A.-J.-H. VINCENT

Note sur la construction des tables de sinus naturels, principalement en ce qui a rapport au degré d'approximation des calculs

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 272-277

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__272_1>

NOTE

SUR

LA CONSTRUCTION DES TABLES DE SINUS NATURELS,

Principalement en ce qui a rapport au degré d'approximation des calculs.

PAR A.-J.-H. VINCENT,
Professeur au collége St.-Louis.

Partons de la formule

$$\sin a = 3 \sin \frac{1}{3} a - 4 \sin^3 \frac{1}{3} a,$$

qui donne, en substituant dans le dernier terme, $\frac{1}{3}a$ au lieu de $\sin\frac{a}{3}$,

$$\sin a > 3\sin\frac{1}{3}a - \frac{4}{27}a^3.$$

Dans cette inégalité, remplaçons partout a par $\frac{a}{3}$, nous aurons

$$\sin\frac{1}{3}a > 3\sin\frac{1}{9}a - \frac{4}{27^2}a^3;$$

remplaçons de même a par $\frac{a}{3}$ dans cette seconde inégalité, puis de même a par $\frac{a}{3}$ dans l'inégalité obtenue, et ainsi de suite; nous obtiendrons de cette manière une série d'inégalités successives que nous pourrons écrire ainsi, en reprenant à partir de la première :

$$\sin a > 3\sin\frac{a}{3} - 4\frac{a^3}{3^3},$$

$$\sin\frac{a}{3} > 3\sin\frac{a}{3^2} - 4\frac{a^3}{3^6},$$

$$\sin\frac{a}{3^2} > 3\sin\frac{a}{3^3} - 4\frac{a^3}{3^9},$$

$$\sin\frac{a}{3^3} > 3\sin\frac{a}{3^4} - 4\frac{a^3}{3^{12}},$$

. . . .

et généralement

$$\sin\frac{a}{3^{n-1}} > 3\sin\frac{a}{3^n} - 4\frac{a^3}{3^{3n}}.$$

Maintenant, supposons que l'on multiplie ces diverses inégalités, à partir de la seconde, par les puissances successives de 3 jusqu'à 3^{n-1}, et que l'on ajoute tous les résultats; il en résultera, quand on aura supprimé tous les termes qui se détruisent :

$$\sin a > 3^n\sin\frac{a}{3^n} - 4\frac{a^3}{27}\left\{1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \dots\right\}.$$

Dans ce résultat, faisons $n=\infty$; l'arc infiniment petit $\frac{a}{3^n}$ se confondra avec son sinus, ce qui réduira la première partie du second membre à l'arc a lui-même, en introduisant aux deux termes de la fraction le facteur commun 3^n que l'on pourra supprimer. Quant à la seconde partie, la progression indéfinie par quotient qui est dans l'accolade se réduira à $\frac{9}{8}$; et ainsi $\left(\text{attendu que } \frac{4}{27} \times \frac{9}{8} = \frac{1}{6}\right)$, l'inégalité se réduira à la suivante :

$$\sin a > a - \frac{1}{6}a^3,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$a - \sin a < \frac{1}{6}a^3 :$$

C'est-à-dire que la limite de l'erreur commise quand on prend un petit arc à la place de son sinus, est égale à *un sixième du cube de ce petit arc.*

Sous un autre point de vue, les quantités a et $a - \frac{1}{6}a^3$, étant deux limites, l'une supérieure, l'autre inférieure, entre lesquelles se trouve comprise la valeur de $\sin a$, cherchons de même deux limites pour $\cos a$. Or, celles-ci s'obtiendront en substituant dans $\cos a$ exprimé en fonction de $\sin a$, ou mieux de $\sin \frac{1}{2}a$, les deux valeurs limites de cette dernière ligne trigonométrique, ce qui donnera :

1° $$\cos a = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}a,$$

2° $$\cos a > 1 - 2\frac{a^2}{4}, \quad \text{ou} \quad \cos a > 1 - \frac{a^2}{2},$$

3° $$\cos a < 1 - 2\left\{\left(\frac{a}{2}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{2}\right)^3\right\}^2,$$

ou $$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2}\left\{1 - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}^2,$$

et *à fortiori*, en développant et supprimant le terme négatif du sixième degré dans le second membre,

$$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}.$$

Ainsi, comme on le voit, au moyen des quatre termes $\frac{a}{1}$, $\frac{a^2}{1.2}$, $\frac{a^3}{1.2.3}$ et $\frac{a^4}{1.2.3.4}$, on peut exprimer les valeurs approchées des *sinus* et des *cosinus*, ainsi que les limites de ces valeurs approchées; ce sont:

Pour la valeur approchée *en plus*, de $\sin a$, le terme a, et pour la limite de l'erreur $\frac{a^3}{6}$.

Pour la valeur approchée *en moins*, de $\cos a$, l'expression $1 - \frac{a^2}{2}$, et pour la limite de l'erreur $\frac{a^4}{24}$, c'est-à-dire, *un vingt-quatrième de la quatrième puissance de l'arc.*

Et par suite encore, $a - \frac{a^3}{6}$ serait une valeur du sinus approchée *en moins*, et $1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}$ une valeur du cosinus approchée *en plus.*

(L'unité ou le terme 1, peut même aussi, quand l'arc est extrêmement petit, être lui-même considéré comme une valeur du cosinus approchée *en plus*, la limite de l'erreur étant alors $\frac{a^2}{2}$ ou la *moitié du quarré de l'arc.*)

Prenons pour a la *seconde du degré centésimal*, ou la *millionième* partie du quadrant, dont la valeur, quand on fait le rayon égal à l'unité, est

$$\frac{\pi}{2\,000000} = 0{,}0000015707963 26795:$$

l'erreur commise en employant cet arc pour son *sinus*, sera alors moindre que

$$\frac{1}{6}(0{,}0000016)^3, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{6}(0{,}000000000000000004096),$$

ou 0,000000000000000001, c'est-à-dire *l'unité décimale du* dix-huitième ordre : on pourra donc pousser le calcul de la valeur de a jusqu'à la dix-huitième décimale, et considérer le résultat comme représentant jusqu'à cette limite la valeur de sin a, ce qui exige l'emploi des douze premières décimales du nombre π.

Quant à la valeur de cos a, en la supposant égale à $1-\frac{a^2}{2}$, on ne commettra pas d'erreur dans les vingt-quatre premières décimales, car il est facile de voir que $\frac{1}{24}(0{,}000002)^4$, est moindre que l'unité du vingt-quatrième ordre ; et pour atteindre ce degré d'approximation pour le cosinus, la même valeur de a est encore suffisante : en effet, le terme $\frac{a^2}{2}$ ayant onze zéros avant le premier chiffre significatif, et présentant d'ailleurs autant de chiffres significatifs exacts que a, les 12 décimales de π, ou les 18 de a, nous en donneront 24 pour cos a.

Cela posé, prenons les deux formules de *Th. Simpson :*

$$\sin(m+1)a = \sin ma \times 2\cos a - \sin(m-1)a,$$
$$\cos(m+1)a = \cos ma \times 2\cos a - \cos(m-1)a,$$

dans lesquelles nous ferons $a=1''$; et supposons-y successivement $m=1$, $m=2$,... jusqu'à $m=999999$, hypothèse finale qui reproduit le quadrant. En réalité d'ailleurs, on n'a pas besoin de dépasser le demi-quadrant ; mais en admettant même le cas défavorable où l'on irait jusqu'au quadrant entier, nous voulons faire voir que néanmoins, et *malgré l'accumulation successive des erreurs*, on obtiendrait encore *douze décimales exactes* pour les sinus et cosinus des arcs même les plus rapprochés de cette limite extrême.

A cet effet, soit représentée par δ la fraction d'unité du dix-huitième ordre dont sin 1'' est en défaut ; l'erreur de cos 1″ devra être négligée comme étant d'un ordre décimal beaucoup plus élevé, ou plutôt parce que le nombre de chiffres significatifs exacts de cos 1″ est beaucoup plus élevé que celui de sin 1″ (24 au lieu de 18).

D'après cela, la limite de l'erreur de sin 2″ sera 2δ, celle de sin 3″ sera $2\delta \times 2 - \delta$, ou 3δ, celle de sin 4″ sera $3\delta \times 2 - 2\delta$, ou 4δ, et généralement la limite de l'erreur de sin $(m+1)1''$, sera $m\delta \times 2 - (m-1)\delta$, ou $(m+1)\delta$. Par conséquent, ces erreurs successives, ou plutôt leurs limites supérieures, formant une progression par différence dont la raison est δ, il en résultera pour l'arc de 1000000″, c'est-à-dire pour le quadrant, une erreur limite de 1000000δ, ce qui fait la même fraction de l'unité décimale du 12ᵉ ordre, que δ l'est du 18ᵉ. Conséquemment, le nombre des décimales certainement exactes ou sur lesquelles on peut compter, se trouvera ainsi réduit de 18 à 12; mais il ne sera pas nécessaire de descendre au-dessous de ce dernier nombre.

De même, soit ε la fraction de l'unité décimale du 24ᵉ ordre, dont le cos 1″ est en défaut. L'erreur limite de cos 2″ sera 4ε, parce qu'ici les deux facteurs du terme $\cos 1'' \times 2 \cos 1''$ étant comparables, on ne doit plus rien négliger. Celle de cos 3″ sera $5\varepsilon \times 2 - \varepsilon = 9\varepsilon$; celle de cos 4″ sera de même $10\varepsilon \times 2 - 4\varepsilon = 16\varepsilon$; celle de cos 5″ sera $17\varepsilon \times 2 - 9\varepsilon = 25\varepsilon$, et ainsi de suite; c'est-à-dire en généralisant, que cos $(m+1)\,1''$ comporte une erreur limite de

$$(m^2+1)\varepsilon \times 2 - (m-1)^2\varepsilon = (m+1)^2\varepsilon,$$

ce qui montera pour l'arc de 100°, à $10^{12}\varepsilon$, et fera par conséquent perdre à la série des cosinus, 12 décimales sur les 24, de même que la série des sinus en avait perdu 6 sur 18.

On voit donc que d'un côté comme de l'autre, *on conserve 12 décimales exactes dans toute la suite des calculs.*