NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CATALAN

Note sur le rapport de la circonférence au diamètre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 190-196

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__190_1>

NOTE

SUR

LE RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE;

PAR E. CATALAN.

On sait qu'en désignant par A l'aire d'un polygone régulier inscrit, par B l'aire du polygone circonscrit semblable, par A' et B' les quantités analogues pour deux polygones d'un nombre double de côtés, l'on a :

$$A' = \sqrt{AB}, \quad B' = 2\frac{AB}{A + A'} \text{ (*)}.$$

Représentons par A_0, A_1,..... A_{m-1}, A_m, les aires des polygones successifs inscrits, par B_0, B_1,.....B_{m-1}, B_m, les aires des polygones circonscrits, nous aurons les deux relations générales,

$$(A_m)^2 = A_{m-1} \, . \, B_{m-1}, \qquad (1)$$

$$B_m = 2\frac{A_{m-1} \, . \, B_{m-1}}{A_{m-1} + A_m}; \qquad (2)$$

d'où, par la division,

$$\frac{B_m}{(A_m)^2} = \frac{2}{A_{m-1} + A_m}. \qquad (3)$$

(*) Cette expression est de Saurin, membre de l'Académie des sciences, 1723, p. 10. Tm.

L'équation (2) donne cette suite d'équations :

$$B_m = 2\frac{A_{m-1}.B_{m-1}}{A_{m-1}+A_m},$$

$$B_{m-1} = 2\frac{A_{m-2}.B_{m-2}}{A_{m-2}+A_{m-1}},$$

. . . .

$$B_1 = 2\frac{A_0.B_0}{A_0+A_1},$$

d'où, par la multiplication,

$$B_m = 2^m B_0 \frac{A_0.A_1.A_2\ldots A_{m-1}}{(A_0+A_1)(A_1+A_2)\ldots(A_{m-1}+A_m)}. \quad (4)$$

Si nous divisons cette équation par l'équation (3), B_m se trouvera éliminé, et il viendra :

$$(A_m)^2 = 2^{m-1}B_0 \frac{A_0.A_1.A_2\ldots A_{m-1}}{(A_0+A_1)(A_1+A_2)\ldots(A_{m-2}+A_{m-1})}. \quad (5)$$

Si, dans cette dernière équation, nous changeons m en $m-1$, nous aurons

$$(A_{m-1})^2 = 2^{m-2}B_0 \frac{A_0.A_1\ldots A_{m-2}}{(A_0+A_1)(A_1+A_2)\ldots(A_{m-3}+A_{m-2})}. \quad (6)$$

Enfin, si nous divisons (5) et (6) membre à membre, nous arriverons à cette relation remarquable :

$$(A_m)^2 = 2\frac{(A_{m-1})^3}{A_{m-2}+A_{m-1}}. \quad (7)$$

Ainsi, *les aires des polygones successifs inscrits sont les termes d'une suite telle, que le carré de chaque terme est égal au double du cube du terme précédent, divisé par la somme de celui-ci et du terme qui le précède.*

Prenons pour unité le rayon du cercle, et partons du carré inscrit. Un calcul direct donne pour l'aire de ce carré le nombre 2, et pour celle de l'octogone inscrit, $2\sqrt{2}$. Ainsi,

$$A_0 = 2, \quad A_1 = 2\sqrt{2}$$

Pour obtenir l'aire du polygone inscrit de seize côtés, j'emploie la formule ci-dessus ; elle donne

$$(A_2)^2 = 2\frac{(2\sqrt{2})^3}{2+2\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 16\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 16(2-\sqrt{2}).$$

Donc

$$A_3 = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Prenant m égal à 3, j'obtiens de même,

$$(A_3)^2 = 2\frac{4^3(\sqrt{2-\sqrt{2}})^3}{2\sqrt{2}+4\sqrt{2-\sqrt{2}}} = 64\frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$= 64\frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}[2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}]}{4(2-\sqrt{2})-2}$$

$$= 32\frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}[2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}]}{3-2\sqrt{2}}$$

$$= 32(2-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}[2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}]$$

$$= 32(2+\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}[2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}]$$

$$= 32(2+\sqrt{2})[2(2-\sqrt{2})-\sqrt{2(2-\sqrt{2})}]$$

$$= 32[2(4-2)-\sqrt{2(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^2}]$$

$$= 32[4-\sqrt{4(2+\sqrt{2})}] = 64[2-\sqrt{2+\sqrt{2}}],$$

et enfin

$$A_3 = 8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

On voit que la complication du calcul augmente rapidement. Nous engageons les commençants à former, en partant des valeurs de A_2 et de A_3, l'expression de A_4, laquelle, toutes réductions faites, devient

$$A_4 = 16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}};$$

ainsi que nous le démontrerons plus loin.

Je reprends l'équation (7), et, afin d'arriver à une relation plus simple entre les aires successives, je renverse la fraction dans le second membre de cette équation, ce qui donne d'abord

$$\left(\frac{A_{m-1}}{A_m}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{A_{m-2}}{A_{m-1}} + 1\right],$$

ou

$$\frac{1}{\left(\frac{A_m}{A_{m-1}}\right)^2} = \frac{1}{2\left(\frac{A_{m-1}}{A_{m-2}}\right)} + \frac{1}{2}.$$

Posant alors

$$A_m = \frac{2^m}{a_m}, \qquad (8)$$

j'obtiens

$$\left(\frac{a_m}{a_{m-1}}\right)^2 = \left(\frac{a_{m-1}}{a_{m-2}}\right) + 2. \qquad (9)$$

Si, comme ci-dessus, nous partons du carré inscrit, nous aurons d'abord

$$A_0 = 2, \qquad A_1 = 2\sqrt{2},$$

d'où

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{a_1}{a_0} = \sqrt{2},$$

après quoi la formule (9) donnera successivement :

$$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad \frac{a_3}{a_2} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \text{ etc.},$$

valeur dont la loi est complétement évidente. Ces valeurs donnent ensuite,

$$a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad a_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \text{ etc.}$$

Substituant dans l'équation (9), nous aurons donc

$$A_1 = 2\frac{2}{\sqrt{2}}, \quad A_2 = 2\frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$A_3 = 2\frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \text{ etc.}$$

La limite des aires A_0, A_1, A_2, est l'aire du cercle du rayon 1, laquelle est représentée par π ; donc :

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \quad (10$$

Le second membre de cette équation est composé d'un nombre infini de facteurs, tous plus grands que l'unité, qui est leur limite. Cet exemple prouve donc combien il est nécessaire d'insister sur cette proposition : *La puissance* n° *d'une quantité plus grande que l'unité, peut dépasser toute limite, lorsque* n *est suffisamment grand.*

L'équation (10) peut être écrite autrement. En effet,

$$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}},\qquad \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}},$$

$$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}}{2}}},\ \text{etc.}$$

Or,

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\cos\frac{\pi}{4};$$

donc,

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}=\cos\frac{\pi}{8},\quad \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}}{2}}=\cos\frac{\pi}{16},\ \text{etc}$$

Donc,

$$\frac{\pi}{2}=\text{séc.}\frac{\pi}{4}.\,\text{séc.}\frac{\pi}{8}.\,\text{séc.}\frac{\pi}{10}.\,\text{séc.}\frac{\pi}{32}\cdots\cdots \quad (11)$$

Cette formule élégante n'est pas nouvelle ; elle a été donnée par Euler (nov. comm. Petrop., année 1760-61). La construction géométrique est évidente, et elle a ceci de remarquable, que chaque opération conduit à deux valeurs de plus en plus approchées de $\frac{\pi}{2}$, l'une par défaut, l'autre par excès.

Si l'on avait pris pour point de départ un polygone régulier inscrit différent du carré, on aurait trouvé des résultats aussi curieux que les précédents, mais moins simples.

Reprenons l'équation (7), et posons

$$A_m = 2^m b_m, \tag{12}$$

de telle sorte que

$$b_m = \frac{1}{a_m}.$$

A l'aide de cette substitution, nous obtiendrons

$$(b_m)^2 = \frac{(b_{m-1})^3}{2b_{m-1} + b_{m-2}}. \tag{13}$$

On a,

$b_0 = 2$, $b_1 = \sqrt{2}$, d'où $b_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $b_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.

De ces deux valeurs, on conclut :

$$(b_3)^2 = 2 - \sqrt{4 - (b_2)^2}.$$

Pour reconnaître si cette relation a lieu généralement, admettons-la pour un instant, et posons :

$$(b_m)^2 = 2 - \sqrt{4 - (b_{m-1})^2}. \tag{14}$$

Par le changement de m en $(m-1)$, nous obtiendrons facilement

$$b_{m-2} = b_{m-1}\sqrt{4 - (b_{m-1})^2}.$$

Or, en substituant ces valeurs dans l'équation (13), on la transforme en une identité ; la loi se trouve vérifiée, et l'on a généralement :

$$b_m = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}} : \tag{15}$$

le nombre des radicaux étant m.

Par suite, la valeur de A_m devient, à cause de (12),

$$A_m = 2^m \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}; \qquad (16)$$

ainsi que nous l'avions annoncé.

La limite du premier membre de cette dernière équation est l'aire du cercle ; donc

$$\pi = \textit{limite de } 2^m \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + .\sqrt{\ldots}}}}; \qquad (17)$$

ce qui est assez curieux.

Si l'on compare les deux valeurs différentes trouvées pour A_m, on trouve la relation

$$2 = \sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ldots$$
$$\times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + .\sqrt{\ldots}}}}; \qquad (18)$$

dans laquelle le nombre des facteurs avant le signe $\times$ est égal au nombre des radicaux qui suivent ce signe. Ainsi, par exemple :

$$2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}, \quad 2 = \sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$2 = \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \text{ etc.}$$

Du reste, ces égalités se vérifient immédiatement.