

A. PURY

Solution du problème 6. Limite de Lagrange

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 243-244

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__243_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DU PROBLÈME 6 (p. 58).

LIMITE DE LAGRANGE.

PAR M. PURY.

—

— Ax^{m-p} , — Bx^{m-r} , — Cx^{m-s} , etc., étant les termes négatifs d'une équation algébrique à coefficients réels, du degré m : on aura une limite supérieure des racines positives, en additionnant les deux plus grandes des quantités $\sqrt[p]{A}$, $\sqrt[r]{B}$, $\sqrt[s]{C}$, etc.

Démonstration. Le cas le plus défavorable est évidemment celui où l'équation ayant tous ses termes négatifs, à partir du second, est de cette forme :

$$x^m - A_1 x^{m-1} - A_2 x^{m-2} - \dots - A_p x^{m-p} - \dots - A_r x^{m-r} - \dots - A_m = 0, \quad (1)$$

d'où l'on tire

$$1 = \frac{A_1}{x} + \left(\frac{\sqrt{A_2}}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt[3]{A_3}}{x}\right)^3 + \dots + \left(\frac{\sqrt[p]{A_p}}{x}\right)^p + \dots + \left(\frac{\sqrt[r]{A_r}}{x}\right)^r + \dots \quad (2)$$

Soient $\sqrt[p]{A_p}$, $\sqrt[r]{A_r}$, les deux plus grandes quantités de la suite A_1 , $\sqrt{A_2}$, $\sqrt[3]{A_3}$, etc...

Soit de plus $\sqrt[p]{A_p} = n \sqrt[r]{A_r}$, n étant d'abord plus grand que l'unité ; faisant $x = \sqrt[p]{A_p} + \sqrt[r]{A_r} = (n+1) \sqrt[r]{A_r}$, la fraction $\frac{\sqrt[p]{A_p}}{x}$ devient égale à $\frac{n}{n+1}$, toutes les autres fractions $\frac{A_1}{x}$, $\frac{\sqrt[r]{A_2}}{x}$, etc., seront plus petites que $\frac{1}{n+1}$, vu que $\sqrt[r]{A_r}$, est plus grand qu'aucune des quantités A_1 , $\sqrt[r]{A_2}$, etc. ; donc le second membre de l'équation (2) en y substituant cette valeur de x , devient plus petit que la somme

$$\frac{1}{1+n} + \frac{1}{(1+n)^2} + \frac{1}{(1+n)^3} + \dots + \frac{1}{(1+n)^p} + \dots + \frac{1}{(1+n)^m} + \left(\frac{n}{1+n} \right)^p - \frac{1}{(1+n)^p}, \quad (3)$$

$n+1$, étant plus grand que l'unité, cette somme est plus petite que $\frac{1}{n} + \left(\frac{n}{1+n} \right)^p - \frac{1}{(1+n)^p}$; or, ce trinôme est plus petit que l'unité ; en effet, on voit facilement que $\frac{n^p-1}{(1+n)^p} < \frac{n-1}{n}$; il suffit de diviser de part et d'autre par

$n-1$, donc en remplaçant x par $\sqrt[p]{A_p} + \sqrt[r]{A_r}$, le premier membre de l'équation (2) devient à fortiori plus grand que le second membre ; il en est de même dans l'équation (1), etc.

Lorsque $n=1$; la somme (3) est remplacée par la progression géométrique $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m}$, plus petite que l'unité.