TERQUEM

Extraits des journaux

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 213-223

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__213_1>

EXTRAITS DES JOURNAUX.

—

JOURNAL DE CRELLE, 1841, tome 22, 1er cahier.

Les abonnés qui désirent des renseignements plus détaillés doivent s'adresser aux rédacteurs.

STERN (A) à Goettingue.

Sur la résolution des équations transcendantes (p. 1 à 62).

Ce mémoire a remporté le prix proposé sur ce sujet en 1837, par l'Académie des sciences de Copenhague.

L'auteur indique une méthode pour trouver les racines réelles, avec toute approximation désirable dans les équations *numériques* transcendantes à *une inconnue*, et aussi pour découvrir l'existence des racines imaginaires. Cette méthode est fondée sur le théorème de Fourrier, pour trouver le nombre des racines réelles, à l'aide des dérivées successives, la seule qu'on puisse jusqu'ici employer pour les équations transcendantes; on sait que M. Sturm a trouvé depuis une autre suite de fonctions pour les équations algébriques, fonctions qui ne sont que les dérivées combinées avec les racines de l'équation aux carrés des différences (*). Nous donnons quelques équations résolues par M. Stern;

(*) Voir Nouvelles Annales, p. 166.

1° $x \log x = 100$, x entre 3,5972850 et 3,5972851.

Euler avait trouvé $x = 3,5972852$;

2° $x - \cos x = 0$, $x = 0,73908512$ à 10^{-8} près;

Euler trouve 0,7390847,

3° $x - \operatorname{tang} x = 0$, $x = 4,49340964$ à 10^{-8} près;

ce qui répond à un arc de 257°.27′.12″,268; Euler trouve 4,49340834; et Poisson 4,49331; ou il y a une faute typographique à la quatrième décimale (*); on indique ici la valeur de la plus petite racine; il est évident qu'il existe une infinité de valeurs positives, et que la $n^{\text{ème}}$ est comprise entre $n\pi$ et $(n+\frac{1}{2})\pi$;

4° $e^x = x$, n'a que des racines imaginaires, et l'auteur trouve $x = 0,318133 \pm 1,337238\sqrt{-1}$; par un autre procédé, M. Cauchy trouve $x = 0,3181317 \pm 1,3372357\sqrt{-1}$ (Leçons sur le calcul intégral. Leçon 14).

L'auteur montre (p. 59), comment la nouvelle méthode de M. Cauchy, pour approcher de la valeur des racines réelles, dans les équations algébriques ou transcendantes, peut se déduire de la méthode de Fourrier. (Voy. *Compte Rendu* de l'Académie des sciences, n° 10, 1837.) Nous donnerons les deux méthodes prochainement.

M. Oettinger, professeur à Fribourg, dans le Brisgau.

Sur la décomposition des fractions algébriques fractionnaires et rationnelles en fractions partielles (63 à 95).

Par des procédés combinatoires, l'auteur indique une méthode facile pour trouver, directement, chaque coefficient dans les numérateurs des fractions partielles. Les signes combinatoires n'étant pas connus en France, nous ne pouvons,

---

(*) Mémoires de l'Academie des Sciences, tome VIII, p. 420; pour la valeur de la seconde racine, on donne ici 7,73747; la vraie valeur est 7,725.

sans trop allonger, rendre compte de cet intéressant travail.

M. Gauss, professeur à Goettingue (p. 96).

Déduction élémentaire d'un théorème de Trigonométrie sphérique dû à Legendre.

Nous croyons utile de faire précéder cette élégante déduction, de quelques éclaircissements élémentaires.

1° Soient a, b, c, A, B, C, les valeurs circulaires exprimées en degrés et parties de degrés, des trois côtés et des trois angles d'un triangle sphérique tracé sur une sphère d'un rayon R donné en unités métriques, et soit T l'aire de ce triangle exprimée en unités superficielles métriques; on aura $T = \frac{A+B+C-180^\circ}{180^\circ} . \pi . R^2$; la partie fractionnaire, ainsi que π, sont des nombres abstraits. Cette évaluation qu'on trouve maintenant dans tous les ouvrages classiques, a été indiquée pour la première fois par Girard (Albert) (*) et démontré ensuite par Cavalleri (Bonaventure) (**);

2° Faisant $A+B+C-180^\circ = 3\omega$, et $a+b+c=2p$, et supposons $p < 2^q$; l'on a

$$4\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c\sin^2\frac{3}{2}\omega = \sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c),$$

si a, b, c diminuent, ω diminue. En effet, il suffit de démontrer que ω diminue avec c, lorsque a et b conservent leurs valeurs; or $\cos\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}b$ ne changent pas; $\cos\frac{1}{2}c$ augmente, le second membre peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{4}[\cos a - \cos(b+c)]\,[\cos(b-c) - \cos a],$$

les deux facteurs sont essentiellement positifs, et c diminuant, chaque facteur diminue; donc, etc.;

(*) Invention nouvelle en algèbre. Amsterdam, 1629.

(**) Né à Milan en 1598, mort le 5 decembre 1694, *voy* son *Directorium generale uranometricum*.

3° Supposons que sur une autre sphère de rayon $R' > R$, on trace un triangle sphérique dont les côtés aient mêmes longueurs métriques que les côtés du triangle tracé sur la sphère R, les valeurs circulaires de ces côtés seront diminuées dans le rapport de R à R'; elles deviennent $\frac{Ra}{R'}, \frac{Rb}{R'}, \frac{Rc}{R'}$; donc dans ce second triangle la valeur de ω est moindre que dans le premier. Augmentant indéfiniment R, l'excès 3ω des trois angles du triangle sur deux angles droits ira sans cesse en décroissant, et il est facile de voir que zéro est la limite de ce décroissement; car, lorsque le rayon devient infini, la sphère se réduit à un plan, le triangle devenu rectiligne, la somme des angles est égale à deux droits et l'excès est nul; ainsi sur une sphère d'un rayon égal au rayon moyen de la terre, si l'on trace un triangle équilatéral de 40,000 mètres de côté, l'excès est réduit à $3''.20'''$;

4° Soient a', b', c', les longueurs métriques des arcs a, b, c; on a

$$a' = \frac{a}{180^\circ}\pi R, \quad b' = \frac{b}{180^\circ}\pi R, \quad c' = \frac{c\pi}{180^\circ} R,$$

avec a', b', c', construisons par la pensée un triangle rectiligne A'B'C'; on aura

$$A - A' + B - B' + C - C' = 3\omega,$$

soit

$$A - A' = \omega + x,$$
$$B - B' = \omega + y,$$
$$C - C' = \omega + z,$$

d'où

$$x + y + z = 0;$$

supposons R très-grand et qu'on peut négliger R^{-4}. On a, à cet ordre près, $x = y = z = 0$, de sorte que

$$A' = A - \omega, \quad B' = B - \omega, \quad C' = C - \omega$$

ce qui revient à cet énoncé : Lorsque les côtés d'un triangle sphérique sont très-petits, relativement au rayon de la sphère, on peut traiter ce triangle comme s'il était rectiligne, sauf à diminuer les angles du triangle sphérique chacun du tiers de l'excès de la somme de ses angles sur deux angles droits.

Tel est le théorème que Legendre a énoncé le premier en 1787 (*), il en a donné une démonstration fondée sur les développements en série, en l'an VII, 1799 (**). La même année, Lagrange a modifié cette démonstration, dans son célèbre mémoire, intitulé : Solutions de quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques, avec une analyse complète de ces triangles (*Journal de l'École Polytechnique*, VI[e] cahier). Mémoire qui, selon la marche habituelle de l'illustre géomètre, poursuit, développe et enrichit un semblable travail d'Euler. M. le docteur Gauss, un des plus grands analystes contemporains, a traité le même sujet, dans le présent Mémoire. Faisant un moindre emploi des séries, sa démonstration est plus élémentaire.

5° Conservant les mêmes notations que ci-dessus, décomposons 2^q en trois angles A′, B′, C′ et faisons

$$A = A' + \omega,$$
$$B = B' + \omega,$$
$$C = C' + \omega,$$

on a (Legendre, Trig. sph. prop. l. XXXI),

$$\sin^2\tfrac{1}{2}a = -\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C} = \frac{\sin\frac{3}{2}\omega\sin(A'-\frac{1}{2}\omega)}{\sin(B'+\omega)\sin(C'+\omega)},$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\cos\frac{1}{2}(B+A-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B\sin C} = \frac{\sin(B'-\frac{1}{2}\omega)\sin(C'-\frac{1}{2}\omega)}{(\sin B'+\omega)(\sin C'+\omega)}$$

(*) Mémoire sur les opérations trigonométriques, dont les resultats dépendent de la figure de la terre. Mém. de l'Académie des sciences, 1787, p. 352.

(**) Méthode analytique pour la détermination d'un arc du méridien. Note II, page 12. Il fait voir qu'à l'aide du triangle polaire, le même théorème peut servir à résoudre un triangle droit qui a deux angles très-aigus ; Legendre a donné la même démonstration dans ses Éléments ; dans le précédent ouvrage, p. 88, Delambre donne une vérification du théorème.

d'où

$$\frac{\sin^6 \frac{1}{2} a}{\cos^2 \frac{1}{2} a} = \frac{\sin^3 \frac{3}{2}\omega \sin^2(A' - \frac{1}{2}\omega)}{\sin^2(B' + \omega)\sin(B' + \frac{1}{2}\omega)\sin^2(C' + \omega)\sin(C' - \frac{1}{2}\omega)};$$

on obtient une équation analogue en changeant a en b, A en B et *vice versâ ;* divisant la première équation par la seconde, membre à membre, et extrayant la racine carrée, on obtient

$$\frac{\sin^3 \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} b}{\sin^3 \frac{1}{2} b} = \frac{\sin(A' + \omega)\sin^2(A' - \frac{1}{2}\omega)}{\sin(B' + \omega)\sin^2(B' - \frac{1}{2}\omega)};$$

or, l'on a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \ldots ;$$

d'où, lorsque a est très-petit,

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2} a - \frac{a^2}{48} + \ldots,$$

$$\sin^3 \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{8} a^3 - \frac{a^4}{32} + \ldots,$$

$$\cos \tfrac{1}{2} a = 1 - \frac{a^2}{8} + \ldots,$$

$$\frac{\sin^3 \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a} = \tfrac{1}{8} a^3 + \frac{a^5}{64} + \ldots.$$

de même

$$\frac{\sin^3 \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} b} = \tfrac{1}{8} b^3 + \frac{b^5}{64},$$

et lorsque les côtés a, b, c sont petits, ω est aussi très-petit (2); le second membre est donc à très-peu près égal à $\frac{\sin^3 A'}{\sin^3 B'}$; ainsi, on a à des infiniment petits du quatrième ordre près

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{\sin^3 A}{\sin^3 B} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B};$$

c'est le théorème de Legendre.

6° Le triangle sphérique est formé par trois lignes de plus courtes distances entre trois points situés sur une sphère; étant donnés trois points sur une surface quelconque, les trois plus courtes distances, forment un triangle sur cette surface. M. Gauss a étendu le théorème de Legendre à ces triangles en général, dans un ouvrage intitulé: *Disquisitiones generales circa superficies curvas*.

7° L'équation (1) du paragraphe II, n'étant pas dans les éléments, nous devons la démontrer; on a

$$\left.\begin{aligned}\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C-\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\\ -\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}C-\cos\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\end{aligned}\right\},\quad (2)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{\sin b\sin c}},\quad \cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{\sin b\sin c}}.$$

On a des valeurs analogues pour

$$\sin\tfrac{1}{2}B,\quad \cos\tfrac{1}{2}B,\quad \sin\tfrac{1}{2}C,\quad \cos\tfrac{1}{2}C,$$

substituant dans l'équation (2), il vient

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\sin p-\sin(p-a)-\sin(p-c)-\sin(p-b)}{\sin a\sin b\sin c}$$

$$\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}\ ,$$

$$\sin p-\sin(p-a)=2\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(b+c),$$

$$\sin(p-c)+\sin(p-b)=2\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(b+c),$$

$$\sin a=2\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a:$$

d'où

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{-2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c},$$

or

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega=-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C);$$

ce qui donne la formule (1);

8° Les trois cordes AB, AC, BC du triangle sphérique ABC sont les trois côtés d'un triangle rectiligne et égaux respectivement à $2\sin\frac{1}{2}c$, $2\sin\frac{1}{2}b$, $2\sin\frac{1}{2}a$; le rayon etant pris pour unité. Nommant α l'angle que font les cordes AB, AC, on a la relation

$$\cos\alpha = \cos A \cos\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{2}c - \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c.$$

Cagnoli (*), se sert de cette relation pour comparer les petits triangles sphériques aux triangles rectilignes. On la démontre facilement (voy. *Nouvelles Annales*, p. 35).

COMPTES RENDUS MENSUELS DE L'ACADÉMIE DE BERLIN (Bericht über die, etc.). Août, septembre, octobre 1841.

POGGENDORFF. Méthode pour déterminer la force électromotive dans les chaînes galvaniques à courants non constants. (Pag. 263-377.)

LEJEUNE DIRICHLET. Recherches sur les fonctions homogènes du troisième degré et des degrés supérieurs.

Soit la fonction homogène

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 = m, \qquad (1)$$

a, b, c, m sont des nombres entiers, et il s'agit de trouver des nombres entiers pour x, y qui satisfassent à l'équation.

Considérant x et y comme les coordonnées d'une ligne, la question ne présente aucune difficulté lorsque l'équation présente une ellipse, une parabole ou deux droites convergentes.

1° *Ellipse.* Par un changement de coordonnées, on fait disparaître le rectangle, et on parvient à l'équation

$$x^2 + Bz^2 = M, \qquad (2)$$

(*) Traite de trigonometrie rectiligne et sphérique, par M. Cagnoli, p. 293. Paris, 1786 *Le traité le plus complet sur cette partie de la science* L'ouvrage a ete traduit de l'italien par M. Chompre, sous les yeux de l'auteur.

où B et M sont des nombres entiers ; il suffit de multiplier l'équation donnée par a, et de faire ensuite $ay+bx=z$; pour résoudre l'équation (2), il faut rendre $M-Bz^2$ un carré parfait ; on essaye à cet effet tous les nombres entiers, 0, 1, 2, 3, jusqu'à $z=\sqrt{\frac{M}{B}}$. Si parmi ces valeurs on trouve un carré, on aura la valeur de x, et $\frac{z-bx}{a}$ doit être entier. Si ces deux conditions ne peuvent être remplies à la fois, le problème est impossible.

2° *Parabole.* Il faut pour la possibilité que le premier membre de l'équation soit un carré parfait, et par conséquent, il faut que m soit un carré ; extrayant la racine, on parvient à une équation du premier degré $cy+dx=n$, qui est toujours possible, lorsque c et d sont premiers entre eux.

3° Deux droites convergentes ; dans ce cas, l'équation (1) prend la forme

$$(mx+ny)\,(px+qy)=m\,;$$

soit $m=ef$, posant

$$mx+ny=e,$$
$$px+qy=f\,;$$

les valeurs de x, y, tirées de ces équations, doivent être des nombres entiers, sinon la question est impossible ; il faut essayer autant de solutions que m peut se décomposer en deux facteurs, parmi lesquels il faut comprendre l'unité.

4° *Hyperbole.* La solution dépend de la réduction en fraction continue d'une équation du second degré (v. pag. 1). M. Gerono a développé cette solution dans ce journal. Il suffit de remarquer ici que, par un changement de coordonnées, on ramène l'équation à cette forme :

$$t^2+(ac-b^2)\,u^2=1. \qquad (3)$$

Si on représente par T et U deux nombres entiers qui satisfont à cette équation, et par X et Y deux nombres entiers qui satisfont à l'équation (1), on trouve une infinité d'autres solutions, à l'aide de cette formule due à Euler :

$$ax+(b+\sqrt{b^2-ac})y=\pm(aX+\sqrt{b^2-ac}.y)(T+U\sqrt{b^2-ac})^n, \quad (4$$

n est un nombre entier quelconque, positif ou négatif, développant et égalant séparément les parties rationnelles et irrationnelles ; on trouve deux équations du premier degré qui donnent les valeurs de x et de y. La difficulté est donc réduite à trouver X et Y. Monsieur L. D., par des considérations fort simples, en renfermant la valeur du premier membre de l'équation (4), entre des limites données, ramène la recherche de X et Y à un petit nombre d'essais.

De là l'auteur passe à la solution des fonctions homogènes du troisième degré, à trois variables, de la forme

$$(x+\alpha y+\alpha^2 z)\ (x+\beta y+\beta^2 z)\ (x+\gamma y+\gamma^2 z)=m,$$

α, β, γ, étant les trois racines incommensurables de l'équation algébrique $s^3+as^2+bs+c=0$, où a, b, c, sont des nombres rationnels donnés (p. 280-85). Voir aussi Legendre, Théorie des nombres. Novembre 1841.

1° Le professeur Neumann de Kônigsberg. Lois de la double réfraction de la lumière dans les corps comprimés ou dans les corps non cristallisés, et non uniformément échauffés (p. 330 à 353).

Le mémoire est divisé en trois sections. Dans la première, l'auteur considère les lois de la double réfraction dans les corps non cristallisés, uniformément dilatés ou comprimés ; la seconde section contient les formules relatives aux couleurs produites par la lumière polarisée dans les corps uniformément dilatés. Ces deux sections servent de base à la troisième, qui traite de la théorie des couleurs qu'une inégalité distincte de température développe dans les corps transparents non cristallisés. L'auteur applique ses formules aux cercles colorés que manifeste une sphère de température uniforme et plongée dans un fluide dont la température est plus ou moins élevée que celle de la sphère; les équations différentielles auxquelles monsieur N... parvient pour déterminer le système des dilatations d'un corps, pour une distribution quelconque de température, s'accordent avec celles de M. Duhamel. (Mém. des sav. étrangers, t. V. 1838.)

Magnus. Sur la dilatation des gaz par la chaleur (p. 367-373).

Voici les coefficients moyens de la dilatation pour divers gaz :

Air atmosphérique. . . .	0,366508
Hydrogène.	0,365659
Acide carbonique.	0,369087
Acide sulfurique.	0,385618

Ils diffèrent du coefficient 0,375 admis dans les traités de physique.