PURY

Démonstration du théorème 29

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 356-357

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__356_0>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 29 (p. 248).

PAR M. PURY.

Étant donnée une courbe quelconque du second degré : on joint un point donné du plan au centre, et on mène par le point la conjuguée du diamètre que nous venons de tracer. Si on suppose en outre que par le point on mène une sécante quelconque qui rencontre la courbe en deux points et que par les points de rencontre on mène les tangentes ; ces tangentes détermineront des segments égaux sur la conjuguée du diamètre passant par le point donné.

1° Pour démontrer ce théorème, je me servirai d'abord du lemme suivant (*) : Si A, B, C, D sont situés sur une droite et tels que l'on ait $AB:BC::AD:CD$; si l'on joint un point S quelconque aux points A, B, C, D, toute ligne a, b, c, d qui rencontre les quatre lignes SA, SB, SC, SD aux points a, b, c, d sera partagée en ces points de la même manière que la ligne AD : c'est-à-dire que l'on aura $ab:bc::ad:cd$, et que si on mène une parallèle à l'une des lignes du faisceau harmonique, elle sera coupée par les trois autres en trois points dont l'un d'eux sera équidistant des deux autres : par le point c et le point C, je mène une parallèle à SA : on en déduit

$$CE : SA :: DC : DA$$
$$FC : SA :: BC : AB ;$$

or, $DC : DA :: BC : AB$, donc $CE = FC$, donc par suite $ec = cf$; et en formant les proportions

$$ec : sa :: dc : da$$
$$sc : sa :: bc : ab ;$$

comme $ec = fc$, il s'ensuit que $dc : da :: bc : ab$. C.Q.F.D.

(*) Voir p. 315

2° Considérons actuellement le théorème proposé :

Soit o le centre de la courbe, soit A le point donné : AP la conjuguée du diamètre Ao ; soit AN une sécante partant du point A et qui rencontre la courbe aux points M et N, soit MR la tangente en M, NR la tangente en N ; et enfin soit RS la polaire du point A : on sait qu'elle passe en R, qu'elle est parallèle au conjugué du diamètre oA : par conséquent parallèle à AP ; et enfin qu'elle détermine sur AN le quatrième point harmonique, de sorte que l'on a : NS : SM :: NA : MA ; donc, en vertu du théorème précédent, PQ est partagé en deux parties égales au point A. C.Q.F.D.