NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ROGUET

Théorie des foyers

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 131-137
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__131_1>

THÉORIE DES FOYERS,

PAR M. ROGUET,
Professeur de mathématiques.

—

Nous croyons utile de donner quelques détails sur la théorie déjà *connue* des foyers.

On nomme *foyer* (*) d'une courbe un point pris sur le plan de cette courbe, et tel que sa distance à un point quelconque de la courbe est une fonction rationnelle, $my+nx+p$, du premier degré des coordonnées x, y de ce point de la courbe.

Si l'on désigne par α et β les coordonnées du foyer, l'expression de la distance, d, de ce point à un point quelconque de la courbe, dont les coordonnées sont x, y, sera (en supposant les axes rectangulaires) :

$$d=\sqrt{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}=my+nx+p,$$

d'où

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2-(my+nx+p)^2=0. \tag{a}$$

Quelles que soient les valeurs déterminées pour α, β, m,

(*) Cette exacte définition est due à M. Bret, professeur à la faculté de Grenoble (*voy.* Annales de Gergonne, tome 8, p. 317. Année 1817—18). Tm.

n, p, cette dernière relation a lieu entre x et y pour un point quelconque de la courbe ; lorsqu'on remplace les inconnues α, β, m, n, p, par les valeurs numériques déterminées ; par conséquent, le premier membre de l'équation (a) est égal au premier membre de l'équation

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0, \qquad (b)$$

de la courbe, multiplié par un facteur numérique. Désignant par λ ce facteur numérique, le premier membre de l'équation (a) et le produit $\lambda Ay^2+\lambda Bxy+\lambda Cx^2+\lambda Dy+\lambda Ex+\lambda F$, doivent être identiques ; on aura donc les équations :

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda A = 1-m^2 & & (1) \\ \lambda C = 1-n^2 & & (2) \\ \lambda B = & -2mn & (3) \\ \lambda D = & -2(\beta+mp) & (4) \\ \lambda E = & -2(\alpha+np) & (5) \\ \lambda F = \alpha^2+\beta^2-p^2. & & (6) \end{array}\right\} \qquad (c)$$

En attribuant à chacune des quantités m, n, p, une valeur déterminée, l'équation $my+nx+p=0$ représente une droite. La distance, δ, d'un point de la courbe à cette droite, et la distance, d, du même point de la courbe au foyer, sont dans un rapport constant. En effet, la distance δ d'un point x', y', de la courbe à cette droite, est exprimée par $\dfrac{my'+nx'+p}{\sqrt{m^2+n^2}}$, la distance d du même point de la courbe au foyer, est $my'+nx'+p$. On a donc $\dfrac{d}{\delta}=\sqrt{m^2+n^2}$. On donne à la droite $my+nx+p=0$ le nom de *directrice*.

Si l'on élève au carré les deux membres de (3), et qu'on en retranche le quadruple du produit des deux membres de (1) et (2), on aura :

$$\lambda^2(B^2-4AC)=4(m^2+n^2-1);$$

ainsi, suivant que B^2-4AC sera >0, <0, $=0$; m^2+n^2 sera >1, <1, $=1$.

Pour déterminer les quantités α, β, m, n, p, l'équation (b) étant donnée, on distinguera le cas où cette équation représente une ellipse ou une hyperbole, de celui où elle représente une parabole.

Si l'équation (b) représente une ellipse ou une hyperbole, on pourra supposer la courbe rapportée à son centre ; car, ayant déterminé, dans cette dernière hypothèse, les valeurs de α et de β, il suffira d'augmenter ou de diminuer respectivement ces valeurs des coordonnées du centre, pour obtenir ces mêmes valeurs dans la première hypothèse.

Les équations (c) deviennent, en supposant l'origine placée au centre de la courbe :

$$\left.\begin{array}{rll} \lambda A & = 1 - m^2 & (1) \\ \lambda C & = 1 - n^2 & (2) \\ \lambda B & = \quad -2mn & (3) \\ 0 & = \beta + mp & (4) \\ 0 & = \alpha + np & (5) \\ \lambda F' & = \alpha^2 + \beta^2 - p^2 & (6) \end{array}\right\} \quad (d)$$

Les équations (4) et (5) donnent la relation

$$\beta^2 + \alpha^2 = (m^2 + n^2)p^2$$

Substituant pour $\alpha^2 + \beta^2$ cette valeur dans (6), il vient :

$$\lambda F' = (m^2 + n^2 - 1)p^2 \quad \text{d'où} \quad \frac{\lambda(B^2 - 4AC)p}{4} = F',$$

p^2 est essentiellement positif ; le signe de λ sera donc déterminé par le signe de F' ; et le signe de λ étant ainsi déterminé, l'équation (3) fera savoir si m et n doivent être de même signe ou de signes contraires. Les équations (4) et (5) étant mises sous la forme $\beta = -mp$, $\alpha = -np$, on en déduit $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{m}{n}$. D'autre part, si l'on retranche (1) de (2), ce qui donne

$$\lambda(C - A) = m^2 - n^2,$$

et qu'on divise membre à membre cette dernière équation par (3), on aura

$$\frac{m}{n}-\frac{n}{m}=\frac{2(A-C)}{B}.$$

Désignant $\frac{m}{n}$ par ν, cette équation prend la forme

$$\nu^2-\frac{2(A-C)}{B}\nu-1=0, \qquad (e)$$

dont les racines sont de signes contraires. Or, le signe de $\frac{m}{n}$ est déterminé par la relation (3); par conséquent $\frac{m}{n}$ ou ν n'a qu'une seule valeur, ce qui prouve que les directrices sont parallèles.

λ ne peut avoir non plus qu'une seule valeur; en effet, de $\lambda C=1-n^2$, on déduit $n^2=1-\lambda C$; divisant membre à membre l'équation (3) par cette dernière relation, on obtient

$$\frac{\lambda B}{\lambda C-1}=\frac{2m}{n}=2\nu \quad \text{d'où} \quad \lambda=\frac{2\nu}{2C\nu-B}.$$

Connaissant la valeur de λ; on obtiendra la valeur de p^2 par l'équation $\frac{\lambda(B^2-4AC)p^2}{4}=F'$. On déterminera aussi m^2 et n^2 par les équations (1) et (2); et enfin les équations $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{m}{n}$ et $\lambda F'=\alpha^2+\beta^2-p^2$ serviront à trouver les valeurs de α et β. Or, la première de ces équations est celle d'une droite, passant par le centre et perpendiculaire aux directrices; la seconde est celle d'un cercle, concentrique à la courbe. On voit donc qu'il y a, dans l'ellipse et l'hyperbole, deux foyers qui se trouvent à l'intersection d'une droite et d'un cercle. L'équation des directrices $my+nx+p=0$ ou $y=-\frac{n}{m}x-\frac{p}{m}$ montre qu'il y a deux directrices, parallèles et également éloignées du centre; car $\frac{m}{n}$ et par suite $-\frac{n}{m}$ n'a qu'une seule valeur; et p a deux valeurs égales et de signes contraires.

Remarque. On peut déterminer le système d'axes auquel la courbe doit être rapportée pour que la distance d'un point de la courbe au foyer soit une fonction rationnelle de l'abscisse seulement ou de l'ordonnée seulement. En effet, il faudra que l'expression de cette distance se réduise : soit à $nx+p$, soit à $my+p$, c'est-à-dire que m ou n soit nulle ; ce qui montre qu'il faudra, dans le premier cas, changer le système d'axes en un autre, dont l'axe des abscisses soit perpendiculaire aux directrices ; et dans le second, changer le système d'axes en un autre dont l'axe des ordonnées soit perpendiculaire aux directrices. Ainsi, pour faire disparaître une variable de l'expression $my+nx+p$, il faut supposer l'axe correspondant perpendiculaire aux directrices.

Parabole. Reprenons le système (c) (page 132). On commencera par déterminer λ, en ajoutant les équations (1) et (2) ; ce qui donne $\lambda = \frac{1}{A+C}$. Connaissant λ, on déterminera le signe de mn et ce produit lui-même, par l'équation (3). Le signe de $\frac{m}{n}$ sera le même que celui de mn, et par suite l'équation (e) donnera la valeur unique de $\frac{m}{n}$.

Pour déterminer α et β, on observera que les équations (4) et (5) peuvent se mettre sous la forme

$$mp = -\beta - \frac{\lambda D}{2}, \qquad (f)$$

$$np = -\alpha - \frac{\lambda E}{2}. \qquad (g)$$

Divisant membre à membre, on a :

$$\frac{m}{n} = \frac{\beta + \frac{\lambda D}{2}}{\alpha + \frac{\lambda E}{2}} \quad \text{d'où} \quad \beta + \frac{\lambda D}{2} = \frac{m}{n}\left(\alpha + \frac{\lambda E}{2}\right). \qquad (i)$$

Élevant au carré les deux membres des équations (f) et (g), et ajoutant, il vient :

$$(m^2+n^2)p^2 = p^2 = \alpha^2+\beta^2+\lambda D\beta+\lambda E\alpha+\frac{\lambda^2(D^2+E^2)}{4},$$

et substituant dans (6), on obtient :

$$\lambda F = -\lambda D\beta - \lambda E\alpha - \frac{\lambda^2(D^2+E^2)}{2},$$

ou enfin

$$D\beta+E\alpha+\frac{\lambda(D^2+E^2)}{2}+F=0; \qquad (k)$$

Les équations (1) et (2) sont celles de deux droites; ce qui montre que dans la parabole, il n'existe qu'un seul foyer, placé à l'intersection des droites (i) et (k), dont l'une (i) est perpendiculaire à la directrice.

On déterminera m^2 et n^2 par les relations (1) et (2), et p^2 par l'équation (6), après avoir déterminé α et β. L'équation (f) montre que pm n'a qu'une seule valeur ; or, m^2 n'a pareillement qu'une seule valeur ; par conséquent $\frac{p}{m}$ n'a qu'une seule valeur. On en conclut, puisque $\frac{n}{m}$ n'a aussi qu'une seule valeur, que la parabole n'a qu'une seule directrice.

Remarques. Pour exprimer que deux courbes du second degré sont égales, il suffira, en prenant les équations de ces courbes exprimées en fonction des coordonnées du foyer,

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2-(my+nx+p)^2=0,$$
$$(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2-(m'y+n'x+p')^2=0,$$

de supposer

$$\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{m'^2+n'^2} \quad \text{et} \quad \frac{m\beta+n\alpha+p}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{m'\beta'+n'\alpha'+p}{\sqrt{m'^2+n'^2}}.$$

Il résulte, en effet, de ces deux hypothèses que, dans chacune de ces courbes, les rapports des distances au foyer et à la directrice sont égaux, et de plus, dans les deux courbes, la distance du sommet à la directrice correspondante sera la même; par suite, les deux courbes pourront être appliquées l'une sur l'autre et coïncider.

On voit du reste, pour l'ellipse ou l'hyperbole, qu'en nommant $2a$, $2b$, les axes de l'une des courbes; $2a'$, $2b'$, les axes de l'autre; $2c$ l'excentricité de la première, et $2c'$ l'excentricité de la seconde, on a, alors :

$$\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}, \quad \text{et} \quad \frac{b^2}{c}=\frac{b'^2}{c'},$$

et par suite

$$\frac{c^2}{a^2}=\frac{c'^2}{a'^2}, \text{ d'où } \frac{c^2-a^2}{c^2}=\frac{c'^2-a'^2}{c'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{b^2}{c^2}=\frac{b'^2}{c'^2},$$

enfin, divisant $\frac{b^2}{c}=\frac{b'^2}{c'}$ membre à membre par $\frac{b^2}{c^2}=\frac{b'^2}{c'^2}$, on en déduit $c=c'$; et ensuite $a=a'$.

Pour la parabole, on voit immédiatement que les deux courbes ont même paramètre.

La distance des deux directrices, dans l'ellipse et l'hyperbole, est $\frac{2p}{\sqrt{m^2+n^2}}$; de sorte qu'en nommant a le demi-axe focal, et c la demi-excentricité, on a :

$$\frac{2a^2}{c}=\frac{2p}{\sqrt{m^2+n^2}}, \quad \text{or} \quad \sqrt{m^2+n^2}=\frac{c}{a}:$$

par conséquent, $p=a$. Ainsi, p représente la longueur du demi-axe sur lequel se trouvent les foyers.

On démontrera facilement les propriétés des rayons vecteurs dans chacune des trois courbes; celles de la tangente, ainsi que la construction pour mener une tangente à ces courbes par un point donné.