NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Note sur le centre de gravité de l'arc de cercle et des surfaces sphériques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 278-280

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__278_0>

NOTE

SUR

LE CENTRE DE GRAVITÉ DE L'ARC DE CERCLE

ET

DES SURFACES SPHÉRIQUES.

Arc de cercle.

1° Soit une droite de longueur l uniformément pesante et touchant un cercle d'un rayon r, soit h la distance du point de contact a un diamètre donné, ce point de contact étant le centre de gravité de la droite, et désignons par l' la projection de l sur ce diamètre. Le moment statique de la droite l par rapport à ce diamètre $= hl$ et les triangles semblables donnent $hl = rl'$, d'où $h = \frac{rl'}{l}$.

2° De là on conclut facilement que la somme des moments d'un système quelconque de droites uniformément pesantes, et touchant une circonférence par leurs centres de gravité, relativement à un diamètre, est égale au rayon multiplié par la somme des projections de ces droites sur le diamètre.

3° A la limite, un arc de cercle se confondant avec le polygone circonscrit, il s'ensuit que le moment statique d'un arc de cercle uniformément pesant, relativement à un diamètre, est égal au rayon multiplié par la projection de l'arc sur ce diamètre.

4° La distance du centre de gravité de l'arc à un diamètre, étant égale au moment statique divisé par la longueur de l'arc, il s'ensuit que cette distance est une quatrième proportionnelle à l'arc, à sa projection sur le diamètre, et au rayon.

5° La distance du centre de gravité d'un arc au diamètre parallèle à sa corde, est donc une quatrième proportionnelle à l'arc, à la corde et au rayon.

Surfaces sphériques.

6° Soit une surface plane d'une aire l^2, uniformément pesante et touchant par son centre de gravité une sphère d'un rayon r; et h la distance du point de contact à un plan diamétral donné; désignons par l'^2 l'aire de la projection de l^2 sur ce plan diamétral; le moment statique de l'aire l^2, pris par rapport à ce plan, est $=hl^2=rl'^2$, car $\frac{h}{r}$ est le cosinus de l'angle que forme le plan tangent avec le plan diamétral; et on sait que $l'^2=l^2\frac{h}{r}$.

7° De là on déduit que la somme des moments d'un système quelconque de surfaces planes, uniformément pesantes relativement à un plan diamètre, et touchant une sphère par leurs centres de gravité, est égale au rayon de la sphère multiplié par la somme des projections de ces aires sur le plan diamètre.

8° Passant aux limites, il s'ensuit que le moment statique d'une surface sphérique, pris par rapport à un plan diamètre, est égal au rayon de la sphère multipliée par l'aire de la projection de cette surface sur le plan.

9° On conclut, comme ci-dessus, que la distance du centre de gravité d'une surface sphérique à un plan diamétral, est une quatrième proportionnelle à l'aire de la surface, à sa projection sur le plan et au rayon de la sphère.

10° Soit ABC un triangle sphérique; O le centre de la sphère; choisissons pour plan diamètre celui dont A est le pôle; la projection du triangle sphérique se confond avec celle du secteur OBC; l'aire de ce secteur est $\frac{1}{2}r.a$; a désignant la longueur métrique de l'arc a opposé à l'angle A ; le cosinus de l'angle que forme le plan de ce secteur avec le plan diamètre est $=\sin c \sin B$; donc la projection du triangle sphérique $=\frac{1}{2} ra \sin c \sin B$; nommant S l'aire du triangle, la distance de son centre de gravité au plan diamètre sera $=\dfrac{r^2 a \sin c \sin B}{2S}$.

11° Autrement; soit α l'arc perpendiculaire abaissé du sommet A sur la base BC ; on a $\sin\alpha = \sin c \sin B$; désignant par d la distance du centre de gravité du triangle sphérique au plan polaire de A, on a donc $d=\dfrac{r^2 a \sin\alpha}{2S}$.

12° Soit P le volume de la pyramide qui a pour sommet le centre O et pour base le triangle sphérique ABC, et Q le volume de la pyramide qui a pour sommet A et pour base le secteur OBC; on a

$$3P = rS,$$

$$3Q = \frac{r^2 a \sin\alpha}{2};$$ car $r\sin\alpha$ est la hauteur de cette pyramide,

donc $d = \dfrac{rQ}{P}$; ainsi les trois distances du centre de gravité d'un triangle sphérique aux trois plans polaires des sommets, sont proportionnelles aux volumes des pyramides qui ont *respectivement pour sommet un des sommets du triangle*, et pour base le secteur opposé.

13° Les trois distances du centre de gravité aux plans polaires, sont parallèles respectivement aux trois arêtes de la pyramide sphérique, et forment un angle trièdre symétrique à l'angle trièdre donné. Tm.