

HUET

Démonstration du théorème 3 (page 57)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 142-143

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__142_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3 (page 57).

« Si d'un point A d'une ellipse, on abaisse des perpendiculaires AM, AN, » sur les diamètres conjugués égaux, la diagonale du parallélogramme » construit sur AM, AN, est normale à l'ellipse au point A. »

PAR M. HUET,

Elève du collège Louis-le-Grand (institution Mayer).

Soient x', y' , les coordonnées AG, AH, (fig. 37), d'un point quelconque A, pris sur le plan d'une ellipse $y'^2 + x'^2 = a^2$, rapportée à ses diamètres conjugués égaux dont l'angle YOX est θ ; et AM, AN, les perpendiculaires abaissées du point A, sur les axes OX, OY, on aura :

$$OM = OH - MH = x' + y' \cos \theta, \quad ON = OG - NG = y' + x' \cos \theta.$$

Les coordonnées du point P, milieu de MN, seront $\frac{x' + y' \cos \theta}{2}$, $\frac{y' + x' \cos \theta}{2}$; et par suite l'équation de la droite

AP est $y - y' = \frac{y' - x' \cos \theta}{x' - y' \cos \theta} (x - x')$. L'équation de la polaire du point A, est, comme on sait, $y y' + x x' = a^2$, ou $y = \frac{-x'}{y'} x + \frac{a^2}{y'}$. La perpendiculaire abaissée du point A sur la polaire, a pour équation :

$$y-y' = - \left[\frac{1 - \frac{x'}{y'} \cos \theta}{-\frac{x'}{y'} + \cos \theta} \right] (x-x') = \frac{y'-x' \cos \theta}{x'-y' \cos \theta} (x-x').$$

On voit donc que cette perpendiculaire coïncide avec la droite AP.

D'où nous concluons que : *Si d'un point quelconque, A, du plan d'une ellipse, on abaisse des perpendiculaires AM, AN, sur les diamètres conjugués égaux, la direction, AP, de la diagonale du parallélogramme construit sur ces perpendiculaires, est elle-même perpendiculaire à la polaire du point A.*

Dans le cas particulier où le point A est pris sur l'ellipse, la polaire du point A est la tangente menée à l'ellipse par ce point ; et alors, on a le théorème qu'il fallait démontrer.