

Binôme de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 118-119

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__118_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

BINÔME DE NEWTON.

Dans la démonstration de la formule du Binôme (page 43), on a implicitement supposé que les coefficients a, b, c , etc., sont indépendants de m , c'est-à-dire que les valeurs numériques de ces coefficients restent constantes, quelle que soit la valeur entière attribuée à m , et dépendent uniquement des rangs occupés par les termes que l'on considère dans le développement ordonné. Ainsi, par exemple, ayant reconnu que $a=1$, lorsque $m=1$, on a admis que a reste égal à 1, lorsque m devient successivement 2, 3, etc. C'est ce qu'il faut encore démontrer.

En considérant les coefficients a, b, c , etc., comme des fonctions de m , que nous représentons par $f(m), \varphi(m)$, etc., l'égalité

$$(x+\alpha)^m = x^m + ma \cdot \alpha x^{m-1} + m(m-1)b \cdot \alpha^2 x^{m-2} + \text{etc.},$$

obtenue (page 43) peut s'écrire sous la forme :

$$(x+\alpha)^m = x^m + mf(m) \cdot \alpha x^{m-1} + m(m-1)\varphi(m) \cdot \alpha^2 x^{m-2} + \text{etc.}$$

Remplaçons, dans cette dernière égalité, m par $m+1$, nous aurons :

$$(x+\alpha)^{m+1} = x^{m+1} + (m+1)f(m+1) \cdot \alpha x^m + (m+1)m \cdot \varphi(m+1) \cdot \alpha^2 x^{m-1} + \text{etc.}$$

D'ailleurs, en multipliant par $(x+\alpha)$ les deux membres de l'égalité, $(x+\alpha)^m = x^m + \text{etc.}$, on trouve :

$$(x+\alpha)^{m+1} = x^{m+1} + mf(m) \left| \begin{array}{l} \alpha x^m + m \cdot (m-1)\varphi(m) \\ + 1 \qquad \qquad \qquad + mf(m) \end{array} \right| \alpha^2 x^{m-1} + \text{etc.}$$

Les coefficients des mêmes puissances de x dans les développements de $(x+\alpha)^{m+1}$, doivent être égaux entre eux, on a donc :

$$\begin{aligned} (m+1)f(m+1) &= mf(m) + 1, \\ (m+1)\varphi(m+1) &= (m-1)\varphi(m) + f(m), \dots \end{aligned}$$

L'égalité $(m+1)f(m+1)=mf(m)+1$, montre que si $f(m)=1$, on a de même $f(m+1)=1$. Or, $f(m)=1$, lorsque $m=1$ (page 43); donc $f(2)=1, f(3)=1$, etc., c'est-à-dire que le coefficient a reste constamment égal à 1, quelle que soit la valeur entière positive attribuée à m .

Puisqu'on a généralement $f(m)=1$, l'égalité $(m+1)\varphi(m+1)=(m-1)\varphi(m)+f(m)$ se réduit à $(m+1)\varphi(m+1)=(m-1)\varphi(m)+1$. Et, sous cette forme, elle montre que si $\varphi(m)=\frac{1}{2}$, on a de même $\varphi(m+1)=\frac{1}{2}$. Or, $\varphi(m)=\frac{1}{2}$, lorsque $m=2$ (page 43); donc, $\varphi(3)=\frac{1}{2}, \varphi(4)=\frac{1}{2}$, etc. Ainsi, la valeur de b est indépendante de la valeur entière attribuée à m .

On démontre de même que les coefficients c, d , etc., ont des valeurs indépendantes du degré m de la puissance du binôme.

Rectification.

Page 56. C'est M. le professeur *Finck* qui, le premier, a introduit dans les éléments la division ordonnée de *Fourrier*. (Voir le *Traité élémentaire d'Arithmétique*, page 88, *Strasbourg*, 1841.)