

**Problèmes proposés aux examens. Solutions
de M. L. Anne, répétiteur au Collège
royal de Louis-le-Grand**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 183-190

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__183_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROBLÈMES PROPOSÉS AUX EXAMENS.

SOLUTIONS DE M. L. ANNE,
Répétiteur au Collège royal de Louis-le-Grand.

PREMIÈRE QUESTION.

1. *Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle soient exprimées par des nombres commensurables ?*

ou, ce qui revient au même ,

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la somme de deux carrés parfaits soit elle-même un carré parfait ?

Soient a, b, c trois nombres commensurables exprimant les longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle, a celle de l'hypoténuse, b et c celles des deux côtés de l'angle droit, il faut et il suffit :

1° Que a soit la somme de deux carrés ;

2° Que b soit la différence de ces mêmes carrés ;

3° Et que c soit le double produit des racines carrées de ces mêmes carrés.

Si ces trois conditions sont remplies, le produit abc de ces trois nombres forme toujours un nombre divisible par 60.

D'abord, il est clair que ces conditions sont suffisantes ; car si l'on a, par exemple ,

$$\begin{aligned} a &= m^2 + n^2, \\ b &= m^2 - n^2, \\ c &= 2mn, \end{aligned}$$

on en déduit

$$a^2 = (m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2 \text{ ou } a^2 = b^2 + c^2.$$

De plus, chaque côté est plus petit que la somme des deux autres, donc le triangle est possible, et il est rectangle.

Il reste à établir que ces conditions sont nécessaires,

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ donne } b^2 = a^2 - c^2 = (a + c)(a - c),$$

pour qu'un nombre soit un carré parfait, il faut et il suffit que ses facteurs premiers soient élevés à des puissances paires ; donc, si l'un des nombres $(a + c)$ ou $(a - c)$ n'est pas un carré parfait, il faut que tout facteur premier, élevé à une puissance impaire dans l'un de ces deux nombres, se retrouve

élevé à une puissance impaire dans l'autre ; de sorte que $(a + c)$ et $(a - c)$ sont de la forme

$$\begin{aligned} a + c &= pq^2, \\ a - c &= pt^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} a &= p \left(\frac{q^2 + t^2}{2} \right), \\ c &= p \left(\frac{q^2 - t^2}{2} \right), \\ b &= pqt. \end{aligned}$$

Tous les triangles semblables jouissant des mêmes propriétés, on doit prendre pour valeurs élémentaires

$$a = \frac{q^2 + t^2}{2}, \quad b = qt, \quad c = \frac{q^2 - t^2}{2};$$

mais les longueurs des trois côtés du triangle étant exprimées en nombres commensurables, peuvent et même doivent être supposées exprimées en nombres entiers, d'où il suit que q et t doivent être tous les deux pairs ou tous les deux impairs :

1° Tous les deux pairs $q = 2M$ $t = 2N$.

$$\begin{aligned} a &= 2M^2 + 2N^2 = (M + N)^2 + (M - N)^2, \\ b &= 4MN = (M + N)^2 - (M - N)^2, \\ c &= 2M^2 - 2N^2 = 2(M + N)(M - N). \end{aligned}$$

Les trois nombres a, b, c ont bien la forme énoncée.

2° Tous deux impairs $q = 2M + 1$ $t = 2N + 1$.

$$\begin{aligned} a &= 2M^2 + 2M + 1 + 2N^2 + 2N = (M + N + 1)^2 + (M - N)^2, \\ b &= 4MN + 2M + 2N + 1 = (M + N + 1)^2 - (M - N)^2, \\ c &= 2M^2 + 2M - 2N^2 - 2N = 2(M + N + 1)(M - N); \end{aligned}$$

Les trois nombres a, b, c ont bien encore la forme énoncée ; donc, les conditions énoncées sont nécessaires et suffisantes.

Ces trois conditions étant remplies, le produit des trois nombres a, b, c forme un nombre divisible par 60 :

$$a = m^2 + n^2, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = 2mn.$$

Il suffit de démontrer que le produit abc admet les diviseurs 3, 4, 5, et même il suffit de ne raisonner que dans l'hypothèse où chacun des nombres m et n est premier avec ces nombres; car autrement c admettrait ces diviseurs, et conséquemment le produit abc les admettrait aussi.

1° Tout nombre premier avec 3 est de la forme $3p \pm 1$; son carré $9p^2 \pm 6p + 1$ est de la forme $3p' + 1$; donc, m et n étant premiers avec 3, le nombre $b = m^2 - n^2$ est divisible par 3, et par suite, le produit abc l'est aussi.

2° Tout nombre premier avec 4 est de la forme $2p + 1$; son carré $4p^2 + 4p + 1 = 4p(p + 1) + 1$ est de la forme $8p' + 1$; donc, m et n étant premiers avec 4, les nombres a, b, c sont de la forme

$$\begin{aligned} a &= 2(4m' + 4n' + 1), \\ b &= 8(m' - n'), \\ c &= 2(2m' + 1)(2n' + 1). \end{aligned}$$

Quand même par suite de la similitude, on supprimerait le facteur 2 commun à a, b et c , le produit abc serait encore divisible par 4.

3° Tout nombre premier avec 5 est de l'une des formes $5p \pm 1$ ou $5q \pm 2$ leurs carrés.

$$\begin{aligned} 25p^2 \pm 10p + 1, \\ 25q^2 \pm 20q + 4, \end{aligned}$$

sont de l'une des deux formes $5n \pm 1$,

m et n étant premiers avec 5, il est clair que l'un des deux nombres a ou b ,

$$a = m^2 + n^2, \quad b = m^2 - n^2,$$

est nécessairement divisible par 5; donc aussi le produit abc , ce qu'il fallait démontrer.

DEUXIÈME QUESTION.

Dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle ou à une el-

lipse, la droite, qui joint les milieux des diagonales, passe par le centre de la courbe.

Si le quadrilatère circonscrit au cercle est un parallélogramme, ce parallélogramme est un losange dont les diagonales se coupent au centre du cercle.

Si le quadrilatère circonscrit à l'ellipse est un parallélogramme, ses diagonales se coupent au centre de l'ellipse et forment un système de diamètres conjugués, quelle que soit la direction des côtés du parallélogramme.

1° Soit le quadrilatère ABCD (fig. 45) circonscrit au cercle dont le centre est au point E, soit M le milieu de la diagonale AC, la droite ME prolongée coupe l'autre diagonale BD en un point N, qui est son milieu.

Pour cela, il suffit de démontrer que les triangles BME, DME sont équivalents; car alors la base EM étant la même, les hauteurs BF, DG sont égales, et les triangles rectangles BNF, DNG sont égaux, comme ayant les angles égaux et un côté de l'angle droit égal, et par suite, les hypoténuses BN, ND le sont aussi.

M étant le milieu de AC, les triangles BMA et BMC, AME et CME, DMA et DMC sont équivalents: cela posé,

$$\begin{aligned} \text{BME} &= \text{BEA} - \text{BMA} - \text{AME}, \\ \text{BME} &= \text{BMC} + \text{CME} - \text{BEC}, \end{aligned}$$

ajoutant et réduisant,

$$2\text{BME} = \text{BEA} - \text{BEC} = \frac{\text{rayon}}{2} (\text{AB} - \text{BC});$$

$$\begin{aligned} \text{DME} &= \text{DEA} + \text{AME} - \text{DMA}, \\ \text{DME} &= \text{DMC} - \text{DEC} - \text{CME}, \end{aligned}$$

ajoutant et réduisant,

$$2\text{DME} = \text{DEA} - \text{DEC} = \frac{\text{rayon}}{2} (\text{AD} - \text{DC});$$

le quadrilatère étant circonscriptible,

$$\text{AB} + \text{DC} = \text{AD} + \text{BC} \quad \text{d'où} \quad \text{AB} - \text{BC} = \text{AD} - \text{DC}.$$

Donc, les triangles BME, DME sont équivalents; ce qu'il fallait démontrer.

SCHOLIE. Cette égalité $AB - BC = AD - DC$ montre que l'on peut considérer A et C comme les foyers d'une hyperbole passant par les points B et D, M milieu de AC comme son centre, et MN comme le diamètre conjugué de celui qui est parallèle à BD, alors MN doit passer par le sommet de l'angle circonscrit à l'hyperbole, et dont la corde de contact est BD; toute tangente étant bissectrice de l'angle des rayons vecteurs menés au point de contact, les côtés de cet angle sont bissecteurs des angles ABC, ADC, et par suite le rencontrent au centre du cercle; le sommet de cet angle doit se trouver à la fois sur MN et au centre du cercle; donc MN passe par le centre du cercle; ce qui forme une autre démonstration.

2° Même théorème pour l'ellipse.

Toute ellipse peut être considérée comme la section d'un cylindre droit à base circulaire par un plan oblique à l'axe, et sa tangente comme l'intersection de son plan et du plan tangent au cylindre, son centre est à la rencontre de son plan et de l'axe; en un mot, ce cylindre est le cylindre projetant l'ellipse; la projection du milieu d'une droite est toujours le milieu de la projection de la droite et réciproquement.

Donc, le théorème étant vrai pour le cercle, est encore vrai pour l'ellipse (*).

Théorème.

Tout parallélogramme circonscrit à un cercle est un losange, et ses diagonales passent par le centre.

Les droites AE, BE, CE, DE (*fig. 46*), étant bissectrices des angles du parallélogramme, chacun des quatre triangles

(*) Le théorème est de Newton (Princ. math., lib. I, coroll. 3, lem. 25). Il existe aussi pour les coniques à branches infinies. Tm.

ABE, BEC, CED, DEA est égal à celui qui le suit, comme ayant les angles égaux et un côté commun ; donc, ces quatre triangles sont égaux entre eux, et les quatre angles au centre sont droits ; ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème.

Les diagonales de tout parallélogramme circonscrit à une ellipse passent par le centre et forment un système de diamètres conjugués.

Supposons l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes, et ABCD (fig. 47) le parallélogramme circonscrit, les équations des quatre côtés seront de la forme

$$\begin{aligned} \text{AD} \quad y &= mx + \sqrt{m^2 a^2 + b^2}, \\ \text{CB} \quad y &= mx - \sqrt{m^2 a^2 + b^2}, \\ \text{AB} \quad y &= px + \sqrt{p^2 a^2 + b^2}, \\ \text{CD} \quad y &= px - \sqrt{p^2 a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Le point A rencontre de AD et de AB aura pour coordonnées,

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{p \sqrt{m^2 a^2 + b^2} - m \sqrt{p^2 a^2 + b^2}}{p - m}, \\ x_1 &= \frac{\sqrt{m^2 a^2 + b^2} - \sqrt{p^2 a^2 + b^2}}{p - m}. \end{aligned}$$

A cause de la symétrie, le point C aura pour coordonnées

$$y_2 = -y_1 \quad \text{et} \quad x_2 = -x_1.$$

Donc, A C passe par le centre ; ce qu'il fallait démontrer.

Son équation est

$$y = \frac{p \sqrt{m^2 a^2 + b^2} - m \sqrt{p^2 a^2 + b^2}}{\sqrt{m^2 a^2 + b^2} - \sqrt{p^2 a^2 + b^2}} x = \frac{y_1}{x_1} x,$$

L'équation de **BD** s'obtiendra en échangeant dans celle de **AC** le signe de l'un des deux radicaux.

$$\mathbf{BD} \quad y = \frac{r\sqrt{m^2a^2+b^2} + m\sqrt{p^2a^2+b^2}}{\sqrt{m^2a^2+b^2} + \sqrt{p^2a^2+b^2}} x = \frac{y_3}{x_1} x,$$

$$\frac{y_1}{x_1} \times \frac{y_3}{x_3} = \frac{p^2m^2a^2 + p^2b^2 - m^2p^2a^2 - m^2b^2}{m^2a^2 + b^2 - p^2a^2 - b^2} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Donc, ces diagonales forment un système de diamètres conjugués.