A. DE BEAUSACQ

Solution du problème 10

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 236-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__236_1>

SOLUTION DU PROBLÈME 10 (p. 56).

PAR M. A DE BEAUSACQ,
Elève au collége de Versailles.

La base AB d'un triangle rectiligne ABC est donnée de grandeur et de position, la somme des deux autres côtés AC, BC du triangle est égale à une droite donnée; on suppose que ce triangle tourne autour d'un axe rectiligne DE tracé sur son plan; déterminer le sommet C du triangle, de manière que la somme des surfaces décrites par les deux côtés AC, BC, adjacents à la base, soit un maximum ou bien un minimum.

On sait que lorsqu'un système de droites tourne autour d'un axe situé dans son plan, la surface décrite par ce système est égale à la somme des génératrices multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité du système, donc pour résoudre le problème, il suffira de chercher parmi tous les triangles que l'on peut construire avec les données de la question, ceux dans lesquels les centres de gravité des côtés variables, seront l'un le plus éloigné, l'autre le plus rapproché de la droite DE.

Or, supposons que le triangle ABC (*fig.* 56), résolve le problème ; prenons le point G milieu de AC, le point K milieu de BC menons la droite GK et divisons-la en deux parties GM et KM telles que l'on ait

$$(1) \qquad AC : BC :: MK : MG.$$

Le point M sera le centre de gravité du système des droites AC et CB. Il nous suffit donc de chercher les coordonnées de ce point. A cet effet, posons $AC+CB=2a$, $AB=2c$ et $a^2-c^2=b^2$.

Prenons pour axe des x la droite AB, pour axe des y la perpendiculaire EF menée par son milieu, et appelons x' et y' les coordonnées du point C. Ce point doit évidemment se trouver sur une ellipse, ayant pour foyers les points A et B, et pour grand axe $2a$, nous aurons donc entre x' et y', la relation :

$$(2) \qquad a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2.$$

Cela posé, si nous appelons X et Y les coordonnées du point M, nous aurons $Y=\frac{y'}{2}$, d'où l'on tire

$$(3) \qquad y'=2Y,$$

et

$$X=OP-MK=\frac{c+x'}{2}-MK\ (^*).$$

D'ailleurs la proportion (1) donne

$AC+CB$ ou $2a:AC::MK+MG$ ou $c:MK$ d'où $MK=\frac{c\times AC}{2a}$,

(*) La perpendiculaire KP sur AB est omise dans la figure.

et remplaçant le rayon vecteur AC par sa valeur $\frac{a^2+cx}{a}$, il viendra $MK = \frac{c(a^2+cx)}{2a^2}$ et par suite

$$X = \frac{c+x'}{2} - \frac{c(a^2+cx')}{2a^2} = \frac{b^2}{2a^2}x',$$

d'où (4) $$x' = \frac{2a^2}{b^2}X.$$

Remplaçant alors dans l'équation (2) x' et y' par leurs valeurs, nous aurons $4a^2Y^2 + \frac{4a^4}{b^2}X^2 = a^2b^2$, ou

(5) $$b^2Y^2 + a^2X^2 = \frac{1}{4}b^4.$$

Telle est la relation à laquelle doivent satisfaire X et Y, et l'on voit d'ailleurs facilement par cette équation que le lieu géométrique du point M est une ellipse. Maintenant puisque le triangle ACB résout le problème, le point M est sur ce lieu le point le plus éloigné ou le point le moins éloigné de la droite DE; il doit donc se trouver au point de contact d'une tangente menée parallèlement à DE.

Or, dans l'équation de cette tangente, le coefficient de x est égal à la dérivée prise par rapport à X, dans l'équation de la courbe, divisée par la dérivée prise par rapport à Y, le tout précédé du signe moins; de plus puisque cette tangente est parallèle à DE, si nous appelons g la tangente de l'angle EDQ(*), g devra être aussi le coefficient de x dans son équation, nous aurons donc la relation

$$g = -\frac{a^2X}{b^2Y} \quad \text{d'où} \quad Y = -\frac{a^2X}{b^2g}.$$

Et remplaçant Y par sa valeur dans l'équation (5), il viendra

$$\frac{a^4X^2}{b^2g^2} + a^2X^2 = \frac{1}{4}b^4 \quad \text{ou} \quad a^2X^2(a^2+b^2g^2) = \frac{1}{4}b^6g^2,$$

(*) Q est sur le prolongement de BD.

d'où l'on tire

$$X = \pm \frac{b^3g}{2a\sqrt{a^2+b^2g^2}}, \text{ et par suite } Y = \mp \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2g^2}}.$$

Revenons enfin aux égalités (3) et (4), et nous en déduirons

$$x' = \pm \frac{abg}{\sqrt{a^2+b^2g^2}} \quad \text{et} \quad y' = \mp \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2g^2}}.$$

Telles sont les coordonnées des points cherchés; il est d'ailleurs évident que les signes supérieurs doivent être pris ensemble, et les signes inférieurs aussi ensemble.

D'après les valeurs de x' et de y', on voit que les deux points cherchés sont symétriques l'un de l'autre, par rapport aux deux axes, de plus les coordonnées de chacun d'eux seront de mêmes signes, si l'angle EDQ est obtus, et de signes contraires, si ce même angle est aigu.

Enfin si l'on pose $OE = l$, l'ordonnée du point qui donne le maximum devra toujours être de signe contraire à l, et l'ordonnée du point qui donne le minimum devra toujours être de même signe La position des deux points cherchés est donc déterminée.

Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que x' et y' soient des quantités réelles, ce qui exige que b le soit, c'est-à-dire que l'on ait $a^2 > c^2$ ou $a > c$; mais cette condition ne suffit pas; il faut encore que l'on ait, abstraction faite des signes, $x' < a$ et $y' < b$, ce qui a toujours lieu; d'où l'on conclut que le problème est possible toutes les fois que la somme des côtés variables est plus grande que la base donnée. Il pourrait arriver que la droite DE coupât un des triangles qui résout la question, ou même tous les deux; alors pour que la solution que nous venons de proposer puisse s'appliquer aussi à ce cas, il faudrait regarder comme négative la surface engendrée par la révolution des droites qui se trouveraient au-dessous de l'axe de rotation.

Il pourrait encore arriver que l'axe de rotation fut parallèle à la base donnée AB. Pour envisager ce cas, il suffit dans les valeurs de x' et de y' de faire $g=0$, on aura alors $x'=0$ et $y'=\mp b$. On est donc ainsi conduit au théorème suivant: De tous les triangles de même base dont les côtés variables font une somme donnée et qui tournent autour d'un axe situé dans leur plan parallèlement à la base, celui dans lequel la surface engendrée par les côtés variables est un maximum ou un minimum, est le triangle isocèle.

Ce cas comprend évidemment comme cas particulier, celui où l'axe de rotation se confondrait avec la base, c'est-à-dire celui où les triangles tourneraient autour de leur base.

Enfin, il peut arriver que l'axe de rotation soit perpendiculaire à la base; pour envisager ce cas, il nous suffit dans les valeurs de x' et de y' de faire $g=\infty$, nous aurons alors $x=\pm a$ et $y=0$, et nous serons ainsi conduits à cet autre théorème:

De tous les triangles de même base dont les côtés variables font une somme donnée et qui tournent autour d'un axe situé dans leur plan perpendiculairement à leur base, celui dans lequel la somme des surfaces engendrées par la révolution des côtés variables est maximum ou minimum, est le triangle dont les côtés variables diffèrent entre eux d'une quantité égale à la base; triangle qui se réduit à une droite.