

## **Problème par écrit. Proposé à Paris aux examens de 1842, pour l'admission à l'École polytechnique**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 1  
(1842), p. 400-401

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1842\\_1\\_1\\_\\_400\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__400_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME PAR ÉCRIT.

*Proposé à Paris aux examens de 1842, pour l'admission à l'École polytechnique (V. p. 385).*

Soit  $VPQV'$  une ellipse donnée;  $A$  le centre;  $M$  un point donné dans le plan de l'ellipse;  $MPQ$  une sécante quelconque,  $PQ$  partie de la sécante interceptée par l'ellipse;  $VAV'$  un diamètre parallèle à la sécante;  $N$  un point de la sécante tel que l'on a  $NM \times PQ = \overline{VV'}^2$ ; trouver le lieu géométrique de  $N$ .

*Solution.* Prenons le diamètre  $AM$  passant par le point donné  $M$  pour axe des  $y$ ; le centre  $A$  pour origine des coordonnées que nous supposons rectangulaires. Soit  $AM = q$ , longueur connue, et soit  $\varphi$  l'angle variable du diamètre  $VV'$  avec l'axe des  $y$ ; c'est aussi l'angle de la sécante  $MPQ$  avec le même axe; l'équation de l'ellipse rapportée à son centre est en général de la forme

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 - F = 0. \quad (1)$$

Soit  $y = mx$  équation du diamètre  $VAV'$ , ou  $m = \cot \varphi$ , désignant par  $d$  la longueur de ce diamètre, on trouve facilement

$$d^2 = + \frac{4F(m^2 + 1)}{Am^2 + Bm + C}, \quad (2)$$

l'équation de la sécante est

$$y = mx + q, \quad (3)$$

soient  $x', y'$ , les coordonnées du point  $P$ ;  $x'', y''$ , les coordonnées du point  $Q$ ; et soit  $PQ = c$ , on aura

$$c^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 = (m^2 + 1)(x' - x'')^2. \quad (4)$$

Éliminant  $y$  entre les équations (1) et (3), on trouve

$$x^2 (Am^2 + Bm + C) + qx(2Am + B) + Aq^2 - F = 0, \quad (5)$$

$x'$  et  $x''$  sont les deux racines de cette équation. On en déduit

$$\begin{aligned} (x' - x'')^2 &= (x' + x'')^2 - 4x'x'' = \frac{q^2(2Am + B)^2}{(Am^2 + Bm + C)^2} - \frac{4(Aq^2 - F)}{Am^2 + Bm + C} \\ &= \frac{+4AFm^2 + 4BFm + q^2(B^2 - 4AC) + 4CF}{(Am^2 + Bm + C)^2}. \end{aligned}$$

Soit  $MN = z$ , on a donc, en vertu de la condition du problème,  $cz = d^2$  ou  $c^2 z^2 = d^4$ ; remplaçant  $c^2$  et  $d^2$  par leurs valeurs, on a  $z^2 [+4AFm^2 + 4BFm + q^2(B^2 - 4AC) + 4CF] = (m^2 + 1)16F^2$ ; mettant  $\cot \varphi$  au lieu de  $m$ , il vient

$$z^2 [+4AF \cos^2 \varphi + 4BF \sin \varphi \cos \varphi + \sin^2 \varphi (q^2(B^2 - 4AC) + 4CF)] = 16F^2. \quad (6)$$

Équation polaire du lieu cherché: M est le pôle, et les angles  $\varphi$  sont comptés de l'axe des  $y$ ; passant aux coordonnées rectangulaires, on a  $\cot \varphi = \frac{y}{z}$ ,  $\sin \varphi = \frac{x}{z}$ ,  $z^2 = y^2 + x^2$ : il vient  $AFy^2 + BFxy + N^2x^2 - 4F^2 = 0$  ou  $4N^2 = q^2(B^2 - 4AC) + 4CF$ , conique ayant son centre au point M.