BOUTROUX

Démonstration d'un théorème de M. Chasles

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 365-368

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__365_1>

DÉMONSTRATION

D'UN THÉORÈME DE M. CHASLES,

PAR M. BOUTROUX,
Élève du Collége royal d'Orléans.

Un système de forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, peut toujours se réduire à deux forces non situées dans le même plan, et cette réduction peut se faire d'une infinité de manières. Quelles que soient les deux forces qu'on considère, la pyramide triangulaire qui a pour sommets les extrémités des lignes qui représentent les forces, a un volume constant.

Démonstration. On sait qu'un système de forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, se ramène généralement à une force et à un couple qui ne sont pas dans le même plan. En transportant le couple parallèlement à son plan, de manière que l'une des extrémités de son bras de levier vienne sur le point d'application de la force, cette dernière et l'une des forces du couple étant appliquées au même point, se composent en une seule, et il reste deux forces non situées dans le même plan. Le couple pouvant être changé en une infinité d'autres équivalents et pouvant d'ailleurs tourner dans son plan, ce système de deux forces pourra varier d'une infinité de manières.

Considérons donc le couple (P, — P), dans l'une de ses positions; soit MN (*fig.* 80) le plan du couple, et Q la force qui doit se composer avec la force P du couple · construisons le parallélogramme, et soit AR la résultante. La pyramide construite sur les deux forces — P et AR aura pour mesure de son volume sa base ABP multipliée par le $\frac{1}{3}$ de la distance du point R au plan MN.

Faisons maintenant tourner le couple dans son plan autour du point A et supposons qu'il prenne la position P'AB'. Ramenons encore ce couple et la force AQ à deux forces — P et AR'; la pyramide construite sur ces deux forces aura même base que la précédente, car les triangles AB'P' et ABP sont égaux, puisque les deux couples sont identiques. Elle aura aussi même hauteur, car le plan MN et le plan des deux lignes RQ et R'Q sont parallèles d'après la construction. Les perpendiculaires abaissées des points R et R' sur le plan MN sont par conséquent égales, les deux pyramides ont donc des volumes équivalents.

Nous avons supposé que le couple se déplaçait sans que sa force changeât ; s'il se transforme en un autre équivalent, c'est-à-dire d'un moment égal, le triangle qui forme la base de la pyramide conserve la même surface qu'auparavant, puisque le produit de sa base par sa hauteur ne varie pas. On démontrerait comme auparavant que la hauteur de la pyramide reste toujours la même ; le théorème est donc démontré (*).

Observation. Le beau théorème de M. Chasles est une conséquence immédiate des conditions d'équilibre : 1° des forces sont en équilibre autour d'un axe fixe, lorsque la somme algébrique de leurs moments par rapport à cet axe est nulle : le moment d'une force par rapport à un axe, c'est le produit de cette force par sa plus courte distance à l'axe, multiplié par le sinus de l'angle des deux droites ; 2° le volume d'une pyramide triangulaire est égal au sixième du produit de deux arêtes opposées par leur plus courte distance et par le sinus de leur angle ; 3° donc, si sur l'axe fixe on prend deux points à volonté, ils forment généralement avec les extrémités d'une force les sommets d'une pyramide triangulaire ; il y a autant de pyramides que de forces ; donc dans le cas d'équilibre la somme algébrique des volumes des pyramides est nulle. 4° Soient m forces en équilibre, en prenant la direction d'une quelconque de ces forces pour axe fixe, l'équilibre subsistera encore ; combinant les extrémités de cette force, successivement avec les extrémités des autres forces, on aura $m-1$ pyramides dont la somme des volumes sera nulle ; faisant le même raisonnement pour chaque force, on obtient m équations entre $\frac{m(m-1)}{2}$ pyramides ; il y a donc $\frac{m(m-3)}{2}$ inconnues de plus que d'équations ; 5° soient

(*) L'auteur a depuis complété cette démonstration. Tm.

les quatre forces P, Q, R, S en équilibre; représentons par PQ, PR, etc., les volumes des pyramides triangulaires dues aux forces P et Q, P et R, etc.; on aura donc

$$\begin{aligned} PQ+PR+PS&=0,\\ QP+QR+QS&=0,\\ RP+RQ+RS&=0,\\ SP+SQ+SR&=0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire $PQ=RS$, $PR=QS$, $PS=QR$; ce qui revient au théorème de M. Chasles. Tm.