

VACHETTE

Solution du problème 30

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 345-347

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__345_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DU PROBLÈME 30 (p. 248).

PAR M. VACHETTE.

Développer $\frac{\sin(a_1+a_2+\dots+a_m)}{\cos(a_1+a_2+\dots+a_m)}$ en fonctions des sinus et cosinus de a_1, a_2, \dots, a_m .

Désignons par x_1, x_2, \dots, x_m les sinus de a_1, a_2, \dots, a_m ,
 y_1, y_2, \dots, y_m les cosinus de a_1, a_2, \dots, a_m ,

et par $x_{1,m}$ le sin $(a_1+a_2+\dots+a_m)$, par $y_{1,m}$ le cosinus du même arc; par $\Sigma x_1 x_2 x_3 y_4 y_5 \dots y_m$ la somme de tous les produits qu'on peut former avec 3 facteurs pris parmi les sinus, et $m-3$ parmi les cosinus : pour la symétrie nous écrivons $\Sigma y_1 y_2 \dots y_m$, et $\Sigma x_1 x_2 x_3 \dots x_m$.

D'après ces notations, on aura les égalités fondamentales
 $x_{1,m} = x_{1,m-1} y_m + y_{1,m-1} x_m$; $y_{1,m} = y_{1,m-1} y_m - x_{1,m-1} x_m$.
 Nous allons chercher alternativement

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \dots & x_{1,m} \\
 y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} & & y_{1,m} \\
 \left\{ \begin{array}{l} x_{1,1} = x_1 \\ y_{1,1} = y_1 \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l} x_{1,2} = x_1 y_2 + y_1 x_2 = \Sigma x_1 y_2 \\ y_{1,2} = y_1 y_2 - x_1 x_2 = \Sigma y_1 y_2 - \Sigma x_1 x_2 \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l} x_{1,3} = \Sigma x_1 y_2 y_3 - \Sigma x_1 x_2 x_3 \\ y_{1,3} = \Sigma y_1 y_2 y_3 - \Sigma y_1 x_2 x_3 \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l} x_{1,4} = \Sigma x_1 y_2 y_3 y_4 - \Sigma x_1 x_2 x_3 y_4 \\ y_{1,4} = \Sigma y_1 y_2 y_3 y_4 - \Sigma y_1 y_2 x_3 x_4 + \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 \end{array} \right.
 \end{array}$$

On obtient le 1^{er} terme de $x_{1,4}$, par exemple, $\Sigma x_1 y_2 y_3 y_4$, en multipliant par y_4 le premier terme de $x_{1,3}$; par x_4 le 1^{er} terme de $x_{1,3}$ et ajoutant les 2 produits; on a ainsi tous les

termes de la forme $x_{1,2}y_{3,4}$, comme il est aisé de s'en assurer.

On aura le 2^e terme en ajoutant les seconds termes, multipliés respectivement par y_4 et x_4 , de $x_{1,3}$ et $y_{1,3}$.

Le 1^{er} terme de $y_{1,4}$ s'obtient en multipliant par y_4 le 1^{er} terme de $y_{1,3}$; le 2^e en ajoutant le 2^e terme de $y_{1,3}$ et le 1^{er} de $x_{1,3}$, multipliés respectivement par y_4 et $-x_4$; le 3^e en multipliant par $-x_4$ le dernier terme de $x_{1,3}$.

Le procédé est général; on trouvera de même

$$\begin{cases} x_{1,5} = \Sigma x_1 y_2 y_3 y_4 y_5 - \Sigma x_1 x_2 x_3 y_4 y_5 + \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ y_{1,5} = \Sigma y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 - \Sigma y_1 y_2 y_3 x_4 x_5 + \Sigma y_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \end{cases}$$

etc., et généralement

$$\begin{cases} x_{1,m} = \Sigma x_1 y_2 \dots y_m - \Sigma x_1 x_2 x_3 \dots y_m \\ \quad + \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots y_m - \dots + \dots \\ y_{1,m} = \Sigma y_1 y_2 \dots y_m - \Sigma y_1 y_2 \dots y_{m-2} x_{m-1} x_m \\ \quad + \Sigma y_1 \dots y_{m-4} x_{m-3} x_{m-2} x_{m-1} x_m - \dots + \dots \end{cases}$$

Les termes de $x_{1,m}$ sont alternativement positifs et négatifs; tous les termes sont des sommes de produits de m facteurs: le 1^{er} d'un facteur x , et de $m-1$ facteurs y ; le 3^e de 3 facteurs x , et de $m-3$ facteurs y ;... ainsi de suite, le nombre des facteurs x augmentant de 2 unités à chaque terme; si m est de la forme $4m'+1$, le dernier terme sera, avec le signe $+$, $\Sigma x_1 \dots x_m$; si m est de la forme $4m'+2$, le dernier terme sera, avec le signe $+$, $\Sigma x_1 \dots x_{m-1} y_m$; si m est de la forme $4m'+3$, il sera $-\Sigma x_1 x_2 \dots x_m$; si m est de la forme $4m'$, il sera $-\Sigma x_1 x_2 \dots x_{m-1} y_m$.

Les termes de $y_{1,m}$ sont alternativement positifs ou négatifs: ils sont tous des sommes de produits de m facteurs, le 1^{er} de m facteurs y , le 2^e de $m-2$ facteurs y et 2 facteurs x : le 3^e de $m-4$ facteurs y et 4 facteurs x et ainsi de suite, le nombre des facteurs y diminuant de 2 unités à chaque terme. Si m est de la forme $4m'+1$, le dernier terme

est $+\sum y_1 x_2 \dots x_m$; si m est de la forme $4m'+2$, il est $-\sum x_1 x_2 \dots x_{m-2} x_{m-1} x_m$; si m est de la forme $4m'+3$, il est $-\sum y_1 x_2 \dots x_m$; si m est de la forme $4m'$, il est $+\sum x_1 x_2 \dots x_m$.

Ces formules, reconnues vraies par la seule analogie, peuvent se démontrer par la méthode connue; si elles sont vraies pour m termes, elles le seront pour $m+1$ termes: la démonstration en est très-facile (*).

Si on suppose $x_1 = x_2 = \dots = x_m = \sin a$
 $y_1 = y_2 = \dots = y_m = \cos a$

on aura $x_{1,m} = \sin ma$ et $y_{1,m} = \cos ma$;

et l'on retrouve les formules de Jean Bernoulli (1720)

$$\begin{aligned} \sin ma &= \frac{m}{1} \sin a \cos^{m-1} a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \sin^3 a \cos^{m-3} a \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} \sin^5 a \cos^{m-5} a - \dots \\ \cos ma &= \cos^m a - \frac{m(m-1)}{1.2} \cos^{m-2} a \sin^2 a \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \cos^{m-4} a \sin^4 a \\ &- \frac{m(m-1) \dots (m-5)}{1.2.3.4.5.6} \cos^{m-6} a \sin^6 a. \end{aligned}$$
