{Q}$ pour toute l'étendue du contour supposé parcouru dans le sens direct de rotation. Ce nombre est aussi égal à la demi-différence, entre les variations ascendantes et descendantes du rapport inverse $\frac{Q}{P}$; lorsqu'une quantité passe du négatif au positif, la variation est ascendante.

Les asymptotes des courbes P et Q sont déterminées dans le paragraphe VII (18—22) ; l'auteur parvient aux mêmes résultats que M. Gauss dont il avertit, dans une note au bas de la page 18, n'avoir point connu la dissertation ; et ayant recours, comme M. Gauss encore, à un cercle infini, l'auteur en conclut qu'une équation algébrique du degré m, a autant de racines de la forme $a + b\sqrt{-1}$.

Le paragraphe VIII (22—23), traite des propriétés des surfaces données par les équations à trois variables $t = P$, $t = Q$; M. Gauss mentionne ces surfaces, mais transitoirement (*). Enfin le dernier paragraphe (23—24) indique com-

(*) La dissertation de M. Gauss se termine ainsi : *Hoc vero et reliqua, quæ in hac demonstratione addigitare tantum modo potui, alia occasione fusius exsequi mihi reservo.*

ment, au moyen des formules rapportées ci-dessus, on peut quelquefois parvenir à séparer les quantités réelles et les imaginaires dans une fonction donnée, telle que $\log(x+y\sqrt{-1})$ qui est égal à $\log\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{-1}$ arc tangent $\frac{y}{x}$.

Puissions-nous souvent être gratifiés d'études aussi intéressantes, et si instructives (*).