NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

I.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
IMPRIMEURS DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

Rédigé par MM.

TERQUEM,

OFFICIER DE L'UNIVERSITÉ, DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AUX ÉCOLES ROYALES D'ARTILLERIE;

ET

GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES.

TOME PREMIER.

PARIS.

CARILIAN-GŒURY ET Vve DALMONT, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, nos 39 et 41.

1842.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

FRACTIONS CONTINUES.

1. La première idée des fractions continues appartient à *Brouncker*; c'est lui qui, pour la première fois, a donné l'expression d'un rapport, sous la forme d'une fraction continue : il a trouvé que le rapport du quarré circonscrit, à l'aire du cercle, est exprimé par la fraction continue

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\text{etc.}}}}}$$

On ignore comment il est parvenu à ce résultat.

Wallis à qui l'on doit une autre expression du même rapport, qui est $\frac{1.3.3.5.5.7.7.9.\text{etc.}}{1.2.4.4.6.6.8.8.\text{etc.}}$, a démontré, dans l'ouvrage intitulé : *Arithmetica infinitorum*, que la fraction continue de *Brouncker*, est réductible à cette dernière expression ; et de plus, il a donné, dans le même ouvrage, des règles générales pour convertir en fractions ordinaires, plusieurs espèces de fractions continues. Mais, on ne trouve dans le Traité de *Wallis*, aucune notion sur les propriétés des fractions *réduites* ou *convergentes*. La découverte de ces propriétés qui forment la partie la plus importante de la théorie élémentaire des fractions continues, est due à *Huyghens*; il y fut conduit par les recherches qu'il dut faire au sujet de la construction de son automate planétaire. On peut consulter à cet égard l'ouvrage intitulé : *Descriptio automati planetarii*. *Huyghens* y donne les règles, qui sont aujourd'hui généralement connues, pour convertir en fractions continues les fractions ordinaires. Il démontre les propriétés des *réduites*, et celles des fractions *intermédiaires*, insérées entre les réduites successives. L'application qu'il a faite de ces fractions intermédiaires, montre leur utilité, et, pour ce motif, il serait peut-être convenable de les mentionner dans les Traités élémentaires.

Depuis *Huyghens*, plusieurs autres géomètres ont considéré les fractions continues d'une manière plus générale, sous le double rapport de la théorie, et des applications qu'on en peut faire. Nous citerons :

EULER (*Commentaires de Pétersbourg*).

Jean BERNOULLI (*Recueil pour les astronomes*).

LAGRANGE (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, pour les années 1767 et 1768).

WARING (*Meditationes algebraïcæ*).

LEGENDRE (*Théorie des nombres* *).

Les recherches de *Lagrange*, présentent surtout le plus grand intérêt. La méthode qu'il a donnée pour exprimer en fractions continues les racines d'une équation numérique,

(*) Nous donnerons prochainement une notice bibliographique sur les fractions continues. (TM.)

est exposée dans tous les traités d'algèbre ; *Lagrange* y a joint plusieurs observations utiles que nous aurons soin d'examiner dans un des articles qui feront suite à celui-ci, dont nous allons maintenant indiquer l'objet principal.

On sait que toute fraction continue périodique est une racine incommensurable d'une équation du second degré à coefficients rationnels. Cette proposition, facile à démontrer, est depuis longtemps connue. Mais, *Lagrange* est le premier qui soit parvenu à démontrer la proposition inverse, c'est-à-dire que : « *Les racines incommensurables d'une équation du » second degré à coefficients rationnels, s'expriment en fractions continues périodiques.* » Cette démonstration peut être présentée d'une manière très-simple ; elle est tout à fait élémentaire, car les connaissances qu'elle suppose ne s'étendent pas au delà des équations du second degré : c'est ce que je me suis proposé de faire voir dans ce premier article.

Et d'abord, je ferai quelques remarques sur les fractions continues périodiques, et les équations du second degré qui en résultent.

2. Je nommerai fraction *inverse* d'une fraction continue donnée $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}$, la fraction $d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a}}}$, que l'on forme en écrivant en ordre inverse les quotients incomplets de la première.

La fraction continue inverse de $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}}$, sera de même $\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a}}}}$.

En considérant d'abord une fraction continue

$$a+\cfrac{1}{b+\vdots\atop\vdots+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r.}}}}$$

plus grande que l'unité : si l'on désigne par $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$ ses deux dernières réduites, je dis que les deux dernières réduites de l'inverse, seront $\frac{R'}{Q'}$, $\frac{R}{Q}$.

Cela résulte simplement de la règle que l'on donne pour former les réduites successives. En effet, les réduites de la fraction proposée étant $\frac{a}{1}$, $\frac{ab+1}{b}$,...., $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$; on sait que $R=Qr+P$, et $Q>P$. Par conséquent, si l'on divise R par Q, on aura pour quotient r, et pour reste P. De même, en divisant Q par P, le quotient sera q, et le reste sera le numérateur de la réduite qui précède $\frac{P}{P'}$. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on soit parvenu à la division de $ab+1$ par a, qui donnera le quotient b et le reste 1. Mais, ces divisions successives sont précisément celles qu'il faut faire pour réduire en fraction continue, la fraction $\frac{R}{Q}$, on a donc

$$\frac{R}{Q}=r+\cfrac{1}{q+\vdots\atop\vdots+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a}}}.$$

On obtient de même : $\frac{R'}{Q'}=r+\cfrac{1}{q+\vdots\atop\vdots+\cfrac{1}{b}}$, et c'est ce que nous voulions démontrer.

Lorsqu'une fraction continue est moindre que l'unité ;

en désignant toujours ses deux dernières réduites par $\frac{Q}{Q'}, \frac{R}{R'}$; les deux dernières réduites de l'inverse, seront $\frac{Q}{R}, \frac{Q'}{R'}$. On peut le conclure immédiatement de ce qui vient d'être démontré, car la fraction proposée et l'inverse de cette fraction sont les quotients obtenus en divisant l'unité par deux fractions continues inverses l'une de l'autre, et plus grandes, toutes deux, que l'unité.

3. *Toute fraction continue périodique simple est racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels, dont les racines sont de signes contraires; l'une plus grande et l'autre moindre que l'unité. Et, si l'on désigne par* α *la fraction continue inverse de la fraction proposée, la racine négative aura pour expression* $-\frac{1}{\alpha}$.

En effet, considérons en premier lieu une fraction continue périodique simple $a+\cfrac{1}{b+\vdots+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}}$ plus grande que l'unité. Soient $\frac{Q}{Q'}, \frac{R}{R'}$ les deux dernières réduites de la partie périodique $a+\cfrac{1}{b+\vdots+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r}}}$; et x la valeur inconnue de la fraction considérée.

On aura $x=\frac{Rx+Q}{R'x+Q'}$ et par suite,

$$R'x^2+(Q'-R)x-Q=0\ldots\ldots\ldots (1).$$

Cela posé, désignons par y la valeur de la fraction continue périodique simple $r+\cfrac{1}{q+\vdots\,+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{r+\text{etc.}}}}}$, inverse de la proposée. Les deux dernières réduites de la partie périodique $r+\cfrac{1}{q+\vdots\,+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a}}}$ seront, (n° 2), $\frac{R'}{Q'}$, $\frac{R}{Q}$, Par conséquent, y est la racine positive de l'équation $y=\frac{Ry+R'}{Qy+Q'}$, qui se réduit à

$$Qy^2+(Q'-R)y-R'=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Mais, si l'on remplace dans l'équation,

$$R'x^2+(Q'-R)\,x-Q=0,\ x \text{ par } -\frac{1}{y},$$

on obtient successivement :

$$\frac{R'}{y^2}-\frac{(Q'-R)}{y}-Q=0;\qquad Qy^2+(Q'-R)y-R'=0\ldots. \quad (2)$$

Et par cela même, on voit que la racine négative de l'équation $R'x^2+(Q'-R)\,x-Q=0$, est $-\frac{1}{y}$, c'est-à-dire, $-\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{q+\vdots\,+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{r+\text{etc.}}}}}}$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Si la fraction continue proposée est moindre que l'unité, comme $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\vdots\,+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{a+\text{etc}}}}}}$; en la représentant par x, et nommant z le dénominateur $a+\frac{1}{b+\text{etc.}}$, qui est une fraction continue périodique plus grande que l'unité, on aura $x=\frac{1}{z}$. Les racines de l'équation du second degré, en z, seront, comme on vient de le voir, $a+\frac{1}{b+\text{etc.}}$, et

$$-\left(\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{q+\vdots\,\vdots+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{r+\text{etc.}}}}}\right)$$

; en reportant ces valeurs dans la relation $x=\frac{1}{z}$, on en conclura que les deux valeurs de x sont $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\text{etc.}}}$ et $-\left(r+\cfrac{1}{q+\vdots\,\vdots+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{r+\text{etc.}}}}\right)$.

La proposition énoncée est ainsi vérifiée dans tous les cas.

4. *Toute fraction continue périodique-mixte, dont la période est précédée de plusieurs quotients incomplets, est racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels, et qui a ses racines de même signe.*

Supposons, par exemple, que dans la fraction continue proposée, la période commence au quatrième quotient incomplet; cette fraction sera de la forme

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}}}}$$

la partie périodique $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}$ contenant un nombre quelconque de fractions intégrantes. Soient x la valeur de la fraction périodique-mixte, et y la valeur de la partie périodique $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}$; on aura d'abord

$$x=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{y}}},\quad y=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{y}}}.$$

Puis, nommons $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ les deux dernières réduites de la partie non périodique $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\delta}}$, et $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, les deux dernières réduites de la période $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$: il en résultera $x=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}$, $y=\frac{Cy+B}{C'y+B'}$. L'élimination de y entre ces deux dernières équations conduit évidemment à une équation du second degré dont les coefficients sont rationnels; il reste à démontrer que les deux racines de cette équation sont positives, lorsque la période est précédée de plusieurs quotients incomplets.

Pour obtenir les deux valeurs de x, il suffit de remplacer successivement y par ses deux valeurs dans l'équation $x=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{y}}}$. Tout se réduit donc à faire voir qu'en remplaçant y, par sa valeur négative qui est, (n° 3),

$$-\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}}}$$

, il en résulte pour x une valeur positive.

La substitution donne

$$x=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\delta-c-\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}}}}$$

Or, si δ est plus grand que c, la valeur de x est évidemment positive, puisque le nombre entier et positif $\delta-c$ est au moins égal à l'unité. Si δ est plus petit que c, la fraction

$$\cfrac{1}{\delta-c-\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}}}$$

est négative, mais sa valeur absolue est moindre que l'unité;

donc, $\beta+\cfrac{1}{\delta-c-\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}$ est un nombre positif, et

par conséquent, la valeur de x est encore positive.

On ne peut avoir $\delta=c$, car si cette égalité existait, la période de la fraction continue $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}}}}$

commencerait au quotient incomplet δ; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il résulte de cette discussion que les racines de l'équation du second dégré, dont une fraction continue périodique-mixte est racine, aura toujours ses deux racines de même signe lorsque le nombre des quotients incomplets δ, ϵ, etc., qui précèdent la période, est au moins égal à deux.

Au reste, on peut transformer la fraction continue

$$\alpha+\cfrac{1}{\epsilon+\cfrac{1}{(\delta-c)-\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}},$$

en une autre dans laquelle toutes les fractions intégrantes seront positives. Il existe à cet égard une règle très-simple que l'on déduit de l'égalité suivante

$$1-\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(a-1)+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}}}$$

Pour vérifier d'abord cette égalité, posons

$$y=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}$$

Il en résultera :

$$1-\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\vdots}}}=1-\frac{1}{y}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y-1}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(a-1)+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\vdots}}}}$$

De l'égalité que nous venons d'établir, on conclut

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{(\delta-c)-\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}}=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{(\delta-c-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b-1+\vdots}}}}$$

Si $\delta-c$ est un nombre positif plus grand que l'unité, toutes les fractions intégrantes de la fraction continue

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{(\delta-c-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b-1+\vdots}}}}$$

sont positives, et la transformation proposée est effectuée.

Si $\delta - c$ est égal à l'unité, la fraction continue

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\delta-c-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b-1+\vdots}}}}$$

se réduit à $\alpha+\cfrac{1}{\beta+1+\cfrac{1}{b-1+\vdots}}$

et toutes les fractions intégrantes sont encore positives.

Enfin, lorsque la différence $\delta - c$ est négative, on peut écrire la fraction $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{(\delta-c)-\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}}$ sous la forme $\alpha+\cfrac{1}{\beta-\cfrac{1}{(c-\delta)+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}}$ et l'on rentre ainsi dans le cas précédent.

5. Une fraction continue périodique-mixte, dont la période est précédée d'un seul quotient incomplet peut donner lieu à une équation du second degré dont les racines aient des signes contraires. Cela arrive, lorsque le quotient incomplet qui précède la période est moindre que le dernier quotient incomplet de la période. Mais alors, les racines de l'équation sont toutes deux plus grandes, ou toutes deux plus petites que l'unité.

En effet, supposons que la fraction continue donnée, plus grande que l'unité, soit $\alpha+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}}$, la période

$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}$ commençant au second quotient incomplet, et c représentant le dernier quotient de la période.

La seconde racine de l'équation du second degré sera, comme on vient de le voir (nº 4), $\alpha-c-\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\text{etc.}}}}}$

Lorsque α est moindre que c, cette racine est négative mais sa valeur absolue $(c-\alpha)+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}$ surpassera l'unité.

Si la fraction continue donnée est moindre que l'unité, comme $\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}}}$, la seconde racine de l'équation du second dégré, deviendra

$$\cfrac{1}{(\alpha-c)-\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}}}$$

. On voit qu'elle est négative,

lorsque α est moindre que c; et de plus, sa valeur absolue

$$\cfrac{1}{(c-\alpha)+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}}}$$

est inférieure à l'unité.

Lorsque le quotient incomplet, α, qui précède la période surpasse le dernier quotient incomplet, c, de la période, la seconde racine de l'équation est positive.

6. *Les racines incommensurables d'une équation du second degré à coefficients rationnels s'expriment en fractions continues périodiques.*

Je considérerai d'abord une équation du second degré dont les racines ont des signes contraires.

Cette équation, dont les coefficients sont supposés rationnels, peut toujours être ramenée à la forme: $ax^2+bx-c=0$; les coefficients a, c étant des nombres entiers positifs, et b, un nombre entier positif ou négatif.

Afin de simplifier la démonstration, je m'occuperai séparément de chacune des racines, en commençant par celle qui est positive, et c'est pourquoi, en résolvant l'équation, je placerai le signe *plus* devant le radical.

La résolution de l'équation $ax^2+bx-c=0$, donne pour la valeur de la racine positive :

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{n}}{2a},$$

en représentant par n le nombre entier b^2+4ac.

Cette valeur incommensurable positive, $\frac{-b+\sqrt{n}}{2a}$, est comprise entre deux nombres entiers consécutifs α, $\alpha+1$, faciles à déterminer. Le plus petit de ces nombres peut d'ailleurs être nul.

Si maintenant, prenant pour inconnue la valeur de la fraction qu'il faut ajouter au nombre entier α pour obtenir la racine positive, on pose $x=\alpha+\frac{1}{x'}$: il est évident que x' devra être positif et plus grand que l'unité.

Pour obtenir la valeur de x', substituons $\alpha+\frac{1}{x'}$ à x dans l'équation (1) $ax^2+bx-c=0$. Il en résultera :

$$a\left(\alpha+\frac{1}{x'}\right)^2+b\left(\alpha+\frac{1}{x'}\right)-c=0.$$

Et par suite, l'équation du second degré :

$$(a\alpha^2+b\alpha-c)\,x'^2+(2a\alpha+b)\,x'+a=0\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Or, cette dernière équation dont les coefficients sont des nombres entiers, a comme l'équation $ax^2+bx-c=0$, dont elle dérive, ses deux racines de signes contraires.

En effet, les deux racines de l'équation $(a\alpha^2+b\alpha-c)\,x'^2+(2a\alpha+b)\,x'+a=0$, substituées à x' dans la relation $x=\alpha+\frac{1}{x'}$, doivent donner les racines de l'équation $ax^2+bx-c=0$. Mais, une des racines de $ax^2+bx-c=0$, est positive et plus grande que le nombre α; l'autre racine est négative; il faut donc que les deux valeurs substituées à x' soient, l'une positive, et l'autre négative.

Les racines de l'équation (2) ayant des signes contraires, leur produit $\frac{a}{a\alpha^2+b\alpha-c}$ est négatif, et par conséquent, le coefficient $a\alpha^2+b\alpha-c$ est un nombre entier négatif. Nous poserons :

$$a\alpha^2+b\alpha-c=-a',\quad 2a\alpha+b=-b';$$

et l'équation (2) deviendra :

$a'x'^2+b'x'-a=0$; a' étant un nombre entier positif, b' entier et de signe quelconque.

On obtiendra la racine positive de l'équation $ax^2+bx-c=0$, en remplaçant x', dans $x=\alpha+\frac{1}{x'}$, par la racine positive de l'équation $a'x'^2+b'x'-a=0$. La résolution de $a'x'^2+b'x'-a=0$, donne, pour la valeur cherchée,

$$x'=\frac{-b'+\sqrt{b'^2+4aa'}}{2a'}.$$

Et il est facile de reconnaître que le nombre b'^2+4aa' soumis au radical, est égal à n, c'est-à-dire à b^2+4ac. Car, on a :

$$b'^2=(2a\alpha+b)^2=4a^2\alpha^2+4ab\alpha+b^2\,;$$
$$4aa'=-4a(a\alpha^2+b\alpha-c)=-4a^2\alpha^2-4ab\alpha+4ac.$$

Donc, $b'^2+4aa'=b^2+4ac=n$.

La racine incommensurable $\frac{-b'+\sqrt{n}}{2a'}$, sera comprise entre deux nombres entiers consécutifs α', $\alpha'+1$; on posera $x'=\alpha'+\frac{1}{x''}$, et remplaçant x' par $\alpha'+\frac{1}{x''}$ dans $a'x'^2+b'x'-a=0$, il en résultera une nouvelle équation $a''x''^2+b''x''-a'=0$, ayant ses deux racines de signes contraires, et dont les coefficients a'', b'', a', sont des nombres entiers satisfaisant à la condition : $b''^2+4a'a''=n$. C'est ce que l'on vient de démontrer.

Le même calcul répété conduira évidemment à une suite indéfinie d'équations :

$$ax^2+bx-c=0$$
$$a'x'^2+b'x'-a=0$$
$$a''x''^2+b''x''-a'=0$$

. . . .

. . . .

dont les coefficients seront des nombres entiers liés entre eux par les relations :

$$\begin{aligned} b^2 &+4ac = n \\ b'^2 &+4a'a = n \\ b''^2 &+4a'a'' = n. \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Les nombres entiers α, α', α''...., qui donnent à moins d'une unité, par défaut, les valeurs approchées des racines positives de ces différentes équations, seront les quotients incomplets de la fraction continue $\alpha+\cfrac{1}{\alpha'+\cfrac{1}{\alpha''+\text{etc.}}}$ qui représente la racine positive de l'équation proposée, $ax^2+bx-c=0$.

Pour démontrer que cette fraction continue est périodique, il suffit de faire voir que l'une des équations $ax^2+bx-c=0$, etc., se reproduit exactement dans la suite du calcul.

Or, les relations $b^2+4ac=n$, $b'^2+4a'a''=n$, etc., montrent que les coefficients entiers a, a',... des premiers termes, ne peuvent jamais surpasser $\frac{n}{4}$; et que les valeurs absolues des coefficients entiers b, b',... des seconds termes sont moindres que $\sqrt{n}$. Par conséquent, si l'on désigne par h le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{4}$, et par k, le nombre des valeurs entières positives ou négatives moindres que $\sqrt{n}$, après avoir obtenu un nombre d'équations au plus égal au produit hk, il faudra que l'on retrouve une équation dont les deux premiers coefficients auront déjà été obtenus pour l'une des équations précédentes. Cela étant, les derniers termes de ces équations devront être égaux, pour qu'ils puissent satisfaire à la relation $b^2+4ac=n$, qui a toujours lieu entre les trois coefficients de chacune des équations.

L'équation qui se reproduit la première est l'équation proposée $ax^2+bx-c=0$; ou bien la suivante $a'x'^2+b'x'-a=0$. Car, s'il en était autrement, le nombre des coefficients incomplets α, α'..., précédant la période de la fraction continue $\alpha+\cfrac{1}{\alpha'+\cfrac{1}{\alpha''+\text{etc.}}}$, serait au moins égal à deux. Alors, la fraction continue périodique $\alpha+\cfrac{1}{\alpha'+\cfrac{1}{\alpha''+\text{etc.}}}$, serait racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels, et qui aurait ses deux racines de même signe (n° 4). Cette dernière équation et la proposée $ax^2+bx-c=0$, ayant une racine commune incommensurable, et les coefficients rationnels, devraient avoir les mêmes racines; ce qui est impossible puisque les racines de l'équation $ax^2+bx-c=0$, ont des signes contraires.

On démontre immédiatement que la racine négative de l'équation proposée $ax^2+bx-c=0$, s'exprime en fraction continue périodique, en remplaçant x, par $-x$ dans cette équation. La substitution donne l'équation $ax^2-bx-c=0$, dont la racine positive est, comme on vient de le voir, représentée par une fraction continue périodique. En donnant le signe *moins* à cette fraction, on aura l'expression de la racine négative de l'équation proposée.

Considérons, maintenant, une équation du second degré $ax^2-bx+c=0$, dont les deux racines soient positives. Je ferai d'abord observer que ces racines doivent être inégales puisqu'elles sont supposées incommensurables; et, pour plus de précision, je distinguerai deux cas : suivant que la différence de ces deux racines sera plus grande ou plus petite que l'unité.

Dans le premier, les racines de l'équation $ax^2-bx+c=0$, ne peuvent être toutes deux comprises entre les mêmes nombres entiers consécutifs. Je nomme α, et $\alpha+1$, les deux nombres entiers consécutifs entre lesquels la plus grande des racines est comprise; la plus petite sera moindre que α; et par conséquent, si l'on remplace x par $\alpha+\frac{1}{x'}$, dans l'équation $ax^2-bx+c=0$, il en résultera une nouvelle équation en x' qui aura une de ses racines positive et plus grande que l'unité, et l'autre négative. Ces racines de signes contraires seront exprimées par des fractions continues périodiques, et en remplaçant successivement x' par chacune de ces valeurs dans l'expression $\alpha+\frac{1}{x'}$, on obtiendra des fractions continues périodiques, pour les racines de l'équation proposée.

Lorsque la différence des racines de l'équation $ax^2-bx+c=0$, est moindre que l'unité, les valeurs de ces racines peuvent être toutes deux comprises entre les nombres entiers α, et $\alpha+1$; dans ce cas, l'équation transformée en x', a ses deux racines positives et plus grandes que l'unité. Si les racines de cette équation sont encore comprises toutes deux entre des nombres entiers consécutifs α', $\alpha'+1$, en remplaçant x' par $\alpha'+\frac{1}{x''}$, on aura une équation transformée en x'', dont les racines seront encore positives. Mais en continuant le calcul qui donne ces transformées successives, on parviendra toujours à une équation dont les deux racines ne seront plus comprises entre les mêmes nombres consécutifs; autrement, les racines de l'équation proposée $ax^2-bx+c=0$, seraient égales puisqu'elles seraient exprimées par la même fraction continue. Les racines de l'équation transformée suivante ayant des signes contraires seront exprimées par des fractions continues périodiques; et par conséquent, les racines de l'équation proposée auront elles-mêmes pour expressions, des fractions continues périodiques.

Enfin, si l'équation proposée a ses deux racines négatives, on changera le signe de ces racines en remplaçant x par $-x$, et, par cette transformation, on rentrera dans le cas précédent.

Le théorème se trouve ainsi généralement démontré.

7. La racine quarrée d'un nombre rationnel qui n'est pas un quarré, est exprimée par une fraction continue périodique mixte, dont la période est précédée d'un seul quotient incomplet.

En effet, soit n le nombre considéré, sa racine quarrée sera une des racines incommensurables de l'équation $x^2-n=0$. Si $\sqrt{n}$ était exprimée par une fraction continue périodique simple, les deux racines de l'équation $x^2-n=0$, devraient être, l'une plus grande et l'autre plus petite que l'unité (n° 3); ce qui est impossible puisque ces deux racines ont des valeurs absolues égales. Il est de même impossible que $\sqrt{n}$ donne une fraction continue périodique mixte dont la période soit précédée de plusieurs quotients incomplets, parce que les deux racines de l'équation $x^2-n=0$, n'ont pas le même signe (n° 4). Ainsi, la racine quarrée du nombre n donnera lieu à une fraction continue périodique mixte, dont la période sera précédée d'un seul quotient incomplet.

Si le nombre n est plus grand que l'unité, on aura $\sqrt{n}=\alpha+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\text{etc.}}}}}}$, la période étant

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}$$; et (n° 5), $-\sqrt{n}=(\alpha-e)-\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{e+\text{etc}}}}}}$

On en conclura $(e-\alpha)+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}=\alpha+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\text{etc.}}}$,

et par suite :

$e-\alpha=\alpha$; $e=2\alpha$. Ce qui montre que le dernier quotient de la partie périodique est double du quotient incomplet qui précède la période.

Et de plus, on aura $d=a$, $c=b$; et ainsi de suite, si le nombre des quotients incomplets était plus grand.

Lorsque la période de la fraction continue qui représente la racine quarrée du nombre n, est composée d'un seul quotient incomplet, ce quotient est le double de celui qui précède la période. Alors, on a : $\sqrt{n}=\alpha+\cfrac{1}{2\alpha+\cfrac{1}{2\alpha+\text{etc.}}}$

D'où $\sqrt{n}=\alpha+\cfrac{1}{\alpha+\sqrt{n}}$; $(\sqrt{n}-\alpha)(\sqrt{n}+\alpha)=1$; $n=\alpha^2+1$.

Cette propriété des racines quarrées des nombres, de donner lieu à des fractions continues périodiques, a été remarquée par Euler (*Commentaires de Pétersbourg*, tome XI des nouveaux); mais il n'en a pas donné la démonstration.

G.

MÉMOIRE

SUR LES

COURBES DU SECOND ORDRE A BRANCHES INFINIES.

PAR C. E. PAGE,
Professeur à l'École royale d'artillerie de La Fère.

Les questions qui font le sujet de ce mémoire ont été déjà traitées par M. BRIANCHON (*Mémoire sur les courbes du second ordre*, 1817), *et par* M. COSTE (*Annales de mathématiques de* GERGONNE, *tome VIII*, 1818).

PREMIÈRE PARTIE.

1. Trois droites A'B, AB' et AB (*fig.* 1) tournent respectivement autour des trois points fixes P, P' et P''; le point A d'intersection des deux droites AB et AB' est assujetti à glisser sur une droite fixe OX ; le point B intersection des deux droites AB et A'B est assujetti à glisser sur une droite fixe OY; cherchons le lieu géométrique engendré par le point C intersection des deux droites AB' et A'B.

Prenons pour axes coordonnés les deux droites fixes OX et OY.

Soient a et b les coordonnées du point P; a' et b' les coordonnées du point P'; enfin, a'' et b'' les coordonnées du point P''.

Représentons les distances variables OA par α; OB par β ; OA' par α', et OB' par β'.

L'équation de la droite A'B sera :

$$\alpha' y + \beta x = \alpha' \beta.$$

Comme cette droite doit toujours passer par le point P, dont les coordonnées sont a et b, les variables α' et β seront liées entre elles par l'équation :

$$\alpha' b + \beta a = \alpha' \beta.$$

L'équation de la droite AB' sera :

$$\alpha y + \beta' x = \alpha \beta'.$$

Comme cette droite doit toujours passer par le point P', dont les coordonnées sont a' et b', les variables α et β' seront liées entre elles par l'équation :

$$\alpha b' + \beta' a' = \alpha \beta'.$$

Enfin, la droite AB étant assujettie à passer par le point P'', dont les coordonnées sont a'' et b'', les variables α et β seront liées par l'équation :

$$\alpha b'' + \beta a'' = \alpha \beta.$$

Nous aurons donc les cinq équations :

$$\alpha b'' + \beta a'' = \alpha\beta, \quad (1) \qquad \alpha y + \beta' x = \alpha\beta', \quad (4)$$
$$\alpha b' + \beta' a' = \alpha\beta', \quad (2) \qquad \alpha' y + \beta x = \alpha'\beta, \quad (5)$$
$$\alpha' b + \beta a = \alpha'\beta, \quad (3)$$

Si, entre ces cinq équations, on élimine les quatre variables α, β, α', β', on parviendra à une seule équation entre x et y ; ce sera l'équation du lieu géométrique cherché.

Des trois premières équations on tire :

$$\beta = \frac{b''\alpha}{\alpha - a''}, \quad \beta' = \frac{b'\alpha}{\alpha - a'}, \quad \alpha' = \frac{ab''\alpha}{(b'' - b)\alpha + a''b}.$$

Mettant ces valeurs dans les équations (4) et (5), puis éliminant α, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} a(a''-a')y^2 + (a'b + ab' - a'b'' - a''b)xy + b'(b''-b)x^2 \\ \quad + a\,(a'b'' - a''b')\,y + b'(a''b - ab'')x = 0. \end{array}\right\} \ldots \text{(A)}$$

C'est l'équation d'une courbe du second ordre qui passe par les cinq points O, P, P', Q', Q. En effet, cette équation est satisfaite par les cinq couples de valeurs :

$$\left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} x=a \\ y=b \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} x=a' \\ y=b' \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=\dfrac{a'b''-a''b'}{a'-a''} \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} x=\dfrac{ab''-a''b}{b''-b} \\ y=0 \end{array}\right|.$$

On voit que si, dans un triangle variable, ABC, les trois cotés sont assujettis à tourner autour de trois points fixes P, P', P'', et si deux sommets A et B sont assujettis à glisser sur deux droites fixes OX et OY : le troisième sommet C décrit une courbe du second ordre qui passe par les cinq points O, Q, P, P', Q'. Ces cinq points fixes et le point mobile C, dans une de ses positions, déterminent les six sommets d'un hexagone inscrit à la courbe ; les trois points A, B, P'', peuvent être considérés comme les points de concours des côtés opposés de cet hexagone ; on en conclut le théorème de *Pascal* :

Dans tout hexagone inscrit à une courbe du second ordre, les trois points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.

2. Si, par chacun des six sommets de l'hexagone inscrit, on mène une tangente à la courbe, on forme un hexagone circonscrit ; chaque sommet de l'hexagone circonscrit est le pôle d'un côté correspondant de l'hexagone inscrit ; par conséquent, la diagonale qui joint deux sommets opposés de l'hexagone circonscrit, est la polaire du point de concours de deux côtés opposés de l'hexagone inscrit. Or, comme les trois points de concours des côtés opposés de l'hexagone inscrit sont en ligne droite, les trois diagonales qui joignent les sommets opposés de l'hexagone circonscrit doivent se couper en un même point, qui est le pôle de cette droite ; on conclut de là le théorème de M. *Brianchon* :

Dans tout hexagone circonscrit à une courbe du second *ordre, les trois diagonales qui joignent les sommets opposés se coupent en un même point.*

Ainsi, dans l'hexagone circonscrit, AQPP′Q′B (*fig.* 2), les trois diagonales BP, AP′ et QQ′ se coupent en un même point C. Supposons que les trois droites OX, OY et QQ′ restent fixes, ainsi que les deux sommets P et P′, mais que le côté AB se meuve en restant constamment tangent à la courbe ; les deux diagonales P′A et PB tourneront autour des deux points fixes P et P′, en restant assujetties à se couper sur la droite fixe QQ′. On en conclut que si *dans un triangle variable* ABC, *les trois sommets sont assujettis à glisser sur trois droites fixes* OX, OY *et* QQ′; *et si deux côtés*, AC *et* BC, *sont assujettis à tourner autour de deux points fixes* P′ *et* P, *le troisième côté restera constamment tangent à une même courbe du second ordre.*

DE LA PARABOLE.

3. Si l'un des cinq points O, Q, P, P′, Q′ (*fig.* 1), par lesquels doit passer la courbe engendrée par le point C (nº 1), est situé à l'infini, cette courbe doit nécessairement avoir une branche infinie, par conséquent, elle devient une parabole ou une hyperbole.

Supposons par exemple que le point Q, intersection de la droite PP″ avec l'axe OX, soit situé à l'infini, c'est-à-dire que la droite PP″ soit parallèle à l'axe OX, nous aurons $b=b''$, l'équation A (nº 1), deviendra :

$$a\,(a''-a')\,y^2+(ab'-a''b)\,xy+a\,(a'b-a''b')\,y \\ +b'\,(a''b-ab)\,x=0.$$

Pour que cette équation représente une parabole, il faut que le rectangle des variables disparaisse, on doit donc avoir :

$$ab'-a''b=0.$$

L'équation se réduit alors à

$$a\,(a''-a')\,y^2+a\,(a'b-a''b')\,y+b'\,(a''b-ab)\,x=0.$$

C'est l'équation d'une parabole dont les diamètres sont parallèles à l'axe OX.

4. Si dans l'expression

$$\alpha' = \frac{ab''\alpha}{(b''-b)\,\alpha + a''b} \text{ (page 22)},$$

on fait $b=b''$, il reste

$$\alpha' = \frac{a\alpha}{a''}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{a}{a''}$$

D'où l'on tire ce théorème :

Si de deux points fixes P *et* P' (*fig.* 3), *pris sur le périmètre d'une parabole, on mène à un troisième point variable* C *de cette courbe, deux droites qui aillent couper un diamètre quelconque* OX *en deux points* A *et* A', *les segments* OA *et* OA' *interceptés sur ce diamètre entre ces deux points d'intersection et le point où il rencontre la courbe, seront dans un rapport constant.*

5. L'équation

$$ab' - a''b = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},$$

fait voir que la droite qui joint le point O au point P (*fig.* 4), doit rencontrer l'ordonnée du point P'' en un point D tel que l'on ait ED$=b'$, c'est-à-dire que les deux points D et P' doivent se trouver sur une même droite parallèle à l'axe OX, par conséquent sur un même diamètre de la courbe.

La ligne P''P' va rencontrer l'axe OY en un point Q' qui appartient à la courbe, les quatre points O, P, P', Q', sont les quatre sommets d'un quadrilatère inscrit, on a donc ce théorème :

Un quadrilatère OPP'Q' *étant inscrit à une parabole, si on prolonge deux côtés opposés* OP *et* Q'P', *jusqu'à ce qu'ils aillent rencontrer, en* D *et* P'', *les diamètres menés par les deux extrémités d'un des côtés restants : la ligne qui joindra ces deux points d'intersection sera parallèle au quatrième côté.*

Si par le point Q′, on menait un diamètre, et si l'on prolongeait les côtés OP et Q′P′, jusqu'à la rencontre de ce diamètre, et du diamètre OX aux points M et N : la ligne MN serait parallèle au côté PP′.

Par le sommet P′, menons parallèlement au côté OQ′, une droite qui aille rencontrer le côté opposé en F ; à cause des parallèles P′F et DP″ et des parallèles P′D et PP″, nous aurons

$$\frac{GD}{GP''} = \frac{GF}{GP'} \quad \text{et} \quad \frac{GD}{GP'} = \frac{GP}{GP''},$$

multipliant membre à membre, on a :

$$GD^2 = GP.GF.$$

6. Les deux sommets P et P′ (*fig.* 4) peuvent se réunir en un seul P (*fig.* 5). Alors, le quadrilatère OPP′Q′ se réduit à un triangle OPQ′, et le côté PP′ devient une tangente menée par le sommet P ; on en conclut ce théorème :

Un triangle étant inscrit à une parabole, si on prolonge deux côtés jusqu'à ce qu'ils aillent couper les diamètres menés par les sommets opposés, la ligne qui joindra les points d'intersection, sera parallèle à la tangente menée par le troisième sommet.

Ce théorème donne un moyen facile de résoudre le problème suivant :

Construire la tangente en un point donné d'une parabole, quand on connaît deux autres points de la courbe et la direction des diamètres.

Soient P (*fig.* 5) le point par lequel on veut mener la tangente; et O et Q′, les deux autres points donnés : on joint ces points de manière à former un triangle, on prolonge les côtés OP et Q′P jusqu'à ce qu'ils aillent rencontrer en N et en M les diamètres menés par les sommets opposés, on joint le point M au point N, et par le sommet P on mène une parallèle à MN : cette parallèle est la tangente demandée.

7. Par le sommet P (*fig.* 5), menons un diamètre qui rencontre le côté opposé en B, prolongeons la tangente du point P jusqu'à ce qu'elle rencontre le côté opposé en A, et les deux diamètres Q'N et OM, en D et en C ; à cause des parallèles BP et Q'N, et des parallèles PC et NM, on aura :

$$\frac{\text{OB}}{\text{OQ}'} = \frac{\text{OP}}{\text{ON}} \quad \text{et} \quad \frac{\text{OP}}{\text{ON}} = \frac{\text{OC}}{\text{OM}} \quad \text{d'où} \quad \frac{\text{OB}}{\text{OQ}'} = \frac{\text{OC}}{\text{OM}}.$$

Donc, si l'on joint les deux points B et C, la ligne BC sera parallèle au côté Q'P.

A cause des parallèles Q'P et BC, et des parallèles BP et OC, on a :

$$\frac{\text{AQ}'}{\text{AB}} = \frac{\text{AP}}{\text{AC}} \quad \text{et} \quad \frac{\text{AP}}{\text{AC}} = \frac{\text{AB}}{\text{AO}} \quad \text{d'où} \quad \overline{\text{AB}}^2 = \text{AQ}'.\text{AO}.$$

On conclut de là ce théorème :

Si d'un point A *pris sur une tangente à la parabole, on mène une transversale qui coupe la courbe en deux points, le segment compris entre le point* A *et le point d'intersection de la transversale avec le diamètre mené par le point de contact, sera moyenne proportionnelle entre les deux segments compris entre le point* A *et les deux points d'intersection de la transversale avec la courbe.*

8. Maintenant considérons l'hexagone circonscrit (*fig.* 2), supposons que les deux points P et P', autour desquels tournent les diagonales PB et P'A, s'éloignent à l'infini ; la tangente PP' passera tout entière à l'infini ; comme la parabole est la seule courbe du second ordre pour laquelle la tangente puisse passer tout entière à l'infini, la courbe à laquelle le côté BA restera constamment tangent sera une parabole.

Les deux points P et P', étant situés à l'infini, les deux diagonales BC et AC resteront constamment parallèles aux droites Q'P' et QP ; on en conclut que si dans un triangle variable ABC (*fig.* 6), les trois sommets sont assujettis à glisser sur trois droites fixes OX, OY et QQ′, et si deux côtés AC et BC sont assujettis à rester constamment parallèles à deux droites fixes Q′P′ et QP : le troisième côté AB restera constamment tangent à une parabole qui touchera les quatre droites OX, OY, QP et Q′P′.

9. Les droites QP et Q′P′ peuvent se confondre avec les droites OX et OY (*fig.* 7) ; dans ce cas, la droite QQ′ devient la corde de contact des deux tangentes OX et OY.

Les deux tangentes fixes OX et OY, et la tangente mobile, AB, dans une de ses positions forment un triangle circonscrit à la parabole ; on en conclut ce théorème :

Si par deux sommets A *et* B *d'un triangle* OAB *circonscrit à une parabole, on mène des droites* AC *et* BC *respectivement parallèles aux côtés opposés, ces droites se couperont en un point* C *qui sera situé sur la corde de contact de ces deux côtés.*

10. Prolongeons la corde de contact QQ′ de manière qu'elle rencontre la tangente AB en M ; à cause de AC parallèle à BQ′, et de BC parallèle à AQ, on aura :

$$\frac{MQ'}{MC}=\frac{MB}{MA} \quad \text{et} \quad \frac{MB}{MA}=\frac{MC}{MQ}, \quad \text{d'où} \quad MQ.MQ'=MC^2,$$

Le point C *est donc situé sur le diamètre qui passe par le point de contact de* AB (n° 7).

PROBLÈMES SUR LA PARABOLE.

11. 1er PROBLÈME. *Construire la parabole qui passe par quatre points donnés.*

Soient A, B, C, D (*fig.* 8) les quatre points donnés ; joignons ces points de manière à former un quadrilatère, prolongeons les côtés opposés AD et BC qui se coupent en G ; par le sommet A, menons parallèlement au côté DC, une droite que coupe le côté CB en E ; sur ce côté CB, prenons les points K et K′ tels que l'on ait $GK^2 = GK'^2 = GB.GE$: le diamètre qui passe par le point A doit passer par l'un des deux points K ou K′ (n° 5).

Comme l'on peut joindre l'un des deux points K ou K′ avec le point A, le problème admettra deux solutions.

Il est facile de déterminer tous les éléments de la parabole, quand on connaît quatre points et la direction des diamètres.

12. 2ᵉ **Problème.** *Construire la parabole qui touche quatre droites données.*

Soient AE, CE, AF, BF (*fig.* 9) les quatre tangentes données. Par les deux sommets B et F, du triangle circonscrit ABF, menons des droites respectivement parallèles aux côtés opposés, ces droites iront se couper en un point N qui sera situé sur le diamètre qui passe par le point de contact du côté BF (n° 10).

Par les deux sommets D et F, du triangle circonscrit DCF, menons deux droites respectivement parallèles aux côtés opposés, ces droites iront se couper en un point M, qui appartiendra au diamètre qui passe par le point de contact du côté DF qui est le même que BF. Par conséquent, en joignant les deux pointsM et N on aura un diamètre: le point K intersection de ce diamètre avec le côté BF, sera le point de contact de ce côté.

Par lès deux sommets E et C, du triangle circonscrit EAC, menons deux droites respectivement parallèles aux côtés opposés; ces droites se couperont en un point P, situé sur le diamètre qui passe par le point de contact du côté CE. Par conséquent, en menant par le point P une parallèle à MN, qui aille rencontrer le côté CE en H, on aura le point de contact de ce côté.

Enfin, les deux points N et P sont situés sur la corde de contact des deux côtés AF et AE (n° 9); par conséquent, en prolongeant la droite NP jusqu'à la rencontre de ces côtés en Q et en R, on aura les points de contact de ces deux côtés.

Le problème n'a qu'une seule solution.

13. 3^e **Problème.** *Construire la parabole qui passe par trois points donnés, et qui touche une droite donnée.*

Soient A, B, C (*fig.* 10) les trois points donnés, et MN la tangente donnée ; le problème serait résolu si l'on connaissait le point de contact de cette tangente, et le diamètre qui passe par ce point de contact.

Joignons les deux points A et B, et prolongeons la droite AB jusqu'à ce qu'elle aille couper la tangente MN en E ; construisons deux points P et P', tels que l'on ait :

$$\overline{EP}^2 = \overline{EP'}^2 = EA.EB.$$

Le diamètre qui passe par le point de contact de MN devra nécessairement passer par l'un ou l'autre de ces deux points P, P' (n° 7).

Joignons les deux points B et C, prolongeons la droite BC jusqu'à la rencontre de MN en D, prenons les deux points Q et Q' tels que l'on ait :

$$DQ^2 = DQ'^2 = DB.DC.$$

Le diamètre de contact de la tangente MN devra passer par l'un des deux points Q ou Q'.

En joignant l'un des deux points P, ou P', avec l'un des deux points Q, ou Q', on aura le diamètre de contact de la tangente MN. Par conséquent, le point d'intersection de ce diamètre avec cette tangente donnera le point de contact.

Comme on peut mener quatre droites différentes joignant l'un des deux points P, ou P', avec l'un des deux points Q, ou Q', le problème admettra quatre solutions.

Il pourrait arriver que l'un des trois points donnés fût situé sur la tangente donnée ; dans ce cas, on déterminerait sur la droite qui joint les deux autres points, les deux points par l'un desquels doit passer le diamètre du point de contact; puis, joignant l'un de ces points avec le point donné sur la tangente, on aurait ce diamètre. Le problème n'admettrait que deux solutions.

14. 4ᵉ PROBLÈME : *Construire la parabole qui passe par un point donné et qui touche trois droites données.*

Soit A (*fig.*11) le point donné; DEF le triangle formé par les trois tangentes données. Par les deux sommets E et D de ce triangle, menons des droites parallèles aux côtés opposés, ces droites iront se couper en un point G appartenant au diamètre qui passe par le point de contact de DE; par les deux points A et G, faisons passer une droite qui aille rencontrer la tangente DE en N, sur cette droite prenons un point B tel que l'on ait

$$NB.NA = \overline{NG}^2.$$

le point B appartiendra à la courbe (n° 7).

La droite AB rencontre la tangente EF en un point C: construisons les deux points Q et Q′ tels que l'on ait

$$\overline{CQ}^2 = \overline{CQ'}^2 = CA.CB.$$

Le diamètre de contact de la tangente EF devra passer par l'un ou l'autre de ces deux points.

Par les deux sommets E et F, du triangle DEF, menons deux droites parallèles aux côtés opposés, ces droites iront se couper en un point, H, qui appartiendra au diamètre de contact de la tangente EF. Par conséquent, on obtiendra ce diamètre en joignant le point H avec l'un ou l'autre des deux points Q, ou Q′. L'intersection de ce diamètre avec EF, donnera le point de contact de cette tangente.

En menant par le point G une parallèle à QH, on aura le diamètre de contact de DE.

Enfin, en menant par les deux sommets D et F, du triangle EDF, des parallèles aux côtés opposés, ces parallèles iront se couper en un point, K, qui appartiendra au diamètre de contact de DF ; on aura ce diamètre en menant par le point K, une parallèle à QH.

Comme on peut mener deux droites différentes, joignant le point H avec l'un des deux points Q ou Q', le problème a deux solutions.

Le point donné pourrait être situé sur une des trois tangentes ; dans ce cas, par les deux sommets adjacents à cette tangente, on mènera des droites parallèles aux côtés opposés, ces droites se coupent en un point situé sur le diamètre de contact ; en joignant ce point avec le point donné, on aura ce diamètre.

Le problème n'admettra qu'une seule solution.

15. 5e **Problème.** *Construire la parabole qui passe par deux points donnés et qui touche deux droites données.*

Soient A et B (*fig.* 12) les deux points donnés ; OX et OY les deux tangentes. Menons la ligne AB et prolongeons-la jusqu'à ce qu'elle coupe la tangente OX en D, et la tangente OY en E. Construisons les points P, P', et les points Q et Q', tels que l'on ait :

$$\overline{DP}^2 = \overline{DP'}^2 = DA.DB \quad \text{et} \quad \overline{EQ}^2 = \overline{EQ'}^2 = EA.EB.$$

Le diamètre de contact de la tangente OX devra passer par l'un des deux points P ou P', et le diamètre de contact de la tangente OY, devra passer par l'un des deux points Q ou Q'.

Supposons que le diamètre de contact de OX, passe par le point P, et le diamètre de contact de OY, par le point Q. Il est facile de voir que le diamètre qui passe par le point de concours O des deux tangentes devra passer par le milieu de PQ. On aura donc la direction des diamètres en joignant le point O, avec le point K milieu de PQ.

Comme on peut joindre le point O avec les milieux des distances PQ, P'Q, Q'P, Q'P', on voit que le problème admet quatre solutions.

Dans le cas où l'un des deux points A ou B serait situé sur l'une des deux tangentes, le problème n'aurait que deux solutions.

Enfin, dans le cas où les deux points seraient situés sur les deux tangentes, le problème n'aurait qu'une seule solution.

(*La fin au prochain Numéro.*)

DÉMONSTRATION

DU

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

PAR M. A. J. H. VINCENT,
Professeur au Collége royal de Saint-Louis.

La démonstration ordinaire du principe fondamental de la trigonométrie sphérique présente l'inconvénient d'exiger une très-longue discussion, quand on veut la rendre applicable à tous les cas qui peuvent se présenter; c'est pourquoi j'ai pensé qu'on ne serait pas fâché d'en connaître une autre qui, au premier abord, paraît un peu plus longue, mais qui a l'avantage de n'exiger aucune discussion, et de s'appliquer à tous les cas possibles sans aucune restriction ni modification. Outre ce premier avantage, elle offre encore celui de se ramener à la théorie des angles trièdres, et à la seule figure de cette théorie, nécessaire pour la construction et la résolution des quatre cas non douteux. (*Voir* ma Géométrie.)

Soit donc ABC (*fig.* 13) un triangle sphérique quelconque, placé sur une sphère dont le centre est en S. Joignons les sommets A, B, C, au point S, et menons les cordes AB, AC, BC. Le triangle rectiligne formé par ces trois cordes nous donne la relation :

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB.AC.\cos BAC;$$

d'où, comme chacune de ces cordes est le double du *sinus* de la moitié de l'arc qu'elle sous-tend, nous tirons, en désignant par A, B, C, les angles du triangle sphérique, et par α, β, γ, les arcs respectivement opposés à ces angles :

$$4\sin^2\frac{1}{2}\alpha = 4\sin^2\frac{1}{2}\beta + 4\sin^2\frac{1}{2}\gamma - 8\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma\cos BAC.$$

Cela posé, par un point P pris sur le rayon SA faisons passer un plan MPN perpendiculaire à ce rayon : l'angle formé par les traces de ce plan sur les faces ABS, ACS, sera l'angle mesure de l'angle A; en outre, ces traces rencontreront *toujours* les cordes AB et AC en deux points M et N situés par rapport au point A de la même manière que les points B et C. Cela résulte, en effet, de ce que les trois droites SA, SB, SC, étant égales, les triangles SBA, SCA, sont isocèles, et par suite les angles SAB, SAC, sont aigus.

Soient donc M et N les points de rencontre respectifs du plan MPN avec les cordes AB et AC. Joignons MN, nous aurons, dans le triangle AMN,

$$\overline{MN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 - 2AM.AN.\cos BAC.$$

Mais d'ailleurs :

$$\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2 \quad \text{et} \quad \overline{AN}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PN}^2,$$

Donc

$$\overline{MN}^2 = 2\overline{AP}^2 + \overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 - 2AM.AN.\cos BAC.$$

Maintenant, le triangle PMN nous fournit une seconde valeur de $\overline{MN}^2$,

$$\overline{MN}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 - 2PM.PN.\cos A.$$

Et alors, en éliminant $\overline{MN}^2$ entre ces deux équations, nous obtenons :

$$AM.AN.\cos BAC = \overline{AP}^2 + PM.PN.\cos A.$$

D'où :

$$\cos BAC = \frac{\overline{AP}^2 + PM.PN.\cos A}{AM.AN}.$$

Valeur qui peut être mise sous la forme :

$$\cos BAC = \frac{AP}{AM}\cdot\frac{AP}{AN} + \frac{PM}{AM}\cdot\frac{PN}{AN}.\cos A.$$

Cela posé, observons que :

$$\frac{AP}{AM} = \cos PAM = \sin\frac{1}{2}\gamma,$$

$$\frac{AP}{AN} = \cos PAN = \sin\frac{1}{2}\beta,$$

$$\frac{PM}{AM} = \sin PAM = \cos\frac{1}{2}\gamma,$$

$$\frac{PN}{AN} = \sin PAN = \cos\frac{1}{2}\beta.$$

Alors, la valeur de cos BAC devient :

$$\cos BAC = \sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma + \cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma\cos A.$$

Substituant cette valeur dans la première relation obtenue, nous trouvons :

$$4\sin^2\frac{1}{2}\alpha = 4\sin^2\frac{1}{2}\beta + 4\sin^2\frac{1}{2}\gamma - 8\sin^2\frac{1}{2}\beta\sin^2\frac{1}{2}\gamma$$
$$-8\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma\cos A;$$

d'où, en divisant par 2 et remarquant que :

$$2\sin^2\frac{1}{2}m = 1 - \cos m, \quad \text{et} \quad 2\sin\frac{1}{2}m\cos\frac{1}{2}m = \sin m,$$

nous obtenons :

$$(1-\cos\alpha) = 1-\cos\beta + 1-\cos\gamma - (1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) - \sin\beta\sin\gamma\cos A;$$

et enfin, réduisant et changeant les signes :

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A\ ;$$

ce qu'il fallait démontrer.

PROBLÈME

PROPOSÉ

AU CONCOURS GÉNÉRAL DES COLLÉGES DE PARIS.

SOLUTION DE M. L. ANNE,

Ancien élève de l'École polytechnique, répétiteur de mathématiques au Collége royal de Louis-le-Grand.

Considérez une circonférence de cercle de rayon R, *et un point situé dans le plan, et dans l'intérieur de cette circonférence, à une distance* a *du centre : regardez le point donné comme une bille infiniment petite et la circonférence comme une ligne matérielle parfaitement élastique ; de manière que, quand la bille va la frapper elle se relève toujours en faisant l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion.*

On demande : 1° suivant quelle direction il faut lancer cette bille pour qu'elle revienne au point de départ, après deux réflexions successives sur la circonférence.

2° Si la bille continuait sa route, elle irait se réfléchir successivement en de nouveaux points de la circonférence, et il est aisé de voir qu'elle ne pourrait repasser par les mêmes points que dans le cas où la distance, a, du point de départ au centre aurait certaines valeurs particulières.

3° On examinera ce qui arrivera dans quelques-uns des cas les plus simples, et entre autres, dans le cas où a est égal au rayon : ou bien dans le cas où le point de départ divisera le rayon en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire dans le cas où a est l'un des deux segments du rayon divisé en moyenne et extrême raison.

SOLUTION.

1re *partie.* Suivant quelle direction faut-il lancer la bille pour qu'elle revienne au point de départ après deux réflexions successives sur la circonférence?

Soit A (*fig.* 14), la position de la bille dans le cercle dont le centre est C et le diamètre YACY'; et AB la direction suivant laquelle il faut la lancer pour que, après avoir frappé la circonférence aux deux points B et D, elle revienne au point A. D'après la loi de la réflexion, le rayon du cercle doit être aux points B et D bissecteur des angles du triangle ABD, puisqu'il est normal à la circonférence en chacun de ces deux points. Donc, l'angle ABD est double de l'angle CBD, et l'angle ADB est double de l'angle CDB. Mais le triangle CBD est isocèle, donc les angles ABD, ADB, sont égaux, comme étant les doubles d'angles égaux. Par suite, le triangle ABD est isocèle. Mais, le point C est la rencontre des bissectrices des angles du triangle ABD, et dans un triangle isocèle la bissectrice de l'angle du sommet est perpendiculaire à la base; donc, BD est perpendiculaire au diamètre YACY' : ainsi sa direction est connue.

Par le point A je mène AX parallèle à BD, c'est-à-dire perpendiculaire à AC; je prolonge BC jusqu'à sa rencontre E avec AX, et le triangle BAE résultant est isocèle, car les angles EBD, EBA, sont égaux, d'après la loi de la réflexion; et les angles EBD, BEA sont égaux comme alternes-internes; donc, les angles EBA, BEA sont égaux; par suite, le triangle ABE est isocèle.

Du point A comme centre, avec AC pour rayon je décris la circonférence CFHG, elle coupe CE en un point F tel que EF=BC, car les deux triangles isocèles BAE, CAF, ayant même sommet et appuyant leurs bases sur la même droite, doivent avoir le même point milieu de base, donc BC=FE.

Menant la droite GF, il en résulte deux triangles rectangles CFG, CAE, semblables comme équiangles, car l'angle CFG sous-tend une demi-circonférence, donc il est droit et égal à l'angle droit CAE; et l'angle C est commun. De cette similitude il résulte :

$$CE : CG :: CA : CF.$$

Mais CG=2CA, donc $CE \times CF = 2\overline{CA}^2$.

Les longueurs CE, CF, peuvent donc être considérées comme les deux côtés d'un rectangle dont on connaît la surface $2\overline{CA}^2$, et la différence des côtés adjacents CE—CF=CB= le rayon du cercle donné.

Problème XVIII^e du III^e livre de la géométrie de Legendre.

Donc, pour résoudre le problème :

Je mène le diamètre YACY′ passant par le point A donné; du point A comme centre, et avec AC (distance du point A au centre du cercle donné) pour rayon, je décris la circonférence CFHG; par le point A, je mène au diamètre YCY′ la perpendiculaire AX qui coupe cette circonférence au point H ; puis je conduis GH que je prolonge d'une quantité HK=BC, sur HK comme diamètre je décris une circonférence dont I est le centre, je mène la droite CMIL, qui coupant cette circonférence aux points M et L, donne $CM \times CL = 2\overline{CA}^2$,

et $$CL - CM = BC.$$

Du point C comme centre, avec CL pour rayon, je décris une circonférence qui coupe AX au point E; ce point E sera tel que, menant la droite ECB, elle coupera la circonférence donnée au delà du centre C, en un point B qui est celui sur lequel il faut lancer la bille.

Et en effet, BCE coupe la circonférence CFHG en un point F qui, joint avec le point G, donne deux triangles rectangles CFG, CAE, semblables, et par suite :

$$CE \times CF = CG \times CA = 2\overline{CA}^2.$$

Mais, on a

$$CL \times CM = 2\overline{CA}^2 \text{ et } CL = CE, \text{ donc } CF = CM;$$

et par suite :

$$CE - CF = CL - CM = ML = BC.$$

L'égalité EF = BC, montre que le milieu de la base CF du triangle isocèle CAF, est le milieu de la base BE du triangle BAE. Nous en conclurons que le triangle BAE est aussi isocèle. Ainsi, les angles AEB, ABE sont égaux Mais, à cause des parallèles AX, BD, l'angle AEB = l'angle EBD. Il en résulte EBD = ABE. La bille se relèvera donc, en suivant la direction BD. Arrivée au point D, elle prendra la direction DA ; car DC est la bissectrice de l'angle BDA.

2e *partie*. Si la bille, après avoir repassé par le point A, continue sa route en se réfléchissant successivement et indéfiniment en de nouveaux points de la circonférence ; dans quels cas repassera-t-elle par les mêmes points?

Je remarque d'abord que les cordes dessinant la route que la bille doit suivre sont toutes égales. En effet, au point B, par exemple, le diamètre BCQ est bissecteur de l'angle NBD; donc, les deux cordes NB, BD, doivent être égales comme sous-tendant des arcs égaux.

Donc, pour que la bille (en supposant que son mouvement se prolonge indéfiniment) repasse par les mêmes points, il faut et il suffit que la corde NAB, qui indique la direction initiale de la bille, sous-tende un arc qui soit commensurable avec la circonférence. En effet : 1° si l'arc sous-tendu est une division exacte de la circonférence, la bille suivra le périmètre du polygone régulier dont cette corde est le côté.

2° Si l'arc sous-tendu est la $\left(\frac{m}{n}\right)^{ième}$ partie de la circonférence (m étant plus petit que n et premier avec lui), je partage la circonférence en n parties égales et je fais m fois le tour de la circonférence en joignant les points de division de m en m. J'ai alors n cordes égales faisant entre elles des angles égaux et telles que l'extrémité de la dernière est où la première commence : l'ensemble de ces n cordes forme alors ce qu'on appelle un polygone étoilé régulier de n côtés ; tel, par exemple (*fig.* 15) le décagone étoilé, formé en joignant de trois en trois les divisions de la circonférence, partagée en dix parties égales.

Et enfin, si l'on veut que la bille repasse par le point A de départ en croisant sa première direction, il faut non-seulement que l'on fasse passer par A le côté d'un polygone régulier étoilé, mais encore que le point A soit à l'intersection des côtés de ce polygone étoilé

3e PARTIE. Examiner trois cas particuliers.

1er *cas*. Le point de départ A est sur la circonférence.

Il est clair que si l'on veut que la bille y revienne après deux réflexions, elle doit suivre le périmètre du triangle équilatéral inscrit au cercle et ayant un sommet au point de départ. Et si l'on veut que la bille y revienne après $(n-1)$ réflexions, elle doit suivre le périmètre du polygone régulier de n côtés.

2e *cas*. Le point A de départ divise le rayon en moyenne et extrême raison, et la distance au centre en est le plus grand segment.

Je trace le décagone étoilé, (*fig.* 15), et je remarque que le triangle BAC est isocèle, les angles BAC, BCA ayant tous les deux pour mesure $\frac{2}{10}$ de la circonférence : chacun de ces angles vaut $\frac{8}{10}$ d'angle droit, donc l'angle ABC vaut $\frac{4}{10}$. Donc, CA est égal au côté du décagone régulier convexe inscrit dans la même circonférence, ou bien au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison.

Donc, si la distance du point A au centre est égale au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison, il faut, pour résoudre le problème : du point A comme centre, et avec le rayon de la circonférence donnée pour rayon, décrire une circonférence qui coupe la circonférence donnée au point B ; point vers lequel il faut lancer la bille, et elle décrit alors par ses réflexions successives le décagone étoilé.

3e *cas.* Le point A de départ divise le rayon en moyenne et extrême raison, et sa distance au centre en est le plus petit segment.

Je trace le pentagone étoilé (*fig.* 16) ; je remarque que le triangle CBD est isocèle, les angles BCD, BDC, ayant tous les deux pour mesure $\frac{2}{10}$ de la circonférence. Chacun de ces angles vaut $\frac{8}{10}$ d'angle droit ; donc, l'angle CBD vaut $\frac{4}{10}$. Donc enfin, CD est égal au côté du décagone régulier convexe inscrit dans la même circonférence, ou bien au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison, et enfin DE en est le plus petit segment.

Mais le triangle ABE est aussi isocèle, les angles BAE, BEA ayant chacun pour mesure $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{10}$ de la circonférence. Donc, AB = BE = le côté du pentagone régulier convexe inscrit dans cette circonférence, et, de plus, F étant le milieu de AE et de CD, il s'ensuit que AC = DE = le plus petit segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison.

Donc, si la distance du point A de départ, au centre, est égale au plus petit segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison; il faut, pour résoudre le problème, du point A comme centre, et avec le côté du pentagone régulier convexe inscrit à la même circonférence pour rayon, décrire une circonférence qui coupe la circonférence donnée en un point B vers lequel il faut lancer la bille, et elle décrit alors, par ses réflexions successives, le pentagone étoilé.

DÉMONSTRATION

DE LA FORMULE DU BINOME,

PAR M. ROCHE,
Professeur de l'Artillerie navale.

Si l'on élève le binôme $x+\alpha$ à diverses puissances successives, en le multipliant par lui-même, on verra que :

1° Le nombre des termes du développement de la puissance est toujours égal à l'exposant m, de la puissance, augmenté d'une unité. Car, le développement contient toutes les puissances entières de x depuis m jusqu'à 1, et en outre, un terme α^m, indépendant de x.

2° Le premier terme étant x^m, les autres termes seront les produits de αx^{m-1}, $\alpha^2 x^{m-2}$, etc., par des coefficients particuliers ; et si le développement est ordonné suivant les puissances décroissantes de x, en commençant par x^m, les puissances de x diminueront successivement d'une unité dans les termes suivants, et les puissances de α augmenteront de manière que la somme des exposants de x et de α, dans chaque terme, sera constamment égale à m. Nous pouvons donc représenter $(x+\alpha)^m$, par la forme suivante :

$$(x+\alpha)^m = x^m + \mathrm{A}\alpha x^{m-1} + \mathrm{B}\alpha^2 x^{m-2} + \ldots\ldots$$

Or, lorsque $m=0$, cette expression doit se réduire à son premier terme x^m qui devient x^0, c'est-à-dire l'unité ; tous les coefficients A, B, etc., doivent donc avoir pour facteur m ; ainsi, on peut représenter le coefficient A par ma, a étant un nouveau coefficient. De même, lorsque $m=1$, la puissance n'a que deux termes, et les coefficients B, C, etc., doivent s'évanouir ; ils doivent donc renfermer, outre m, le facteur $m-1$. Je puis donc représenter B par un nouveau coefficient $m(m-1)b$. On verra pareillement que C doit être de la forme $m(m-1)(m-2)c$, etc., et l'on aura :

$$(x+\alpha)^m = x^m + ma.\alpha x^{m-1} + m.(m-1)b.\alpha^2 x^{m-2} + m(m-1)(m-2)c.\alpha^3 x^{m-3} + \text{etc.}$$

Mais, lorsque $m=1$, le second terme doit être α; donc $a=1$. Lorsque $m=2$, la puissance n'a que trois termes et le troisième est α^2 ; donc $2.1.\,b=1$, d'où $b=\frac{1}{1.2}$. Lorsque $m=3$, la puissance a quatre termes et le quatrième est α^3. Donc, $m(m-1)(m-2)c = 3.2.1.c = 1$; d'où, $c=\frac{1}{1.2.3}$, et ainsi de suite. En substituant ces valeurs de a, b, c, etc., on aura :

$$(x+a)^m = x^m + m\alpha x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1}\alpha^3 x^{m-3} + \text{etc.}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

PROBLÈMES PROPOSÉS AUX EXAMENS.

SOLUTIONS DE M. GUILMIN,
Ancien élève de l'École normale, professeur de mathématiques.

1. *Déterminer le nombre des arrangements, avec répétition, que l'on peut faire avec* m *lettres, prises* n *à* n.

Nota. Ces arrangements ne diffèrent des arrangements ordinaires, qu'en ce que chaque lettre peut être employée plusieurs fois dans le même arrangement.

Soient a, b, c, d, etc., les lettres proposées. Je détermine d'abord le nombre des arrangements de deux lettres. Pour les former, il faut, à la suite de chaque lettre, mettre successivement chacune des lettres proposées, y compris cette lettre elle-même. Ainsi, nous mettrons à la suite de a, successivement chacune des lettres a, b, c, d, etc. Tous ces arrangements différeront entre eux par la seconde lettre, et il y en aura évidemment m. Il y en aura autant commençant par b, différant entre eux par la seconde lettre, et des précédents par la première ; ainsi de suite En commençant successivement par chacune des m lettres, on aura en tout $m \times m$ ou m^2 arrangements de 2 lettres.

Pour former les arrangements de 3 lettres, il suffira évidemment de placer à la suite de chaque lettre chacun des arrangements de 2 lettres. Pour la lettre a il y aura m^2 arrangements de trois lettres commençant par cette lettre et différant par l'arrangement des deux lettres qui la suivent ; autant pour la lettre b, etc. Ce qui fait en tout $m^2 \times m$, ou m^3 arrangements.

Il y a là une loi évidente, et l'induction suffit pour conclure que le nombre des arrangements que l'on peut faire avec m

lettres prises n à n est m^n. On peut, au reste, démontrer la généralité de cette formule, en faisant voir que si elle est vraie pour le nombre des arrangements de m lettres prises $(n-1)$ à $(n-1)$, elle l'est aussi pour le nombre des arrangements de m lettres prises n à n.

Supposons-la donc démontrée pour les arrangements $(n-1)$ à $(n-1)$. On obtiendra évidemment les arrangements de n lettres, en écrivant à la suite de chacune des lettres a, b, c, d, etc., chacun des arrangements de $n-1$ lettres. Ainsi, en mettant à la suite de a chacun des arrangements de $(n-1)$ lettres, tous les arrangements de n lettres que l'on obtiendra et qui seront au nombre de m^{n-1} différeront par la disposition des $n-1$ dernières lettres. Il y aura de même m^{n-1} arrangements commençant par b, différant entre eux par la disposition des $n-1$ lettres qui terminent chacun, et des précédents par la première lettre, et ainsi de suite, en commençant par chacune des autres lettres. Le nombre total des arrangements avec répétition, est évidemment $m^{n-1} \times m$ ou m^n; ce qu'il fallait démontrer.

2. *Déterminer le nombre de mots que l'on peut former avec* 19 *consonnes et* 5 *voyelles, chaque mot étant composé de* 3 *consonnes et de* 2 *voyelles; en excluant tous les mots renfermant* 3 *consonnes de suite.*

Je vais d'abord calculer le nombre des mots formés avec 3 consonnes et 2 voyelles sans exclusion.

Pour cela faire je forme tous les arrangements des 19 consonnes avec répétition 3 à 3, il y en aura $(19)^3$. J'en prends 1, bcd, j'y mets la voyelle a à toutes les places possibles; j'ai 4 mots, $abcd$, $bacd$, $bcad$, $bcda$, de 4 lettres correspondant à cet arrangement de 3 consonnes et comprenant la lettre a. Faisant de même pour chaque arrangement de 3 consonnes, j'aurai 4 mots pour chacun; en tout $(19)^3 \times 4$. Tous ces mots différeront entre eux, soit par la position de la lettre a

lorsqu'ils correspondront au même arrangement de 3 consonnes, soit par la disposition relative des 3 consonnes lorsqu'ils correspondront à 2 arrangements différents de ces consonnes.

Faisant pour la voyelle *e*, ce que j'ai fait pour *a*, j'aurai $(19)^3 \times 4$ mots de 4 lettres comprenant cette voyelle avec 3 consonnes; autant pour chaque voyelle; en tout, $(19)^3 \times 4 \times 5$ mots de 4 lettres comprenant 3 consonnes et 1 voyelle.

J'introduis maintenant une autre voyelle dans ces mots de 4 lettres, par exemple dans *abcd*. D'abord j'y mets une des 4 voyelles qui n'y entrent pas, *e* par exemple, et je la mets à toutes les places possibles qui sont au nombre de 5; cela fait 5 mots de 5 lettres *eabcd*, *aebcd*, *abecd*, *abced*, *abcde*, correspondant à 1 seul mot *abcd* de 4 lettres, et comprenant 3 consonnes et 2 voyelles différentes; en mettant dans *abcd* chacune des 3 autres voyelles *i*, *o*, *u*, comme j'ai mis *e*, j'aurai pour chacune 5 mots de 5 lettres remplissant exactement les mêmes conditions; en tout, 5×4. Comme j'en aurai autant pour chacun des mots de 4 lettres que j'ai formés, j'aurai en tout $(19)^3 4 \times 5 . 5 \times 4$ mots de 5 lettres composés de 3 consonnes, et de 2 voyelles différentes.

Il faut former maintenant les mots qui comprennent 2 fois la même voyelle. Pour cela, évidemment, il suffit de prendre chacun des mots de 4 lettres, et d'y introduire une seconde fois la voyelle qui y est déjà, en prenant garde de compter deux fois le même mot.

Afin de ne pas commettre cette faute, je commence par introduire dans chacun de ces mots la lettre *a* accentuée *a'*; et je la mets dans chacun à toutes les places possibles. Ainsi, je prends un mot de 4 lettres *abcd*, contenant la lettre *a* et un arrangement *bcd* de 3 consonnes; j'ai ainsi 5 mots *a'abcd*, *aa'bcd*, *aba'cd*, *abca'd*, *abcda'*. Comme il y a 4 mots de 4 lettres, *abcd*, *bacd*, *bcad*, *bcda*, correspondant à *bcd* et contenant a ; il y aura en tout $5\times4=20$ mots de 5 lettres correspondant à cet arrangement de 3 consonnes bcd, et contenant a et a'. Si des mots de cette série peuvent devenir identiques entre eux lorsqu'on supprimera l'accent, ils ne pourront devenir identiques avec d'autres qui ne correspondront pas à l'arrangement bcd; car si ceux-ci renferment la lettre a 2 fois, leurs consonnes ne seront pas exactement disposées de la même manière.

Pour distinguer dans la série de vingt mots dont nous nous occupons ceux qui peuvent devenir identiques lorsqu'on supprimera l'accent de a', j'observe qu'en comparant les places occupées respectivement par a et a' dans le même mot, on peut former le tableau suivant :

a occupant une des places.	a' occupera l'une des places.
1.	2, 3, 4, 5.
2.	1, 3, 4, 5.
3.	1, 2, 4, 5.
4.	1, 2, 3, 5.
5.	1, 2, 3, 4.

Si je considère le mot où les places de a, a' sont respectivement 1, 3, et celui où ces lettres ont les places 3, 1 ; après la suppression de l'accent ces deux mots deviendront identiques, et il n'y en aura pas d'autres qui deviendront identiques à ceux-là, puisqu'ils en différeront par la place de l'une des lettres a au moins. L'accent étant effacé, chaque mot se trouvera donc deux fois, et deux fois seulement; il faudra donc diviser par 2 le nombre des mots obtenus contenant a et a' et correspondant à l'arrangement considéré de 3 consonnes bcd; ce qui en donnera $\frac{5\times4}{2}$. Comme il y en a autant pour chaque arrangement de 3 consonnes, il y aura en tout, $\frac{5\times4}{2}\times(19)^3$, mots de 3 consonnes et de 2 voyelles a. Autant pour chaque voyelle ; en tout, $(19)^3 \times \frac{5 \times 4}{2} \times 5$ mots de 5 lettres avec répétition de la seule voyelle qui s'y trouve.

En ajoutant à ce nombre celui des mots qui comprennent 3 consonnes et 2 voyelles, celles-ci étant différentes, le nombre total des mots que l'on peut faire avec 19 consonnes et 5 voyelles en composant chacun de 3 consonnes et 2 voyelles d'une manière quelconque est

$$(19)^3 \times 4 \times 5 \times 5 \times 4 + (19)^3 \times \frac{5 \times 4}{2} \times 5.$$

Il faut maintenant en déduire le nombre des mots qui renferment 3 consonnes de suite. Pour former ces mots, je prends un des arrangements de 2 voyelles *ae*, par exemple, et j'y mets les 3 lettres *bcd* d'un même arrangement de consonnes avec ou sans répétition, en les écrivant sans les séparer à toutes les places possibles, comme si l'on introduisait une seule lettre dans cet arrangement de 2 voyelles Cet assemblage *bcd* pourra être mis à trois places, et il en résultera 3 mots, *bcdae*, *abcde*, *aebcd* à supprimer. Le même assemblage *bcd* peut être ainsi transporté dans chacun des arrangements de 2 voyelles qui sont au nombre (5×5) ; on devra donc déduire $3 \times (5 \times 5)$ mots correspondant à ce seul arrangement de 3 consonnes ; et puisque il y a $(19)^3$ arrangements comme celui-là pour les 19 consonnes, il y aura en tout à déduire un nombre de mots égal à

$$3 \times (5 \times 5) \times (19)^3.$$

Le nombre cherché est donc

$$(19)^3 \times 4 \times 5 \times 5 \times 4 + (19)^3 \times \frac{5 \times 4}{2} \times 5 - (19)^3 \times (5 \times 5) \times 3 = 2572125$$

ANALYSE D'OUVRAGES NOUVEAUX.

Leçons d'Arithmétique, par P.-L. Cirodde, professeur de mathématiques au collége de Henri IV, *ouvrage autorisé par le Conseil royal de l'Instruction publique*, quatrième édition. Paris, 1842. In-8° de 216 pages (1).

Les deux premières éditions, publiées à Dijon, ont paru en 1834 et 1836; la troisième, de Paris, est de 1839; la quatrième, sortie des presses de Firmin Didot frères, portant le millésime de 1842, est de novembre 1841. Un débit si rapide n'est pas le résultat, comme il arrive souvent, de considérations fort étrangères au mérite de l'ouvrage. On trouve ici une valeur intrinsèque rare chez les auteurs élémentaires; M. Cirodde a su éviter les deux grands écueils des compositions de ce genre, la diffusion et la puérilité, défauts plus communs que l'obscurité, et qui produisent le même effet. Toujours clair, toujours précis, l'écrivain fait presque continuellement usage d'un exemple particulier bien choisi, pour en déduire, avec une logique sévère, les principes généraux de la science. Cette méthode, qui serait peu philosophique, dans une sphère élevée, est très-appropriée à l'enseignement rudimentaire, attire l'attention des élèves, qu'une généralisation trop abstraite rebute. Des applications très-diversifiées et intéres santes, servent d'exercices et montrent l'utilité des théories. Passons à l'examen de l'ouvrage.

---

(1) Chez Hachette, libraire.

Le titre semble annoncer que l'ouvrage est divisé en leçons; il n'en est rien. L'auteur suit la forme didactique à peu près généralement adoptée.

Les notions préliminaires (1—2) contiennent et, dans cet ordre, les définitions de la *quantité*, de l'*unité*, du *nombre*, de l'*arithmétique* et de la *numération*. — Euclide (livre VII) commence par définir l'unité et puis le *nombre*; ce début paraît plus convenable. En effet, la quantité dont il s'agit en arithmétique est la quantité *numérique*, elle présuppose l'idée du nombre. On définit ordinairement la *quantité tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution*. La douleur, la vertu, sont-elles des quantités? non, parce qu'il n'y a pas d'unité pour mesurer les qualités morales. Il faut donc commencer par l'idée de l'unité, que les anciens ne considéraient pas comme un nombre; notion très-exacte à certains égards.

Il est vrai qu'on soumet au calcul des êtres abstraits, tels que la validité des témoignages, des décisions des tribunaux, etc.; mais alors on crée des unités conventionnelles, factices. Ainsi, si l'on admet qu'un certain tribunal se trompe une fois sur cent, alors la certitude étant représentée par 1, le jugement d'un tel tribunal aura pour valeur $\frac{99}{100}$. On a même quelquefois eu recours à des unités chimériques; c'est à l'aide de telles unités que Ben David, ancien secrétaire de l'Académie de Berlin, a essayé d'établir la théorie mathématique du *beau* dans les lettres et les arts. Mais ces considérations ne sont pas du ressort des éléments.

L'arithmétique est la science des nombres; définition trop large. Le théorème que tout nombre premier de la forme $4n+1$ est toujours la somme de deux quarrés et d'une manière seulement appartient évidemment à la science des nombres, fait-il partie de l'arithmétique? Celle-ci s'occupe uniquement de l'exposition d'un système de numération, et des procédés qui en dérivent pour exécuter des additions et des soustractions. L'arithmétique, considérée sous ce point de vue, est plutôt un art qu'une science, et ceci nous explique le peu de faveur dont elle jouissait chez les Anciens, qui reléguaient le calcul numérique parmi les occupations serviles de la classe marchande. Il est à croire que c'est au commerce qu'on doit l'introduction des chiffres indou-arabes et aussi le mécanisme des quatre opérations, et peut-être même les règles des signes qui représentent le *doit* et *avoir* des teneurs de livres, règles qu'on trouve déjà, numériquement appliquées, dans Diophante, au IV[e] siècle, mais dont l'emploi littéral, qui constitue l'essence de l'algèbre, est dû à Viète, au XVI[e] siècle. M. Ampère a proposé de désigner la science des nombres par un mot nouveau, *arithmologie*, qui mérite d'être adopté (1).

Pour la formation des nombres et l'exposition du système décuple, l'auteur a suivi à peu près la méthode de Condorcet (2); mais il en a fait disparaître les détails trop minutieux. Notre auteur adopte les expressions septante, octante, nonante, usitées dans le midi de la France; mais il regrette de ne pouvoir admettre *unante* et *duante* proposés par Condorcet.

Il semble qu'on n'insiste pas assez, dans l'exposition de la numération, sur une propriété très-importante et qu'on ne saurait trop tôt inculquer aux élèves; c'est que dans tout nombre, une unité d'un ordre quelconque est plus grande que la somme de toutes les unités qui la suivent, et cela dans un

---

(1) *Essai sur la philosophie des Sciences*. 1834.

(2) *Moyen d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*. Paris, an VII. Une autre édition est de M. Garnier. Ce petit ouvrage est d'une clarté exubérante; qualité qui manque aux écrits mathématiques de l'illustre géomètre: il a cela de commun avec d'Alembert.

système quelconque. Cette propriété est le fondement de la division et des extractions de racines, et se retrouve même dans la théorie des équations. Ainsi, étant donné le polynôme $A_0x^m + A_1x^{m-} + \ldots . . A_m$, A_n étant le plus grand coefficient $(A_n+1)^m$ est plus grand que la somme des termes qui suivent le premier, parce qu'alors le polynôme devient un nombre, écrit dans le système dont la base est A_n+1.

De là on passe au *calcul des nombres entiers*, sans pourtant avoir prévenu qu'il existe des nombres fractionnaires (p. 8).

Dans l'addition, on devrait exercer l'élève à reconnaître l'indépendance de l'ordre des opérations; une addition de deux nombres peut s'obtenir de deux manières; avec trois nombres, de neuf manières différentes, etc. Il y aurait aussi quelque avantage à donner des applications de l'addition et de la soustraction combinées, et de faire voir l'indépendance des opérations. C'est une utile et même indispensable préparation au calcul des formules algébriques; dans la même vue, on devrait ainsi définir la soustraction : c'est une opération où l'on cherche ce qu'il faut ajouter à un nombre donné pour trouver un autre nombre également donné.

« La multiplication est une opération qui a pour but de composer un nombre nommé produit, avec un nombre nommé *multiplicande*, comme un autre nombre nommé multiplicateur est composé avec l'unité (p. 11). » Cette définition, introduite par M. Lacroix, dans son excellente arithmétique, est la partie hypothétique de la proposition 15 du 7[e] livre d'Euclide, qui s'en sert pour démontrer qu'un produit de deux facteurs ne change pas, en quelque ordre qu'on les multiplie : c'est la proposition 16 ; rarement les élèves comprennent cette définition sans beaucoup d'explications; car, elle dit en d'autres termes, que le produit est le quatrième terme d'une proportion, dont l'unité est le premier antécédent et les deux facteurs les moyens; or, les élèves ne sont pas censés connaître la proportion géométrique. *Composer un nombre* est une expression bien vague. On n'a d'ailleurs admis cette définition que pour l'adapter aux nombres fractionnaires; mais sans nécessité, ceux-ci sont identiques aux rapports géométriques, et c'est par habitude, par abus qu'on les distingue. En réalité, on ne multiplie jamais des fractions, toujours des nombres entiers; il me paraît plus convenable de revenir à l'ancienne définition, qui considère la multiplication comme une addition abrégée; définition que l'élève comprend de suite.

Après avoir donné très-nettement le procédé de la multiplication, l'auteur établit parfaitement ces deux théorèmes : 1° le produit de plusieurs nombres ne change pas, dans quelque ordre qu'on multiplie les facteurs; 2° pour multiplier un nombre par le produit de plusieurs facteurs, il suffit de le multiplier successivement par chacun des facteurs de ce produit; ces deux théorèmes doivent se résumer en un seul. De combien de manières peut-on effectuer ce produit? La belle solution que M. Rodrigues (Olinde) a donnée de ce problème, est assez simple pour entrer désormais dans les éléments (1), nous la donnerons prochainement avec le complément de M. Catalan. Nous pensons d'ailleurs que ces théorèmes doivent précéder la règle, où l'on ne devrait pas omettre l'observation essentielle, que chaque produit partiel surpasse la somme de tous les produits partiels précédents.

Les quatre règles sont suivies de 25 applications, dans le genre de celles qu'on trouve dans l'ouvrage si répandu, d'une utilité si pratique, de M. Saigey (2).

Dans la division il est question de nombres *simples* ou d'un

---

(1) *Journal de Mathématiques.*

(2) *Problèmes d'arithmétique et exercices de calcul*, 3e édit., 1836, in-18. — *Solutions raisonnées*, par M. Sonnet, in-18.

chiffre, et de nombres *composés* de plusieurs chiffres. Ne serait-il pas plus exact de dire nombres *monômes* et nombres *polynômes*.

La divisibilité des nombres, les théorèmes sur les nombres premiers, la recherche des diviseurs communs, précèdent les fractions (33 à 56).

Cet ordre est-il bien adapté à l'état actuel de la science telle que nous le devons aux découvertes de Gauss ? Il serait plus instructif et en même temps plus facile, de débuter par la théorie des *restes*, autrement dit des congruences. En considérant les restes qu'on obtient en divisant une progression géométrique, commençant à l'unité, par un nombre premier avec la raison, on démontre facilement le théorème de Fermat, et tout ce qui est relatif à la divisibilité des nombres, aux fractions périodiques simples et mixtes; théorèmes si compliqués, si difficiles, si rétrécis dans nos traités élémentaires, parce que le point de départ est mal choisi; les petites théories éparses font que les élèves apprennent et retiennent difficilement, savent moins, et moins bien.

A la suite des fractions ordinaires et décimales, on trouve 36 applications, empruntées la plupart à l'arithmétique commerciale et industrielle (56 à 102). L'exemple XXXI explique très-clairement comment les banquiers dressent les comptes courants.

Les systèmes métriques nouveau et ancien devraient naturellement suivre la théorie des fractions décimales et ordinaires ; toutefois, on ne les trouve ici qu'à la page 165 ; l'auteur a cru plus convenable d'exposer d'abord la théorie des racines quarrées et cubiques, des proportions, progressions et logarithmes (102 à 165.) Pourquoi cette interversion ? pourquoi toujours donner les logarithmes par la méthode euristique, d'invention, par celle des progressions correspondantes, que la foule des élèves est incapable de saisir et dont les professeurs ne se servent jamais? L'explication exponentielle d'Euler (1) est si simple, pourquoi ne pas l'adopter? Est-ce pour le plaisir d'allonger et de grossir le volume? On peut y suppléer. Désormais les éléments du calcul Littéral, cette arithmétique universelle, doit faire partie de l'arithmétique et suivre immédiatement les applications des fractions. Alors les questions les plus ardues sur les proportions, progressions, logarithmes, intérêts composés, etc., se réduisent à peu de chose. Quand on a des chemins de fer, à quoi bon prendre de vieilles voitures qui vous cahotent lourdement sur des chemins raboteux? Quelques personnes pensent que les démonstrations dites arithmétiques sont bonnes pour exercer l'esprit des élèves. Certes, une gymnastique intellectuelle est très-utile; mais il faut la prendre où elle est, dans la théorie des nombres, dans les travaux des Bachet, des Fermat, des Euler, des Lagrange, des Gauss, des Legendre. Par exemple, les élèves ne feraient-ils pas une aussi forte dépense d'esprit et d'attention en cherchant à comprendre le théorème que la somme de deux cubes ne peut jamais être un cube, qu'à se mettre dans la mémoire des explications qui n'y restent pas, comme quoi le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; ou pour passer d'un système de logarithmes à un autre; passage que certains omettent et que d'autres expliquent si obscurément, qu'on vient de consacrer à cet objet tout un volume. M. Cirodde, modèle de concision, développe cette théorie en dix-neuf pages (p. 147-165).

L'ouvrage est terminé par un appendice fort instructif (192-215), il contient : 1° les différents systèmes de numération; 2° un moyen indiqué par M. Cauchy, d'écrire tous les nombres du système décimal au moyen des 5 premiers chif-

(1) *Eléments d'Algèbre*, par Léonard Euler, traduits de l'allemand. Lyon, an III. Le second volume, en entier, renferme l'analyse indéterminée, à laquelle nos éléments vulgaires ne consacrent que quelques pages.

fres et du zéro. Les autres chiffres sont remplacés par leur complément à 10, et distingués par un traiqui les surmon te. (Comptes rendus à l'Académie des sciences, 2e semest. 1840, pag. 791.) Cette convention ingénieuse abrége certaines opérations arithmétiques, mais ne sera jamais adoptée; 3° évaluation des erreurs qui peuvent affecter les produits, quotients et racines (*quarrées*) des nombres qui ne sont qu'approchés. C'est M. Vincent, professeur, qui le premier, à ce que je crois, a introduit dans les éléments cette évaluation si importante pour le calcul direct et par logarithmes. Nos tables donnent les logarithmes approchés à une $\frac{1}{2}$ décimale près de l'ordre du dernier chiffre. Elles devraient indiquer si cette approximation est en dessus ou en dessous de la vraie valeur; cette indication pourrait s'obtenir à l'aide d'un point placé sur le premier chiffre à droite; 4° méthode de la division ordonnée; elle est donnée par Fourrier dans son Analyse des Équations (p. 188). On en trouve ici la première mention et la démonstration. L'esprit de la méthode consiste à traiter les nombres comme des polynômes ordonnés suivant les puissances de 10, les coefficients devant être plus petits que 10; et ainsi que dans le procédé d'Oughtred, on ne conserve dans les produits partiels que les nombres qui peuvent influer sur le résultat. On doit faire usage de cette méthode toutes les fois que le diviseur contenant un grand nombre de chiffres, il s'agit de déterminer quelques-uns des premiers chiffres du quotient; 5° simplification du calcul de la racine quarrée; 6° démonstration très-simple que les puissances positives d'un nombre plus grand que l'unité, ont pour limite l'infini; et les puissances négatives, ont pour limite, zéro.

TM.

THÉORÈMES A DÉMONTRER. — PROBLÈMES.

1 Démontrer que si dans un triangle rectiligne, deux bisectrices angulaires intérieures sont d'égale longueur, le triangle est isocèle.

2 Soit ABC un triangle équilatéral inscrit dans un cercle dont le centre est D; d'un point O de la circonférence, on abaisse sur les côtés AB, AC, BC, des perpendiculaires OM, ON, OP, qui rencontrent ces côtés en des points M, N, P: démontrer que les points M, N, P, sont sur une droite qui passe par le milieu du rayon OD, et que ce milieu est le centre des moyennes distances des pieds des trois perpendiculaires, M, N, P. (Communiqué par M. STEINER.)

3. Si d'un point A d'une ellipse, on abaisse des perpendiculaires AM, AN, sur les diamètres conjugués égaux, la diagonale AP du parallélogramme construit sur AM et AN, comme côtés, est normale à l'ellipse en A. (Communiqué par M. STEINER.)

4. Soit ABC un triangle inscrit dans une section conique, d'un point O de cette courbe, on mène les droites OM, ON, OP, respectivement conjuguées aux côtés AB, BC, CA (1), et rencontrant ces côtés aux points M, N, P: démontrer que les trois points M, N, P, sont sur une même droite.

5. Étant donnée une équation algébrique, d'un degré quelconque, à coefficients réels; chaque racine peut être consi

(1) Deux droites sont dites conjuguées lorsqu'elles sont parallèles à deux diamètres conjugués.

dérée comme la tangente d'un arc réel ou imaginaire, l'unité étant prise pour rayon. On propose : 1° de démontrer que la somme de ces arcs est réelle ; 2° de trouver cette somme à l'aide des tables.

6. Lorsque le coefficient du premier terme d'une équation est l'unité, et le coefficient du second terme un nombre négatif quelconque, on sait que pour obtenir une limite supérieure des racines positives de l'équation, il suffit d'ajouter l'unité à la plus grande des valeurs absolues des coefficients négatifs de cette équation ; c'est la règle indiquée par *Maclaurin*. Mais, dans un grand nombre de cas, on aura, en fonction des coefficients, l'expression d'une limite supérieure plus approchée, au moyen de la règle suivante, énoncée par *Lagrange* :

Soient $-Ax^{m-p}$, $-Bx^{m-r}$, $-Cx^{m-s}$, etc., les termes négatifs de l'équation proposée, dont le degré est m : on aura une limite supérieure des racines positives en additionnant les deux plus grandes des quantités

$$\sqrt[p]{A},\ \sqrt[r]{B},\ \sqrt[s]{C},\ \text{etc.}$$

C'est ce que l'on propose de démontrer.

Supposons, par exemple, que l'équation proposée soit $x^3-x^2+x-1000=0$. La règle de *Maclaurin* donne pour limite supérieure 1001 ; et celle de *Lagrange* donne 11. Ce dernier nombre est la plus petite limite supérieure, entière.

7. On donne les projections d'une droite AB, et celles de deux points C, D, non situés dans un même plan, avec la droite : construire les projections d'un point situé sur la droite AB, et tel que la somme de ses distances aux deux points donnés C, D, soit un *minimum*.

8. Exprimer l'aire d'un triangle rectiligne, en fonction des trois lignes menées des sommets aux milieux des côtés opposés.

9. Inscrire dans une ellipse donnée une corde telle que la somme de sa longueur et de la distance de son milieu au centre de l'ellipse, soit un *maximum*. Application au cercle.

10. La base AB d'un triangle rectiligne ABC, est donnée de grandeur et de position; la somme des deux autres côtés AC, BC, du triangle est égale à une droite donnée; on suppose que ce triangle tourne autour d'un axe rectiligne tracé sur son plan ; déterminer le sommet C du triangle de manière que la somme des surfaces décrites par les deux côtés AC, BC, adjacents à la base, soit un *maximum*, ou bien un *minimum*.

11. Inscrire dans une ellipse un triangle semblable à un triangle donné; cas particulier où le triangle donné est équilatéral.

12. Déterminer l'équation d'une ligne telle, qu'en lui menant une tangente en un point quelconque, la partie de cette tangente comprise dans l'intérieur d'un angle donné, soit constamment égale à une droite donnée.

Discuter l'équation de cette ligne lorsque l'angle donné est droit.

ANNONCES D'OUVRAGES.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Lionnet, agrégé de l'Université, professeur de mathématiques au collége royal Louis-le-Grand.

Première livraison. Paris, 1841. In-4°. lithographie de 56 pages.

COMPLÉMENT de GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, par C.-E. Page, professeur à l'École royale d'artillerie de La Fère.

Nous rendrons compte de ces deux ouvrages dans un prochain Numéro.

TRAITÉ DE GÉODÉSIE, par L. Puissant, 3e édition, tome 1. Bachelier, prix : 20 fr.

ATLAS DES PHÉNOMÈNES CÉLESTES, donnant le tracé des mouvements apparents des planètes, par C. H. Dien, 2e année, 1842. Bachelier, prix : 5 fr.

CAUCHY. Mémoire sur la polarisation rectiligne et la double réfraction (pas en vente).

PASSOT (F). Démonstration d'un nouveau théorème de mécanique céleste. Br. in-4° de 4 pages.

L'auteur nie que dans l'analyse des trajectoires décrites par les corps célestes, on puisse prendre le temps pour variable indépendante. C'est dans cette négation que consiste ce théorème fondé sur l'erreur que $\frac{d^2\theta}{d\theta}$ et $d\theta$ ne sont pas des quantités comparables ; il est manifeste que ce sont des infiniments petits du même ordre.

MÉMOIRE

SUR LES

COURBES DU SECOND ORDRE A BRANCHES INFINIES.

PAR C. E. PAGE,
Professeur à l'École royale d'artillerie de La Fère.

SECONDE ET DERNIÈRE PARTIE (*).

DE L'HYPERBOLE.

16. Dans l'équation A (page 22), posons $b''=b$ et $a''=a'$; ce qui revient à supposer que les deux points P et P'' sont sur une même droite parallèle à l'axe des x, et les deux points P' et P'' sur une même droite parallèle à l'axe des y; cette équation se réduit à

$$(ab'-a'b)xy+aa'(b-b')y+bb'(a'-a)x=0.$$

C'est l'équation d'une hyperbole rapportée à deux axes parallèles à ses asymptotes. On en conclut ce théorème :

Soit un triangle variable ABC (fig. 17) *dont les trois côtés sont assujettis à tourner autour de trois points fixes* P, P' *et* P''; *si le sommet* A *est assujetti à glisser sur une droite fixe* OX, *parallèle à la droite qui joint le point* P'' *au point* P, *autour duquel tourne le côté opposé* BC; *si le sommet* B *est assujetti à glisser sur une droite fixe* OY, *parallèle à la droite qui joint le point* P'' *au point* P', *autour duquel tourne le côté opposé* CA : *le troisième sommet* C *décrira une hyperbole*

(*) Pour la 1re partie de ce Mémoire, voyez la page 20.

dont les asymptotes seront parallèles aux deux droites fixes OX *et* OY.

17. En joignant les quatre points O, P, P′, C, on forme un quadrilatère OPP′C (*fig.* 18) inscrit à la courbe ; les deux côtés opposés P′C et PO, rencontrent en F, et en E, les droites PK et P′H, menées par les points P et P′, parallèlement aux asymptotes. Et, à cause des parallèles, on a :

$$\frac{PF}{PG}=\frac{QA}{QO}, \quad \frac{QA}{QO}=\frac{PP''}{PK}, \quad \text{et enfin} \quad \frac{PP''}{PK}=\frac{PE}{PO},$$

d'où,

$$\frac{PF}{PG}=\frac{PE}{PO}.$$

Ce qui fait voir que la ligne EF, qui joint les points d'intersection des côtés P′C et PO, avec les parallèles aux asymptotes menées par les points P et P′, est parallèle au quatrième côté OC ; on conclut de là ce théorème :

Un quadrilatère étant inscrit à une hyperbole, si, par deux sommets adjacents à un même côté, on mène deux droites parallèles aux asymptotes, et qu'on les prolonge jusqu'à la rencontre des côtés qui passent par les mêmes sommets, la ligne qui joindra ces points d'intersection, sera parallèle au quatrième côté.

Ainsi, le quadrilatère OPP′C, (*fig.* 19), étant inscrit à une hyperbole, si, par les deux sommets P et P′, on mène, parallèlement aux asymptotes, des droites qui aillent rencontrer les côtés P′C et PO, aux points F et E, la ligne EF sera parallèle au quatrième côté CO.

18. Les deux sommets, C et O, peuvent se réunir en un seul C (*fig.* 20), dans ce cas le côté CO devient une tangente à la courbe ; on a donc ce théorème :

Un triangle étant inscrit à une hyperbole, si par deux sommets on mène deux droites parallèles aux asymptotes jusqu'à *la rencontre des côtés opposés, la ligne qui joindra ces deux points d'intersection, sera parallèle à la tangente menée par le troisième sommet.*

Ce théorème donne un moyen facile de résoudre le problème suivant :

Construire la tangente en un point d'une hyperbole, quand on connaît deux autres points de la courbe, et les directions des asymptotes.

19. Lorsque le côté AB du triangle variable ABC (*fig.* 17), vient rencontrer la droite fixe OX, au même point que la droite PP′ prolongée (*fig.* 21), le point C se confond avec le point P, et par conséquent, la droite BP se confond avec la tangente à la courbe en ce point.

Par les deux points P′ et O, menons une transversale qui rencontre la ligne PP″ au point D. La droite qui joindra le point B au point D sera parallèle à la droite PP′. En effet, la droite BD prolongée rencontre PP″ en F; les parallèles donnent :

$$\frac{P'P''}{P''F}=\frac{MO}{MB}=\frac{P''A}{P''B},$$

donc BF est parallèle à P′A.

La transversale P′O rencontre la tangente BP au point K, et, à cause de BD parallèle à PP′, on a :

$$\frac{KP'}{KD}=\frac{KP}{KB}.$$

Par le point P, menons parallèlement à l'axe OY une droite qui rencontre la transversale P′O en E, nous aurons :

$$\frac{KP}{KB}=\frac{KE}{KO},\quad \text{d'où}\quad \frac{KP'}{KD}=\frac{KE}{KO}\quad \text{ou}\quad KP'.KO=KE.KD.$$

Les deux points P′ et O sont les intersections de la transversale avec la courbe, et les deux points E et D, sont les intersections de cette même transversale avec les droites menées parallèlement aux asymptotes par le point de contact P ; on a donc ce théorème :

Si, par le point de contact d'une tangente à l'hyperbole, on mène deux droites parallèles aux asymptotes, et que, d'un point quelconque pris sur cette tangente, on mène une transversale qui coupe la courbe en deux points, et les deux parallèles aux asymptotes également en deux points : le produit des segments interceptés sur cette transversale entre la tangente et les deux points d'intersection avec la courbe, sera égal au produit des segments interceptés sur cette même transversale, entre la tangente et les deux points d'intersection avec les parallèles aux asymptotes.

Ainsi, par exemple, si, par le point de contact A de la tangente CO (*fig.* 22), on mène deux droites parallèles aux asymptotes, et que, d'un point O pris sur la tangente, on mène une transversale qui rencontre ces deux parallèles, en M et N, et la courbe en P et Q ; on aura :

$$OM.ON = OP.OQ.$$

20. Par les deux points P et Q, menons deux droites respectivement parallèles aux deux asymptotes, et qui rencontrent la tangente en B et C, on aura :

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OP}{OM} \quad \text{et} \quad \frac{OC}{OA} = \frac{OQ}{ON},$$

multipliant membre à membre, il viendra :

$$\frac{OB.OC}{OA^2} = \frac{OP.OQ}{OM.ON} \quad \text{d'où} \quad OA^2 = OB.OC ;$$

d'où l'on conclut ce théorème :

Si par un point pris dans le plan d'une hyperbole, on mène une tangente, et une transversale qui rencontre la courbe en deux points, et que par ces deux points on mène deux droites respectivement parallèles aux asymptotes, le segment compris *entre le point donné et le point de contact, sera moyen proportionnel entre les deux segments compris entre le point donné, et les deux points d'intersection de la tangente avec les deux parallèles aux asymptotes.*

Il est facile de voir que la démonstration resterait la même en menant par le point P une parallèle à AN, et par le point Q, une parallèle à AM.

21. Les trois côtés d'un triangle variable ABC étant assujettis à tourner autour des trois points fixes P, P′, P″, (*fig.* 17), et les deux sommets A et B étant assujettis à glisser sur les deux droites fixes OX et OY respectivement parallèles aux droites PP″ et P′P″; si la droite mobile AB rencontre l'axe OX au même point que la droite fixe PP′, la droite qui joint le point B au point P est une tangente à la courbe en ce point (n° 19); de même, si la droite mobile AB dans une seconde position A′B′ (*fig.* 23), rencontre l'axe OY au même point que la droite fixe PP′, la droite menée du point A′ au point P′ sera tangente à la courbe au point P′; et il est facile de voir qu'on aura

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{FP}''}=\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{FP}}, \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{FP}}=\frac{\mathrm{OA}'}{\mathrm{FP}''}; \quad \text{d'où} \quad \mathrm{OA}^2=\mathrm{ON.OA}'.$$

On démontrerait de la même manière qu'on a $\mathrm{OB}'^2=\mathrm{OM.OB}$; on conclut de là ce théorème :

Étant données deux tangentes à l'hyperbole et leur corde de contact, si par un point quelconque de la courbe, on mène une transversale parallèle à l'une des asymptotes, le segment compris sur cette transversale, entre la courbe et la corde de contact, sera moyen proportionnel entre les deux segments compris sur cette même transversale entre la courbe et les deux tangentes.

22. Il peut arriver que les deux points P et P′ (*fig.* 17), autour desquels tournent les côtés BC et AC du triangle ABC, soient situés à l'infini; dans ce cas les deux côtés BC et AC

doivent se mouvoir en restant constamment parallèles aux deux droites fixes OX et OY ; on a donc un triangle variable ABC (*fig.* 24), dans lequel deux sommets A et B glissent sur les deux droites fixes OX et OY ; le côté AB tourne autour du point fixe P″ ; enfin, les deux côtés BC et AC, se meuvent en restant parallèles aux deux droites fixes OX et OY. Il est facile de voir que la courbe engendrée par le troisième sommet C est une hyperbole dont les asymptotes sont justement les deux droites menées par le point P″, parallèlement aux deux droites fixes OX et OY.

En effet, on a

$$\frac{CH}{DO}=\frac{CE}{OE}=\frac{BP''}{P''A}=\frac{DP''}{P''H}, \quad \text{d'où} \quad CH.P''H=DP''.DO.$$

On a encore OE=AP″ et AP″=CF, donc OE=CF ;

On conclut de là ces deux théorèmes :

Si dans le plan d'une hyperbole, on mène une transversale qui rencontre la courbe en deux points, et les asymptotes également en deux points; les deux segments interceptés sur cette transversale, entre la courbe et les asymptotes, seront toujours égaux.

En supposant que les deux points d'intersection avec la courbe se réunissent en un seul, la transversale devient une tangente, d'où l'on conclut que : *la portion d'une tangente à l'hyperbole interceptée entre les deux asymptotes, est toujours divisée en deux parties égales au point de contact.*

23. Considérons l'hexagone circonscrit (*fig.* 2). Si les deux points P et P′, autour desquels tournent les droites P′A et PB, sont situés sur les axes OX et OY, la droite QQ′, sur laquelle ces droites sont assujetties à se couper, devient la corde de contact des deux tangentes OX et OY. Si l'on suppose que cette corde de contact passe tout entière à l'infini, les points de contact des tangentes OX et OY s'éloignent à l'infini ; par

conséquent, ces droites sont les asymptotes d'une hyperbole à laquelle la droite AB doit rester constamment tangente.

Mais quand la droite sur laquelle les deux droites mobiles sont assujetties à se couper, passe tout entière à l'infini, ces deux droites doivent rester constamment parallèles entre elles; on voit donc que si deux droites PB et P'A (*fig.* 25), tournant autour de deux points fixes, P et P', respectivement placés sur les axes OX et OY, sont assujetties à rester parallèles entre elles; la droite AB, qui joindra les points d'intersection de ces droites avec les axes, restera constamment tangente à une hyperbole dont les deux droites OX et OY sont les asymptotes.

Il est facile de voir que la droite mobile BA doit venir occuper la position de la droite PP'; par conséquent, cette dernière droite est une des tangentes de l'hyperbole.

Les deux points E et F, milieux de PP' et de BA, sont les points de contact de ces deux tangentes; la corde de contact EF est évidemment parallèle aux droites AP' et BP, et vient rencontrer les asymptotes aux points C et D, milieux des segments AP et BP'. On a donc ce théorème :

Dans l'hyperbole, la corde de contact de deux tangentes divise en deux parties égales la portion d'asymptote comprise entre ces deux tangentes.

24. Par un point quelconque, M, pris sur l'une des tangentes, menons une droite parallèle à la corde de contact, qui rencontre l'autre tangente en N; et deux droites parallèles aux asymptotes qui rencontrent l'autre tangente en G et H; il est facile de voir qu'on aura :

$$\frac{KG}{KA}=\frac{KM}{KP}=\frac{KN}{KB} \quad \text{et} \quad \frac{KH}{KB}=\frac{KM}{KP'}=\frac{KN}{KA},$$

d'où

$$KG.KH=KN^2.$$

On en conclut ce théorème :

Étant données deux tangentes à l'hyperbole, si d'un point *quelconque pris sur l'une de ces tangentes, on mène deux droites parallèles aux asymptotes et une droite parallèle à la corde de contact qui aillent couper la seconde tangente en trois points, le segment compris entre le point d'intersection des deux tangentes et la parallèle à la corde de contact, sera moyen proportionnel entre les deux segments compris entre le même point et les deux parallèles aux asymptotes.*

25. Soit CX (*fig.* 26) une asymptote de l'hyperbole ; par deux points fixes, P et P′, pris sur la courbe, menons deux tangentes qui viennent rencontrer l'asymptote en deux points fixes B et A ; par un troisième point variable, Q, pris sur la courbe, menons une tangente qui rencontre l'asymptote CX en un point variable C : la différence des distances du point variable C aux deux points fixes A et B sera constante et égale à AB.

Joignons les deux points fixes P et P′ avec le point variable Q, les deux cordes de contact P′Q et PQ passeront par les deux points E et F, milieux de CA et de CB (n° 23), et la différence des distances du point C aux deux points E et F sera égale à EF moitié de AB ; on tire de là ce théorème :

Si par deux points fixes pris sur le périmètre d'une hyperbole, on fait passer deux droites mobiles assujetties à se couper constamment sur la courbe, la portion d'asymptote comprise entre ces deux droites mobiles sera d'une longueur constante et égale à la moitié de la portion d'asymptote comprise entre les tangentes menées par les deux points fixes.

PROBLÈMES SUR L'HYPERBOLE.

26. 1er PROBLÈME. *Construire une hyperbole connaissant trois points de la courbe, et les directions des asymptotes.*

Soient O, P, P′ (*fig.* 17) les trois points donnés ; par l'un de ces points, O, par exemple, menons deux droites OX et OY parallèles aux asymptotes ; par le point P menons une droite parallèle à OX, et par le point P′ une droite parallèle à OY, ces deux droites se coupent en un point P″.

Supposons qu'une droite tourne autour du point P″, joignons les points A et B, où cette droite rencontre les axes OX et OY, avec les points P′ et P; le point C, intersection des deux droites mobiles AP′ et BP, décrira la courbe (n° 16).

On peut construire immédiatement le centre et, par suite, tous les éléments de la courbe. Pour cela, on construira la tangente en chacun des trois points donnés (n° 18); la droite menée par le point d'intersection de deux tangentes et le milieu de la corde de contact, sera un diamètre; l'intersection de deux diamètres déterminera le centre.

27. 2^{me} Problème. *Construire une hyperbole connaissant trois tangentes et les directions des asymptotes.*

Soient AB et PP′ (*fig.* 25), deux des trois tangentes données: par un point, M, pris sur la tangente PP′, menons deux droites parallèles aux asymptotes, qui rencontrent la tangente AB aux points G et H; à partir du point K, intersection des deux tangentes, portons sur la tangente AB une longueur KN, moyenne proportionnelle entre KG et KH : la ligne menée du point M au point N sera parallèle à la corde de contact (n° 24); par conséquent, la ligne menée par le point K et par le milieu de MN sera un des diamètres de la courbe.

En faisant la même construction, par rapport à la tangente PP′ et à la troisième tangente donnée, on aura un second diamètre et, par conséquent, le centre.

La longueur KN peut être portée de part et d'autre du point K, ce qui donne deux diamètres différents passant par le point K. Par la même raison, on aura deux diamètres différents passant par l'intersection de la tangente PP′, avec la troisième tangente donnée; il s'en suit que le problème a quatre solutions.

28. 3^{me} **Problème.** *Construire une hyperbole connaissant deux points, une tangente, et les directions des asymptotes.*

Soient P et Q (*fig.* 22), les deux points donnés; CO, la tangente : le problème serait résolu si l'on connaissait le point de contact.

Joignons les deux points P et Q, et prolongeons la droite PQ jusqu'à la rencontre de la tangente au point O. Par le point P, menons une parallèle à l'une des asymptotes, et par le point Q, une parallèle à l'autre. Ces deux droites iront rencontrer la tangente en deux points B et C. A partir du point O, prenons, sur la tangente, une longueur OA moyenne proportionnelle entre OB et OC : le point A sera le point de contact cherché (n° 20).

La longueur OA pouvant être portée de part et d'autre du point O, le problème a deux solutions.

L'un des deux points donnés pourrait être situé sur la tangente.

Soit OC la tangente; A, son point de contact; Q, le second point donné.

Par le point A, menons deux droites parallèles aux asymptotes; par le point Q menons une droite quelconque qui rencontre la tangente au point O, et les deux parallèles aux asymptotes en M et N. Sur cette droite, prenons un point P tel que l'on ait $OP.OQ = OM.ON$; le point P sera situé sur la courbe (n° 19).

Le problème n'a qu'une seule solution.

29. 4° **Problème.** *Construire une hyperbole, connaissant deux tangentes, un point, et les directions des asymptotes.*

Soient AB et CD (*fig.* 27) les deux tangentes, et G le point donné : le problème serait résolu si l'on connaissait les points de contact des tangentes.

Par le point G, menons parallèlement à l'une des asymptotes, une droite qui rencontre les tangentes en M et N ; prenons le point F tel que l'on ait :

$$\overline{GF}^2 = GM.GN.$$

La corde de contact devra passer par le point F (n° 21).

Par le point G, menons parallèlement à la seconde asymptote une droite qui rencontre les tangentes en P et Q ; prenons un point E tel que l'on ait :

$$\overline{GE}^2 = GP.GQ.$$

La corde de contact devra passer par ce second point ; les points de contact seront donc donnés par les intersections de la droite FE, avec les tangentes.

Les segments, GE et GF, pouvant être portés de part et d'autre du point G, il s'en suit que le problème a quatre solutions.

Le point donné pourrait être situé sur l'une des deux tangentes données.

Soient AB, CD (*fig.* 29) les deux tangentes, et P le point de contact de la tangente AB. Par le point P, menons parallèlement aux asymptotes, deux droites qui rencontrent la tangente CD, aux points C et E. A partir du point G, intersection des tangentes, portons un segment GQ, moyen proportionnel entre GE et GC. La corde de contact devra passer par le point Q ; on aura donc cette corde de contact, en joignant le point P au point Q.

Par le point G menons, parallèlement aux asymptotes, deux droites qui rencontrent la corde de contact aux points M et N. Les points E et F, milieux des segments GM, et GN, appartiendront à la courbe,

Le segment GQ pouvant être porté de part et d'autre du point G, le problème a deux solutions.

30. 5[e] Problème. *Construire une hyperbole connaissant une asymptote et trois points.*

Soient A, B, C (*fig.* 31) les trois points donnés; OX l'asymptote. Joignons le point A au point B, et prolongeons AB jusqu'à la rencontre de l'asymptote en Q. A partir du point A, portons sur AB une longueur AP, égale à BQ. Le point P étant pris entre A et B, ou sur le prolongement, suivant que le point Q est lui-même situé entre A et B ou sur le prolongement, ce point P appartient à la seconde asymptote. On déterminera de la même manière sur AC un second point de la seconde asymptote.

31. 6[e] Problème. *Construire une hyperbole connaissant trois tangentes et une asymptote.*

Soient OX l'asymptote (*fig.* 28); AC, BC et DE, les trois tangentes.

Les trois tangentes et l'asymptote forment un quadrilatère complet circonscrit à la courbe; ce quadrilatère complet se décompose en trois quadrilatères simples; or, on sait que dans tout quadrilatère simple circonscrit à une courbe du second ordre, la corde de contact des deux côtés opposés passe par le point de croisement des deux diagonales, (Voyez *Complément de géométrie analytique*, p. 241); le point de contact de l'asymptote OX est situé à l'infini, par conséquent, la ligne qui joint ce point de contact, avec le point de contact de l'une des trois autres tangentes, doit être parallèle à cette asymptote.

Par le point G, où se croisent les deux diagonales CD et AF du quadrilatère simple ADFC, faisons passer une droite parallèle à OX, cette droite ira rencontrer le côté opposé CF, en un point H qui sera le point de contact de ce côté.

En considérant successivement les deux autres quadrilatères simples, on déterminerait de la même manière les points de contact des deux autres tangentes.

32. 7ᵉ **Problème.** *Construire une hyperbole, connaissant deux points, une tangente et une asymptote.*

Soient A et B (*fig.* 30) les deux points; CD, la tangente; et OX l'asymptote : menons la ligne AB, et prolongeons la jusqu'à ce qu'elle rencontre la tangente en N, et l'asymptote en M. Construisons les deux points doubles Q et Q′ qui appartiennent au système d'involution déterminé par les quatre points A, B, M, N (Voyez *Complément de géométrie analytique*, 217). La corde de contact de la tangente CD et de l'asymptote OX, devra passer par l'un de ces deux points. Or, cette corde de contact doit être parallèle à l'asymptote; par conséquent, en menant par le point Q, une parallèle à OX, cette parallèle rencontrera la tangente CD en un point E, qui sera le point de contact de cette tangente.

Comme on peut mener cette parallèle par le point Q, ou par le point Q′, le problème a deux solutions.

Dans le cas où l'un des deux points donnés est situé sur la tangente, le problème n'a qu'une seule solution.

33. 8ᵉ **Problème.** *Construire une hyperbole, connaissant deux tangentes, un point et une asymptote.*

Soient AB, CD (*fig.* 32) les deux tangentes; OX l'asymptote; et G, le point donné.

Par le point G menons, parallèlement à l'asymptote, une droite qui rencontre les deux tangentes en P et Q; prenons les points K et K′, tels que l'on ait :

$$GK^2 = GK'^2 = GP.GQ.$$

La corde de contact devra passer par l'un de ces deux points (nº 21). Elle doit aussi passer par le point E, milieu de CA (nº 23); par conséquent, si l'on mène la ligne KE, les points M et N, où elle rencontrera les deux tangentes, seront les points de contact de ces tangentes.

Comme on peut joindre le point E, avec l'un ou l'autre des deux points K ou K', le problème a deux solutions.

Le point donné peut être situé sur l'une des deux tangentes. Soient AB, CD (*fig.* 33) les deux tangentes; OX l'asymptote; M, le point de contact de la tangente AB. En joignant le point M avec le point E, milieu du segment CA intercepté sur l'asymptote, entre les deux tangentes, on aura la corde de contact, et par suite le point de contact de la tangente CD.

NOTE

Sur l'interprétation des valeurs fractionnaires obtenues pour le nombre des termes d'une progression, dans laquelle on donne le premier terme, la raison, et le nombre des termes.

PAR M. CHOQUET.

1. Considérons d'abord une progression par différence dans laquelle on donne le premier terme a, la raison r, la somme des termes s. Pour obtenir le nombre n des termes, on aura l'équation de second degré

$$s=\frac{[2a+(n-1)r]n}{2} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Supposons qu'une des racines de cette équation soit une fraction positive $\frac{p}{q}$. En substituant $\frac{p}{q}$ à n, dans l'équation, elle sera satisfaite; on aura donc l'égalité :

$$s=\frac{\left[2a+\left(\frac{p}{q}-1\right)r\right]\frac{p}{q}}{2},$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$s=\frac{1}{2}\left[\frac{2a}{q}+(p-q)\frac{r}{q^2}\right]p,$$

ou bien encore :

$$s=\frac{1}{2}\left[\frac{2a-r}{q}+\frac{r}{q^2}+(p-1)\frac{r}{q^2}\right]p.$$

En comparant cette dernière égalité à la formule

$$s=\frac{[2a+(n-1)r]n}{2},$$

on reconnaît que la somme donnée, s, peut être obtenue en ajoutant p termes d'une progression par différence, dont le premier terme est

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2a-r}{q}+\frac{r}{q^2}\right], \qquad \text{et la raison}, \ \frac{r}{q^2}.$$

Si l'on conçoit que cette dernière progression soit partagée en groupes de q termes à partir du premier, la valeur du premier terme du $(m+1)^{\text{ième}}$ groupe, sera

$$\frac{a}{q}-\frac{(q-1)r}{2q^2}+\frac{mr}{q};$$

car le terme dont il s'agit occupe le rang $mq+1$. La somme des q termes de ce $(m+1)^{\text{ième}}$ groupe, sera par conséquent

$$\frac{q}{2}\left(\frac{2a}{q}+\frac{2mr}{q}\right),$$

ou $a+mr$. Ce dernier résultat montre que les sommes des termes des différents groupes en lesquels on a partagé la seconde progression, sont précisément égales aux termes successifs a, $a+r$, $a+2r$, etc., de la progression donnée.

Cela posé, nommons p' la partie entière du nombre $\frac{p}{q}$, et p'' le numérateur de la fraction complémentaire ; de sorte qu'on ait $p=qp'+p''$. Le nombre p, des termes qu'il faudra prendre dans la seconde progression pour avoir la somme s, se composera de p' groupes de q termes, et des p'' premiers termes du $(q+1)^{\text{ième}}$ groupe. Par conséquent, on obtiendra la somme donnée s, en additionnant les p' premiers termes de la progression proposée : a, $a+r$, $\ldots a+(p'-1)r$, avec les p'' premiers termes d'une progression par différence dont la raison est $\frac{r}{q^2}$, et telle que si cette dernière progression était prolongée de manière à contenir q termes, au lieu de p'', la somme de ces q termes serait égale au terme suivant $a+pr$, de la progression donnée.

Supposons, par exemple, que $r=25$, $a=60$, et $s=333$. On trouvera pour n les deux valeurs

$$\frac{18}{5}, \quad \text{ou} \quad 3+\frac{3}{5}; \quad \text{et} \quad -\frac{37}{5}, \quad \text{ou} \quad -\left(7+\frac{2}{5}\right).$$

La première valeur, $\frac{18}{5}$, indique qu'on obtiendra la somme 333, en additionnant les 18 premiers termes d'une progression par différence, dont la raison est 1, et le premier terme 10. Ou bien encore, en ajoutant à la somme des trois premiers termes de la progression proposée, la somme des trois premiers termes d'une progression dont la raison est 1, et telle que les cinq premiers termes auraient pour somme le quatrième terme 135 de la progression proposée.

A l'égard de la valeur $-\left(7+\frac{2}{5}\right)$, on trouvera, à l'aide de ce qui vient d'être dit, et de la règle ordinaire pour l'interprétation des valeurs négatives, que cette valeur $-\left(7+\frac{2}{5}\right)$, indique que la somme donnée 333 peut être obtenue, en ajoutant les sept premiers termes d'une progression, dont le premier terme est -35 et la raison 25, aux deux premiers termes d'une autre progression ayant pour raison l'unité, et dans laquelle la somme des cinq premiers termes serait égale au huitième terme, 140, de la première progression.

2. Considérons, maintenant, une progression par quotient, dans laquelle on donne le premier terme a, la raison r, et la somme des termes s; et supposons que l'on trouve pour le nombre des termes, une valeur fractionnaire $\frac{p}{q}$, au moyen de la formule

$$s=\frac{a(r^n-1)}{r-1} \ldots\ldots \quad (1).$$

En remplaçant n par $\frac{p}{q}$ dans l'équation (1), il vient :

$$s=\frac{a(r^{\frac{p}{q}}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{\frac{1}{q}}-1)}{r-1}\times\frac{(r^{\frac{p}{q}}-1)}{r^{\frac{1}{q}}-1}.$$

Donc, en posant

$$r^{\frac{1}{q}}=r', \quad \text{et} \quad \frac{a(r'-1)}{r-1}=a',$$

on aura :

$$s=\frac{a'(r'^p-1)}{r'-1}.$$

La somme s pourra donc être formée en additionnant p termes d'une progression par quotient, dont la raison est r', et le premier terme a'.

Si l'on conçoit cette dernière progression partagée en groupes de q termes à partir du premier, la valeur du premier terme du $(m+1)^{\text{ième}}$ groupe, sera $a'r'^{mq}$, et la somme des q termes de ce $(m+1)^{\text{ième}}$ groupe, sera

$$a'r'^{mq}\left(\frac{r'^q-1}{r'-1}\right)=ar^m.$$

On voit, par ce dernier résultat, que les sommes des groupes de q termes en lesquels la seconde progression est partagée, sont égales aux termes successifs a, ar, $\ldots ar^m$, de la première progression. De sorte que, si l'on nomme p' la partie entière du nombre fractionnaire $\frac{p}{q}$ et p'', le numérateur de la fraction complémentaire, ce qui donne $p=p'q+p''$, la somme des p ermes de la seconde progression se composera des p' premiers termes de la première, et des p'' premiers du $(q+1)^{\text{ième}}$ groupe de la seconde. Par conséquent, la somme donnée s peut encore être formée en ajoutant les p' premiers termes de la progression proposée, a, ar, ar^2, ...$ar^{p'-1}$, avec les p'' premiers termes d'une autre progression dont la raison est $r^{\frac{1}{q}}$, et telle que la somme des q premiers termes de cette nouvelle progression soit égale au terme suivant $ar^{p'}$ de la progression proposée.

Si l'on suppose, par exemple, $a=7$, $r=8$, $s=2047$, on trouvera $n=3+\frac{2}{3}$. Cette valeur fractionnaire indique que l'on peut obtenir la somme 2047, en additionnant les 11 premiers ter..es d'une progression par quotient, dont le premier terme est 1, et la raison 2. Ou bien encore, en additionnant les trois premiers termes 7, 56, 448, de la progression donnée, avec les deux premiers termes 512, 1024, d'une autre progression dont la raison est 2, et telle que la somme de ses trois premiers termes donnerait le terme suivant 3584, de la progression proposée.

En appliquant ces dernières observations à la question des *annuités*, on verra facilement que si l'on obtient pour le nombre n des payements à effectuer, une valeur fractionnaire $p'+\frac{p''}{q}$, a étant le payement annuel, on éteindra la dette au moyen de p' payements égaux à a, effectués d'année en année, suivis de p'' payements effectués à des intervalles égaux à la fraction $\frac{1}{q}$ d'une année, et tels que, si on les continuait pendant le cours d'une année entière, ils équivaudraient à la somme a payée à la fin de cette année.

CONSIDÉRATIONS

SUR

LE TRIANGLE RECTILIGNE,

D'APRÈS EULER.

1. Le triangle rectiligne renferme cinq points remarquables : 1° le centre du cercle circonscrit ; 2° le centre du cercle inscrit ; 3° le centre de gravité de l'aire ; 4° le point de rencontre des trois hauteurs ; 5° le centre de gravité du périmètre.

On sait d'ailleurs : 1° que le point de rencontre des trois hauteurs n'est autre que le centre du cercle circonscrit au triangle que l'on forme en menant par chaque sommet une parallèle au côté opposé ; 2° que le centre de gravité du périmètre est le même que le centre du cercle inscrit au triangle qui a pour sommet les milieux des trois côtés.

2. Il s'ensuit que les 2ᵉ, 3ᵉ et 5ᵉ points sont toujours sur une même droite ; car le centre du cercle inscrit et le centre de gravité du périmètre sont des points homologues, situés dans des triangles semblables et semblablement placés, mais dans une position inverse, le rapport des côtés étant comme 1 : 2 ; il s'ensuit que la droite qui joint ces deux points divise, dans le même rapport, la droite qui va du sommet de l'angle au milieu du côté opposé ; l'intersection des deux droites est donc le centre de gravité de l'aire.

Le même genre de raisonnement fait voir que la droite qui joint le 1ᵉʳ et le 4ᵉ passe aussi par le 3ᵉ point. Cette dernière propriété est due à Euler, qui l'a déduite de considérations analytiques (*). Nous croyons utile de les reproduire avec quelques développements; ce sont pour les élèves d'excellents exercices de calcul littéral et numérique.

3. Soit ABC, un triangle donné.

a, b, c, les côtés du triangle opposés respectivement aux sommets A, B, C.

E, point d'intersection des trois hauteurs.

F, centre de gravité de l'aire du triangle, ou point de moyenne distance des trois sommets.

G, centre du cercle inscrit.

H, centre du cercle circonscrit.

Posons :

$$EG=e;\ GH=f;\ FH=g;\ FG=h;\ EH=k;\ EF=l,\ a+b+c=p;$$
$$ab+ac+bc=q;\quad abc=r.$$

S= aire du triangle; R= rayon du cercle circonscrit; ρ= rayon du cercle inscrit; A= origine des coordonnées rectangulaires; AB= direction de l'axe des x positifs.

4. Un théorème connu donne :

$$16S^2=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4.$$

Or a, b, c, sont les racines de l'équation $z^3-pz^2+qz-r=0$, et S^2 est une fonction symétrique de ces racines; on peut donc en trouver la valeur en fonction des coefficients de l'équation. Faisant le calcul, on trouve :

$$16S^2=p(4pq-p^3-8r).$$

5. $$R=\frac{abc}{4S}=\frac{r}{4S}$$ (Legendre, liv. III, prop. 32);

$$\rho=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2S}{p};$$

d'où $$R\rho=\frac{r}{2p}.$$

(*) *Mémoires de Pétersb.*, t. XI, 1765.

6. Les coordonnées des points E, F, G, H, sont indiquées dans tous les traités élémentaires; nous les transcrivons ici :

Points.	Abscisses.	Ordonnées.
E ;	$\frac{c^2+b^2-a^2}{2c}$;	$\frac{(c^2+b^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{8cS}$.
F ;	$\frac{3c^2+b^2-a^2}{6c}$;	$\frac{2S}{3c}$.
G ;	$\frac{c+b-a}{2}$;	$\frac{2S}{a+b+c}$.
H ;	$\frac{1}{2}c$;	$\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8S}$.

7. Lorsque $b=a$, les quatre abscisses se réduisent à $\frac{1}{2}c$; donc lorsque le triangle est isocèle, les quatre points sont sur une même droite perpendiculaire à la base; ce qui est d'ailleurs évident par intuition.

8. Les quatre points, considérés deux à deux, fournissent six distances, dont les carrés sont des fonctions symétriques des côtés a, b, c, par conséquent exprimables en fonction des coefficients p, q, r Effectuant les calculs, il vient :

$$e^2=\frac{r^2}{4S^2}-\frac{4r}{p}-p^2+3q=6g^2+3h^2-2f^2.$$

$$f^2=\frac{r^2}{16S^2}-\frac{r}{p}.$$

$$g^2=\frac{r^2}{16S^2}-\frac{1}{9}p^2+\frac{2}{9}q.$$

$$h^2=\frac{-p^3+5pq-18r}{9p}.$$

$$k^2=\frac{9r^2}{16S^2}-p^2+2q.$$

$$l^2=\frac{r^2}{4S^2}-\frac{4}{9}p^2+\frac{8}{9}q.$$

9. De là, on déduit :

$$l=2g,\ k=3g;\ \text{donc}\ g+l=k.$$

Ainsi les trois points E, F, H, se succèdent dans cet ordre sur une même droite.

10. Au moyen des coordonnées des points E et H, on trouve pour équation de cette droite :

$$4S(a^2-b^2)y=[2c^4-(a^2-b^2)^2-c^2(a^2+b^2)]x+c(b^2-c^2)(c^2+b^2-a^2).$$

11. Lorsqu'on a $b=c$ ou $b^2+c^2=a^2$, la droite passe par l'origine. Dans ces cas, le triangle est isocèle ou rectangle en A. La réciproque est évidente.

Lorsque $a=b$, la droite est perpendiculaire au côté c.

12. Le coefficient de x peut se mettre sous cette forme :

$$(c^2+b^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)-c^2(a^2+b^2-c^2)=4abc^2$$
$$\cos.A\cos.B-2abc^2\cos.C=2abc^2(2\cos.A\cos.B-\cos.C).$$

Pour que la droite devienne parallèle à l'axe des x, il faut que l'on ait :

$$2\cos.A\cos.B=\cos.C=-\cos.(A+B);\ \text{d'où}\ \text{tang}.A\,\text{tang}.B=3.$$

Quand cette relation existe, la droite est parallèle au côté AB. Il y a une exception : si $\text{tang}.A=\sqrt{3}$, alors $A=B=60°$, le triangle est équilatéral, et tous les termes de l'équation de la droite s'anéantissent ; alors les quatre points se réduisent à un seul.

13. Cherchons dans quel cas le point G est situé sur la droite (10). A cet effet, substituons dans cette équation, à la place de x et de y, les valeurs des coordonnées du point G ; et, mettant au lieu de $16S^2$, sa valeur développée, et passant tout dans le premier membre, il vient, après avoir exécuté les calculs et fait les réductions,

$$2c^2(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)+2a^2b^2c(a-b)+2c^5(a-b)-2c^3$$
$$(a^3-b^3)+2abc(a-b)(a^2+ab+b^2)=0; \qquad (1)$$

divisant par $2c(a-b)$, on a successivement les équations

$$c(a+b)(c^2-a^2-b^2)+a^2b^2+c^4-c^2(a^2+ab+b^2)+ab$$
$$(a^2+ab+b^2)=0; \qquad (2)$$
$$a^2b^2+ab(a^2+ab+b^2)=ab(a+b)^2;$$
$$c^4-c^2(a^2+ab+b^2)=c^2[c^2-a^2-ab-b^2]=c^2(c^2-a^2-b^2)-abc^2;$$
$$c(a+b)(c^2-a^2-b^2)+c^2(c^2-a^2-b^2)=c(c^2-a^2-b^2)(a+b+c)$$
$$ab(a+b)^2-abc^2=ab(a+b+c)(a+b-c);$$

donc le quotient (2) est divisible par $a+b+c$, et on a pour second quotient

$$c(c^2-a^2-b^2)+ab(a+b-c)=c(c^2-b^2)+ab(b-c)+a^2(b-c);$$

divisant par $b-c$, on obtient :

$$ab+a^2-c(c+b)=b(a-c)+(a-c)(a+c)=(a-c)(a+b+c);$$

Ainsi l'équation (1) prend cette forme :

$$2c(a+b+c)^2(a-b)(b-c)(a-c)=0.$$

Elle n'est donc possible que dans trois cas; le point G, ne peut donc se trouver sur la droite, que lorsque le triangle est isocèle.

Ainsi, trois des quatre points, parmi lesquels doit se trouver G, étant donnés de position, le triangle est déterminé; on peut en calculer les côtés, comme on va voir.

14. Exprimons les distances e, f, g, etc., en fonction de R, ρ, p au moyen des formules qu'on trouve dans les paragraphes (4) et (5).

On a

$$q=\frac{16S^2+p^4+8pr}{4p^2}=\frac{r^2+R^2p^4+8prR^2}{4p^2R^2}=\rho^2+\frac{p^2}{4}+\frac{2r}{p}=$$
$$\rho^2+\frac{p^2}{4}+4R\rho$$

$$e^2=4R^2+4R\rho+3\rho^2-\frac{p^2}{4}$$
$$f^2=R^2-2R\rho$$
$$g^2=R^2+\frac{8}{9}R\rho+\frac{2}{9}\rho^2-\frac{1}{18}p^2$$

$$h^2=-\frac{16}{9}\mathrm{R}\rho+\frac{5}{9}\rho^2+\frac{1}{36}p^2$$

$$k^2=9\mathrm{R}^2+8\mathrm{R}\rho+2\rho^2-\frac{p^2}{2}$$

$$l^2=4\mathrm{R}^2+\frac{32}{9}\mathrm{R}\rho+\frac{8}{9}\rho^2-\frac{2}{9}p^2.$$

15. *Question.* Étant donné f, g, h, trouver les côtés a, b, c ?

Solution. Les équations précédentes donnent

$$6h^2+3g^2-2f^2=(\mathrm{R}-2\rho)^2=\frac{f^4}{\mathrm{R}^2}$$

d'où

$$\mathrm{R}^2=\frac{f^4}{6h^2+3g^2-2f^2}$$

$$3(f^2-g^2-2h^2)=\rho(\mathrm{R}-2\rho)=\frac{\rho f^2}{\mathrm{R}}=\frac{\rho\mathrm{R}f^2}{\mathrm{R}^2}$$

d'où

$$2\mathrm{R}\rho=\frac{3\mathrm{R}^2(f^2-g^2-2h^2)}{f^2}=\frac{3f^2(f^2-g^2-2h^2)}{6h^2+3g^2-2f^2}$$

et

$$\rho^2=\frac{9}{4}\cdot\frac{(f^2-g^2-2h^2)^2}{6h^2+3g^2-2f^2}$$

$$p^2=\frac{f^4}{6h^2+3g^2-2f^2}-12f^2-15g^2+6h^2.$$

Or

$$r=2\mathrm{R}\rho p;$$

et

$$q=p^2+\frac{p^2}{4}+\frac{2r}{p}.$$

Donc p, q, r, sont connus ; et a, b, c sont les racines de l'équation $x^3-px^2+qx-r=0$.

16. On peut remplacer g et h par leurs valeurs en k et en h ; en effet,

$$g^2=\frac{k^2}{9};\quad h^2=\frac{3e^2-2k^2+6f^2}{9};$$

et l'on obtient

$$R^2=\frac{f^4}{2e^2+2f^2-k^2},$$
$$2R\rho=\frac{f^2(k^2-f^2-2e^2)}{2e^2+2f^2-k^2},$$
$$p^2=\frac{4e^4+f^4+3k^4-12e^2f^2+2f^2k^2-8e^2k^2}{2e^2+2f^2-k^2}.$$

Or R^2, $R\rho$, sont essentiellement positifs, donc

$$k^2<2e^2+2f^2,$$
$$k^2>2e^2+f^2.$$

Ainsi, dans le triangle EGH, l'angle en G est essentiellement obtus

17. *Exemple:*

$$e=f=\sqrt{2};\ k=\sqrt{7};$$

d'où
$$p=5\sqrt{3};\ \rho=23;\ r=10\sqrt{3};$$
$$x^3-5x^2\sqrt{3}+23x-10\sqrt{3}=0;$$
$$x=\frac{y}{\sqrt{3}};\ y^3-15y^2+69y-90=0.$$
$$y=6;\ y=\frac{9\pm\sqrt{21}}{2}.$$
$$a=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2};\ b=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2};\ c=2\sqrt{3}.$$

2e exemple: $e^2=3$; $f^2=2$; $k^2=9$; on parvient à l'équation

$$x^3-x^2\sqrt{71}+22x-2\sqrt{71}=0;$$

faisons

$$\cos.\alpha=\sqrt{\frac{71}{75}}=\cos.\,11^\circ\ 32'\ 13'',$$

les trois racines sont

$$\frac{1}{3}\sqrt{71}+\frac{2}{3}\sqrt{5}\cos.\left(60^\circ\pm\frac{1}{3}\alpha\right);\ \ \frac{1}{3}\sqrt{71}-\frac{2}{3}\sqrt{5}\cos.\alpha$$

18. p^2 étant essentiellement positif, on aura

$$3k^2>4e^2+f^2+2\sqrt{e^4+11e^2f^2-8f^4}.$$

Résolvant le radical, on en tire

$$f^2 < e^2\left[\frac{11+\sqrt{153}}{16}\right].$$

On a aussi

$$2f^2 > k^2-2e^2, \qquad (16)$$
$$6f^2 > 3k^2-6e^2,$$

et à fortiori

$$6f^2 > -2e^2+f^2-2\sqrt{e^4+11e^2f^2-8f^4},$$
$$(5f^2+2e^2)^2 > 4(e^4+11e^2f^2-8f^4),$$
$$57f^4 > 24e^2f^2,$$
$$f^2 > \frac{8}{19}e^2.$$

19. L'équation $f^2 = R^2-2R\rho$, montre qu'on a toujours $R > 2\rho$; et lorsque cette équation est satisfaite, tout triangle circonscrit au cercle de rayon ρ est inscrit dans le cercle de rayon R ; c'est un cas particulier du beau théorème de M. Poncelet : un polygone étant inscrit à une conique et circonscrit à une autre, il existe une infinité de polygones qui satisfont à cette condition relativement à ces deux coniques ; et réciproquement, s'il arrive qu'on ne puisse satisfaire à cette condition pour un seul polygone, on ne pourra y satisfaire pour aucun autre polygone homonyme. Consultez le chapitre III de la section IV des Propriétés projectives des figures, trésor précieux de propriétés de l'espace que l'analyse n'a pas encore explorées.

20. Soit d la longueur de la bissectrice angulaire intérieure, allant de l'angle C au côté c ; on trouve facilement

$$d = \frac{2ab\cos.\frac{1}{2}C}{a+b}$$

$$d^2(a+b)^2 = 4a^2b^2\cos.^2\frac{1}{2}C$$

$$4a^2b^2 - d^2(a+b)^2 = 4a^2b^2\sin.^2\frac{1}{2}C$$

$$4d^2(a+b)^2a^2b^2 - d^4(a+b)^4 = 4a^4b^4\sin.^2C = 16a^2b^2S^2.$$

On obtient deux équations semblables pour les deux autres bissectrices intérieures : ainsi, connaissant les trois bissectrices intérieures, il y a une possibilité analytique de déterminer les trois côtés ; mais l'élimination mène à une équation très-élevée, parce qu'elle renferme probablement aussi les solutions pour les bissectrices extérieures.

Lorsque deux bissectrices sont égales, les équations peuvent être mises sous une forme où l'on voit que deux côtés doivent être égaux, à quoi l'on parvient également par des considérations géométriques.

21. Désignant par δ la bissectrice médiane qui va de C au milieu du côté opposé et par δ' et δ'' les deux autres médianes, il vient

$$9c^2 = 8\delta'^2 + 8\delta''^2 - 4\delta^2 ;$$

d'ou

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(\delta^2 + \delta'^2 + \delta''^2).$$

Tm.

DÉTERMINATION

DU

NOMBRE DES COMBINAISONS COMPLÈTES.

PAR M. LEVRET,
Capitaine d'État-major.

1. On entend par combinaisons *complètes* de m lettres prises n à n, les groupes que l'on peut former avec n de ces lettres et différant entre eux au moins par une lettre. Ce qui distingue les combinaisons simples des combinaisons complètes, c'est que dans ces dernières la même lettre peut être répétée plusieurs fois.

Ainsi, toutes les combinaisons complètes des quatre lettres a, b, c, d, prises 3 à 3, sont :

$$\begin{array}{cccc} abc & abd & acd & bcd, \\ a^2b & b^2a & c^2a & d^2a, \\ a^2c & b^2c & c^2b & d^2b, \\ a^2d & b^2d & c^2d & d^2c, \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3. \end{array}$$

Cherchons l'expression générale du nombre des combinaisons complètes de m lettres prises n à n. Je représenterai ce nombre par $C_{m,n}$. D'après cette notation, $C_{m-m', n-n'}$, sera le nombre de combinaisons complètes de $m-m'$ lettres en prenant dans chacune $n-n'$ de ces lettres.

En formant $C_{m,n}$ groupes de n lettres, on écrit, en tout $nC_{m,n}$ lettres, et chacune d'elles est répétée $\frac{n}{m} C_{m,n}$ fois. Cherchons une autre expression de ce nombre : pour cela réunissons, parmi ces combinaisons, celles qui renferment une même lettre, a par exemple, et retranchons a une fois de chacun de ces groupes, il restera alors les combinaisons complètes des m lettres prises $n-1$ à $n-1$, et d'après ce que l'on vient de dire a s'y trouve déjà répété $\frac{n-1}{m} C_{m,n-1}$ fois; de plus, comme on a retranché a une fois de $C_{m,n-1}$ groupes, l'expression cherchée est :

$$C_{m,n-1} + \frac{n-1}{m} C_{m,n-1}.$$

On aura donc

$$\frac{n}{m} C_{m,n} = C_{m,n-1} + \frac{n-1}{m} C_{m,n-1} ;$$

faisant disparaître le dénominateur et effectuant les réductions, il vient

$$nC_{m,n} = (m+n-1) C_{m,n-1} ;$$

remplaçant successivement n par $n-1, n-2 \ldots 3, 2$, on obtient

$$(n-1)\,C_{m,n-1} = (m+n-2)\,C_{m,n-2},$$
$$(n-2)\,C_{m,n-2} = (m+n-3)\,C_{m,n-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$3C_{m,3} = (m+2)\,C_{m,2},$$
$$C_{m,2} = (m+1)\,C_{m,1};$$

mais, d'après la notation, on a évidemment

$$C_{m,1} = m,$$

multipliant toutes ces égalités entre elles et supprimant les facteurs communs aux deux membres de l'équation résultante, on aura :

$$n(n-1)(n-2)\ldots.3.2.1C_{m,n} = m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1),$$

d'où

$$C_{m,n} = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots..n}.$$

Expression entière, on le démontre en algèbre ; de plus, elle est égale au nombre des combinaisons simples de $m+n-1$ lettres prises n à n.

2. On peut, au moyen de cette formule, trouver le nombre des termes du développement d'un polynôme $(a+b+c+\ldots..+l)$ élevé à la puissance n.

En effet, le terme général de ce développement est

$$Ca^m b^{m'} c^{m''}\ldots.\ l^{n-m-m'-m''\ldots.},$$

C étant son coefficient. Il y aura autant de termes que l'on pourra donner de valeurs différentes aux exposants $m, m', m'', \ldots..\ (n-m-m'-m''\ldots..)$, dont la somme est n. Chaque terme peut être considéré comme renfermant le produit de n facteurs pris parmi les lettres du polynôme proposé. Autant on pourra former de produits différents en prenant n de ces lettres, mais en supposant que chacune peut être répétée plusieurs fois, autant le développement aura de termes, c'est-à-dire que l'expression cherchée est égale au nombre des combinaisons complètes de m lettres prises n à n ; ainsi, le nombre des termes du développement est

$$\frac{m(m+1)\,(m+2)\ldots.\,(m+n-1)}{1.2.3\ldots\,n}.$$

Pour appliquer cette formule au cas du binôme $(a+b)^m$, il faut faire $m=2$, ce qui donne

$$\frac{2.3\ldots..\,m\,(m+1)}{1.2\ldots..\,m}=m+1.$$

NOTE

Sur les différentes manières d'exprimer qu'une équation admet un nombre donné de racines égales entre elles.

Il existe, comme on sait, plusieurs méthodes pour trouver les conditions auxquelles les coefficients d'une équation, $f(x)=0$, doivent satisfaire pour que l'équation ait un certain nombre, n, de racines égales entre elles. La première, celle qu'on applique le plus ordinairement, consiste à exprimer que le premier membre $f(x)$, de l'équation proposée, admet un diviseur de la forme $(x-a)^n$; a représentant la valeur indéterminée des n racines égales. A cet effet, on divise $f(x)$, par $(x-a)^n$; le reste de la division est un polynôme, $Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+R$, du degré $(n-1)$ par rapport à x, et dont les coefficients A, B,...R, sont des fonctions de l'inconnue a, et des coefficients de l'équation proposée, $f(x)=0$. Ce polynôme devant être nul, indépendamment de toute valeur attribuée à x, la valeur de a doit annuler à la fois les coefficients A, B,...R; il faut donc exprimer que les n équations $A=0$, $B=0$,...$R=0$, ont une racine commune : ce qui conduit à $(n-1)$ équations de conditions entre les coefficients du premier membre, $f(x)$, de l'équation proposée.

Un second moyen d'obtenir les conditions demandées, est pris dans la théorie même des racines égales. Pour que l'équation $f(x)=0$, ait n racines égales entre elles, il faut et il suffit que cette équation, et ses $(n-1)$ dérivées successives $f'(x)=0, f''(x)=0, \ldots, f^{n}_{-1}(x)=0$, admettent une racine commune. En exprimant que les n équations $f(x)=0, f'(x)=0, \ldots f_{n-1}(x)=0$, ont une racine commune, on trouvera $(n-1)$ conditions entre les coefficients de $f(x)$.

Les conditions obtenues de cette manière sont précisément celles que donnent les équations $A=0$, $B=0, \ldots R=0$. Car le système des équations $A=0$, $B=0, \ldots R=0$, se ramène au système des équations $f(a)=0$, $f'(a)=0, \ldots f_{n-1}(a)=0$.

En effet, on a :

$$f(x)=f[a+(x-a)]=f(a)+f'(a).(x-a)+\frac{f''(a).(x-a)^2}{1.2}$$

$$+\ldots+\frac{f_{n-1}(a).(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}+\frac{f_n(a).(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}+\text{etc.}$$

Par conséquent, le reste obtenu en divisant $f(x)$ par $(x-a)^n$, est

$$f(a)+f'(a).(x-a)+\frac{f''(a).(x-a)^2}{1.2}+\ldots+\frac{f_{n-1}(a).(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Ce dernier polynôme, ordonné suivant les puissances décroissantes de x, devient :

$$\frac{f_{n-1}(a)}{1.2.3\ldots(n-1)}.x^{n-1}+\frac{[f_{n-2}(a)-a.f_{n-1}(a)]}{1.2.3\ldots n-2}.x^{n-2}+\text{etc.}$$

On a donc :

$$A=\frac{f_{n-1}(a)}{1.2.3\ldots n-1}, \quad B=\frac{f_{n-2}(a)-af_{n-1}(a)}{1.2.3\ldots(n-2)}, \text{ etc.}$$

De sorte que les équations $A=0$, $B=0, \ldots$ reviennent à

$$f_{n-1}(a)=0, \quad f_{n-2}(a)-af_{n-1}(a)=0, \ldots$$

Et, ce dernier système se réduit à :

$$f_{n-1}(a)=0, f_{n-2}(a)=0, \ldots\ldots\ldots f_2(a)=0, f(a)=0.$$

On obtient donc simplement par les dérivations successives les équations auxquelles conduit la division de $f(x)$ par $(x-a)^n$; et, c'est pourquoi le second moyen d'obtenir les conditions demandées, nous paraît préférable au premier.

On trouve encore, dans la théorie des racines égales, l'indication d'une autre méthode pour parvenir aux conditions cherchées. Il résulte, en effet, du principe fondamental de cette théorie que, si l'équation $f(x)=0$, a n racines égales entre elles, le premier membre $f(x)$, de l'équation, et sa dérivée $f'(x)$, doivent avoir un commun diviseur du degré $(n-1)$ en x, et qui soit une puissance exacte de ce degré. Et la réciproque est vraie. On parviendra donc aux conditions cherchées, en exprimant, d'abord, que les polynômes $f(x)$, $f'(x)$, ont un commun diviseur du degré $(n-1)$, et, en second lieu, que ce commun diviseur est une puissance exacte du $(n-1)^{ième}$ degré. L'application de cette règle conduit à une espèce de paradoxe qu'il s'agit d'examiner.

Afin d'exprimer que les polynômes $f(x)$, $f'(x)$, ont un commun diviseur du degré $(n-1)$, on divise $f(x)$ par $f'(x)$; puis $f'(x)$ par le reste de la première division, et ainsi de suite jusqu'à ce que, dans ces divisions successives, on soit parvenu à un diviseur d, du degré $(n-1)$. Le reste, r, de cette dernière division est du degré $(n-2)$; il doit être nul, quelle que soit la valeur attribuée à x. On trouvera donc $(n-1)$ équations de conditions, pour établir que $f(x)$ et $f'(x)$, ont un commun diviseur du degré $(n-1)$.

Il faut, de plus, que ce commun diviseur soit une puissance exacte. Par conséquent, le polynôme d doit être divisible par sa dérivée d'; ce qui donne encore lieu à $(n-2)$ équations de conditions, entre les coefficients de $f(x)$. En les ajoutant aux $(n-1)$ premières, on a $(2n-3)$ conditions. Si toutes ces conditions sont distinctes les unes des autres, on en trouve par cette dernière méthode $(n-2)$ de plus que par les précédentes. C'est ce qu'il faut examiner.

Nous allons d'abord démontrer que ces $(2n-3)$ conditions obtenues ne sont pas *toujours* différentes. Car, en vertu des $(n-1)$ équations de conditions qui annulent le reste r, le polynôme d devient diviseur exact de $f(x)$ et $f'(x)$. De sorte qu'en désignant par q et p les quotients des divisions de $f(x)$, $f'(x)$, par d, on a les égalités :

$$(1) \quad f(x)=dq. \qquad (2) \quad f'(x)=dp.$$

Soient q' la dérivée de q et d' celle de d, l'égalité (1) donnera : $f'(x)=dq'+qd'$; et, en remplaçant $f'(x)$ par sa valeur dp, on aura : $dp=dq'+qd'$;

d'où l'on tire $$d(p-q')=d'q. \qquad (3)$$

On voit, par cette dernière égalité, que d est divisible par d', lorsque le polynôme q est divisible par $p-q'$. D'où il suit que d sera une puissance exacte du degré $(n-1)$, lorsque le quotient $\dfrac{q}{p-q'}$ sera une fonction entière

Cela posé, nommons m le degré de l'équation proposée $f(x)=0$. Le degré du polynôme q sera $(m-n+1)$; celui de $(p-q')$, sera $(m-n)$. Supposons $(2n-3)>(m-1)$; on aura $(n-1)>(m-n+1)$, le degré de d sera plus grand que celui de q. Alors, d ne peut être premier avec d' ; car l'égalité (3) montre que d divise le produit qd', et si d était premier avec d', il faudrait que d fût diviseur du polynôme q, ce qui est impossible, puisque le degré de d est supérieur à celui de q. Il en résulte que le nombre des conditions de la divisibilité de d par d', se réduit en devenant égal au nombre des conditions de la divisibilité de q par $p-q'$, qui est au plus égal à $(m-n)$. En ajoutant à $(m-n)$, le nombre $(n-1)$ des conditions nécessaires pour que d soit diviseur des polynômes $f(x)$, $f'(x)$, on aura, au plus, $(m-1)$ conditions. Par conséquent, si l'on suppose $(2n-3)>(m-1)$, les $(2n-3)$

égalités de conditions obtenues, ne seront pas toutes distinctes les unes des autres.

D'ailleurs, on n'obtient $(m-n)$ conditions pour la divisibilité de q par $p-q'$, que si q et $p-q'$ sont premiers entre eux. Et, dans ce cas, il est facile d'expliquer pourquoi le nombre total des conditions est $(m-1)$.

En effet, l'égalité $d(p-q')=d'q$, mise sous la forme $\frac{d(p-q')}{q}=d'$, montre que le polynôme q, divise le produit $d(p-q')$. Et, puisqu'il est premier avec $p-q'$, il doit diviser d. Or, lorsqu'au moyen des $(m-n)$ nouvelles conditions, on aura exprimé que d devient une puissance exacte $(x-\alpha)^{n-1}$, le polynôme q diviseur de d prendra la forme $(x-\alpha)^{m-n+1}$. En reportant ces valeurs de d et de q, dans l'égalité $f(x)=dq$, il en résultera $f(x)=(x-\alpha)^m$.

Ainsi, on aura exprimé que toutes les racines de la proposée sont égales entre elles, et c'est ce qui explique pourquoi l'on trouve $(m-1)$ équations de conditions.

Lorsque $(2n-3)$ est moindre que $(m-1)$, le degré de d est moindre que celui du polynôme q. Dans ce cas, si d et d' sont premiers entre eux, on aura $n-2$ conditions pour exprimer que d est une puissance exacte. Et par suite, le nombre total des conditions peut être $(2n-3)$. Mais l'égalité $d(p-q')=d'q$, fait voir que d est diviseur de $d'q$; et, puisque d est premier avec d', il faut que d divise exactement le polynôme q. On aura donc, $q=dh$, le quotient h étant un polynôme entier du degré $(m-2n+2)$. Substituant à q le produit dh, dans l'égalité $f(x)=dq$, il en résultera $f(x)=d^2h$. Les $(n-2)$ conditions qui rendent d égal à une puissance $(x-\alpha)^{n-1}$ du degré $(n-1)$, donnent $f(x)=(x-\alpha)^{2n-2}h$; d'où il suit que si l'on trouve $(2n-3)$ conditions, c'est parce qu'on a exprimé que l'équation $f(x)=0$, a $2n-2$ racines égales.

En terminant cette discussion, je ferai observer que les $(n-1)$ équations de conditions nécessaires pour qu'il existe un commun diviseur du degré $(n-1)$, entre $f(x)$ et $f'(x)$, peuvent être satisfaites de plusieurs manières différentes. Parmi leurs solutions, on trouve celles du système obtenu, en éliminant x entre les n équations $f(x)=0$, $f'(x)=0$,... $f_{n-1}(x)=0$. En choisissant ces dernières solutions pour les $(n-1)$ premières équations dont il s'agit, le polynôme d deviendra divisible par sa dérivée d', sans aucune condition nouvelle; et par conséquent, on aura seulement $(n-1)$ relations entre les coefficients de l'équation $f(x)=0$, pour exprimer que cette équation a n racines égales entre elles.

G.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

DE

M. PERREY,

Professeur suppléant à la faculté des sciences de Dijon.

Si dans l'équation de l'ellipse rapportée à son sommet de gauche,

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$$

on pose :

$$a-\sqrt{a^2-b^2}=\frac{p}{2},$$

ou

$$b^2=ap-\frac{p^2}{4},$$

on trouve, comme on le sait :

$$(1)\qquad y^2=2px-\frac{px(p+2x)}{2a}+\frac{p^2x^2}{4a^2}.$$

Si l'on regarde p comme constant et qu'on fasse croître a de plus en plus, on aura une série d'ellipses de plus en plus allongées, mais qui auront un sommet et un foyer communs. Enfin, pour $a=\infty$. on trouve $y^2=2px$; d'où l'on conclut que la parabole est une ellipse infiniment allongée.

Mais, au lieu de faire croître a, faisons le décroître, et pour faciliter la discussion, posons $2a=\frac{p}{k}$. L'équation (1) devient :

(2) $$y^2=p(2-k)x+k(k-2)x^2.$$

Maintenant, faisons varier k de 0 à $+\infty$, et de $-\infty$ à 0. Nous aurons ainsi, pour

$k=0$, la parabole limite ;

$k>0$, et <1, des ellipses de moins en moins allongées; a ayant une valeur finie plus grande que $\frac{p}{2}$, et $b<a$.

$k=1$, un cercle ; $a=\frac{p}{2}$, et $b=a$.

$k>1$ et <2 ; nouvelles ellipses ; c'est supposer $a<\frac{p}{2}$, et $>\frac{p}{4}$; et toujours $b<a$.

$k=2$, une droite limitée, l'ellipse se réduit à son grand axe. On a alors, $a=\frac{p}{4}$, et $b=0$; les foyers sont aux sommets.

$k>2$, hyperboles dont le sommet de gauche est à l'origine; on a $a<\frac{p}{4}$, et b est imaginaire. k augmentant, a diminue de plus en plus; l'angle des asymptotes avec l'axe des x augmente, et pour

$k=+\infty$, cet angle est droit; l'hyperbole se réduit à ses asymptotes qui se confondent avec la tangente au sommet.

$k=-\infty$, même valeur.

$k < 0$, mais fini : nouvelles hyperboles dont le sommet est à l'origine. A mesure que k diminue en valeur absolue, a augmente en restant négatif, b est toujours imaginaire, et l'angle des asymptotes avec l'axe des x diminue, de manière que pour

$k = 0$, on a de nouveau la parabole limite. La parabole peut donc être considérée aussi comme la limite des hyperboles dont l'axe transverse augmente indéfiniment, ou dont la branche de gauche est à l'infini.

Il n'est donc pas exact de dire, d'une manière absolue, que la parabole a *un* centre, et qu'il est situé à l'infini. La parabole a deux centres situés à l'infini, l'un du côté des x positifs, l'autre du côté des x négatifs. Mais, il est plus simple de dire que la parabole est la limite des ellipses dont le grand axe tend vers $+\infty$, et des hyperboles dont le premier axe tend vers l'infini négatif.

PROBLÈMES PROPOSÉS AUX EXAMENS.

---

1. *Déterminer les dimensions d'un segment sphérique dont le volume et l'aire soient respectivement égaux à ceux d'une sphère et d'un cercle donnés.*

Soient a et b les rayons de la sphère et du cercle donnés ; r et h le rayon de la base et la hauteur du segment demandé ; on trouvera facilement que les équations du problème sont :

$$r^2 + h^2 = b^2 \qquad (1)$$
$$h(h^2 + 3r^2) = 8a^3 \qquad (2)$$

Éliminant r^2 entre ces deux équations, il viendra :

$$2h^3 - 3b^2h + 8a^3 = 0 \qquad (3)$$

équation qui fera connaître h. La hauteur du segment étant ainsi déterminée, on en déduira la valeur du rayon de sa base au moyen de l'équation (1), et le problème sera résolu.

Discutez l'équation (3). — Cette équation a une racine réelle négative, puisqu'elle est de degré impair et que son dernier terme est positif; mais cette racine est étrangère à la question, car la hauteur du segment ne peut être une quantité négative. Quant aux deux autres racines, elles peuvent être imaginaires : on sent, en effet, que le volume donné peut être trop grand pour pouvoir être contenu dans la surface πb^2. Si ces deux autres racines sont réelles, elles seront positives, conformément à la règle des signes de Descartes. *Pourriez-vous le reconnaître d'après la loi de composition des coefficients?* — Oui, car le produit des trois racines de l'équation (3) est négatif, et comme l'une d'elles est négative, il faut que le produit des deux autres soit positif, et que par conséquent elles soient de même signe ; mais elles ne peuvent être négatives, car la somme des trois racines est nulle : donc, elles sont positives.

Quelle est donc la relation qui doit exister entre a *et* b *pour que le problème soit possible?* — La condition de réalité des racines de l'équation (3) est, d'après la règle connue,

$$b > a\sqrt[6]{32}. \qquad (4)$$

qui est aussi la condition nécessaire pour que le problème soit possible.

Si la condition (4) *est remplie, y aura-t-il deux solutions?* — Il faut encore, pour cela, que les valeurs positives de h soient moindres que b, en vertu de l'équation (1), et que par conséquent b soit une limite supérieure des racines positives de l'équation (3). Substituons donc b à h dans le premier membre de cette équation et dans ses dérivées, et nous trouverons pour résultats :

$$-b^3+8a^3, \qquad +3b^2, \qquad +12b.$$

Donc, b sera une limite si l'on a :

$$-b^3+8a^3>0 \quad \text{ou bien} \quad b<2a.$$

On voit ainsi que si b est compris entre $a\sqrt[6]{32}$ et $2a$, le problème admettra deux solutions, qui se réduiront à une seule, si $b=a\sqrt[6]{32}$, car c'est là la condition d'égalité de deux racines de l'équation (3).

Si $b=2a$, on trouve $h=2a$ et $r=0$, de sorte qu'au lieu d'un segment sphérique, on a une sphère dont le diamètre est $2a$. L'autre valeur positive de h est $a\left(\sqrt{3}-1\right)$: elle est moindre que $2a=b$, et fournit par conséquent une 2e solution de la question.

Si $b>2a$, la condition (4) étant nécessairement remplie, les trois racines de l'équation (3) sont encore réelles, mais il n'y a cependant qu'une seule solution, parce qu'alors $-b^3+8a^3<0$, et qu'ainsi l'une des racines positives de cette équation est moindre que b, et l'autre est plus grande que b.

Dans quel cas le volume du segment sphérique sera-t-il le plus grand possible ? — La condition (4) revient à

$$a<\frac{b}{\sqrt[6]{32}} :$$

de sorte que le segment sera maximum quand on aura

$$a=\frac{b}{\sqrt[6]{32}}.$$

Pouvez-vous construire ce segment maximum ? — Oui, car l'équation (3) ayant alors deux racines égales, l'une d'elles doit satisfaire à sa dérivée

$$6h^2-3b^2=0,$$

et comme cette équation n'a qu'une racine positive $\frac{b}{\sqrt{2}}$, c'est celle-ci qui entre deux fois dans la proposée. La valeur correspondante de r est aussi $\frac{b}{\sqrt{2}}$, de sorte que le segment maximum est un hémisphère dont le rayon est la moitié du côté du carré inscrit dans le cercle donné.

Aurait-on pu prévoir, d'après la nature géométrique de la question, que le problème n'admettrait deux solutions que dans certains cas, et distinguer ces cas? — Supposons que l'on ait construit un segment dont l'aire soit égale à celle du cercle donné, et opposons-lui par sa base un segment égal, on formera ainsi un corps dont le volume sera maximum quand chaque segment sera un hémisphère, puisque parmi tous les corps qui ont la même aire, la sphère est celui qui a le plus grand volume. Le segment dont l'aire est πb^2 sera donc le plus grand possible quand il sera un hémisphère; donc, le rayon sera $\sqrt{\frac{\pi b^2}{2\pi}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$, comme nous l'avons trouvé plus haut. Son volume sera par conséquent $\frac{1}{3}\pi \frac{b^3}{\sqrt{2}}$; de sorte qu'on aura alors $b^3 = 4a^3\sqrt{2}$, ou $b = a\sqrt[6]{32}$, ce qui s'accorde encore avec ce qui précède.

Supposons maintenant que l'on ait construit ce segment maximum et que l'on fasse diminuer le rayon de sa base *d'une manière continue*, son aire restant constamment égale à πb^2 : sa hauteur devra augmenter, mais seulement jusqu'à ce que le rayon de la base étant réduit à zéro, le segment soit devenu une sphère ayant b pour diamètre et par conséquent $\frac{1}{6}\pi b^3$ pour volume. Donc, si $\frac{4}{3}\pi a^3 > \frac{1}{6}\pi b^3$, d'où $b < 2a$, il y aura eu un instant où le volume du segment aura été égal à celui de la sphère donnée, puisqu'il a varié d'une manière continue à partir de sa plus grande valeur.

Si l'on suppose, au contraire, que le rayon de la base du segment croisse d'une manière continue depuis $\frac{b}{\sqrt{2}}$, l'aire de ce segment restant toujours égale à πb^2, sa hauteur h ira en diminuant; mais comme alors r reste constamment moindre que b, le produit r^2h, et par conséquent le volume du segment, décroîtra indéfiniment avec h, de sorte qu'il y aura un instant où ce volume sera égal à $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Concluons donc que lorsque le problème sera possible, il aura deux solutions, si $b<2a$, ou $=2a$: l'un de ces segments sera alors plus petit qu'un hémisphère, et l'autre sera plus grand; mais si $b>2a$, il n'y aura qu'une seule solution, et le segment sera moindre qu'un hémisphère.

2. *Étant donnée une équation* $\varphi(x)=0$ *du degré* m *à coefficients indéterminés, trouver les relations qui doivent exister entre ces coefficients, pour que deux racines de la proposée satisfassent à l'équation à deux inconnues* $py+qz=r$; *et déterminer ces racines, lorsque les conditions dont il s'agit seront remplies.*

Soient a et b, deux racines de l'équation $\varphi(x)=0$, qui vérifient l'équation $py+qz=r$. On aura donc :

$$\varphi(a)=0, \quad \varphi(b)=0, \quad pa+qb=r.$$

On tire de cette dernière

$$b=\frac{r-pa}{q} \quad \text{et par conséquent} \quad \varphi(b)=\varphi\left(\frac{r-pa}{q}\right);$$

d'où l'on voit que les deux équations

$$\varphi(x)=0 \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{r-px}{q}\right)=0,$$

ont la racine commune a; par conséquent, leurs premiers membres ont un commun diviseur. Ainsi, pour résoudre le problème, on cherchera le P. G. C. diviseur des polynômes

$\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{r-px}{q}\right)$, on poussera l'opération jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste indépendant de x, et, en égalant ce reste à zéro, on aura la relation demandée

Si la proposée doit avoir n couples de racines qui vérifient l'équation $py+qz=r$, le P. G. C. diviseur dont il s'agit devra être du $n^{\text{ième}}$ degré, de sorte qu'on arrêtera le calcul, nécessaire pour le déterminer, au reste du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré, lequel sera de la forme

$$A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots\ldots+A_n.$$

Ce reste devant être nul quelle que soit la valeur de x, il faudra que les coefficients des diverses puissances de cette quantité soient nuls, ce qui donnera les n équations de condition

$$A_1=0, \quad A_2=0,\ldots \qquad A_n=0.$$

La proposée devra donc avoir au moins n coefficients indéterminés.

Si l'on suppose ces conditions satisfaites, on trouvera nécessairement un P. G. C. diviseur D entre les polynômes $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{r-px}{q}\right)$, et, en l'égalant à zéro, on formera une équation dont la résolution fera connaître les racines de $\varphi(x)=0$, qui doivent être mises à la place de y dans l'équation $py+qz=r$; de sorte que, pour avoir leurs conjuguées, il n'y aura qu'à remplacer y par les valeurs trouvées de x, dans la formule $z=\frac{r-py}{q}$.

On voit donc que si le P. G. C. diviseur D est d'un degré supérieur au 1er, il y aura en général autant de couples de racines de l'équation $\varphi(x)=0$, qui satisferont à l'équation $py+qz=r$, qu'il est marqué par le degré de ce P. G. C. diviseur. Toutefois, cette conséquence serait inexacte si la proposée avait une racine c telle que $\frac{r-pc}{q}$ fût égale à c, ou, ce qui revient au même, si elle avait une racine $c=\frac{r}{p+q}$.

En effet, cette racine vérifie l'équation $\varphi\left(\frac{r-px}{q}\right)=0$, puisque, d'après notre hypothèse, faire $x=c$ dans cette équation, c'est faire $x=c$ dans la proposée. Donc c est racine de $D=0$, de sorte que cette équation détermine non-seulement les racines de $\varphi(x)=0$, qui, conjointement avec une autre racine de cette dernière équation, vérifient $py+qz=r$, mais encore celle des racines de $\varphi(x)=0$ qui est égale à $\frac{r}{p+q}$, si l'équation en a une pareille, et elle la donne autant de fois que cette racine entre dans la proposée.

Ainsi, avant de s'occuper de la recherche des racines de $\varphi(x)=0$ qui satisfont à $py+qz=r$, on commencera par examiner si $\frac{r}{p+q}$ est racine de cette équation, et on devra la débarrasser de toutes les racines égales à $\frac{r}{p+q}$ qu'elle pourra contenir, ce qui ne saurait présenter de difficulté.

3. Si $p=q$, les deux équations $\varphi(x)=0$ et $\varphi\left(\frac{r-px}{q}\right)=0$ seront également vérifiées par $x=a$ et par $x=b$, de sorte que ces quantités seront racines de $D=0$: et en effet les trois équations

$$\varphi(a)=0, \quad \varphi(b)=0, \quad p(a+b)=r,$$

étant symétriques par rapport à a et à b, le calcul qui déterminera l'une de ces quantités devra aussi déterminer l'autre. Donc, l'*équation* $D=0$ *nous donnera tous les couples de racines de* $\varphi(x)=0$, *dont la somme est* $\frac{r}{p}$; mais elle devra donner, en outre, toutes les racines de la proposée qui sont égales à $\frac{r}{2p}$.

Si aucune des racines de la proposée n'est égale à $\frac{r}{2p}$, et que chacune ajoutée avec une autre forme une somme égale à $\frac{r}{p}$, on voit que l'équation $D=0$ aura les mêmes racines que la proposée, de sorte que notre méthode deviendra illusoire. Mais alors on observera que si l'on choisit une inconnue auxiliaire t qui soit une fonction symétrique quelconque des deux racines conjuguées a et b, comme $t=ab$, ou $t=a^2+b^2$, etc., cette inconnue aura autant de valeurs qu'il y a de racines dans la proposée; mais comme ces racines sont égales 2 à 2, l'équation en t s'abaissera à une équation de degré sous-double, en extrayant la racine carrée de ses deux membres. Il en sera encore de même si les valeurs de t sont égales et de signes contraires, ce qui arrivera si l'on pose $t=a-b$. Mais, dans le cas actuel, on n'aura qu'à faire évanouir le second terme pour ramener l'équation proposée à une autre de degré sous-double; car, en désignant par $2n$ le nombre de ses racines, on diminuera chacune d'elles de $\frac{nr}{2np}=\frac{r}{2p}$, de sorte que les deux racines conjuguées a et b deviendront $a-\frac{r}{2p}$ et $\frac{r}{p}-a-\frac{r}{2p}=-a+\frac{r}{2p}$: ainsi l'équation transformée aura ses racines égales 2 à 2 et de signes contraires, donc elle sera réductible à une équation de degré sous-double.

4. Examinons actuellement quelques cas particuliers du problème que nous venons de développer, et spécialement ceux que l'on considère le plus souvent dans les examens.

L'équation $\varphi(x)=0$ a deux racines égales et de signes contraires : trouver ces racines.

Ici $r=0$ et $q=+p$, de sorte que l'on résoudra le problème en cherchant le P. G. C. diviseur entre les premiers membres des équations

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(-x) = 0\,(*).$$

Mais j'observe qu'au système de ces deux équations on peut substituer le système formé de leur somme et de leur différence : or, si la proposée est de degré pair, la somme ne renfermera que des termes de degré pair, et la différence ne renfermant, au contraire, que des termes de degré impair, on pourra la diviser par x, ce qui ramènera à une équation dont tous les termes auront des exposants pairs. Il en serait de même si la proposée était de degré impair ; donc, on pourra substituer ainsi au système des équations $\varphi(x)=0$ et $\varphi(-x)=0$, le système de deux autres équations dont tous les termes seront de degré pair, de sorte que les restes que l'on obtiendra en cherchant le plus grand commun diviseur de leurs premiers membres seront aussi de cette même forme. Le nombre des solutions de la question sera ainsi marqué par la moitié du degré du plus grand commun diviseur trouvé.

5. *Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients indéterminés d'une équation $\varphi(x) = 0$ pour que deux de ses racines soient dans le rapport de* 1 à q.

Il suffira de supposer $r = 0$ et $p = -1$ dans la question du n° 2, ce qui conduira à chercher le P. G. C. diviseur des deux polynômes $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{x}{q}\right)$, et à égaler à zéro le reste indépendant de x (**).

(*) Pour traiter la question directement, et c'est ce qu'il faut *toujours* faire dans un examen, on dira : Si je transforme la proposée en une autre dont les racines soient égales et de signes contraires aux siennes, j'obtiendrai une équation $\varphi(-x)=0$ qui aura deux racines communes avec la proposée $\varphi(x)=0$, de sorte que leurs premiers membres auront un commun diviseur du 2e degré, qui, égalé à zéro, fournira une équation dont les racines résoudront le problème.

(**) Pour traiter cette question à priori, nous dirons : Si nous transformons la proposée en une autre dont les racines soient q fois plus grandes, nous obtiendrons une équation $\varphi\left(\frac{x}{q}\right)=0$ qui aura une racine commune avec la proposée $\varphi(x)=0$, de sorte que leurs premiers membres auront un commun diviseur du 1er degré, etc.

6. *Si l'on voulait qu'il y eût* n *couples de racines, dont le rapport fût* q, on observerait que le P. G. C. diviseur des polynômes $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{x}{q}\right)$ devrait être alors du $n^{ième}$ degré, de sorte qu'il faudrait égaler à zéro les coefficients des diverses puissances de x dans le reste correspondant,

$$A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_n,$$

ce qui donnerait les n équations de condition,

$$A_1 = 0, \ A_2 = 0, \ldots \quad A_n = 0.$$

Mais si le rapport q n'est pas donné, ce qui arrivera *si l'on demande seulement que* 2 n *racines de* $\varphi(x) = 0$ *forment une suite de rapports égaux*, on observera que les n équations précédentes devront être vérifiées par une même valeur de q, de sorte que leurs premiers membres doivent avoir un commun diviseur ; on cherchera donc le P. G. C. diviseur entre deux de ces premiers membres, et on poussera l'opération jusqu'à un reste indépendant de q, que l'on égalera à zéro ; puis on exprimera que le reste du 1er degré, que l'on aura ainsi trouvé, divise les premiers membres de toutes les autres équations, et l'on obtiendra ainsi $(n-1)$ équations de condition qui répondront à la question. Elles résultent comme on voit de l'élimination de q entre les n équations $A_1=0$, $A_2=0, \ldots$ $A_n=0$.

7. *Veut-on que toutes les racines de l'équation* $\varphi(x) = 0$ *forment une progression par quotient?* on observera qu'en supposant cette équation du degré m, si l'on groupe chaque terme de la progression avec le suivant, on formera $(m-1)$ couples de racines dont le rapport est une certaine quantité q, de sorte que le P. G. C. diviseur entre $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{x}{q}\right)$ sera du degré $(m-1)$: on égalera donc à zéro les coefficients des diverses puissances de x dans le reste du degré $(m-2)$, et si q

est connu, on aura ainsi $(m-1)$ équations de condition. Mais si la raison n'est pas donnée, il faudra, comme on l'a vu tout à l'heure, éliminer q entre ces $(m-1)$ équations, ce qui réduira à $(m-2)$ le nombre des équations de condition.

8. La méthode que nous venons d'indiquer a toute la généralité possible, mais elle a l'inconvénient, qui, d'ailleurs, est inhérent à la nature de la question, d'exiger des calculs très-laborieux. Cependant on propose quelquefois dans les examens de déterminer la valeur qu'il faut donner à un coefficient indéterminé pour que l'équation résultante ait ses racines en progression géométrique, et, dans ce cas, on peut obtenir cette valeur assez vite de la manière suivante : soit, par exemple, l'équation

$$2x^4-15x^3+Cx^2-30x+8=0,$$

qui doit avoir ses racines en progression par quotient au moyen d'une détermination convenable de C. Soit q la raison, les quatre racines seront de la forme

$$a, \quad aq, \quad aq^2, \quad aq^3;$$

et on aura ainsi

$$a^4q^6=\tfrac{8}{2}=4, \qquad \text{d'où} \qquad aq^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2};$$

donc, en transformant la proposée en une autre dont les racines soient égales aux siennes divisées par $\sqrt{2}$, les racines de cette nouvelle équation

$$4y^4-15\sqrt{2}.y^3+Cy^2-15\sqrt{2}.y+4=0,$$

seront

$$q^{-\frac{3}{2}}, \quad q^{-\frac{1}{2}}, \quad q^{\frac{1}{2}}, \quad q^{\frac{3}{2}},$$

c'est-à-dire réciproques et en progression par quotient. Si donc le coefficient indéterminé ne portait pas sur le terme du milieu, il serait immédiatement déterminé, en écrivant que cette équation est réciproque. Comment donc faire dans le cas actuel ? Posons $y+\frac{1}{y}=z$, et l'équation résultante

$$4z^2-15\sqrt{2}.z+C-8=0,$$

aura pour racines

$$q^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{q^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{et} \quad q^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{q^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais si l'on représente $q^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{q^{\frac{1}{2}}}$ par γ, on trouve facilement que $q^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{q^{\frac{3}{2}}}=\gamma^3-3\gamma$, de sorte que

$$\gamma^3-3\gamma+\gamma=\frac{15\sqrt{2}}{4}.$$

Donc les équations

$$4z^2-15\sqrt{2}.z+C-8=0,$$

$$z^3-2z-\frac{15\sqrt{2}}{4}=0,$$

ont la racine commune γ ; donc, leurs premiers membres doivent avoir un facteur commun, ce qui déterminera C. Si l'on cherche ce facteur commun on trouvera facilement que le reste indépendant de z donne :

$$C^3-8C^2+450C-225.217=0,$$

équation qui a 35 pour seule racine réelle. Veut-on maintenant résoudre l'équation

$$2x^4-15x^3+35x^2-30x+8=0.$$

On résoudra l'équation $4z^2-15\sqrt{2}.z+35-8=0$, ce qui donnera $z=\frac{9}{2\sqrt{2}}$ et $z=\frac{3}{\sqrt{2}}$; puis on substituera successivement ces valeurs dans l'équation $y+\frac{1}{y}=z$, et on trouvera ainsi

$$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad =2\sqrt{2}, \quad =\sqrt{2}, \quad =\frac{1}{\sqrt{2}},$$

et enfin, en multipliant ces quatre valeurs par $\sqrt{2}$, on obtiendra les racines de la proposée $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4.

9. *On sait qu'une équation du degré* m *a ses racines en progression par quotient: on propose de déterminer ces racines.*

Nous distinguerons deux cas, suivant que la raison sera ou ne sera pas donnée.

1er *cas.* Soit q la raison, les m racines de la proposée pourront être représentées par

$$a,\quad aq,\quad aq^2,\quad aq^3,\ldots\ aq^{m-1}.$$

Cela posé, si l'on en fait le produit, on trouvera qu'il est égal à $a^m q^{\frac{m(m-1)}{2}}$; mais ce produit est égal au dernier terme de l'équation proposée, pris avec son signe, ou avec un signe contraire, suivant qu'elle est de degré pair, ou impair; donc, en appelant U ce produit qui nous est connu, nous aurons :

$$a^m q^{\frac{m(m-1)}{2}}=\mathrm{U},\ \text{d'où}\ aq^{\frac{m-1}{2}}=\sqrt[m]{\mathrm{U}},\ \text{et partant}\ a=\frac{\sqrt[m]{\mathrm{U}}}{\sqrt{q^{m-1}}};$$

ce qui fera connaître une des racines extrêmes, et par suite toutes les autres. On trouvera m valeurs pour a, mais il sera facile de distinguer parmi ces m valeurs celle qui vérifie la proposée.

Remarquons que si m est impair et égal à $2n+1$, la quantité $aq^{\frac{m-1}{2}}$ devient aq^n; donc, *on obtiendra la racine moyenne, en extrayant la racine m^{ième} du dernier terme de l'équation, pris en signe contraire.*

Cette remarque fournit le moyen le plus simple *d'exprimer que les trois racines de l'équation*

$$x^3-\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x-\mathrm{C}=0$$

sont en progression par quotient. En effet, la racine moyenne devant être égale à la racine cubique du produit des trois racines, il faudra que $\sqrt[3]{C}$ vérifie cette équation : ainsi, on devra avoir

$$C - A\sqrt[3]{C^2} + B\sqrt[3]{C} - C = 0,$$

ou ce qui revient au même :

$$\sqrt[3]{C}(B - A\sqrt[3]{C}) = 0.$$

Or C n'est pas nul, sans quoi la racine moyenne étant zéro, les deux autres seraient aussi égales à zéro; donc, il faut que

$$B - A\sqrt[3]{C} = 0, \quad \text{ou bien que} \quad B^3 - A^3C = 0.$$

Cette condition est suffisante, car si l'on désigne les racines de la proposée par a, b, c, elle exprime que $\sqrt[3]{abc}$ est une de ces racines, et est par conséquent égale à b, par exemple ; donc $\sqrt[3]{abc} = b$, d'où $b^2 = ac$, et par suite $\div\!\div\, a : b : c$.

Si $A = 0$, la condition $B^3 - A^3C = 0$ se réduit à $B = 0$, de sorte que l'équation proposée est alors

$$x^3 - C = 0,$$

et en effet, en appelant α une des racines cubiques imaginaires de l'unité, les racines de cette équation sont :

$$\sqrt[3]{C}, \quad \sqrt[3]{C}.\alpha, \quad \sqrt[3]{C}.\alpha^2.$$

2^e *Cas*. Appelons q la raison inconnue de la progression, nous avons vu, (7), que les deux équations

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi\left(\frac{x}{q}\right) = 0,$$

devaient avoir les $(m-1)$ racines communes $aq, aq^2 \ldots\ldots aq^{m-1}$, qui sont celles de l'équation formée en égalant leur P. G. C. diviseur à zéro; on cherchera donc ce P. G. C. diviseur, et on écrira que le reste du $(m-2)^{\text{ième}}$ degré,

$$A_1x^{m-2} + A_2x^{m-3} + \ldots + A_{m-1},$$

est identiquement nul, ce qui donnera les $(m-1)$ équations de condition

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \ldots \quad A_{m-1} = 0,$$

qui devront avoir pour racine commune la raison q de la progression. Mais comme il n'y a pas de motif pour regarder cette progression comme étant croissante plutôt que décroissante, elles auront aussi la racine commune $\frac{1}{q}$; de sorte que leurs premiers membres auront un commun diviseur du deuxième degré, lequel sera le coefficient A_1 de x dans le premier terme du reste $A_1^{m-2}+A_2x^{m-3}+\ldots+A_{m-1}$, car ce coefficient est du deuxième degré par rapport à q : on l'égalera donc à zéro, ce qui fournira une équation d'où l'on tirera la valeur de q, et on rentrera ainsi dans le premier cas; mais il sera plus simple de remplacer q par sa valeur, dans l'équation formée, en égalant à zéro le quotient de la division de $\varphi(x)$ par le reste du $(m-1)^{\text{ième}}$ degré, car on aura ainsi très-simplement une des racines extrêmes.

J'ai dit que A_1, est du second degré par rapport à q : en effet, l'équation $\varphi(x)=0$, étant

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots+U=0,$$

on aura

$$\varphi\left(\frac{x}{q}\right)=x^m+Aqx^{m-1}+Bq^2x^{m-2}+Cq^3x^{m-3}+\ldots+Uq^m=0;$$

donc

$$\varphi\left(\frac{x}{q}\right)-\varphi(x)=0=Ax^{m-1}+B(q+1)x^{m-2}+C(q^2+q+1)x^{m-3}+\ldots.$$

Ce polynôme doit donc diviser $\varphi(x)$, ou, pour éviter les quotients fractionnaires, $A^2.\varphi(x)$. Le premier terme du quotient de leur division sera Ax, et le reste correspondant

$$A[A^2-B(q+1)]x^{m-1}+A[AB-C(q^2+q+1)]x^{m-2}+\ldots\ldots$$

Le second terme de ce quotient sera $A^2 - B(q+1)$, de sorte que le coefficient de x^{m-2} dans le reste sera

$$A_1 = A[AB - C(q^2+q+1)] - B(q+1)[A^2 - B(q+1)],$$

c'est-à-dire du second degré par rapport à q.

Exemple. Résoudre l'équation

$$x^4 - 15x^3 + 70x^2 - 120x + 64 = 0,$$

dont les racines sont en progression par quotient.

On aura

$$\varphi\left(\frac{x}{q}\right) = x^4 - 15qx^3 + 70q^2x^2 - 120q^3x + 64q^4 = 0,$$

$$\frac{\varphi\left(\frac{x}{q}\right) - \varphi(x)}{q-1} = 15x^3 - 70(q+1)x^2 + 120(q^2+q+1)x \\ - 64(q^3+q^2+q+1).$$

Le quotient de la division de $\varphi(x)$ par ce polynôme est $x+(14q-31)$, et le reste a pour coefficient de son premier terme $310(2q^2-5q+2)$. Égalant ce reste à zéro, on en tire $q=2$ et $q=\frac{1}{2}$; remarquons que comme on a multiplié le second dividende partiel par 3, l'équation $x+\frac{14q-31}{3}=0$, donnera la première racine. En faisant $q=2$, on trouve $x=1$, et ainsi les quatre racines sont 1, 2, 4, 8.

Cette méthode est générale, et n'exige pas la résolution d'une équation de degré supérieur au second.

10. *Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients indéterminés de l'équation* $\varphi(x)=0$, *pour qu'elle ait* n *racines en progression par quotient.*

La méthode du n° 7 ne pourrait pas conduire à la solution de ce problème, de même que le principe fondamental de la théorie des racines égales ne peut pas servir à exprimer qu'une équation à coefficients indéterminés a une racine de l'ordre n; nous dirons donc : soient a, aq, $aq^2 \ldots aq^{n-1}$ les n racines qui doivent être en progression par quotient, si l'on transforme successivement l'équation proposée $\varphi(x)=0$, en $(n-1)$ autres équations dont les racines soient respectivement égales à celles de la proposée multipliées par q, q^2, $q^3, \ldots q^{n-1}$, il est clair que les n équations

$$\varphi(x)=0, \quad \varphi\left(\frac{x}{q}\right)=0, \quad \varphi\left(\frac{x}{q^2}\right)=0, \ldots \quad \varphi\left(\frac{x}{q^{n-1}}\right)=0,$$

auront la racine commune aq^{n-1}; donc, leurs premiers membres doivent avoir un commun diviseur. En conséquence, on cherchera le P. G. C. diviseur entre $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{x}{q}\right)$, on poussera l'opération jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste R, indépendant de x, et on l'égalera à zéro; puis on exprimera que le reste précédent divise tous les autres polynômes, et on obtiendra ainsi les $(n-1)$ équations de conditions :

$$R_1=0, \quad R_2=0, \quad R_{n-1}=0,$$

qui résoudront le problème, si la raison q est donnée; sinon, on éliminera cette inconnue entre elles, et on trouvera ainsi $(n-2)$ équations de conditions.

11. *Si l'équation*, $\varphi(x)=0$, *a* n *racines en progression par quotient et que l'on veuille déterminer ces racines*, on cherchera le plus grand commun diviseur des deux polynômes $\varphi\left(\frac{x}{q^{n-2}}\right)$ et $\varphi\left(\frac{x}{q^{n-1}}\right)$; on en trouvera un du premier degré, si la proposée n'a pas plusieurs systèmes de n racines en progression géométrique, et, en l'égalant à zéro, on formera une équation qui fera connaître l'une des racines extrêmes, et il sera facile d'en déduire les autres, puisque nous supposons que la raison est connue.

Mais si la raison n'est pas donnée, on devra chercher le plus grand commun diviseur des n polynômes

$$\varphi(x),\quad \varphi\left(\frac{x}{q}\right),\quad \varphi\left(\frac{x}{q^2}\right),\ldots\quad \varphi\left(\frac{x}{q^{n-1}}\right),$$

et on arrivera ainsi à $(n-1)$ restes

$$R_1,\quad R_2,\ldots\quad R_{n-1},$$

lesquels devront être anéantis par la valeur inconnue de q et de $\frac{1}{q}$. En conséquence, on cherchera le plus grand commun diviseur de ces restes, et on en trouvera un du deuxième degré. On l'égalera à zéro et on en tirera la valeur de la raison. Substituant cette valeur dans l'équation formée en égalant à zéro le plus grand commun diviseur de nos n polynômes

$$\varphi(x),\quad \varphi\left(\frac{x}{q}\right),\quad \varphi\left(\frac{x}{q^2}\right),\ldots\quad \varphi\left(\frac{x}{q^{n-1}}\right),$$

on en déduira la valeur de la plus grande et de la plus petite des racines cherchées.

12. Il est évident que tout ce que nous avons dit, aux numéros 5, 6, 7, 8, 9, 10 et 11 s'appliquera très-bien aux équations dont les racines seraient en tout ou en partie en proportion ou en progression par différence ; nous nous dispenserons donc de parler de ces équations. Toutefois, nous indiquerons la méthode suivante pour résoudre une équation algébrique dont les racines seraient en progression par différence, parce qu'elle offrira une application intéressante de la *méthode des coefficients indéterminés*. Soient

$$x^m + P_1x^{m-1} + P_2x^{m-2} + \ldots + P_{m-1}x + P_m = 0,$$

l'équation proposée, a la première de ses racines et r la raison : on sait d'abord que

$$-P_1 = \frac{[2a+(m-1)r]m}{2}. \qquad (1)$$

D'un autre côté, il est évident que si du carré du coefficient du deuxième terme on retranche le double de celui du troisième, le reste $P_1^2-2P_2$ sera égal à la somme des carrés des racines. Cherchons donc comment cette somme est composée en a et en r, car nous obtiendrons de cette manière une seconde équation entre ces deux inconnues. J'observe d'abord que la formule (1) nous montre que la somme des premières puissances des racines de la proposée est une fonction de m de la forme

$$Am^2+Bm;$$

il est donc naturel de penser que la somme S_2 de leurs secondes puissances est de la forme Am^3+Bm^2+Cm, de sorte que

$$S_2=Am^3+Bm^2+Cm,$$

A, B, C, étant des coefficients indéterminés dont il s'agit de trouver les valeurs. Or, si l'on ajoute un terme de plus $a+mr$ à la progression, il faudra que la somme des carrés des termes de la nouvelle progression se déduise de la formule précédente en y changeant m en $(m+1)$; donc on aura

$$S_2+(a+mr)^2=A(m+1)^3+B(m+1)^2+C(m+1).$$

Retranchant de cette équation la précédente, il viendra, toutes réductions faites,

$$a^2+2arm+r^2m^2=A(3m^2+3m+1)+B(2m+1)+C,$$

équation qui doit être vraie, quelle que soit la valeur que l'on assigne à m; donc, les coefficients des mêmes puissances de m dans les deux membres doivent être égaux; donc

$$3A=r^2,\quad 3A+2B=2ar,\quad A+B+C=a^2;$$

d'où

$$A=\frac{r^2}{3},\quad B=\frac{2ar-r^2}{2},\quad C=\frac{6a^2-6ar+r^2}{6},$$

et par conséquent

$$S_2 = \frac{2r^2m^3 + (6ar - 3r^2)\,m^2 + (6a^2 - 6ar + r^2)\,m}{6}\,(^*)\,;\ldots \qquad (2)$$

ainsi, la seconde équation du problème sera

$$P_1^2 - 2P_2 = \frac{(2m^3 - 3m^2 + m)\,r^2 + (6am^2 - 6am)\,r + 6a^2m}{6},$$

ou bien

$$a^2 + (m-1)\,ar + \frac{2m^2 - 3m + 1}{6}\,r^2 = \frac{P_1^2 - 2P_2}{m}.$$

Retranchons de cette équation le carré de (1) mise sous la forme

$$a + \frac{m-1}{2}\,r = -\frac{P_1}{m},$$

il viendra

$$\frac{m^2-1}{2^2.3}\,r^2 = \frac{P_1^2(m-1) - 2P_2m}{m^2},$$

d'où

$$r = \pm\frac{2}{m}\sqrt{3.\,\frac{P_1^2(m-1) - 2mP_2}{m^2-1}},$$

et par conséquent

$$a = -\frac{P_1}{m} \mp \frac{m-1}{m}\sqrt{3.\,\frac{P_1^2(m-1) - 2mP_2}{m^2-1}}.$$

13. *La méthode des coefficients indéterminés,* que nous avons suivie pour arriver à la formule (2), est une des plus fécondes

---

(*) Si dans cette formule on suppose $m=2$, elle donne

$$S_2 = r^2 + 2ar + 2a^2 = a^2 + (a+r)^2;$$

donc elle est vraie pour $m=2$; mais il résulte de la méthode même qui nous y a conduit que si elle est vraie pour une certaine valeur de m, elle l'est pour la valeur suivante de cette quantité ; donc elle est générale.

Si on suppose a et r égaux à l'unité, on trouvera pour expression de la somme des carrés des m premiers nombres entiers la formule $\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{2.3}$.

de l'algèbre, et nous allons l'employer encore pour résoudre la question suivante, que nous avons vu faire dans les examens : *On sait que le volume d'un segment sphérique est une fonction du troisième degré de sa hauteur, déterminer cette fonction.* Soit h la hauteur du segment; puisqu'il doit être nul pour $h=0$, la fonction demandée est nécessairement de la forme

$$Ah^3+Bh^2+Ch,$$

A, B, C, étant trois coefficients indéterminés dont il s'agit de trouver les valeurs. Il faut donc nous procurer trois équations entre ces trois inconnues. Mais j'observe que suivant que l'on supposera h égal au rayon r, ou au diamètre $2r$ de la sphère à laquelle appartient le segment, la fonction précédente devra se réduire à $\frac{2}{3}\pi r^3$ ou à $\frac{4}{3}\pi r^3$; donc

$$Ar^3+Br^2+Cr=\tfrac{2}{3}\pi r^3,\quad \text{ou}\quad Ar^2+Br+C=\tfrac{2}{3}\pi r^2,$$
$$8Ar^3+4Br^2+2Cr=\tfrac{4}{3}\pi r^3,\quad \text{ou}\quad 4Ar^2+2Br+C=\tfrac{2}{3}\pi r^2.$$

Enfin, le volume du segment doit être maximum pour $h=2r$, ainsi cette valeur de h doit anéantir la dérivée de la fonction demandée ; donc

$$12Ar^2+4Br+C=0.$$

On tirera facilement de ces trois équations :

$$C=0,\qquad A=-\tfrac{1}{3}\pi,\qquad B=\pi r,$$

de sorte que la fonction demandée est

$$Ah^3+Bh^2+Ch=\tfrac{1}{3}\pi h^2(3r-h),$$

et c'est effectivement là l'expression du volume du segment sphérique,

P. L. Cirodde.

BINOME DE NEWTON.

Dans la démonstration de la formule du Binôme (page 43), on a implicitement supposé que les coefficients a, b, c, etc., sont indépendants de m, c'est-à-dire que les valeurs numériques de ces coefficients restent constantes, quelle que soit la valeur entière attribuée à m, et dépendent uniquement des rangs occupés par les termes que l'on considère dans le développement ordonné. Ainsi, par exemple, ayant reconnu que $a=1$, lorsque $m=1$, on a admis que a reste égal à 1, lorsque m devient successivement 2, 3, etc. C'est ce qu'il faut encore démontrer.

En considérant les coefficients a, b, c, etc., comme des fonctions de m, que nous représentons par $f(m)$, $\varphi(m)$, etc., l'égalité

$$(x+\alpha)^m=x^m+ma.\alpha x^{m-1}+m(m-1)b.\alpha^2x^{m-2}+\text{ etc.},$$

obtenue (page 43) peut s'écrire sous la forme :

$$(x+\alpha)^m=x^m+mf(m).\alpha x^{m-1}+m(m-1)\varphi(m).\alpha^2x^{m-2}+\text{ etc.}$$

Remplaçons, dans cette dernière égalité, m par $m+1$, nous aurons :

$$(x+\alpha)^{m+1}=x^{m+1}+(m+1)f(m+1).\alpha x^m+(m+1)m.\varphi(m+1).\alpha^2x^{m-1}+\text{etc.}$$

D'ailleurs, en multipliant par $(x+\alpha)$ les deux membres de l'égalité, $(x+\alpha)^m=x^m+$ etc., on trouve :

$$(x+\alpha)^{m+1}=x^{m+1}+\left.\begin{matrix}mf(m)\\+1\end{matrix}\right|\alpha x^m+\left.\begin{matrix}m.(m-1)\varphi(m)\\+mf(m)\end{matrix}\right|\alpha^2x^{m-1}+\text{etc.}$$

Les coefficients des mêmes puissances de x dans les développements de $(x+\alpha)^{m+1}$, doivent être égaux entre eux, on a donc :

$$(m+1)f(m+1)=mf(m)+1,$$
$$(m+1)\varphi(m+1)=(m-1)\varphi(m)+f(m),\ldots.$$

L'égalité $(m+1)f(m+1)=mf(m)+1$, montre que si $f(m)=1$, on a de même $f(m+1)=1$. Or, $f(m)=1$, lorsque $m=1$ (page 43); donc $f(2)=1$, $f(3)=1$, etc., c'est-à-dire que le coefficient a reste constamment égal à 1, quelle que soit la valeur entière positive attribuée à m.

Puisqu'on a généralement $f(m)=1$, l'égalité $(m+1)\varphi(m+1)=(m-1)\varphi(m)+f(m)$ se réduit à $(m+1)\varphi(m+1)=(m-1)\varphi(m)+1$. Et, sous cette forme, elle montre que si $\varphi(m)=\frac{1}{2}$, on a de même $\varphi(m+1)=\frac{1}{2}$. Or, $\varphi(m)=\frac{1}{2}$, lorsque $m=2$ (page 43); donc, $\varphi(3)=\frac{1}{2}$, $\varphi(4),=\frac{1}{2}$, etc. Ainsi, la valeur de b est indépendante de la valeur entière attribuée à m.

On démontre de même que les coefficients c, d, etc., ont des valeurs indépendantes du degré m de la puissance du binôme.

Rectification.

Page 56. C'est M. le professeur *Finck* qui, le premier, a introduit dans les éléments la division ordonnée de *Fourrier*. (Voir le *Traité élémentaire d'Arithmétique*, page 88, *Strasbourg*, 1841.)

ANALYSE D'OUVRAGES.

—

SOLUTION OF THE QUADRATURE OF THE CIRCLE, 1841 (mars). — *Solution de la quadrature du cercle.* Édimbourg, in-8° de 11 p. L'auteur de cet opuscule anonyme est M. Maccook, d'Édimbourg. (Compte rendu de l'Académie des sciences, 10 janvier 1841, p. 75.)

Nous ne nous occuperons de cette solution que pour bien établir l'état de la question sur laquelle il règne des idées qui ont besoin de quelques éclaircissements. Distinguons d'abord ce qui est parfaitement démontré et définitivement acquis à la science.

1° La longueur d'une circonférence quelconque divisée par son diamètre donne toujours le même quotient.

2° La surface d'un cercle quelconque, divisée par le carré du rayon, donne encore un quotient constant, égal au précédent. La première proposition est due à Archimède, et la seconde est énoncée dans Euclide (liv. XII, prop. 2); mais l'identité des deux quotients n'a été établie que par le géomètre de Syracuse, qui a découvert, encore le premier, que ce quotient est compris entre $3\frac{10}{71}$ et $3\frac{10}{70}$. (Archimède, *Mesure de la circonférence et du cercle*, prop. 2.) Les modernes désignent ce quotient par la lettre grecque π; on sait que Vega, geomètre autrichien, a calculé la valeur de π avec 140 figures décimales, dont 126 sont garanties (*), ce sont celles de *Lagny*.

3° Lambert a démontré, dans le dernier siècle, que dans aucun système de numération, il n'est possible d'écrire π avec un nombre fini de chiffres; en d'autres termes, que π est un nombre irrationnel. (Voir Legendre, *Géométrie*, note IV.)

4° Le même analyste a démontré qu'en élevant π au carré, on forme encore un nombre irrationnel.

Ainsi, tous ceux qui cherchent à exprimer π ou π^2 par un nombre fini de chiffres, montrent qu'ils ne sont pas au courant des connaissances acquises.

Il n'est pas démontré que π, élevé à une puissance supérieure à la seconde, ne puisse être un nombre rationnel. En général, on n'a aucune preuve que π ne puisse être la racine d'une équation algébrique, fût-elle même du second degré,

---

(*) Vega (Georgii). *Tabulæ logarithmico-trigonometricæ*. Lipsiæ, 1797 Tome I, appendix, p. 408.

mais à trois termes. De sorte qu'il n'est pas démontré qu'on ne puisse trouver, par la règle et le compas, une droite ayant même longueur que la circonférence, ou un carré ayant même aire que le cercle. On sait seulement que cette droite, si elle existe, est incommensurable, à l'égard du rayon; il en est de même du côté du carré; toutefois, il est de toute certitude qu'une droite, croissant depuis zéro jusqu'à l'infini, il y a un instant où elle parvient à une longueur égale à une circonférence donnée; mais cette longueur est-elle racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions algébriques du rayon ? Ce n'est pas probable. Voici quelques conjectures à ce sujet. Il est démontré, le rayon étant pris pour unité, que lorsque un arc divisé par la circonférence donne un quotient rationnel qui n'est ni $\frac{1}{6}$, ni $\frac{3}{6}$, la corde de cet arc est incommensurable (*); autrement, les périmètres de tous les polygones réguliers inscrits, l'hexagone excepté, sont incommensurables et sont racines d'une équation d'un degré d'autant plus élevé que le polygone a plus de côtés; de sorte qu'à la limite, pour la circonférence, il paraîtrait que ce degré devrait être infini, ce qui est précisément le caractère des équations transcendantes.

Les personnes qui sont à la poursuite d'équations algébriques, sans précisément se livrer à des opérations absurdes, risquent de perdre leur temps, qu'elles emploieraient mieux en cherchant à démontrer rigoureusement l'impossibilité de ces sortes d'équations; ce qui est encore un desideratum.

M. Maccook appartient à cette seconde classe de *cadrateurs*, et procède ainsi : il inscrit un carré dans une circonférence, mène les deux diagonales et les deux diamètres perpendiculaires aux côtés; il fait tourner autour de chaque côté du carré, l'arc de 90° qu'il sous-tend; le cercle se trouve ainsi partagé en

(*) Journal de Liouville.

seize demi segments égaux et en huit triangles mixtilignes égaux; et chaque cadran renferme quatre demi-segments et deux secteurs; combinant ensemble ces demi-segments et ces triangles, en les juxtaposant, en les superposant, retranchant, ajoutant, il croit être parvenu à un trapèze équivalent à la huitième partie du cercle. Adoptant son résultat, on trouve qu'on devrait avoir $\pi = 2(1+\sqrt{8\sqrt{2}-11})$; faisant le calcul, la valeur de π est fausse dès la seconde décimale.

On est dispensé de discuter la validité des raisonnements de l'auteur.

TM.

THÉORÈMES A DÉMONTRER. — PROBLÈMES.

1. Si les distances des trois sommets d'un triangle, ABC, au centre du cercle inscrit, sont proportionnelles aux distances des trois sommets d'un autre triangle, *abc*, au centre du cercle inscrit dans ce triangle; les deux triangles ABC, *abc*, seront semblables.

2. Quel est le *minimum* du rapport du rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre, au rayon de la sphère inscrite?

3. On donne un triangle ABC et un point O dans l'intérieur de ce triangle. Le point O étant considéré comme une bille infiniment petite, et le périmètre du triangle, comme une ligne matérielle parfaitement élastique; on propose de déterminer sur le côté AC du triangle, un point F tel que la bille dirigée de O vers F, revienne à ce même point F, après s'être réfléchie successivement sur les deux autres côtés AB, BC, du triangle.

4. Quel est le plus grand angle que l'on puisse inscrire dans un segment donné d'une courbe du second degré?

5. Quel est le plus court chemin d'un point à un autre, en passant par deux droites situées dans l'espace?

6. On donne cinq points d'une courbe du second degré, et une droite située sur le plan des cinq points donnés: déterminer les points de rencontre de la courbe et de la droite.

7. Construire les axes d'une hyperbole équilatère dont on donne quatre points.

8. Décrire une hyperbole équilatère tangente à quatre droites données.

ANNONCES.

Passot (F.). *A M. le président de l'Académie royale des sciences.* In-4° de 8 pages.

Dans cette lettre, consacrée à une polémique avec M. Combes, au sujet d'expériences d'hydraulique, l'auteur argue de faux l'expression ordinairement employée pour mesurer la force centrifuge dans le cercle. Il nie que dans le mouvement curviligne, on puisse, pour mesurer la force accélératrice, la regarder comme constante pendant deux instants consécutifs égaux. Les raisonnements de l'auteur tendent, au contraire, à justifier cette hypothèse et cette expression.

Passot (F.) *Réponse à une objection sur l'exactitude de la démonstration de ce théorème*: Dans l'analyse des trajectoires célestes, le temps ne peut être pris pour la variable indépendante. 1 page in-4°.

L'auteur nie encore qu'on puisse comparer $\frac{d^2\theta}{d\theta}$ à $d\theta$:

non pas, de ce qu'ils seraient d'un ordre infinitésimal différent, mais parce que l'un représente un nombre entier et l'autre une fraction. Cette réponse n'exige pas de réplique. (*Voir N° I*, *Annales*, *p.* 60.

BRESSON (C.). *Traité élémentaire de mécanique appliquée aux sciences physiques et aux arts.* — *Mécanique des solides.* In-4° avec un atlas de 18 pl. Bachelier. Prix : 25 fr.

CAUCHY (A.). *Exercices d'analyse et de physique mathématique.* Tome deuxième, 1841.

17^e livraison (p. 145 à 176). Contient : 1° Note sur les diverses suites que l'on peut former avec des termes donnés (145 à 150); 2° Mémoire sur les fonctions alternées et sur les sommes alternées (151 à 159); 3° Mémoire sur les sommes alternées connues sous le nom de résultantes (160 à 176). On rendra compte de cette livraison en même temps que d'un mémoire de M. Jacobi sur le même sujet.

LAMÉ (Fleury) *La Géométrie enseignée aux Enfants.* 3^e édit., in-18 de 3 feuilles et demie. 1842.

LEROY (C.-F.-A). *Traité de la Géométrie descriptive*, suivi de la méthode des plans cotés et de la théorie des engrenages cylindriques et coniques, avec une collection d'épures, composée de 69 pl. in-4°. Prix : 20 fr. Bachelier et Carilian-Gœury.

Eléments de Géométrie, par Eugène LIONNET, agrégé de l'Université, professeur de mathématiques au collége royal de Louis-le-Grand.

Les trois premières livraisons, comprenant la géométrie plane, sont en vente chez *Dezobry*, libraire, rue des Maçons-Sorbonne, n° 1, Paris.

NOTICE SUR L'ÉLIMINATION;

Formules de CRAMER.

1. L'année 1704 est remarquable par la mort du géomètre hollandais *Huddes*, auteur du théorème sur la dérivée, dont on se sert encore aujourd'hui pour découvrir les racines égales, et par la naissance de *Cramer* (*Gabriel*), Genevois, qui a publié, en 1750, deux ans avant sa mort, l'ouvrage le plus complet que nous possédions sur l'analyse des lignes courbes algébriques, et d'où sont tirés tous les exemples qu'on trouve dans les ouvrages élémentaires (*). L'ouvrage est terminé par trois appendices : le premier seul doit nous occuper ici; car il est le point de départ de tout ce qu'on a fait sur l'élimination. Cramer est le premier qui ait indiqué les moyens de résoudre généralement un système d'équations du premier degré, à l'aide de formules qui portent le nom de l'inventeur. Il est parvenu à cette importante découverte, uniquement au moyen d'une notation fort ingénieuse, et la première de ce genre. Les inconnues sont représentées par des lettres italiques, et leurs coefficients par les mêmes lettres capitales. L'inconnue x par exemple, a $\overset{1}{X}$ pour coefficient dans la première équation; $\overset{2}{X}$ dans la seconde équation, etc., et ainsi des autres inconnues. Ainsi, la lettre indique l'inconnue

(*) La même année 1704, on publia l'Optique de Newton, suivie du premier Essai sur la classification des courbes, sous le titre de : *Enumeratio linearum tertii ordinis;* ce chef-d'œuvre est commenté et amplifié dans le tome II de : *Introductio in analysin infinitorum*, 1748; ces deux ouvrages et celui de Cramer ont fondé la géométrie de Descartes.

à laquelle elle appartient, et le chiffre qui la surmonte fait connaître le quantième de l'équation. *Cramer* donne à ce chiffre, qui n'est qu'un indice, le nom impropre d'*exposant*. Il représente les quantités toutes connues par $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, etc.

2. Prenons trois équations à trois inconnues, nous n'aurons que les sept lettres x, y, z, X, Y, Z, A, surmontées des indices 1, 2, 3. Résolvant ces équations, l'intuition suffit pour découvrir : 1° que les inconnues ont chacune le même dénominateur; 2° que ce dénominateur ne contient pas la lettre A ; 3° que chaque terme de ce dénominateur, abstraction faite du signe, est le produit XYZ, les facteurs étant surmontés d'indices qu'on obtient en faisant tous les arrangements possibles entre les nombres 1, 2, 3; qu'il y a par conséquent autant de termes que de ces arrangements; 4° que les numérateurs se déduisent du dénominateur, en changeant successivement les X, Y, Z, en A, pour les valeurs de x, y, z. La seule difficulté est de déterminer les signes des termes. C'est là le point capital de la question. Voici la règle qu'on doit à Cramer. Lorsque dans un arrangement, allant de gauche à droite, un exposant est suivi médiatement ou immédiatement d'un exposant plus petit que lui, cette succession constitue un *dérangement*. Si le nombre des dérangements est pair, le terme aura le signe $+$, et s'il est impair, le signe $-$. Exemple : l'arrangement 123 n'a aucun dérangement; ainsi, $\overset{1}{X}\overset{2}{Y}\overset{3}{Z}$ a le signe plus; car zéro est un nombre pair; 321 a trois dérangements; savoir : deux pour le nombre 3 et un pour le nombre 2, ainsi le terme $\overset{3}{X}\overset{2}{Y}\overset{1}{Z}$ a le signe moins; 231 n'a qu'un dérangement; ainsi $\overset{2}{X}\overset{3}{Y}\overset{1}{Z}$ a le signe moins.

3. Cramer ne prend des exemples que pour deux et trois inconnues, et pas au delà ; mais il affirme, sans aucune démonstration, que sa règle est générale, et s'étend à un nombre quelconque d'inconnues. Ainsi, son assertion, quoique vraie, n'est fondée que sur une simple induction. Il n'indique pas même de procédé pour former les arrangements, de telle sorte qu'on soit bien sûr de ne pas répéter le même arrangement plusieurs fois ; ce qui peut arriver quand le nombre des arrangements est considérable. Comme ce procédé ne se trouve décrit, que je sache, que dans un seul ouvrage élémentaire français peu répandu, il ne me paraît pas inutile d'en dire ici quelques mots (*).

4. Pour fixer les idées, supposons qu'on veuille faire tous les arrangements possibles avec les cinq nombres 1, 2, 3, 4, 5; ayant un terme, on veut savoir quel est le terme suivant. Qu'on ait, par exemple, le terme 51423, à commencer par le premier chiffre à droite, on se dirige de droite à gauche jusqu'à ce qu'on rencontre un *dérangement ;* cela a lieu au nombre 2; on laisse les chiffres à gauche de 2, sans rien y changer ; on remplace 2 par le nombre immédiatement plus élevé disponible, et on écrit à droite les chiffres restants dans l'ordre ascendant. Ainsi, le terme suivant est 51432. Opérant de même sur ce terme, il faut aller jusqu'à 1 pour rencontrer un dérangement. On ne touche pas au 5; on remplace 1 par le chiffre immédiatement plus élevé disponible ou par 2, et on écrit en ordre les trois chiffres restants; on obtient ainsi 52134. On trouve de même pour le terme qui suit celui-ci, 52143; ensuite 52314, 52341, etc., et on parvient finalement à 54321, qui ne présente aucun dérangement de droite à gauche et c'est le dernier terme, comme 12345 est le premier.

5. *Bezout* (*Étienne*) (**), examinateur pour l'artillerie et la marine, auteur de deux cours où brillent une logique opportune et des qualités de style qui n'ont jamais été égalées, Bezout a consacré toute sa vie à la théorie des équa-

(*) Manuel d'algèbre, p. 80, 2e édition, 1836.
(**) Né à Nemours le 31 mars 1730; mort le 27 septembre 1783.

tions, et principalement à l'Élimination dont il doit être regardé comme le principal promoteur.

Le mémoire par lequel il a débuté est de 1764 (*). Là, il donne aux équations de Cramer une forme qu'elles ont conservée depuis dans tous les traités élémentaires. Les lettres successives de l'alphabet, a, b, c, etc., diversement accentuées, représentent les coefficients des inconnues; elles n'ont point d'accent dans la première équation; un seul, dans la seconde; deux dans la troisième, et ainsi de suite. Ce changement de notation n'est pas heureux; mais à la formation immédiate du dénominateur général, il substitue la méthode récurrente. Il part du dénominateur relatif à une inconnue pour former celui qui appartient à deux; de celui-ci, il déduit celui à trois, et ainsi de suite. Cette loi de formation a permis, comme nous verrons, de démontrer la règle des signes que Cramer avait donnée par induction. Comme ce procédé est décrit dans tous les ouvrages à l'usage des classes, nous ne nous y arrêterons pas; mais nous croyons très-utile d'indiquer un autre procédé que Bezout indique dans sa théorie générale des Equations algébriques, ouvrage important peu consulté, et qui renferme beaucoup de théorèmes qu'on donne souvent comme nouveaux, quoiqu'ils datent de 1779. Nous rapportons les propres paroles de l'auteur (p. 172).

6. « Règle générale pour calculer, toutes à la fois ou séparément, les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré soit littérales, soit numériques —. Soient u, x, y, z, etc., des inconnues, dont le nombre soit n, ainsi que celui des équations.

» Supposez tacitement que le terme tout connu de chaque équation soit affecté aussi d'une inconnue que je représente par t.

(*) Mém. de l'Acad. des Sciences, 1764, 2e partie, p. 267.

» Formez le produit $uxyzt$ de toutes ces inconnues écrites dans tel ordre que vous voudrez d'abord ; mais cet ordre une fois admis, conservez-le jusqu'à la fin de l'opération.

» Échangez successivement chaque inconnue contre son coefficient dans la première équation, en observant de changer le signe à chaque échange pair (ici pour x, z, etc.). Ce résultat sera, ce que j'appelle, une *première ligne*. Échangez, dans cette *première ligne*, chaque inconnue contre son coefficient dans la seconde équation, en observant comme ci-devant, de changer le signe à chaque échange pair, et vous aurez une *seconde ligne*. Échangez, dans cette seconde ligne, chaque inconnue contre son coefficient dans la troisième équation, en observant de changer le signe à chaque échange pair, et vous aurez une *troisième ligne*.

» Continuez de la même manière jusqu'à la dernière équation inclusivement, et la dernière ligne que vous obtiendrez vous donnera les valeurs inconnues de la manière suivante :

» Chaque inconnue aura pour valeur une fraction dont le numérateur sera le coefficient de cette même inconnue dans la dernière ou $n^{\text{ième}}$ ligne, et qui aura constamment pour dénominateur le coefficient que l'inconnue introduite t se trouvera avoir dans cette même $n^{\text{ième}}$ ligne.

» Exemples : soient les trois équations :

$$A = ax + by + cz + d = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0 ;$$

dans A' les coefficients ont un accent, et dans A'', deux accents.

» Je remplace d, d', d'' par dt, $d't$, $d''t$, et je forme le produit $xyzt$, et les lettres x, y, z, t, devront toujours se succéder dans cet ordre. Je change successivement x en a, y en $-b$, z en c et t en $-d$, j'ai pour première ligne :

$$ayzt - bxzt + cxyt - dxyz,$$

dans $ayzt$, je change y en b', z en $-c'$, t en d',
dans $-bxzt$, je change x en a', z en $-c'$, t en d', etc.

j'obtiens 2e ligne

$$zt\,(ab'-a'b)-yt(ac'-a'c)+yz\,(ad'-a'd)+xt\,(bc'-b'c)$$
$$-xz(bd'-b'd)+xy\,(cd'-c'd)\,,$$

3e ligne
$$[(a'b-a'b)c''-(ac'-a'c)b''+(bc'-b'c)a'']t$$
$$-[(ab'-a'b)d''-(ad'-a'd)b''+(bd'-b'd)\,a'']\,z$$
$$+[(ac'-a'c)\,d''-(ad'-a'd)c''+(cd'-c'd)\,a'']\,y$$
$$-[(bc'-b'c)\,d''-(bd'-b'd)c''+(cd'-c'd)\,b'']\,x,$$

ou

$$Tt+Zz+Yy+Xx,$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{X}{T},\quad y=\frac{Y}{T},\quad z=\frac{Z}{T}.$$

7. On a trouvé les trois inconnues à la fois. Si on ne veut qu'une seule des inconnues, x par exemple, on omet dans le calcul des lignes les termes dans lesquels on voit que ni x, ni t ne doivent se trouver.

Ce procédé est surtout utile et abrége le calcul, lorsqu'on l'applique aux équations où toutes les inconnues n'entrent point, ou bien aux équations numériques.

Exemple :

$$\left.\begin{aligned}2u+3x-\ \ 8&=0\\ 3u+2y-\ \ 9&=0\\ 4x+3z-20&=0\\ 2y+\ z-10&=0\end{aligned}\right\}\ \text{à 4 inconnues},$$

produit $\qquad uxyzt,$

1re ligne $\qquad 2xyzt-3uyzt-8uxyz,$

2e ligne

$$-4xzt+18xyz-9yzt+6uzt-27uyz-24xyz-16uxz,$$

ou, 2e ligne réduite

$$-4xzt-6xyz-9yzt+6uzt-27uyz-16uxz,$$

3e ligne réduite

$$-16zt+12xt+80xz+156yz-18xy+27yt-18ut-56uz$$
$$-81uy-48ux,$$

4e ligne $\qquad 38t+152z+114y+76x+38u,$

d'où

$$x=\frac{76}{38}=2,\quad y=\frac{114}{38}=3,\quad z=\frac{152}{38}=4,\quad u=\frac{38}{38}=1.$$

8. Lorsqu'une des lignes devient nulle, c'est une preuve que l'équation que l'on emploie actuellement est comprise dans quelques-unes déjà employées, et le nombre réel des équations est moindre que celui des inconnues. Si l'inconnue introduite disparaît dans une des lignes, c'est un indice que l'équation actuellement employée est incompatible avec les précédentes; autrement qu'une ou plusieurs valeurs des inconnues sont infinies. (*La suite au prochain Numéro.*)

THÉORIE DES FOYERS,

PAR M. ROGUET,
Professeur de mathématiques.

Nous croyons utile de donner quelques détails sur la théorie déjà *connue* des foyers.

On nomme *foyer* (*) d'une courbe un point pris sur le plan de cette courbe, et tel que sa distance à un point quelconque de la courbe est une fonction rationnelle, $my+nx+p$, du premier degré des coordonnées x, y de ce point de la courbe.

Si l'on désigne par α et β les coordonnées du foyer, l'expression de la distance, d, de ce point à un point quelconque de la courbe, dont les coordonnées sont x, y, sera (en supposant les axes rectangulaires) :

$$d=\sqrt{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}=my+nx+p,$$

d'où

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2-(my+nx+p)^2=0. \qquad (a)$$

Quelles que soient les valeurs déterminées pour α, β, m,

(*) Cette exacte définition est due à M. Bret, professeur à la faculté de Grenoble (*voy.* Annales de Gergonne, tome 8, p. 317. Année 1817—18). Tm.

n, p, cette dernière relation a lieu entre x et y pour un point quelconque de la courbe ; lorsqu'on remplace les inconnues α, β, m, n, p, par les valeurs numériques déterminées ; par conséquent, le premier membre de l'équation (a) est égal au premier membre de l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0, \qquad (b)$$

de la courbe, multiplié par un facteur numérique. Désignant par λ ce facteur numérique, le premier membre de l'équation (a) et le produit $\lambda Ay^2 + \lambda Bxy + \lambda Cx^2 + \lambda Dy + \lambda Ex + \lambda F$, doivent être identiques ; on aura donc les équations :

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda A = 1 - m^2 & & (1) \\ \lambda C = 1 - n^2 & & (2) \\ \lambda B = & -2mn & (3) \\ \lambda D = & -2(\beta + mp) & (4) \\ \lambda E = & -2(\alpha + np) & (5) \\ \lambda F = \alpha^2 + \beta^2 - p^2. & & (6) \end{array}\right\} \qquad (c)$$

En attribuant à chacune des quantités m, n, p, une valeur déterminée, l'équation $my + nx + p = 0$ représente une droite. La distance, δ, d'un point de la courbe à cette droite, et la distance, d, du même point de la courbe au foyer, sont dans un rapport constant. En effet, la distance δ d'un point x', y', de la courbe à cette droite, est exprimée par $\dfrac{my' + nx' + p}{\sqrt{m^2 + n^2}}$, la distance d du même point de la courbe au foyer, est $my' + nx' + p$. On a donc $\dfrac{d}{\delta} = \sqrt{m^2 + n^2}$. On donne à la droite $my + nx + p = 0$ le nom de *directrice*.

Si l'on élève au carré les deux membres de (3), et qu'on en retranche le quadruple du produit des deux membres de (1) et (2), on aura :

$$\lambda^2 (B^2 - 4AC) = 4(m^2 + n^2 - 1);$$

ainsi, suivant que $B^2 - 4AC$ sera > 0, < 0, $= 0$; $m^2 + n^2$ sera > 1, < 1, $= 1$.

Pour déterminer les quantités α, β, m, n, p, l'équation (b) étant donnée, on distinguera le cas où cette équation représente une ellipse ou une hyperbole, de celui où elle représente une parabole.

Si l'équation (b) représente une ellipse ou une hyperbole, on pourra supposer la courbe rapportée à son centre ; car, ayant déterminé, dans cette dernière hypothèse, les valeurs de α et de β, il suffira d'augmenter ou de diminuer respectivement ces valeurs des coordonnées du centre, pour obtenir ces mêmes valeurs dans la première hypothèse.

Les équations (c) deviennent, en supposant l'origine placée au centre de la courbe :

$$\left.\begin{array}{rll} \lambda A & = 1 - m^2 & (1) \\ \lambda C & = 1 - n^2 & (2) \\ \lambda B & = \quad -2mn & (3) \\ 0 & = \beta + mp & (4) \\ 0 & = \alpha + np & (5) \\ \lambda F' & = \alpha^2 + \beta^2 - p^2 & (6) \end{array}\right\} \quad (d)$$

Les équations (4) et (5) donnent la relation

$$\beta^2 + \alpha^2 = (m^2 + n^2)p^2$$

Substituant pour $\alpha^2+\beta^2$ cette valeur dans (6), il vient :

$$\lambda F' = (m^2 + n^2 - 1)p^2 \quad \text{d'où} \quad \frac{\lambda(B^2 - 4AC)p}{4} = F',$$

p^2 est essentiellement positif; le signe de λ sera donc déterminé par le signe de F'; et le signe de λ étant ainsi déterminé, l'équation (3) fera savoir si m et n doivent être de même signe ou de signes contraires. Les équations (4) et (5) étant mises sous la forme $\beta = -mp$, $\alpha = -np$, on en déduit $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{m}{n}$. D'autre part, si l'on retranche (1) de (2), ce qui donne

$$\lambda(C - A) = m^2 - n^2,$$

et qu'on divise membre à membre cette dernière équation par (3), on aura

$$\frac{m}{n}-\frac{n}{m}=\frac{2(A-C)}{B}.$$

Désignant $\frac{m}{n}$ par ν, cette équation prend la forme

$$\nu^2-\frac{2(A-C)}{B}\nu-1=0, \qquad (e)$$

dont les racines sont de signes contraires. Or, le signe de $\frac{m}{n}$ est déterminé par la relation (3); par conséquent $\frac{m}{n}$ ou ν n'a qu'une seule valeur, ce qui prouve que les directrices sont parallèles.

λ ne peut avoir non plus qu'une seule valeur; en effet, de $\lambda C=1-n^2$, on déduit $n^2=1-\lambda C$; divisant membre à membre l'équation (3) par cette dernière relation, on obtient

$$\frac{\lambda B}{\lambda C-1}=\frac{2m}{n}=2\nu \quad \text{d'où} \quad \lambda=\frac{2\nu}{2C\nu-B}.$$

Connaissant la valeur de λ; on obtiendra la valeur de p^2 par l'équation $\frac{\lambda(B^2-4AC)p^2}{4}=F'$. On déterminera aussi m^2 et n^2 par les équations (1) et (2); et enfin les équations $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{m}{n}$ et $\lambda F'=\alpha^2+\beta^2-p^2$ serviront à trouver les valeurs de α et β. Or, la première de ces équations est celle d'une droite, passant par le centre et perpendiculaire aux directrices; la seconde est celle d'un cercle, concentrique à la courbe. On voit donc qu'il y a, dans l'ellipse et l'hyperbole, deux foyers qui se trouvent à l'intersection d'une droite et d'un cercle. L'équation des directrices $my+nx+p=0$ ou $y=-\frac{n}{m}x-\frac{p}{m}$ montre qu'il y a deux directrices, parallèles et également éloignées du centre; car $\frac{m}{n}$ et par suite $-\frac{n}{m}$ n'a qu'une seule valeur; et p a deux valeurs égales et de signes contraires.

Remarque. On peut déterminer le système d'axes auquel la courbe doit être rapportée pour que la distance d'un point de la courbe au foyer soit une fonction rationnelle de l'abscisse seulement ou de l'ordonnée seulement. En effet, il faudra que l'expression de cette distance se réduise : soit à $nx+p$, soit à $my+p$, c'est-à-dire que m ou n soit nulle ; ce qui montre qu'il faudra, dans le premier cas, changer le système d'axes en un autre, dont l'axe des abscisses soit perpendiculaire aux directrices ; et dans le second, changer le système d'axes en un autre dont l'axe des ordonnées soit perpendiculaire aux directrices. Ainsi, pour faire disparaître une variable de l'expression $my+nx+p$, il faut supposer l'axe correspondant perpendiculaire aux directrices.

Parabole. Reprenons le système (c) (page 132). On commencera par déterminer λ, en ajoutant les équations (1) et (2) ; ce qui donne $\lambda = \frac{1}{A+C}$. Connaissant λ, on déterminera le signe de mn et ce produit lui-même, par l'équation (3). Le signe de $\frac{m}{n}$ sera le même que celui de mn, et par suite l'équation (e) donnera la valeur unique de $\frac{m}{n}$.

Pour déterminer α et β, on observera que les équations (4) et (5) peuvent se mettre sous la forme

$$mp = -\beta - \frac{\lambda D}{2}, \qquad (f)$$

$$np = -\alpha - \frac{\lambda E}{2}. \qquad (g)$$

Divisant membre à membre, on a :

$$\frac{m}{n} = \frac{\beta + \frac{\lambda D}{2}}{\alpha + \frac{\lambda E}{2}} \quad \text{d'où} \quad \beta + \frac{\lambda D}{2} = \frac{m}{n}\left(\alpha + \frac{\lambda E}{2}\right). \qquad (i)$$

Élevant au carré les deux membres des équations (f) et (g), et ajoutant, il vient :

$$(m^2+n^2)p^2 = p^2 = \alpha^2+\beta^2+\lambda D\beta+\lambda E\alpha+\frac{\lambda^2(D^2+E^2)}{4},$$

et substituant dans (6), on obtient :

$$\lambda F = -\lambda D\beta-\lambda E\alpha-\frac{\lambda^2(D^2+E^2)}{2},$$

ou enfin

$$D\beta+E\alpha+\frac{\lambda(D^2+E^2)}{2}+F=0; \qquad (k)$$

Les équations (1) et (2) sont celles de deux droites; ce qui montre que dans la parabole, il n'existe qu'un seul foyer, placé à l'intersection des droites (i) et (k), dont l'une (i) est perpendiculaire à la directrice.

On déterminera m^2 et n^2 par les relations (1) et (2), et p^2 par l'équation (6), après avoir déterminé α et β. L'équation (f) montre que pm n'a qu'une seule valeur ; or, m^2 n'a pareillement qu'une seule valeur ; par conséquent $\frac{p}{m}$ n'a qu'une seule valeur. On en conclut, puisque $\frac{n}{m}$ n'a aussi qu'une seule valeur, que la parabole n'a qu'une seule directrice.

Remarques. Pour exprimer que deux courbes du second degré sont égales, il suffira, en prenant les équations de ces courbes exprimées en fonction des coordonnées du foyer,

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2-(my+nx+p)^2=0,$$
$$(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2-(m'y+n'x+p')^2=0,$$

de supposer

$$\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{m'^2+n'^2} \quad \text{et} \quad \frac{m\beta+n\alpha+p}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{m'\beta'+n'\alpha'+p}{\sqrt{m'^2+n'^2}}.$$

Il résulte, en effet, de ces deux hypothèses que, dans chacune de ces courbes, les rapports des distances au foyer et à la directrice sont égaux, et de plus, dans les deux courbes, la distance du sommet à la directrice correspondante sera la même; par suite, les deux courbes pourront être appliquées l'une sur l'autre et coïncider.

On voit du reste, pour l'ellipse ou l'hyperbole, qu'en nommant $2a$, $2b$, les axes de l'une des courbes; $2a'$, $2b'$, les axes de l'autre; $2c$ l'excentricité de la première, et $2c'$ l'excentricité de la seconde, on a, alors :

$$\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}; \quad \text{et} \quad \frac{b^2}{c}=\frac{b'^2}{c'},$$

et par suite

$$\frac{c^2}{a^2}=\frac{c'^2}{a'^2}, \text{ d'où } \frac{c^2-a^2}{c^2}=\frac{c'^2-a'^2}{c'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{b^2}{c^2}=\frac{b'^2}{c'^2};$$

enfin, divisant $\frac{b^2}{c}=\frac{b'^2}{c'}$ membre à membre par $\frac{b^2}{c^2}=\frac{b'^2}{c'^2}$, on en déduit $c=c'$; et ensuite $a=a'$.

Pour la parabole, on voit immédiatement que les deux courbes ont même paramètre.

La distance des deux directrices, dans l'ellipse et l'hyperbole, est $\frac{2p}{\sqrt{m^2+n^2}}$; de sorte qu'en nommant a le demi-axe focal, et c la demi-excentricité, on a :

$$\frac{2a^2}{c}=\frac{2p}{\sqrt{m^2+n^2}}, \quad \text{or} \quad \sqrt{m^2+n^2}=\frac{c}{a}:$$

par conséquent, $p=a$. Ainsi, p représente la longueur du demi-axe sur lequel se trouvent les foyers.

On démontrera facilement les propriétés des rayons vecteurs dans chacune des trois courbes; celles de la tangente, ainsi que la construction pour mener une tangente à ces courbes par un point donné.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 (page 57).

PAR M. ROUGEVIN,
Élève de la classe de Mathématiques élémentaires du collége Louis-le-Grand.
(Institution Loriol).

—

Soient AD, BE, CF (*fig.* 34), les bissectrices des angles du triangle ABC: si AD=CF, on aura BC=BA.

Les deux triangles FBC, ABD, ont des bases FC, AD, égales entre elles, par hypothèse; l'angle FBC opposé à la base FC, dans le premier triangle, est le même que l'angle ABD opposé à la base AD du second triangle; la bissectrice BO de l'angle FBC, est aussi la bissectrice de l'angle ABD. On en peut conclure que les triangles FBC, ABD, sont égaux entre eux.

En effet, supposons qu'on ait placé la base CF, sur DA, de manière que le point C coïncide avec D, et le point F avec A; puis, décrivons sur la base commune DA, un segment AHD (*fig.* 35) capable de l'angle ABD (*fig.* 34), les deux triangles ABD, FBC, (*fig.* 34), seront inscrits dans le segment AHD. Le sommet B, du premier, tombera en un point B′ de l'arc AHD, et le sommet B du triangle FBC tombera en un autre point B″ de l'arc AHD; car la corde AB″ est moindre que AB′, puisqu'on a BF<BA. Les bissectrices B′O′, B″O″, des angles B′, B″ passeront par le milieu M de l'arc AMD, et de plus elles couperont la droite AD en des points O′, O″, tels qu'on aura B′O′=B″O″, puisque chacune des droites B′O′, B″O″, est égale à BO (*fig.* 34). Il est maintenant facile de reconnaître que les deux droites MB′, MB″, doivent faire des angles égaux avec le diamètre MIH, perpendiculaire sur le milieu I de la corde AD. Car si

l'angle B'MH était, par exemple, plus grand que B''MH, les deux triangles B'MH, B''MH, ayant l'hypoténuse MH commune, il faudrait qu'on eût $MB' < MB''$; d'ailleurs, les deux triangles rectangles MIO', MIO'', donneraient $MO' > MO''$; et de ces deux inégalités, on conclurait $B'O' < B''O''$, ce qui est contraire à l'hypothèse. L'égalité des angles B'MH, B''MH, montre que les arcs HB', HB'', sont égaux entre eux; on en conclut l'égalité des arcs B'D, B''A, et celle des arcs B''D, B'A; il en résulte que les cordes B'D, B''A, sont égales entre elles, et il en est de même des cordes B''D, B'A. Donc, les deux triangles AB'D, AB''D, ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

Puisque les cordes B'A, B''D, sont égales, le côté AB, du triangle ABD (*fig.* 34), est égal au côté CB du triangle CBF. C'est ce qu'il fallait démontrer.

SOLUTION DU PROBLÈME 8 (page 59).

EXPRIMER L'AIRE D'UN TRIANGLE EN FONCTION DES MÉDIANES.

PAR M. LEVYLIER,
Élève du collége Louis-le-Grand (Institution Mayer).

—

1. Désignons par α, β, γ, les longueurs des droites AD, BE, CF (*fig.* 36), menées des sommets du triangle ABC, aux milieux des côtés opposés. On sait que ces trois droites se coupent en un point O, tel que

$$OD = \frac{\alpha}{3}, \quad OE = \frac{\beta}{3}, \quad OF = \frac{\gamma}{3}.$$

Et de plus, chacun des trois triangles BOC, AOC, AOB, est équivalent au tiers du triangle ABC.

Cela posé, prolongeons la droite OD, d'une longueur DG égale à OD, et menons les droites GC, GB: le quadrilatère BOCG sera un parallélogramme, puisque les diagonales OG, BC, se coupent mutuellement en deux parties égales; les triangles GOC, BOC, seront équivalents entre eux, car chacun de ces triangles est la moitié du parallélogramme BOCG. Par conséquent, on aura BAC=3.GOC. D'ailleurs,

$$GC = BO = \frac{2}{3}\,BE.$$

Si, maintenant, on désigne par $2s$ la somme $\alpha+\beta+\gamma$, le demi-périmètre du triangle OGC, aura pour valeur $\frac{2.s}{3}$; et, d'après la formule qui donne l'aire d'un triangle en fonction des trois côtés, on aura :

$$GOC=\sqrt{\frac{2}{3}\,s\,.\,\frac{2}{3}(s-\alpha).\,\frac{2}{3}(s-\beta).\,\frac{2}{3}(s-\gamma)}$$
$$=\frac{4}{9}\sqrt{s\,(s-\alpha)\,(s-\beta)\,(s-\gamma)}.$$

Substituant dans l'égalité BAC=3.GOC, on a, en nommant t la surface BAC :

$$t=\frac{4}{3}\sqrt{s(s-\alpha)\,(s-\beta).(s-\gamma)}\,,$$

ou bien :

$$t=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{16}}$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}.$$

Ce qu'il fallait trouver.

2. On parvient au même résultat par le calcul suivant : Soient a, b, c, les valeurs des côtés BC, AC, AB, du triangle ABC. On a, d'après une proposition connue :

$$(1)\qquad a^2+b^2-\frac{c^2}{2}=2\gamma^2,$$

$$(2)\qquad a^2+c^2-\frac{b^2}{2}=2\beta^2,$$

$$(3)\qquad b^2+c^2-\frac{a^2}{2}=2\alpha^2.$$

Et, en désignant par p le demi-périmètre du triangle ABC, et par t la surface du triangle,

$$t^2=p(p-a)(p-b)(p-c),$$

ou bien

$$(4)\qquad t^2=\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{16}.$$

Pour obtenir t en fonction de α, β, γ, il suffit d'éliminer a, b, c, entre les équations (1), (2), (3), (4).

En additionnant les équations (1), (2), (3), on obtient immédiatement :

$$(5)\qquad \frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

En multipliant deux à deux les équations (1), (2), (3), additionnant les équations résultantes, on trouve, toutes réductions faites,

$$(6)\qquad \frac{9}{4}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=4(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2).$$

Multipliez par 4 les deux membres de l'équation (6), élevez au carré les deux membres de l'équation (5), puis retranchez l'une de l'autre les deux équations ainsi obtenues, il viendra :

$$\frac{9}{4}[2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4]$$
$$=4[2\alpha\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4].$$

Cette dernière équation donne la valeur de

$$2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4,$$

en fonction de α, 6, γ; substituant dans l'équation (4), on a :

$$t^2 = \frac{1}{9}[2\alpha^2 6^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 26^2\gamma^2 - \alpha^4 - 6^4 - \gamma^4],$$

et, par suite :

$$t = \frac{1}{3}\sqrt{2\alpha^2 6^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 26^2\gamma^2 - \alpha^4 - 6^4 - \gamma^4}.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3 (page 57).

« Si d'un point A d'une ellipse, on abaisse des perpendiculaires AM, AN,
» sur les diamètres conjugués égaux, la diagonale du parallélogramme
» construit sur AM, AN, est normale à l'ellipse au point A. »

PAR M. HUET,
Elève du collége Louis-le-Grand (institution Mayer).

—

Soient x', y', les coordonnées AG, AH, (*fig.* 37), d'un point quelconque A, pris sur le plan d'une ellipse $y^2 + x^2 = a^2$, rapportée à ses diamètres conjugués égaux dont l'angle YOX est θ; et AM, AN, les perpendiculaires abaissées du point A, sur les axes OX, OY, on aura :

$$\mathrm{OM} = \mathrm{OH} - \mathrm{MH} = x' + y'\cos\theta, \quad \mathrm{ON} = \mathrm{OG} - \mathrm{NG} = y' + x'\cos\theta.$$

Les coordonnées du point P, milieu de MN, seront $\frac{x'+y'\cos\theta}{2}$, $\frac{y'+x'\cos\theta}{2}$; et par suite l'équation de la droite AP est $y - y' = \frac{y' - x'\cos\theta}{x' - y'\cos\theta}(x - x')$. L'équation de la *polaire* du point A, est, comme on sait, $yy' + xx' = a^2$, ou $y = \frac{-x'}{y'}x + \frac{a^2}{y'}$. La perpendiculaire abaissée du point A sur la polaire, a pour équation :

$$y-y'=-\left[\frac{1-\frac{x'}{y'}\cos\theta}{-\frac{x'}{y'}+\cos\theta}\right](x-x')=\frac{y'-x'\cos\theta}{x'-y'\cos\theta}(x-x').$$

On voit donc que cette perpendiculaire coïncide avec la droite AP.

D'où nous conclurons que : *Si d'un point quelconque*, A, *du plan d'une ellipse, on abaisse des perpendiculaires* AM, AN, *sur les diamètres conjugués égaux*, *la direction*, AP, *de la diagonale du parallélogramme construit sur ces perpendiculaires, est elle-même perpendiculaire à la polaire du point* A.

Dans le cas particulier où le point A est pris sur l'ellipse, la polaire du point A est la tangente menée à l'ellipse par ce point ; et alors, on a le théorème qu'il fallait démontrer.

QUESTION 7 (page 58).

SOLUTION DE M. MERLIEUX (ÉDOUARD).

—

On donne les projections d'une droite AB, *et celles de deux points* C, D, *non situés dans un même plan, avec la droite : construire les projections d'un point situé sur la droite* AB, *et tel que la somme de ses distances aux deux points donnés* C, D, *soit un minimum.*

Si de deux points quelconques A, B, de la droite AB, pris comme centres, je décris des circonférences dont les plans soient perpendiculaires à AB, et si alors je cherche entre les points A, B, sur la droite AB, un point S tel qu'il soit le sommet du cône droit, à la surface duquel appartiennent les deux circonférences : je dis que le plus court chemin d'un point situé sur une des circonférences à un point situé sur l'autre, en passant par la droite AB, est celui qui passe par le sommet S.

En effet, si je mène par la droite AB, un plan quelconque, il déterminera sur la surface conique deux droites, qui seront chacune le plus court chemin d'un certain point de l'une des circonférences, à un certain point de l'autre, et chacune de ces droites rencontrera AB en S. Mais toutes les distances du sommet d'un cône droit à la circonférence de sa base, étant égales entre elles, il s'en suit qu'il n'importe pas que les deux points soient dans un même plan avec la droite AB; donc le point S est le point cherché, et il partage évidemment AB en parties proportionnelles aux rayons des cercles.

Si donc, dans le problème proposé, des points C, D, nous abaissons sur AB des perpendiculaires, et si nous partageons la distance des pieds de ces perpendiculaires, dans le rapport de leurs longueurs, le point de division sera le point cherché; ce qu'il faut exécuter par la géométrie descriptive.

Je puis prendre pour plan horizontal de projection le plan qui passe par la droite AB, et l'un des points, C. Soient d, d', les projections horizontale et verticale de D. De C et de d j'abaisse des perpendiculaires CM, dN, sur AB. La droite DN sera perpendiculaire sur AB. Pour partager la distance MN des pieds des perpendiculaires CM, DN, dans le rapport de ces perpendiculaires, il faut connaître la longueur de DN. Or, DN est l'hypoténuse d'un triangle rectangle DdN, dont les deux côtés de l'angle droit sont la hauteur verticale Dd du point D, et la perpendiculaire dN. Si l'on prolonge la droite dN, d'une longueur ND′ égale à ND, et que l'on joigne le point D′ au point C, l'intersection de la droite DC avec AB, donnera le point cherché.

Les constructions deviennent plus longues, mais ne sont pas plus difficiles, en prenant un plan quelconque pour plan de projection horizontale.

QUESTION 5 (page 57).

1. *Étant donnée une équation algébrique, d'un degré quelconque à coefficients réels, chaque racine peut être considérée comme la tangente d'un arc réel ou imaginaire, l'unité étant prise pour rayon. On propose : 1° de démontrer que la somme de ces arcs est réelle ; 2° de trouver cette somme à l'aide des tables.*

Établissons d'abord ce principe : qu'une quantité quelconque, réelle ou imaginaire peut être considérée comme la tangente d'un arc réel ou imaginaire. On a, en général,

$$\text{tang.}\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

Or, si $x = y + z\sqrt{-1}$, $\text{tang.}(y + z\sqrt{-1}) = (y + z\sqrt{-1}) - \frac{(y+z\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \ldots. = \text{Y} + \text{Z}\sqrt{-1}$; donc, etc.

Cela posé, soit donc l'équation à coefficients réels :

$$x^m + \text{A}_1 x^{m-1} + \text{A}_2 x^{m-2} \ldots\ldots + \text{A}_{m-1} x + \text{A}_m = 0,$$

dont les racines sont r_1, r_2, r_3,.....r_m ; si je désigne par S_1 la somme des tangentes dont ces racines représentent les arcs, par S_2 la somme de ces même tangentes combinées sans répétition deux à deux, j'aurai, d'après la formule connue :

$$\text{tang.}(r_1 + r_2 \ldots.. + r_m) = \frac{\text{S}_1 - \text{S}_3 \ldots. \pm \text{S}_{m-1}}{1 - \text{S}_2 \ldots. \mp \text{S}_m}, \text{ si } m \text{ est pair,}$$

ou bien $$= \frac{\text{S}_1 - \text{S}_3 \ldots. \pm \text{S}_m}{1 - \text{S}_2 \ldots. \pm \text{S}_{m-1}}, \text{ si } m \text{ est impair.}$$

Or, on a $\text{S}_1 = -\text{A}_1$, $\text{S}_2 = \text{A}_2$, $\text{S}_3 = -\text{A}_3, \ldots \text{S}_m = \pm \text{A}_m$,

donc $$\text{tang.}(r_1 + r_2 \ldots.. + r_m) = \frac{-\text{A}_1 + \text{A}_3 \ldots.. \pm \text{A}_{m-1}}{1 - \text{A}_2 \ldots..},$$

quantité réelle ; donc, la tangente de la somme des arcs étant réelle, la somme de ces arcs est aussi réelle, c. q. f. d.

Connaissant cette tangente en fonction des coefficients de l'équation donnée, on peut trouver au moyen des tables l'arc lui-même.

Dans quel cas les deux termes de la fraction $\frac{-A_1+A_3-\ldots}{1-A_2+\ldots}$ deviennent-ils nuls? et comment trouver alors la vraie valeur de la fraction ?

QUESTION 9 (page 59).

2. *Inscrire dans une ellipse donnée une corde telle que la somme de sa longueur et de la distance de son milieu au centre de l'ellipse, soit un maximum. Application au cercle.*

Désignons ce *maximum* par z, la demi-corde par y, et la distance de son milieu au centre de l'ellipse, par x; on a $z=x+2y$, d'où $x=z-2y$.

Soit l'équation de cette ellipse rapportée à deux diamètres conjugués, a et b, dont l'un est parallèle à la corde, $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ (1).

Remplaçant dans l'équation (1), x par sa valeur, on aura :

$$a^2y^2+b^2(z-2y)^2=a^2b^2,$$

$$y^2-\frac{4b^2zy}{a^2+4b^2}=\frac{b^2(a^2-z^2)}{a^2+4b^2},$$

d'où $$y=\frac{2b^2z\pm ab\sqrt{a^2+4b^2-z^2}}{a^2+4b^2}.$$

La plus grande valeur qu'on puisse donner à z est donc $\sqrt{a^2+4b^2}$, sans quoi y serait imaginaire; or, dans $z^2=a^2+4b^2$, il y a la quantité constante $a^2+b^2=k^2$; $z^2=k^2+3b^2$; z dépend donc de b; donc, quand b est le plus grand possible, c'est-à-dire le grand axe, z est le *maximum*; on a alors la corde cherchée :

$$2y=\frac{4b^2}{\sqrt{a^2+4b^2}} \quad \text{et} \quad x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+4b^2}}.$$

Quand l'ellipse devient un cercle, on a $a=b=r$; alors

$$2y=\frac{4r}{\sqrt{5}},\quad x=\frac{r}{\sqrt{5}}\quad \text{et}\quad z=r\sqrt{5}\,;$$

c'est là le *maximum*.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2 (page 57).

3. *Soit* ABC, (*fig.* 38), *un triangle équilatéral inscrit dans un cercle dont le centre est* D; *d'un point* O *de la circonférence, on abaisse sur les côtés* AB, AC, BC, des perpendiculaires OM, ON, OP, *qui rencontrent ces côtés en des points* M, N, P. *Les points* M, N, P, *sont sur une droite qui passe par le milieu du rayon* OD, *et ce milieu est le centre des moyennes distances des pieds des trois perpendiculaires*, M, N, P.

Des points P, N, D, j'abaisse sur AB, les perpendiculaires PF, NG, DH. Les droites ON, OP, faisant avec AB des angles de 30°, on aura :

(1) $\quad ON=2(NG-OM),\qquad$ (2) $\quad OP=2(OM-PF)$.

D'ailleurs, la somme algébrique des perpendiculaires abaissées, de différents points, sur les côtés d'un triangle équilatéral, étant invariable, on a :

(3) $\quad ON+OM-OP=3.DH$.

De la somme des égalités (2) et (3), je retranche (1), il vient :

$$OM=3.DH+4OM-2(NG+PF),\ \text{d'où}\ \frac{NG+PF}{3}=\frac{OM+DH}{2}.$$

Cette dernière égalité montre que le centre des trois points N, P, M, et le milieu du rayon OD, sont à la même distance de AB. On démontrerait de même que ce centre et le milieu de OD, sont à des distances égales de AC; donc, ces deux points coïncident.

La situation en ligne droite des trois points M, N, P, est une propriété connue, et qui existe même lorsque le triangle inscrit est quelconque. Ce théorème a été découvert par *Robert Simpson*.

PROBLÈME 11 (page 59).

4. *Inscrire dans une ellipse un triangle semblable à un triangle donné.*

Par un point, D, pris sur l'ellipse (*fig.* 39), je mène deux cordes DE, DF, faisant entre elles un angle EDF égal à l'angle BAC du triangle donné; puis, je joins le centre O de l'ellipse aux milieux G, H, de ces cordes, par les diamètres OGX, OHY. A partir des points G, H, je prends sur les directions GD, HD, des longueurs GI, HL, proportionnelles aux côtés BA, CA; par les points I, L, je conduis parallèlement aux diamètres OX, OY, les droites IM, LM, qui se coupent au point M; je joins le centre au point M par la droite OM qui coupe l'ellipse au point A', et enfin par le point A' je mène les cordes A'B', A'C', parallèles aux cordes DE, DF. Le triangle A'B'C', ainsi déterminé, est semblable au triangle ABC.

Car les diamètres OX, OY, divisent en parties égales les cordes A'B', A'C', aux points R, S; et de plus, on a: A'R : A'S :: GI : HL :: AB : AC; d'où A'B': A'C' :: AB : AC. D'ailleurs l'angle B'A'C' est égal à l'angle EDF; et par suite il est égal à l'angle BAC. Donc les deux triangles A'B'C', ABC, sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

LETTRE

DE M. CATALAN A M. TERQUEM.

—

Bien que je n'aime pas la polémique, je crois ne pouvoir laisser passer sous silence l'article de *M. Perrey*, contenu dans le second numéro de votre journal.

Jusqu'à présent tout le monde avait adopté l'expression suivante, qui n'est qu'une façon de parler : « La parabole pouvant être considérée comme la limite de toutes les ellipses qui ont même sommet et même foyer, a un centre unique, situé à l'infini. »

M. Perrey, observant que la parabole peut être regardée aussi comme la limite d'une série d'hyperboles, conclut que cette courbe a *deux* centres situés à l'infini, l'un sur l'axe, l'autre sur le prolongement de l'axe.

Cette conclusion est, je crois, inadmissible.

Considérons une ellipse ABCD (*fig.* 40), rapportée à son grand axe AB, et à la tangente au sommet A. Soit F, le foyer de cette courbe, situé entre le centre et l'origine. Prenons les points A et F pour sommet et pour foyer d'une parabole GAE.

Si, actuellement, ces points restant fixes, on suppose que le centre O s'éloigne de plus en plus de l'origine, on obtiendra une série d'ellipses telles que pour une même valeur de l'abscisse, l'excès de l'ordonnée de la parabole, sur l'ordonnée de l'ellipse, pourra devenir moindre que toute quantité assignable, si l'on rend l'ellipse suffisamment grande. C'est là ce qu'on exprime en disant : « La parabole est la limite des ellipses qui ont même sommet et même foyer. » De même, quand on dit : « La parabole a un centre situé à l'infini, du côté des x positifs, » cette expression, qui n'est, je le répète, qu'une façon abrégée de parler, signifie : « Si vous prenez une ellipse qui diffère extrêmement peu de la parabole, le centre de cette ellipse sera excessivement éloigné de l'origine. »

En second lieu, si l'on construit une série d'hyperboles telles que HAL, ayant A pour sommet, F pour foyer, et dont le centre, situé vers les x négatifs, s'éloigne de plus en plus de l'origine, ces hyperboles auront pour limite la parabole GAE. Sous ce point de vue, on est conduit à admettre que la parabole a un centre situé à l'infini, sur le prolongement de son axe.

Ainsi, selon que l'on regarde cette courbe comme limite d'une série d'ellipses ou d'une série d'hyperboles, il n'est pas inexact de dire qu'elle a un centre à droite de l'origine, *ou* un centre à gauche. Mais comme les deux séries de courbes sont complétement étrangères l'une à l'autre, qu'elles sont données par deux modes de constructions différents entre eux, on ne doit pas prendre à la fois ce qui provient de l'une et de l'autre série, et conclure que la parabole a deux centres.

Du reste, si dans l'équation $y^2=p(2-k)x+k(k-2)x^2$, employée par M. Perrey, on égale à zéro la dérivée par rapport à x, on obtient, pour l'abscisse du centre : $x=\frac{p}{2k}$. Posant $k=0$, il vient $x=+\infty$, ou $x=-\infty$, selon que l'on regarde zéro comme la limite des valeurs positives ou des valeurs négatives attribuées à k. Mais si l'on prenait, *en même temps*, $x=\pm\infty$, cela reviendrait à admettre qu'une équation de degré n peut avoir $n+1$ racines. Or, cette dernière opinion, émise par un auteur à qui sa position donne une assez grande autorité dans l'enseignement, n'a point cependant été adoptée.

Si le mode de raisonnement employé par M. Perrey était suivi, on arriverait à conclure : que la ligne droite a une infinité de centres situés d'un côté ou de l'autre de cette ligne ; que la parabole a, non *deux* centres seulement, mais une infinité de centres, situés deux à deux sur chacun des diamètres ; que deux *courriers* qui parcourent la même droite avec des vitesses égales, dans le même sens, *se rencontreront et se sont rencontrés* à l'infini positif ou négatif, etc.

Pardon, monsieur, d'une aussi longue lettre sur un sujet aussi simple; mais les choses presque évidentes, que l'on aperçoit d'un coup d'œil, sont, en général, difficiles à expliquer; et presque toujours

Ce que l'on conçoit bien s'énonce *longuement*.

Agréez, etc.,

E. CATALAN.

QUESTIONS PROPOSÉES AUX EXAMENS.

Des différentes manières de trouver les conditions de réalité, des trois racines de l'équation $x^3+px+q=0$; *les coefficients* p, q *étant supposés réels.*

1. La première méthode que nous allons indiquer est fondée sur cette remarque: si m, n, sont deux nombres réels et inégaux, la moyenne arithmétique $\frac{m+n}{2}$ entre m et n, est plus grande que la moyenne géométrique $\sqrt{mn}$; et si m, n, sont deux imaginaires conjuguées $\alpha+6\sqrt{-1}$, $\alpha-6\sqrt{-1}$; la moyenne arithmétique α, est au contraire moindre que la moyenne géométrique $\sqrt{\alpha^2+6^2}$.

Cela admis nous ferons observer que dans la recherche des conditions de réalité des racines de l'équation $x^3+px+q=0$, on peut toujours supposer $q<0$; car, l'équation proposée étant de degré impair, on peut, en changeant le signe des racines, rendre le dernier terme négatif; et il est évident que ce changement n'apporte aucune modification dans les conditions de réalité des racines.

Pour que les trois racines de $x^3+px+q=0$, soient réelles, il faut d'abord que p soit négatif. Car, si l'on désigne par a, b, c, les trois racines de $x^3+px+q=0$, on a :

(1) $a+b+c=0$, (2) $ab+ac+bc=p$, (3) $abc=-q$.

La relation (1) donne

$$ab+ac+bc=-\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right);\ \text{d'où}\ p=-\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right).$$

Donc, p est négatif, lorsque les trois racines a, b, c, sont réelles.

L'équation $x^3+px+q=0$, dont le dernier terme est supposé négatif, a une racine réelle positive a; et si les deux autres racines b, c sont réelles, elles sont nécessairement négatives; car les égalités (3) et (1) donnent $bc=-\frac{q}{a}$, $b+c=-a$; la première montre que les racines b, c, ont le même signe, et la seconde fait voir que ce signe commun est le signe *moins*.

Or, la moyenne arithmétique des nombres positifs $-b$, $-c$, étant plus grande que leur moyenne géométrique, on a: $\left(\frac{b+c}{2}\right)^2>bc$, ou $\frac{a^2}{4}>-\frac{q}{a}$, d'après les relations (1), (3); ou bien encore $a>\sqrt[3]{-4q}$.

De plus, on conclura, de ce que a est la seule racine réelle positive de l'équation, que si l'on substitue à x un nombre positif moindre que a, dans x^3+px+q, le résultat de la substitution sera négatif, par conséquent :

$(\sqrt[3]{-4q})^3+p(\sqrt[3]{-4q})+q<0$, d'où $-3q<-p\sqrt[3]{-4q}$, $-27q^3<+4p^3q$; et en divisant par $-q$, qui est un nombre positif,

$$27q^2<-4p^3,\quad \text{ou}\quad 4p^3+27q^2<0.$$

Cette condition est suffisante, car, si elle est remplie, on en conclura que la racine positive a de l'équation $x^3+px+q=0$, satisfait à la condition $\frac{a^2}{4}>-\frac{q}{a}$; et par suite $\left(\frac{b+c}{2}\right)^2>bc$. Et cette dernière inégalité ne pourrait avoir lieu si b, c, étaient des imaginaires conjuguées.

Il est évident qu'on établira la condition d'égalité des racines b et c en exprimant que leur moyenne proportionnelle est égale à leur moyenne différentielle. Ce qui conduira par des raisonnements semblables à ceux qu'on vient de faire, à la condition $4p^3+27q^2=0$.

2. En supposant toujours que q reste négatif, l'équation $x^3+px+q=0$ (1), aura une racine réelle positive; désignons-la par a, et divisons le premier membre x^3+px+q par $(x-a)$, le quotient sera $x^2+ax+p+a^2$.

Pour que l'équation (1) ait ses trois racines réelles, il faut et il suffit que l'équation du second degré $x^2+ax+p+a^2=0$ (2), formée en égalant à zéro le quotient $x^2+ax+p+a^2$, ait ses racines réelles. On doit avoir

$$a^2-4(p+a^2)>0 \quad \text{ou} \quad -4p-3a^2>0, \qquad (2)$$

relation qui montre que p doit être négatif. On en tire $a<\sqrt{-\frac{4p}{3}}$. Or la forme de l'équation fait voir que des trois racines réelles, l'une doit être positive et les deux autres négatives. a étant la seule racine positive, tout nombre plus grand que a substitué dans (1) doit donner un résultat positif, par conséquent

$$-\frac{4p}{3}\sqrt{-\frac{4p}{3}}+p\sqrt{-\frac{4p}{3}}+q>0,$$

d'où $\quad -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{4p}{3}}+q>0, \quad -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{4p}{3}}>-q;$

élevant au carré

$$-\frac{4p^3}{27}>q^2, \quad 4p^3+27q^2<0.$$

Cette condition est suffisante, car si elle est remplie, on en conclura que la racine positive a satisfait à la condition $-4p-3a^2>0$; par conséquent les racines de l'équation (2), et par suite celles de l'équation (1) seront réelles.

3. La forme de l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation $x^3+px+q=0$ (1), laquelle est $z^3+6pz^2+9q^2z+4p^3+27q^2=0$ (2), établit que la condition nécessaire et suffisante pour que les trois racines de l'équation $x^3+px+q=0$ soient réelles est $4p^3+27q^2<0$. Car il faut et il suffit que l'équation (2) ne présente que des variations de signe; or cette condition sera remplie, si l'on a $4p^3+27q^2<0$, puisque cette dernière relation ne peut subsister sans que p soit négatif; et $9q^2$ est essentiellement positif.

4. Lorsqu'on applique à l'équation $x^3+px+q=0$, le théorème de M. *Sturm*, on obtient la suite des fonctions

$$V_1=x^3+px+q,\quad V_2=3x^2+p,\quad V_3=-2px-3q,$$
$$V_4=-4p^3-27q^2;$$

pour que les premiers termes de cette suite complète ne présentent que des permanences, il faut que l'on ait $p<0$ et $4p^3+27q^2<0$, or cette condition renferme la première; par conséquent la condition nécessaire et suffisante pour que les trois racines soient réelles, est

$$4p^3+27q^2<0.$$

5. Lorsque les trois racines de l'équation $x^3+px+q=0$ (1) sont réelles, la dérivée $3x^2+p=0$ doit avoir aussi ses racines réelles, d'après le théorème de Rolle; ce qui montre d'abord que p doit être négatif.

Supposons $q>0$, l'équation (1) aura une racine réelle négative. La dérivée ayant pour racines $+\sqrt{-\frac{p}{3}}$ et $-\sqrt{-\frac{p}{3}}$, la racine $+\sqrt{-\frac{p}{3}}$ sera comprise entre les deux racines réelles positives de l'équation (1), si cette dernière a trois racines réelles. Par conséquent, dans ce cas, le résultat de la substitution de $+\sqrt{-\frac{p}{3}}$ pour x dans (1) doit être négatif.

Ainsi on aura

$$-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q<0,$$

ou $\quad \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q<0 \quad$ d'où $\quad 4p^3+27q^2<0.$

Cette condition est suffisante, car l'équation (1) aura une racine réelle positive comprise entre 0 et $+\sqrt{-\frac{p}{3}}$, et une racine réelle positive comprise entre $+\sqrt{-\frac{p}{3}}$ et $+\infty$, et par conséquent trois racines réelles, puisque q étant >0, elle a en outre une racine négative.

6. On peut établir cette condition par le théorème de Descartes. Supposons $q>0$, dans l'équation $x^3+px+q=0$ (1). Comme il manque un terme entre x^3 et px, p doit être négatif lorsque l'équation a ses trois racines réelles. Remplaçant, dans (1), x par $y+h$, on obtiendra l'équation

$$y^3+3hy^2+\left.\begin{array}{l}3h^2\\+p\end{array}\right| y+h^3+ph+q=0; \qquad (2)$$

faisons disparaître le terme en y, et pour cela il faut faire $h=\sqrt{-\frac{p}{3}}$; la valeur de h sera réelle, puisque p est négatif. L'équation résultante, en supposant qu'on prenne h positif, sera

$$y^3+3\sqrt{-\frac{p}{3}}.y^2+\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q=0. \qquad (3)$$

Cette équation doit avoir ses trois racines réelles, puisque h est réel; les coefficients de y^2 et de y^3 doivent donc être de signes contraires, puisqu'il manque un terme entre ces deux termes. Ainsi on doit avoir

$$\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q<0,$$

d'où $\quad q < -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$, d'où enfin $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Cette condition est suffisante, car elle établit que l'équation (3) a une racine réelle positive. L'équation (1) aura donc aussi une racine réelle positive, d'après la relation $x = y + h$; ayant déjà une racine réelle négative, puisqu'on a supposé $q > 0$, elle aura toutes ses racines réelles.

7. L'équation qui donne $\sin\frac{1}{3}a$ en fonction de $\sin a$ est, en désignant $\sin\frac{1}{3}a$ par x et $\sin a$ par b,

$$x^3 - \frac{3}{4}R^2x + \frac{1}{4}R^2b = 0, \qquad (a)$$

En identifiant cette équation à l'équation $x^3 + px + q = 0$ (1), on trouve :

$$-\frac{3}{4}R^2 = p \text{ et } \frac{1}{4}R^2b = q, \text{ d'où } R^2 = -\frac{4p}{3} \text{ et } b = -\frac{3q}{p},$$

ce qui montre que p doit être négatif; en outre on a $\frac{b^2}{R^2} < 1$, d'où $b^2 < R^2$; par conséquent $\frac{9q^2}{p^2} < -\frac{4}{3}p$ d'où $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Cette dernière condition, qui comprend la condition $p < 0$, est suffisante, puisqu'on sait que les racines de l'équation (a) sont toujours réelles lorsque $\frac{b^2}{R^2} < 1$.

On sait que pour que deux racines de l'équation (a) soient égales, il faut et il suffit que $\frac{b^2}{R^2} = 1$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) ait deux racines égales est donc $4p^3 + 27q^2 = 0$.

On obtient les mêmes résultats par l'équation qui donne $\cos\frac{1}{3}a$ en fonction de $\cos a$, laquelle est $x^3 - \frac{3}{4}R^2x - \frac{1}{4}R^2b = 0$.

8. Supposons $q > 0$ dans l'équation $x^3 + px + q = 0$ (1). On peut regarder l'équation (1) comme résultant de l'élimination de y entre les équations $y = x^3 + px$ (2), et $y = -q$ (3).

Les racines de l'équation (1) seront donc les abscisses des points de rencontre de la courbe (2) et de la droite (3). Or, si p est positif, la courbe représentée par l'équation (2) aura la forme indiquée (*fig.* 41), et ne pourra être rencontrée par la droite (3) en plus d'un point, ce qui montre que tant que p sera positif, l'équation (1) ne pourra pas avoir plus d'une racine réelle.

Supposons donc $p<0$ et remplaçons-le dans l'équation par $-k$, la courbe $y=x^3-kx$ aura la forme indiquée (*fig.* 42); AH et AH' étant égaux à $+\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$. Pour que la droite $y=-q$, (L'L), coupe la courbe en trois points, il faudra que q soit moindre que la valeur absolue du *maximum* des ordonnées de la branche AH. Pour déterminer ce *maximum*, égalons à zéro la dérivée de x^3-kx qui est $3x^2-k$. On trouve pour x $\sqrt{\frac{k}{3}}$ et pour la valeur correspondante de y :

$$y=\frac{k}{3}\sqrt{\frac{k}{3}}-k\sqrt{\frac{k}{3}} \quad \text{ou enfin} \quad y=-\frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}}.$$

On doit avoir

$$q<\frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}}, \quad \text{ce qui donne} \quad q^2<\frac{4k^3}{27},$$

d'où, en mettant $-p$ au lieu de k,

$$4p^3+27q^2<0.$$

Cette condition est suffisante, car on en déduit

$$q<\frac{2k}{3}\sqrt{\frac{k}{3}}.$$

Pour établir que deux racines de l'équation (1) sont égales, il faudra exprimer que les deux points d'intersection de la droite $y=-q$ avec la branche AH se réunissent en un seul; il suffit pour cela que q soit égal à la valeur absolue du *maximum* des ordonnées de la branche AH, ce qui conduit à établir la relation

$$q=\frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}}\quad \text{d'où}\quad q^2=\frac{4}{27}k^3,\quad \text{ou enfin}\quad 4p^3+27q^2=0.$$

Déterminer la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation $x^m+px+q=0$, *à coefficients réels, pour que cette équation admette le plus grand nombre possible de racines réelles.*

Lorsque m est pair, cette équation ne peut pas avoir plus de deux racines réelles, comme on peut le reconnaître par le théorème de Descartes.

Si m est impair, l'équation aura au plus trois racines réelles, et pour cela il est nécessaire, d'après le théorème de Descartes, que p soit négatif.

En appliquant le théorème de M. Sturm, à l'équation $x^m+px+q=0$, on obtient la suite

$$\begin{aligned}
X&=x^m+px+q,\\
X'&=mx^{m-1}+p,\\
X''&=-(m-1)px-mq,\\
X'''&=\frac{m^m}{p^{m-1}}\left[\left(-\frac{p}{m}\right)^m-\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}\right],
\end{aligned}$$

qui montre que trois est le plus grand nombre de racines réelles que puisse avoir l'équation $x^m+px+q=0$. Et pour cela, il est nécessaire que m soit impair; $p<0$ et $\left(-\frac{p}{m}\right)^m-\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}>0$: ces deux dernières conditions sont celles que l'on a trouvées pour l'équation $x^3+px+q=0$, car la condition $4p^3+27q^2<0$, peut être mise sous la forme $\left(-\frac{p}{3}\right)^3-\left(\frac{q}{2}\right)^2>0$.

1. *Trouver le lieu géométrique des sommets des hyperboles qui ont une asymptote et un foyer communs.*

Prenons pour axe des y l'asymptote donnée OY (*fig.* 43), et pour axe des x, la perpendiculaire FO abaissée du foyer donné F sur l'asymptote. L'équation des hyperboles, qui auront pour foyer commun le point F, sera :

$$(1) \qquad y^2+(x-a)^2-(my+nx+p)^2=0,$$

en désignant par a l'abscisse OF du foyer F, et par $my+nx+p$, la distance d'un point de la courbe à ce foyer.

Il reste à exprimer que l'axe des y est une asymptote commune à toutes ces hyperboles. On établira cette dernière condition en faisant $x=0$ dans l'équation (1), et en exprimant que l'équation résultante en y, laquelle est :

$$(1-m^2)y^2-2mpy+a^2-p^2=0,$$

a ses deux racines infinies, ce qui conduit aux relations

$$1-m^2=0, \qquad 2mp=0.$$

Le coefficient m^2 étant égal à 1, on doit avoir $p=0$; et en effet, on sait que la directrice passe par le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur l'asymptote.

L'équation (1) qu'on peut écrire sous la forme

$$y^2+(x-a)^2-m^2\left(y+\frac{n}{m}x+\frac{p}{m}\right)^2=0,$$

deviendra par suite

$$(2) \qquad (x-a)^2-\frac{2nxy}{m}-\frac{n^2x^2}{m^2}=0.$$

Cette dernière équation qui renferme un seul coefficient non déterminé $\frac{n}{m}$, représente toutes les hyperboles qui ont pour asymptote la droite OY, et pour foyer le point F.

Les coordonnées x, y, des sommets de l'une de ces hyperboles doivent satisfaire à l'équation (2), et à l'équation de l'axe focal, qui est :

$$(3) \qquad y=\frac{m}{n}(x-a).$$

Par conséquent, on aura l'équation du lieu cherché, en éliminant $\frac{n}{m}$, entre les équations (2) et (3). L'équation (3) donne $\frac{n}{m}=\frac{x-a}{y}$. Substituant à $\frac{n}{m}$ cette valeur $\frac{x-a}{y}$ dans l'équation (2), on a :

$$y^2(x-a)^2-2xy(x-a)-(x-a)^2x^2=0.$$

Supprimant le facteur $(x-a)$, qui donne une solution étrangère à la question, on trouve :

$$y^2(x+a)+x^3-ax^2=0.$$

Cette équation résolue par rapport à y, donne :

$$(4)\qquad y=\pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

On reconnaît immédiatement que la courbe représentée par l'équation (4), passe par l'origine des coordonnées et par le foyer F; elle est divisée en deux parties égales et symétriques par l'axe des x. Elle a pour asymptote la droite $x=-a$, parallèle à l'axe des y, et située du côté des x négatifs à une distance OF′ de l'origine, égale à OF. La portion de la courbe située à droite de l'origine, tourne sa concavité vers l'axe des x, et celle qui est à gauche, tourne sa convexité vers l'axe des x. Les tangentes menées à cette courbe, par l'origine des coordonnées, divisent en parties égales les angles des axes OX, OY. L'ordonnée *maximum* de la portion de cette courbe située du côté des x positifs, divise la droite OF en moyenne et extrême raison, car l'abscisse correspondante à l'ordonnée maximum, est la racine positive de l'équation $x^2+ax-a^2=0$.

Si l'on coupe la courbe par une droite FMAM′ passant par le foyer F, dont l'équation sera $y=m(x-a)$; les abscisses des points de rencontre seront les racines de l'équation

$$m^2(x+a)(x-a)^2+x^2(x-a)=0,$$

qui se décompose en $(x-a)=0$ et $(m^2+1)x^2-a^2m^2=0$.

La dernière équation montre que la droite coupe la courbe en des points M, M′, également distants du point A de rencontre de la droite avec l'asymptote des hyperboles. Ces points sont donc les deux sommets de l'une des hyperboles dont le centre est A. Ainsi, la branche fermée de la courbe est le lieu des sommets voisins du foyer F, l'autre branche est le lieu des seconds sommets. Et l'asymptote F′L′ est le lieu géométrique des seconds foyers des hyperboles, car AK=AF, puisque OF′ = OF.

2. *Un cordon* BMAH (fig. 44) *parfaitement flexible et sans poids, est attaché par une de ses extrémités au point fixe* B, *et passe sur une poulie fixe en* A, *sur laquelle il peut librement glisser; on suspend en un point* M *du cordon, un poids mobile, au moyen d'un anneau que le cordon traverse: quel est le lieu géométrique du point de suspension* M, *dans les différentes positions d'équilibre du poids, lorsque le cordon glisse sur la poulie.*

Nous supposerons d'abord que la droite BA, menée du point B au point A, auquel le cordon est tangent à la poulie, soit inclinée à l'horizon.

Soit M, une des positions d'équilibre du poids. Le point M devra se trouver dans un plan vertical mené par BA, et de plus la verticale MG menée par le point M, sera la bissectrice de l'angle BMA. Concevons menées par chacun des points A et B, les verticales BL et AH. Si l'on prolonge MB jusqu'à sa rencontre en P avec AH, le triangle AMP sera isocèle, parce que les angles MAP et APM, égaux respectivement à GMA et GMB, seront égaux entre eux. Par conséquent, le point M sera sur la perpendiculaire élevée du milieu Q de AP. On obtiendra donc tous les points de la courbe décrite par le point M, en menant par le point B des transversales telles que BP, et en élevant du milieu de AP une perpendiculaire dont le point de rencontre avec BP appartiendra au lieu cherché. La courbe s'étendra à l'infini, car le point Q pourra s'éloigner à l'infini du point A. La courbe aura pour asymptote la verticale menée par le milieu de IA, car à mesure que le point P s'éloigne du point A, le point R se rapproche du point I; et comme le point M est sur la verticale menée par le milieu de RA, il s'ensuit que le point F milieu de AR se rapproche du point C milieu de AI, et par conséquent le point M se rapproche de CD; et enfin quand la droite RP se confond avec IL, le point M est situé à l'infini et le point F se confond avec le point C, et le point M se trouve sur la droite CD.

Pour obtenir l'équation de la courbe, prenons pour origine le point B, pour axe des y la verticale BY qui passe en ce point, et pour axe des x l'horizontale BX. L'équation de la droite BP sera $y=mx$ (1). Désignant par a et b les coordonnées du point A, la longueur PS sera exprimée par ma et l'équation de la droite QM sera $y=\frac{ma+b}{2}$ (2). y et x étant les coordonnées du point M, on éliminera m entre $y=mx$ et $y=\frac{ma+b}{2}$; ce qui donnera l'équation $2xy-ay-bx=0$ (3), équation d'une hyperbole équilatère, qui passe en A et B, dont le centre est le point milieu de AB, et a pour coordonnées $\frac{a}{2}$ et $\frac{b}{2}$; les asymptotes sont parallèles aux axes.

La branche BN satisfait seule à la question proposée. Pour reconnaître à quelle question appartiennent les points représentés par le reste de la courbe, observons que l'on obtient aussi l'équation (3) lorsqu'on cherche le lieu des sommets des triangles qui ont pour base AB, et dans lesquels la verticale menée par le sommet opposé, divise l'angle de ce sommet ou l'adjacent en deux parties égales.

Or, dans l'hyperbole équilatère, la bissectrice de l'angle formé par deux cordes supplémentaires quelconques est parallèle à l'une des asymptotes. Par conséquent les points de la branche BN sont les sommets des angles intérieurs que la verticale divise en deux parties égales, et ceux de la branche BN′, les sommets des angles extérieurs au triangle que la verticale divise en deux parties égales.

On voit de même que les points de la branche AK′ sont les sommets des angles intérieurs divisés en deux parties égales par la verticale; et les points de la branche AK sont les sommets des angles extérieurs divisés en deux parties égales par la verticale.

Lorsque la droite AB est horizontale, le lieu des points cherchés est la verticale menée par le milieu de AB.

C. Roguet.

ANALYSE D'OUVRAGES.

Journal de Crelle, t. XXIII, 1841-1842.

Les abonnés qui désireraient des renseignements plus détaillés devront s'adresser aux rédacteurs des *Nouvelles Annales*.

1er Cahier.

Jacobi (C.-G.-I.), professeur de mathématiques à Kœnigsberg.

Dilucidationes de æquationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum æquationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis (1-104).

Fac-simile d'une lettre d'Euler. Elle contient ce problème : un quadrilatère plan à deux angles opposés droits, et les sommets de ces angles sont fixes; le sommet du troisième angle se meut sur une ligne donnée, quelle est la ligne décrite par le quatrième sommet? Si la ligne donnée est une droite, le quatrième sommet décrit une section conique à branches infinies.

2e Cahier (1842).

Raabe (J.-L.), professeur à Zurich.

Sommation de séries infinies, périodiques et harmoniques, et à l'aide de cette sommation, réduction de l'intégrale définie

$$\int_0^{\infty} \varphi(\sin ax,\ \cos bx)\frac{dx}{x},$$

en d'autres plus simples (105-126).

Les séries dont il s'agit sont de cette forme

$$\begin{aligned} &a_1 + \frac{1}{2}a_2x + \frac{1}{3}a_3x^2 + \ldots \frac{1}{p}a_px^{p-1} \\ &+ \frac{1}{p+1}a_1x^p + \frac{1}{p+2}a_2x^{p+1} + \ldots \frac{1}{2p}a_px^{2p-1} \\ &+ \frac{1}{2p+1}a_1x^{2p} + \frac{1}{2p+2}a_2x^{2p+1} + \ldots \frac{1}{3p}a_px^{3p-1} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les coefficients numériques forment la progression harmonique, et les coefficients a_1, $a_2 \ldots a_p$ reviennent périodiquement.

On trouve ici des intégrales définies qui ne paraissent pas connues.

Jurgensen (Ch.), de Copenhague.

Remarques générales sur les transcendantes à différentielles algébriques; mémoire fort intéressant, où l'on démontre d'une manière ingénieuse plusieurs théorèmes sur les transcendantes elliptiques et autres; écrit en français (126-141).

Note relative à un mémoire de M. Richelot, sur quelques intégrales définies (en français, p. 142).

Broch (O.-J.), candidat en philosophie en Norwége.

Mémoire sur les fonctions de la forme

$$\int x^{s-rp-1}\,\varphi(x^p)\,\left(\mathrm{R}(x^p)\right)^{\pm\frac{s}{rp}}dx \text{ (pag. 145 — 195).}$$

$\varphi\,(x^p)$ désigne une fonction rationnelle quelconque de x^p; p, r, s, sont des nombres entiers; γ est le nombre entier contenu dans $\dfrac{s-1}{p}$; R (x^p) désigne la racine d'un degré entier quelconque d'une fonction rationnelle de x^p.

Ce mémoire, écrit en français, a été le sujet d'un rapport très-laudatif, fait par *M. Cauchy;* il sera inséré dans le recueil des savants étrangers.

Extrait du procès-verbal de l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg, du 24 septembre 1841 (6 octobre, p. 196-197), en français. *M. Fuss*, secrétaire de cette académie, annonce la publication prochaine qu'il va faire d'un volume contenant dix lettres de Jean Bernouilli, maître d'Euler; soixante-trois lettres de Daniel Bernouilli, fils du précédent ; quatre lettres de Nicolas Bernouilli, cousin-germain du précédent; deux lettres de Clairaut, toutes lettres adressées à Euler ; cent lettres d'Euler à Goldbach : ces dernières pleines de recherches sur divers sujets, et particulièrement sur la théorie des nombres; toute cette inappréciable correspondance est inédite. Malheureusement les réponses d'Euler aux Bernouilli n'ont pas encore été retrouvées (196-199).

Lettre inédite de Jean Bernouilli à Euler, du 11 août 1731, en allemand ; contient les idées de l'illustre géomètre sur la théorie musicale. Il croit que le beau en musique dépend des habitudes et de l'éducation de l'oreille, plutôt que de la perception d'un rapport entre des vibrations.

Fac-simile d'un écrit de Lambert, en allemand, sur la détermination précise de l'année de la naissance du Christ; une page.

THÉORÈMES A DÉMONTRER.

1. Démontrer que la circonférence qui passe par les milieux des côtés d'un triangle, a les propriétés suivantes : 1° elle passe par les pieds des trois hauteurs de triangle, et par les milieux des droites qui joignent le point de rencontre des trois hauteurs aux sommets du triangle; 2° elle est tangente aux quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle.

2. Soit $V=0$, une équation du degré m à une seule inconnue x, dont les racines $a, b, c, d, e, \ldots h$, sont inégales; et V_1 la dérivée de V. Supposons qu'on opère comme s'il s'agissait de trouver le plus grand commun diviseur entre V et V_1 en ayant soin de changer les signes des restes, lorsqu'ils serviront de diviseur, et désignons par $V_2, V_3, V_4, \ldots V_m$, ces restes changés de signe.

Les polynômes $V_1, V_2, V_3, \ldots V_m$, s'exprimeront en fonction des racines de $V=0$, d'après la règle que nous allons indiquer.

La dérivée V_1 est, comme on sait, la somme des produits $(m-1)$ à $(m-1)$, des facteurs $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, ... $(x-h)$; c'est ce que nous écrirons ainsi :

$$V_1 = \Sigma(x-b)(x-c)\ldots(x-h),$$

Pour obtenir l'expression de V_2, on multipliera chacun des produits $(m-2)$ à $(m-2)$ des facteurs $(x-a)$, $(x-b)$, $x-c)$, ... $(x-h)$, par le carré de la différence des deux racines qui n'entrent pas dans le produit considéré : la somme de ces derniers produits, multipliée elle-même par un facteur positif indépendant de x, donnera V_2 ; c'est-à-dire que

$$V_2 = \alpha\Sigma(a-b)^2(x-c)(x-d)\ldots(x-h); \qquad \alpha>0.$$

On a de même

$$V_3 = \beta\Sigma(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(x-d)\ldots(x-h); \qquad \beta>0,$$
$$V_4 = \gamma\Sigma(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2 (x-e)\ldots(x-h); \qquad \gamma>0,$$

. . . .

$$V_m = \lambda(a-b)^2(a-c)^2\ldots(a-h)^2(g-h)^2; \qquad \lambda>0.$$

C'est ce que l'on propose de démontrer.

Ce théorème a été donné, sans démonstration, par M. *Sylvester*, géomètre anglais.

ANNONCES.

Complément de Géométrie analytique, par C.-E. Page, professeur à l'école d'artillerie de la Fère (*).

Nous donnerons bientôt une analyse détaillée de cet ouvrage, qui vient d'être *autorisé* par le *Conseil royal de l'instruction publique*.

Ekman (P.-N.), professeur à l'académie royale d'Upsal.

De punctis singularibus curvarum algebraïcarum simplicis curvaturæ disquisitio. In-8. de 43 pages. Paris, 1842; *Bachelier*.

Recherches sur les points singuliers des courbes algébriques

(*) Chez Carilian-Gœury et Vor Dalmont, éditeurs, quai des Augustins, nos 39 et 41, à Paris.

planes, d'après les valeurs nulles, infinies ou indéterminées que prennent en ces points les coefficients différentiels. Dissertation méthodique qui ne renferme rien de nouveau.

FOISSY (F.). *Arithmétique, Géométrie, Arpentage.* In-16 de 4 feuilles. *Limoges*, 1842.

BIOGRAPHIE UNIVERSELLE ANCIENNE ET MODERNE, *Supplément*, tome LXX, 1842. On trouve dans ce volume les articles suivants :

1° *Landen* (John), géomètre anglais : né en 1719, mort le 15 janvier 1790. Il est l'auteur du célèbre théorème dont l'objet est de trouver un arc *hyperbolique* égal à la somme de deux arcs *elliptiques*; si important dans la théorie des fonctions elliptiques. (Auteur : M. *Fayolle.*)

2° *Laplace* (Pierre-Simon), né à *Beaumont* (*Calvados*), le 22 mars 1749, un siècle après la mort de *Descartes* (1650), et mort le 27 mars 1827, un siècle après la mort de *Newton* (5 mars 1827), (pages 237—260). On y trouve l'historique des découvertes de l'illustre géomètre, la liste de ses ouvrages et des mémoires insérés dans les recueils par ordre chronologique : le premier est de 1772, et le dernier de 1818. Une de ses dernières paroles fut : « Ce que nous savons est peu de chose, ce que nous ignorons est immense. »

On a omis de mentionner la traduction anglaise de la Mécanique céleste, par l'américain *Bowditch.* (Auteur : M. *Parisot.*)

3° *Lamberg* (Joseph-Maximilien, comte de), né en 1729, mort en 1792. Auteur d'un ouvrage singulier : *Réflexions sur les propriétés d'une courbe algébrique dont les contours marqueraient les traits d'un visage.* (*Livourne*, 1770.)

NOTE

SUR

L'ÉQUATION AUX CARRÉS DES DIFFÉRENCES,

PAR M. DESMAREST,
Ancien élève de l'École polytechnique.

Le théorème de M. Sturm, et, plus récemment, les profondes recherches de M. Cauchy, ont diminué l'importance de l'équation aux carrés des différences. Toutefois, cette recherche doit rester dans l'enseignement ; elle n'est pas sans utilité, au moins comme exercice intellectuel.

On sait qu'une équation ordinaire F $(x)=0$ étant donnée, il existe deux méthodes principales pour obtenir l'équation aux carrés des différences des racines de cette équation : la première, en éliminant x entre F $(x+y)$ et F (x) ; la deuxième exige l'emploi des fonctions symétriques. Lagrange donne la préférence à cette dernière ; les calculs sont moins longs et l'équation a tous les facteurs, et n'a que les facteurs nécessaires : cette méthode nécessite la connaissance de deux genres de fonctions.

$s_0, s_1, s_2 \ldots\ldots s_{2m'}$, sommes des puissances successives des racines de l'équation F $(x)=0$.

$S_0, S_1, S_2 \ldots\ldots S_{\frac{m(m-1)}{2}}$, sommes des puissances successives des racines de l'équation dont on cherche les coefficients.

Le théorème qui fait l'objet principal de cette note donne un moyen rapide et uniforme pour obtenir ces deux genres de fonctions ; on peut l'énoncer de la manière suivante :

Une équation ordinaire F (x)$=0$ *étant donnée*, 1° *si l'on di-*

vise la dérivée F′ (x) *par* F (x), *les coefficients des termes du quotient seront dans leur ordre* $s_0, s_1, s_2 \ldots\ldots s_{2m}$; 2° *si l'on divise les deux mêmes polynômes, modifiés par le changement de* x *en* x + y *et ordonnés selon les puissances décroissantes de* y, *les coefficients de* 2 *en* 2 *des termes du quotient, coefficients dans lesquels on changera partout* $x^0, x^1, x^2 \ldots x^p$ *en* $s_0, s_1, s_2 \ldots s_p$, *seront dans leur ordre les quantités* $2S_0, 2S_1, 2S_2 \ldots 2S_{\frac{m(m-1)}{2}}$.

Les deux parties de ce théorème sont donc intimement liées ; elles sont d'ailleurs des conséquences d'un lemme dû à M. Sturm. Ce lemme étant peu répandu, je donnerai brièvement l'énoncé et la démonstration ; je supposerai en outre, dans toute cette note, que l'équation donnée est de la forme $x^m + px^{m-1}$, etc. On reconnaîtra facilement que cette supposition est facultative.

Lemme de M. Sturm. — Une équation ordinaire $F(x) = 0$ étant donnée, quelle est la somme des valeurs que prend une fonction entière $\varphi(x)$, dans laquelle on remplace successivement x par toutes les racines de $F(x)$.

Si on divise $F'(x) \times \varphi(x)$ par $F(x)$, le coefficient du premier terme du reste, ou le coefficient k du terme kx^{-1} du quotient (ces deux quantités sont les mêmes), donne la valeur cherchée.

Posons l'identité connue

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \ldots\ldots \frac{1}{x-l},$$

multiplions les deux membres par $\varphi(x)$, exécutons les divisions partielles, et réunissons les quotients, on a

$$\frac{F'(x) \times \varphi(x)}{F(x)} = \psi(x) + \frac{\varphi(a)}{x-a} + \frac{\varphi(b)}{x-b} + \ldots\ldots \frac{\varphi(l)}{x-l}.$$

Cette identité peut être écrite de la manière suivante :

$$\frac{F'(x)\times\varphi(x)}{F(x)}=\psi(x)+x^{m-1}\left[\frac{\varphi(a)+\varphi(b)+\ldots..\varphi(l)}{(x-a)(x-b)\ldots.x-l}\right]$$
$$+\frac{H}{(x-a)(x-b)\ldots.x-l},$$

H désignant l'ensemble des termes dans lesquels la puissance de x est inférieure à $m-1$: or, il est évident que le coefficient du terme en x^{m-1} donné dans le reste du premier membre devra avoir pour numérateur une quantité égale à $\varphi(a)+\varphi(b)+\ldots..\varphi(l)$; ce qui démontre le lemme énoncé. On voit aussi que si l'on continue la division une fois de plus, le coefficient obtenu sera celui de x^{-1} dans le quotient.

1° *Recherches des sommes* $s_0, s_1, s_2 \ldots.. s_{2m}$. Soit l'équation F $(x)=0$ et posons $x^h=\varphi(x)$, les plus hautes puissances de x dans $F'(x)\varphi(x)$ et F (x), seront $m+h-1$ et m; si donc on arrête la division de ces polynômes lorsque le premier terme du reste est du degré $m-1$, le coefficient de ce terme sera

$$a^h+b^h+c^h+\ldots.\,l^h \quad \text{ou} \quad s_h.$$

Si l'on donne successivement à h les valeurs 0, 1, 2, 3 ..... $2m$, il y aura toujours égalité entre l'accroissement donné à h et l'accroissement dans le nombre des divisions à effectuer pour obtenir le reste du degré $m-1$ ou le coefficient de x^{-1} dans le quotient; donc, ces coefficients seront dans leur ordre les quantités

$$s_0,\quad s_1,\quad s_2\ldots.\ s_{2m}.$$

On observera que l'emploi du facteur x^h est inutile dans la pratique; la suppression de ce facteur donnera au quotient de F' (x) par F (x) la forme suivante :

$$s_0x^{-1}+s_1x^{-2}+s_2x^{-3}+\ldots.\ s_{2m}x^{-(2m+1)},$$

ce qui démontre la première partie énoncée.

Une division analogue donnerait les sommes négatives, mais ces sommes sont étrangères à l'objet qui nous occupe.

2° *Recherche des sommes* $S_0, S_1 \ldots S_{\frac{m(m-1)}{2}}$. Soit l'équation $F(x)=0$; a étant une racine particulière, y la différence entre a et une racine quelconque de cette équation, posons les 2 polynômes

$$F(a+y) \quad \text{et} \quad (x-a)^{2h}=y^{2h}=\varphi(y);$$

appliquons à ces deux fonctions le principe posé par le lemme de M. Sturm, c'est-à-dire divisons $F'(a+y)\times\varphi(y)$ par $F(a+y)$, et donnons à h les valeurs successives 0, 1, 2,..... $p \ldots \frac{m(m-1)}{2}$.

Si dans chaque hypothèse particulière, faite pour h, nous arrêtons la division lorsque le quotient offre le terme Qx^{-1}, ces temps d'arrêt auront lieu de 2 en 2, et les coefficients respectifs, c'est-à-dire les valeur de Q, seront successivement

$$\left.\begin{array}{ll} (\text{si } h=1) & (a-a)^2+(b-a)^2+\ldots.(l-a)^2, \\ (\text{si } h=2) & (a-a)^4+(b-a)^4+\ldots.(l-a)^4, \\ \vdots & \\ \vdots & \\ (\text{si } h=p) & (a-a)^{2p}+(b-a)^{2p}+\ldots.(l-a)^{2p}. \end{array}\right\} \quad (A)$$

Observons qu'une des lignes, celle de l'ordre p par exemple, du tableau A, n'exprime que la somme des puissances p des carrés des différences qui existent entre la racine a et une racine quelconque de $F(x)=0$; la question est donc celle-ci : Quelle valeur acquiert la ligne p si l'on remplace a successivement par chacune des racines de $F(x)$?

Développons chacun des termes de la ligne citée; ordonnons selon les puissances de a : les changements successifs exigés apportent les modifications suivantes :

1° Un terme quelconque dépendant de a (ka^v par ex.) devient $k(a^v+b^v\ldots..l^v)$, c'est-à-dire ks_v;

2° Un terme quelconque dépendant de a ou fonction de $a^{\bullet}$ (b^{2p} par ex.), qui n'existait nécessairement qu'une fois, sera répetée m fois ou s_0 fois;

3° Le résultat final sera $2S_p$, puisqu'un terme $(b-a)^{2p}$, par ex., sera aussi sous la forme $(a-b)^{2p}$.

Donc, si dans le coefficient cité on remplace $a^0, a^1, a^2 \ldots\ldots a^p$ par $s_0, s_1, s_2 \ldots\ldots s$, le résultat sera $2S_p$.

On a vu d'ailleurs que l'emploi du facteur y^{2h} était inutile; on peut aussi reconnaître que la lettre x mise à la place de la lettre a simplifie l'énoncé du théorème : par conséquent, si on divise $F'(x+y)$ par $F(x+y)$, le quotient obtenu sera de la forme

$$my_0 + Py^{-1} + B_1 y^{-2} + Qy^{-3} + B_2 y^{-4} + Ry^{-5} + B_3 y^{-6} + \text{etc.},$$

Si dans les termes B, B_2, etc., qui font des fonctions d'x, on change $x^0, x^1, x^2 \ldots\ldots x^{2p}$ en $s_0, s_1, s_2 \ldots\ldots s_{2p}$, les résultats seront

$$2S_1,\quad 2S_2 \ldots\ 2S_p.$$

Le coefficient m de y^0 obéit à la loi générale, mais une remarque est indispensable. Ce coefficient est indépendant de x; il doit donc être multiplié par $s_0 = m$; dans ce cas particulier, le produit m^2 doit être diminué de m, car les racines $(a-a)$ $(b-b)$, etc., nulles si la puissance existe, donnent l'unité si la puissance est zéro : cette modification faite on a

$$m^2 - m \quad \text{ou} \quad m(m-1) = 2S_0.$$

La deuxième partie du théorème est donc démontrée.

Exemple. Lagrange (Résolutions des équations numériques de tous les degrés, p. 110, 2e édition) rappelle que son second mémoire (*) sur ce sujet renferme les équations aux carrés des différences pour les 2e, 3e, 4e degrés; mais il donne, dans l'ouvrage cité, et d'après Waring, cette équation pour le 5e degré (**). Le mémoire de Lagrange étant peu répandu,

---

(*) Mémoires de l'Académie de Berlin, 1768. Tm.

(**) Le coefficient d renferme une erreur. Il faut 200 au lieu de 1200 (p. 111). Tm.

j'ai pris pour exemple l'équation aux carrés des différences pour le 4e degré. La disparition du 2e terme d'une équation étant sans influence sur la recherche qui nous occupe, posons

$$F(x) = x^4 + px^2 + qx + r.$$

Si l'on divise les deux polynômes

$$F'(x) = 4x^3 + 2px + q, \quad F(x) = x^4 + px^2 + qx + r,$$

les coefficients successifs du quotient seront

$s_0 = 4$,
$s_1 = 0$,
$s_2 = -2p$,
$s_3 = -3q$,
$s_4 = 2p^2 - 4r$,
$s_5 = 5pq$,
$s_6 = 3q^2 + 6pr - 2p^3$,
$s_7 = 7rq - 7p^2q$,
$s_8 = 4r^2 - 8pq^2 + 2p^4 - 8p^2r$,
$s_9 = -3q^3 + 9p^3q - 18pqr$,
$s_{10} = 15p^2q^2 - 10rq^2 + 10p^3r - 10pr^2 - 2p^5$,
$s_{11} = 33p^2qr + 11pq^3 - 11r^2q - 11p^4q$,
$s_{12} = -4r^3 + 36prq^2 + 3q^4 - 24p^3q^2 + 18p^2r^2 - 12p^4r + 2p^6$.

Si, dans les deux polynômes cités, on change x en $x+y$, et si, dans le quotient, on choisit de 2 en 2 les coefficients des termes des puissances paires négatives de y, ces coefficients, modifiés par les changements respectifs de $x^0, x^1, x^2 \ldots\ldots x^p$ en $s_0, s_1, \ldots\ldots s_p$, donnent pour résultat :

$S_1 = -8p$,
$S_2 = 20p^2 - 16r$,
$S_3 = -78q^2 + 144pr - 68p^3$,
$S_4 = 576r^2 + 640pq^2 + 260p^4 - 928p^2r$,
$S_5 = -3630p^2q^2 - 40rq^2 + 4960p^3r - 5440pr^2 - 1028p^5$,
$S_6 = -7936r^3 - 5664prq^2 + 18120p^3q^2 - 24336p^4r + 37824p^2r^2$
$+ 2190q^4 + 4100p^6$.

Si on substitue les valeurs de S_1, S_2 dans les formules connues,

$$P+S_1=0,$$
$$S_2+PS_1+2Q=0.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

les coefficients P, Q, R, T, U, V, de l'équation cherchée sont

$$P=8p,$$
$$Q=8r+22p^2,$$
$$R=28p^3+16pr+26q^2,$$
$$T=17p^4+24p^2r+48pq^2-112r^2,$$
$$U=18p^2q^2+216rq^2+32p^3r-192pr^2+4p^5,$$
$$V=256r^3+144prq^2-4p^3q^2+16p^4r-128p^2r^2-27q^4,$$

Le théorème précédent est un cas particulier du théorème général suivant que nous examinerons : Trouver par des divisions algébriques les coefficients d'une équation dont les racines sont des fonctions simples entières des racines d'une autre équation.

E. DESMAREST,
anc. él. de l'École polytechnique.

NOTE

Sur la somme des puissances semblables de plusieurs nombres en progression arithmétique, et sur quelques propriétés des nombres premiers.

PAR M. LIONNET,
Professeur au Collége royal de Louis-le-Grand.

1. La formule, au moyen de laquelle on calcule la somme s_m des puissances entières du degré m de plusieurs nombres $a, b, c, \ldots k, l$, en progression arithmétique est :

$$s_m=l^m+\frac{l^{m+1}-a^{m+1}}{(m+1)r}-\frac{m}{2}r(s_{m-1}-l^{m-1})-\frac{m(m-1)}{2.3}r^2(s_{m-2}-l^{m-2})-\text{etc.},$$

dans laquelle r désigne la raison de la progression. Nous allons reprendre la démonstration de cette formule, en y introduisant une légère modification, qui nous permettra de lui donner une forme plus simple.

On a les relations

$$b=a+r,\quad c=b+r,\quad d=c+r\ldots\quad l=k+r,$$

d'où on déduit, par la formule du binôme,

$$b^{m+1}=a^{m+1}+\frac{m+1}{1}ra^m+\frac{(m+1)m}{1.2}r^2a^{m-1}+\text{etc}\ldots+\frac{m+1}{1}r^ma+r^{m+1},$$

$$c^{m+1}=b^{m+1}+\frac{m+1}{1}rb^m+\frac{(m+1)m}{1.2}r^2b^{m-1}+\text{etc}\ldots+\frac{m+1}{1}r^mb+r^{m+1},$$

. . . .

. . . .

$$l^{m+1}=k^{m+1}+\frac{m+1}{1}rk^m+\frac{(m+1)m}{1.2}r^2k^{m-1}+\text{etc}\ldots+\frac{m+1}{1}r^mk+r^{m+1}.$$

On a de même

$$(l+r)^{m+1}=l^{m+1}+\frac{m+1}{1}rl^m+\frac{(m+1)m}{1.2}r^2l^{m-1}+\text{etc}\ldots+\frac{m+1}{1}r^ml+r^{m+1}.$$

Ajoutant ces égalités, et supprimant les termes b^{m+1}, $c^{m+1}\ldots l^{m+1}$, communs aux deux membres de l'égalité résultante, il vient

$$(l+r)^{m+1}=a^{m+1}+\frac{m+1}{1}rs_m+\frac{(m+1)m}{1.2}r^2s_{m-1}+\ldots+\frac{m+1}{1}r^ms_1+r^{m+1}s_0.$$

et, par suite,

$$(\text{A})\ldots s_m=\frac{(l+r)^{m+1}-a^{m+1}}{(m+1)r}-\frac{m}{2}rs_{m-1}-\frac{m(m-1)}{2.3}r^2s_{m-2}-\text{etc}\ldots$$
$$-r^{m-1}s_1-\frac{r^ms_0}{m+1}.$$

Telle est la formule qu'il s'agissait d'obtenir.

2. Théorème. P *étant un nombre premier plus grand que* 2 *et* m *un nombre entier compris entre* 0 *et* P—1, *la somme des puissances du degré* m *des nombres* 1, 2, 3 ...P —1 *est divisible par* P.

Pour appliquer la formule (A) au cas particulier des termes de la progression arithmétique ÷ 1, 2, 3...P — 1, il suffit d'y faire $a=1$, $r=1$, $l=s_0=P-1$. Alors elle devient

$$\text{(B)}\quad s_m=\frac{P(P^m-1)}{m+1}-\frac{m}{2}s_{m-1}-\frac{m(m-1)}{2.3}s_{m-2}-\text{etc.}\ldots-s_1.$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par 1, 2, 3... $m(m+1)$, on aura

$$1.2.3\ldots m(m+1)s_m=1.2.3\ldots m.P(P^m-1)-A_1s_{m-1}$$
$$-A_2s_{m-2}-\text{etc.}\ldots-A_{m-1}s_1,$$

A_1, A_2, A_3... A_{m-1} étant des nombres entiers.

On voit par là que si l'on suppose chacune des sommes s_1, s_2... s_{m-1} divisible par P, il en sera de même du produit 1, 2, 3... $m(m+1)s_m$; mais, par hypothèse, on a $m<P-1$, et, par suite, $m+1<P$; donc, le nombre premier P ne divise aucun des facteurs du produit 1, 2, 3...$m(m+1)$; donc, il divise s_m. D'ailleurs, puisqu'on suppose $P>2$, la somme s^1, ou $\frac{P(P-1)}{2}$, est divisible par P; donc, en vertu de ce qui précède, s_2 est aussi divisible par P; s_1 et s_2 étant divisibles par P, il en sera de même de la somme s_3, et ainsi de suite jusqu'à s_{P-2} inclusivement.

3. Théorème. P *étant un nombre premier plus grand que* 2 *et* m *un nombre entier compris entre* 0 *et* P — 1, *la somme* P_m *des produits* m *à* m *des nombres* 1, 2, 3 ... P — 1 *est divisible par* P.

En effet, les nombres P_1, P_2, P_3...P_m et ceux qu'on a désignés précédemment par s_1, s_2, s_3 ... s_m sont liés entre eux par la relation connue

$$\text{(C)}\qquad s_m-P_1s_{m-1}+P_2s_{m-2}-\text{etc.}\ldots\mp P_{m-1}s_1=\mp mP_m,$$

dans laquelle on donne au second membre le signe — ou le signe +, suivant que m est pair ou impair. Or, en vertu du théorème précédent, chacun des nombres s_1, s_2... s_m est divisible par P_1; donc, mP_m et, par suite, P_m est aussi divible par P.

4. **Théorème.** P *étant un nombre premier, le produit* 1, 2, 3...(P—1) *augmenté de* l'unité *est divisible par* P*; et réciproquement, tout nombre* P, *qui satisfait à cette condition, est premier.*

1° Car, si l'on conçoit le produit des P—1 binômes $(1+1)$, $(1+2)$, $(1+3)$, ... $[1+(P-1)]$ $[1+(P-2)]$ $[1+(P-3)]$, ordonné suivant les puissances décroissantes de leur premier terme 1, on aura l'égalité

$$1.2.3...(P-1).P=1+P_1+P_2+P_3+...+P_{P-2}+1.2.3...(P-1),$$

dans laquelle P_1, P_2 ... P_{P-2} ont la même signification que dans la démonstration du théorème précédent; or, en vertu de ce théorème, chacun des nombres P, P_2 ... P_{P-2} est divisible par P; d'ailleurs, le produit 1, 2, 3 . . (P—1) P est aussi divisible par P; donc, il en est de même de 1, 2, 3...(P—1)+1.

2° Soit L un diviseur de P, inférieur à P. Ce nombre L sera l'un des facteurs 1, 2, 3... P—1; donc, il divisera leur produit; d'ailleurs L, étant diviseur de P, divise aussi le nombre 1, 2, 3 ... (P—1)+1, qui est multiple de P; donc L=1; donc le nombre P n'admet pour diviseurs que P et l'unité; donc, il est premier.

Ce théorème, dont *Waring* attribue l'énoncé à *Jean Wilson*, et le théorème précédent ont été démontrés, pour la première fois, par *Lagrange* (Nouveaux mémoires de l'Académie de Berlin, année 1771). Lorsqu'on prouve d'abord, comme l'a fait *Lagrange*, que tous les produits P_1, P_2, P_3 ... P_{p-2} sont divisibles par P, il est facile de démontrer ensuite, au moyen de la formule (C), que chacune des sommes s_1, s_2. s_3, ... s_{P-2} est aussi divisible par P. En suivant une autre marche, nous avons eu pour objet de mettre les démonstrations de ces théorèmes plus à la portée des élèves.

QUESTION SUR LES PROBABILITÉS,

SOLUTION PAR M. LÉVY (*).

Il y a dans une urne m boules qui peuvent être : ou toutes blanches, ou toutes noires, ou bien les unes blanches, les autres noires, dans un rapport inconnu. On tire à la fois 2 boules de cette urne, une de chaque main ; on regarde la boule qui est dans l'une des mains ; elle est blanche : combien y a-t-il à parier pour et contre que la boule qui est dans l'autre main est aussi blanche ?

Rappelons d'abord la formule suivante :

$$1.2+2.3+3.4+\ldots.+(m-1)m=\frac{(m-1)m(m+1)}{3}.$$

Cela posé, puisque avant le tirage on peut admettre qu'il y a dans l'urne soit :

m *blanches*,
ou $(m-1)$ *blanches* et 1 *noire* ;
ou $(m-2)$ *blanches* et 2 *noires* ;
ou $(m-3)$ *blanches* et 3 *noires* ;
⋮
soit 3 *blanches* et $(m-3)$ *noires* ;
ou 2 *blanches* et $(m-2)$ *noires* ;
ou 1 *blanche* et $(m-1)$ *noires* ;
soit m *noires*.

c'est donc comme si on avait $(m+1)$ urnes qui contiendraient l'une m *blanches*, l'autre $(m-1)$ *blanches* et 1 *noire* ; la 3^e $(m-2)$ *blanches* et 2 *noires* ; etc., et on ignore dans laquelle de ces $(m+1)$ urnes le tirage se fait.

(*) Célèbre cristallographe, bon géomètre, mort en 1841, professeur au collége Charlemagne ; communiqué par M. Coupy, un de ses élèves.

Or, chaque urne contenant m boules, le nombre de tirages possibles dans chaque urne est $m\ (m-1)$. D'ailleurs, il y a $m+1$ urnes; donc, le nombre total de tirages possibles est $(m+1)\ m\ (m-1)$.

[Nous considérons ici les arrangements et non les combinaisons, parce que l'énoncé de la question exige bien évidemment qu'on ait égard à l'ordre des tirages.]

Il est d'ailleurs bien évident qu'il y a autant de tirages qui commencent par une boule noire que de tirages commençant par une boule blanche, et comme, par hypothèse, la première boule tirée est blanche, il faut prendre la moitié du nombre ci-dessus pour avoir le nombre de tirages possibles, commençant par une boule blanche. Ce nombre est donc :

$$\frac{(m+1)\ (m)\ (m-1)}{2}.$$

Voyons le nombre de cas favorables à l'arrivée d'une seconde boule blanche.

Comme on a déjà tiré une blanche, on exclut par cela même la $(m+1)^{ème}$ urne qui ne contient que des noires. Restent donc les m premières urnes.

Or, comme les 2 boules se tirent à la fois, le nombre de chances d'amener 2 blanches de la première urne qui en renferme m, est $m\ (m-1)$; de la seconde urne, c'est $(m-1)$ $(m-2)$, etc.; de la $(m-1)^{ème}$ urne, c'est (2×1) ou 2; de la $m^{ème}$, c'est 0 : car, elle ne contient qu'une blanche.

Le nombre de chances d'amener 2 blanches est donc

$$m\,(m-1)+(m-1)\,(m-2)+(m-2)\,(m-3)\ldots$$
$$+2\times1=\frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{2},$$

par conséquent le nombre de chances d'amener 1 blanche et 1 noire est

$$\frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{2}-\frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{3}=\frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{6}.$$

Ce qui montre que ce nombre est précisément la moitié du nombre de chances d'amener 2 blanches. Ainsi, quel que soit le nombre m, il y a 2 à parier contre 1 que la seconde boule sera blanche, la première l'étant, pourvu toutefois que l'on ignore complétement la proportion des boules blanches et des boules noires.

Ce résultat est extrêmement remarquable.

On peut donner à ce problème cet autre énoncé :

On a deux cartes sur une table, dont on ignore la couleur. On retourne l'une, elle est rouge ; combien y a-t-il à parier pour et contre que l'autre sera aussi rouge ?

Si ces 2 cartes ont été tirées d'un paquet de cartes pouvant être ou toutes rouges, ou toutes noires, ou rouges et noires, en proportion quelconque....., d'après ce qui précède, il y aura 2 à parier contre 1 que la seconde carte est aussi rouge. Mais si on sait que ces deux cartes proviennent d'un jeu de piquet où il y a 16 rouges et 16 noires, alors non-seulement on ne pourra plus parier 2 contre 1, mais pas même 1 contre 1 que la seconde carte est rouge. En effet, il n'y a plus que 15 rouges, tandis qu'il y a encore 16 noires : il ne faudra donc parier que 15 contre 16, ou 0,9375 contre 1 que la seconde est aussi rouge. Cet exemple nous fait bien saisir qu'il est indispensable, pour que la solution du problème soit exacte, que l'on soit dans une complète incertitude sur le nombre de choses d'une couleur, et le nombre de choses de l'autre couleur.

Nous nous sommes appuyé sur la formule suivante :

$$1.2+2.3+3.4+4.5+\ldots\ldots+(m-1)m=\frac{(m+1)m(m-1)}{3},$$

qui n'est qu'un cas particulier de ce problème fort simple : Trouver la somme des produits obtenus en multipliant terme à terme tant de progressions arithmétiques que l'on voudra.

Nous allons démontrer cette formule par un autre moyen.

Rappelons d'abord que, de même qu'il y a des arrangements avec répétition (Voir t. Ier, pag. 44 des *Nouvelles annales*), il y a encore des combinaisons avec répétitions, appelées aussi combinaisons complètes. Ainsi, dans les combinaisons complètes de m lettres a, b, c, etc., n à n, on a des produits tels que ceux-ci :

$$\begin{array}{lll} a^n, & b^n, & c^n,\ldots.. \\ a^{n-1}b, & a^{n-1}c,\ldots. & \\ a^{n-2}b^2, & a^{n-2}c^2,\ldots. & \text{etc.}\ldots \end{array}$$

En appelant $R_{m,n}$ le nombre de combinaisons complètes de m lettres n à n, nous supposons connue la formule (*) :

$$R_{m,n} = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots.(m+n-1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Cela posé, désignant par $R_{m,n}$ le nombre de combinaisons complètes de m lettres n à n, ces combinaisons se partagent en 2 groupes : 1° celles qui ne contiennent pas la lettre a; 2° celles qui renferment cette lettre. Le nombre des premières est $R_{m-1,n}$. Toutes les secondes sont divisibles par a, et on a pour leur nombre, après les avoir divisées toutes par a, $R_{m,n-1}$; donc, on a $R_{m,n} = R_{m-1,n} + R_{m,n-1}$.

Cette égalité est vraie quel que soit m; changeons-y m successivement en

$$m-1,\quad m-2,\quad m-3,\quad m-4,\quad m-5\ldots\ldots.2,\quad 1,$$

on aura

$$R_{m-1,n} = R_{m-2,n} + R_{m-1,n-1},$$
$$R_{m-2,n} = R_{m-3,n} + R_{m-2,n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R_{2,n} = R_{1,n} + R_{2,n-1},$$
$$R_{1,n} = R_{1,n-1}. \qquad \text{Car} \qquad R_{0,n} = 0,$$

d'où

$$R_{m,n} = R_{m,n-1} + R_{m-1,n-1} + R_{m-2,n-1} + \ldots. + R_{1,n-1},$$

(*) Nouvelles Annales, p. 87.

ou

$$\frac{m(m+1)\ldots.(m+n-1)}{1.2.3\ldots.\, n} = \frac{m(m+1)\ldots.(m+n-2)}{1.2.3\ldots.\,(n-1)}$$
$$+\frac{(m-1)m(m+1)\ldots(m+n-3)}{1.2\ldots(n-1)}+\ldots..+\frac{3.4\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$+\frac{2.3\ldots.\, n}{1.2\ldots.\,(n-1)}+\frac{1.2\ldots.\,(n-1)}{1.2\ldots.\,(n-1)},$$

ou

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{n}=1.2.3\ldots(n-1)+2.3.4\ldots n$$
$$+3.4.5\ldots n+1+\ldots.+(m-1)m(m+1)\ldots.(m+n-3)$$
$$+m(m+1)\ldots.(m+n-2).$$

Cette formule est vraie quel que soit n ; faisons-y $n=3$.

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{3}=1.2+2.3+3.4+4.5+\ldots+(m-1)m+m(m+1).$$

Cela est vrai, quel que soit m; changeons donc m en $m-1$; nous aurons

$$\frac{(m-1)m(m+1)}{3}=1.2+2.3+3.4+\ldots+(m-2)(m-1)+(m-1)m.$$

C'est la formule que nous voulions démontrer.

PROBLÈMES PROPOSÉS AUX EXAMENS.

SOLUTIONS DE M. L. ANNE,
Répétiteur au Collége royal de Louis-le-Grand.

PREMIÈRE QUESTION.

1. *Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle soient exprimées par des nombres commensurables ?*

ou, ce qui revient au même,

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la somme de deux carrés parfaits soit elle-même un carré parfait?

Soient a, b, c trois nombres commensurables exprimant les longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle, a celle de l'hypoténuse, b et c celles des deux côtés de l'angle droit, il faut et il suffit :

1° Que a soit la somme de deux carrés;

2° Que b soit la différence de ces mêmes carrés;

3° Et que c soit le double produit des racines carrées de ces mêmes carrés.

Si ces trois conditions sont remplies, *le produit* abc *de ces trois nombres forme toujours un nombre divisible par* 60.

D'abord, il est clair que ces conditions sont suffisantes ; car si l'on a, par exemple,

$$a = m^2 + n^2,$$
$$b = m^2 - n^2,$$
$$c = 2mn,$$

on en déduit

$$a^2 = (m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2 \text{ ou } a^2 = b^2 + c^2.$$

De plus, chaque côté est plus petit que la somme des deux autres, donc le triangle est possible, et il est rectangle.

Il reste à établir que ces conditions sont nécessaires,

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{donne} \quad b^2 = a^2 - c^2 = (a + c)(a - c),$$

pour qu'un nombre soit un carré parfait, il faut et il suffit que ses facteurs premiers soient élevés à des puissances paires; donc, si l'un des nombres $(a + c)$ ou $(a - c)$ n'est pas un carré parfait, il faut que tout facteur premier, élevé à une puissance impaire dans l'un de ces deux nombres, se retrouve élevé à une puissance impaire dans l'autre ; de sorte que $(a+c)$ et $(a-c)$ sont de la forme

$$a+c=pq^2,$$
$$a-c=pt^2,$$

d'où

$$a=p\left(\frac{q^2+t^2}{2}\right),$$
$$c=p\left(\frac{q^2-t^2}{2}\right),$$
$$b=pqt.$$

Tous les triangles semblables jouissant des mêmes propriétés, on doit prendre pour valeurs élémentaires

$$a=\frac{q^2+t^2}{2}, \quad b=qt, \quad c=\frac{q^2-t^2}{2};$$

mais les longueurs des trois côtés du triangle étant exprimées en nombres commensurables, peuvent et même doivent être supposées exprimées en nombres entiers, d'où il suit que q et t doivent être tous les deux pairs ou tous le deux impairs :

1° Tous les deux pairs $q=2M \qquad t=2N.$

$$\begin{aligned} a &= 2M^2+2N^2 = (M+N)^2+(M-N)^2, \\ b &= 4MN \qquad\quad = (M+N)^2-(M-N)^2, \\ c &= 2M^2-2N^2 = 2(M+N)(M-N). \end{aligned}$$

Les trois nombres a, b, c ont bien la forme énoncée.

2° Tous deux impairs $q=2M+1 \qquad t=2N+1.$

$$\begin{aligned} a &= 2M^2+2M+1+2N^2+2N = (M+N+1)^2+(M-N)^2, \\ b &= 4MN+2M+2N+1 \qquad = (M+N+1)^2-(M-N)^2, \\ c &= 2M^2+2M-2N^2-2N \quad = 2(M+N+1)(M-N); \end{aligned}$$

Les trois nombres a, b, c ont bien encore la forme énoncée ; donc, les conditions énoncées sont nécessaires et suffisantes.

Ces trois conditions étant remplies, le produit des trois nombres a, b, c forme un nombre divisible par 60 :

$$a=m^2+n^2, \quad b=m^2-n^2, \quad c=2mn.$$

Il suffit de démontrer que le produit abc admet les diviseurs 3, 4, 5, et même il suffit de ne raisonner que dans l'hypothèse où chacun des nombres m et n est premier avec ces nombres; car autrement c admettrait ces diviseurs, et conséquemment le produit abc les admettrait aussi.

1° Tout nombre premier avec 3 est de la forme $3p\pm 1$; son carré $9p^2\pm 6p+1$ est de la forme $3p'+1$; donc, m et n étant premiers avec 3, le nombre $b=m^2-n^2$ est divisible par 3, et par suite, le produit abc l'est aussi.

2° Tout nombre premier avec 4 est de la forme $2p+1$; son carré $4p^2+4p+1=4p(p+1)+1$ est de la forme $8p'+1$; donc, m et n étant premiers avec 4, les nombres a, b, c sont de la forme

$$a = 2(4m'+4n'+1),$$
$$b = 8(m'-n'),$$
$$c = 2(2m'+1)(2n'+1).$$

Quand même par suite de la similitude, on supprimerait le facteur 2 commun à a, b et c, le produit abc serait encore divisible par 4.

3° Tout nombre premier avec 5 est de l'une des formes $5p\pm 1$ ou $5q\pm 2$ leurs carrés.

$$25p^2\pm 10p+1,$$
$$25q^2\pm 20q+4,$$

sont de l'une des deux formes $5n\pm 1$,

m et n étant premiers avec 5, il est clair que l'un des deux nombres a ou b,

$$a=m^2+n^2,\quad b=m^2-n^2,$$

est nécessairement divisible par 5; donc aussi le produit abc, ce qu'il fallait démontrer.

DEUXIÈME QUESTION.

Dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle ou à une el-

lipse, la droite, qui joint les milieux des diagonales, passe par le centre de la courbe.

Si le quadrilatère circonscrit au cercle est un parallélogramme, ce parallélogramme est un losange dont les diagonales se coupent au centre du cercle.

Si le quadrilatère circonscrit à l'ellipse est un parallélogramme, ses diagonales se coupent au centre de l'ellipse et forment un système de diamètres conjugués, quelle que soit la direction des côtés du parallélogramme.

1° Soit le quadrilatère ABCD (*fig.* 45) circonscrit au cercle dont le centre est au point E, soit M le milieu de la diagonale AC, la droite ME prolongée coupe l'autre diagonale BD en un point N, qui est son milieu.

Pour cela, il suffit de démontrer que les triangles BME, DME sont équivalents; car alors la base EM étant la même, les hauteurs BF, DG sont égales, et les triangles rectangles BNF, DNG sont égaux, comme ayant les angles égaux et un côté de l'angle droit égal, et par suite, les hypoténuses BN, ND le sont aussi.

M étant le milieu de AC, les triangles BMA et BMC, AME et CME, DMA et DMC sont équivalents : cela posé,

$$\text{BME} = \text{BEA} - \text{BMA} - \text{AME},$$
$$\text{BME} = \text{BMC} + \text{CME} - \text{BEC},$$

ajoutant et réduisant,

$$2\text{BME} = \text{BEA} - \text{BEC} = \frac{\text{rayon}}{2}(\text{AB} - \text{BC});$$

$$\text{DME} = \text{DEA} + \text{AME} - \text{DMA},$$
$$\text{DME} = \text{DMC} - \text{DEC} - \text{CME},$$

ajoutant et réduisant,

$$2\text{DME} = \text{DEA} - \text{DEC} = \frac{\text{rayon}}{2}(\text{AD} - \text{DC});$$

le quadrilatère étant circonscriptible,

$$\text{AB} + \text{DC} = \text{AD} + \text{BC} \quad \text{d'où} \quad \text{AB} - \text{BC} = \text{AD} - \text{DC}.$$

Donc, les triangles BME, DME sont équivalents; ce qu'il fallait démontrer.

Scholie. Cette égalité $AB-BC=AD-DC$ montre que l'on peut considérer A et C comme les foyers d'une hyperbole passant par les points B et D, M milieu de AC comme son centre, et MN comme le diamètre conjugué de celui qui est parallèle à BD, alors MN doit passer par le sommet de l'angle circonscrit à l'hyperbole, et dont la corde de contact est BD; toute tangente étant bissectrice de l'angle des rayons vecteurs menés au point de contact, les côtés de cet angle sont bissecteurs des angles ABC, ADC, et par suite le rencontrent au centre du cercle; le sommet de cet angle doit se trouver à la fois sur MN et au centre du cercle; donc MN passe par le centre du cercle; ce qui forme une autre démonstration.

2° Même théorème pour l'ellipse.

Toute ellipse peut être considérée comme la section d'un cylindre droit à base circulaire par un plan oblique à l'axe, et sa tangente comme l'intersection de son plan et du plan tangent au cylindre, son centre est à la rencontre de son plan et de l'axe; en un mot, ce cylindre est le cylindre projetant l'ellipse; la projection du milieu d'une droite est toujours le milieu de la projection de la droite et réciproquement.

Donc, le théorème étant vrai pour le cercle, est encore vrai pour l'ellipse (*).

Théorème.

Tout parallélogramme circonscrit à un cercle est un losange, et ses diagonales passent par le centre.

Les droites AE, BE, CE, DE (*fig.* 46), étant bissectrices des angles du parallélogramme, chacun des quatre triangles

(*) Le théorème est de Newton (Princ. math., lib. I, coroll. 3, lem. 25). Il existe aussi pour les coniques à branches infinies. Tm.

ABE, BEC, CED, DEA est égal à celui qui le suit, comme ayant les angles égaux et un côté commun; donc, ces quatre triangles sont égaux entre eux, et les quatre angles au centre sont droits ; ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème.

Les diagonales de tout parrallélogramme circonscrit à une ellipse passent par le centre et forment un système de diamètres conjugués.

Supposons l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes, et ABCD (*fig.* 47) le parallélogramme circonscrit, les équations des quatre côtés seront de la forme

$$\begin{array}{ll} \text{AD} & y = mx + \sqrt{m^2a^2 + b^2}, \\ \text{CB} & y = mx - \sqrt{m^2a^2 + b^2}, \\ \text{AB} & y = px + \sqrt{p^2a^2 + b^2}, \\ \text{CD} & y = px - \sqrt{p^2a^2 + b^2}. \end{array}$$

Le point A rencontre de AD et de AB aura pour coordonnées,

$$y_1 = \frac{p\sqrt{m^2a^2 + p^2} - m\sqrt{p^2a^2 + b^2}}{p - m},$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{m^2a^2 + b^2} - \sqrt{p^2a^2 + b^2}}{p - m}.$$

A cause de la symétrie, le point C aura pour coordonnées

$$y_2 = -y_1 \quad \text{et} \quad x_2 = -x_1.$$

Donc, A C passe par le centre; ce qu'il fallait démontrer.

Son équation est

$$y = \frac{p\sqrt{m^2a^2 + b^2} - m\sqrt{p^2a^2 + b^2}}{\sqrt{m^2a^2 + b^2} - \sqrt{p^2a^2 + b^2}}\, x = \frac{y_1}{x_1}\, x,$$

L'équation de BD s'obtiendra en changeant dans celle de AC le signe de l'un des deux radicaux.

$$\text{BD} \qquad y = \frac{r\sqrt{m^2a^2+b^2}+m\sqrt{p^2a^2+b^2}}{\sqrt{m^2a^2+b^2}+\sqrt{p^2a^2+b^2}}\,x = \frac{y_3}{x_3}\,x,$$

$$\frac{y_1}{x_1}\times\frac{y_3}{x_3} = \frac{p^2m^2a^2+p^2b^2-m^2p^2a^2-m^2b^2}{m^2a^2+b^2-p^2a^2-b^2} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Donc, ces diagonales forment un système de diamètres conjugués.

NOTE
SUR
LE RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE;

PAR E. CATALAN.

On sait qu'en désignant par A l'aire d'un polygone régulier inscrit, par B l'aire du polygone circonscrit semblable, par A′ et B′ les quantités analogues pour deux polygones d'un nombre double de côtés, l'on a :

$$A' = \sqrt{AB}, \qquad B' = 2\frac{AB}{A+A'} \text{ (*)}.$$

Représentons par A_0, A_1,..... A_{m-1}, A_m, les aires des polygones successifs inscrits, par B_0, B_1,.....B_{m-1}, B_m, les aires des polygones circonscrits, nous aurons les deux relations générales,

$$(A_m)^2 = A_{m-1}\,.\,B_{m-1}, \qquad (1)$$

$$B_m = 2\frac{A_{m-1}\,.\,B_{m-1}}{A_{m-1}+A_m}; \qquad (2)$$

d'où, par la division,

$$\frac{B_m}{(A_m)^2} = \frac{2}{A_{m-1}+A_m}. \qquad (3)$$

(*) Cette expression est de Saurin, membre de l'Académie des sciences, 1723, p. 10. Tm.

L'équation (2) donne cette suite d'équations :

$$B_m = 2\frac{A_{m-1}.B_{m-1}}{A_{m-1}+A_m},$$

$$B_{m-1} = 2\frac{A_{m-2}.B_{m-2}}{A_{m-2}+A_{m-1}},$$

. . . .

$$B_1 = 2\frac{A_0.B_0}{A_0+A_1};$$

d'où, par la multiplication,

$$B_m = 2^m B_0 \frac{A_0.A_1.A_2....A_{m-1}}{(A_0+A_1)(A_1+A_2)....(A_{m-1}+A_m)}. \quad (4)$$

Si nous divisons cette équation par l'équation (3), B_m se trouvera éliminé, et il viendra :

$$(A_m)^2 = 2^{m-1}B_0 \frac{A_0.A_1.A_2.... A_{m-1}}{(A_0+A_1)(A_1+A_2)....(A_{m-2}+A_{m-1})}. \quad (5)$$

Si, dans cette dernière équation, nous changeons m en $m-1$, nous aurons

$$(A_{m-1})^2 = 2^{m-2}B_0 \frac{A_0.A_1....A_{m-2}}{(A_0+A_1)(A_1+A_2)....(A_{m-3}+A_{m-2})}. \quad (6)$$

Enfin, si nous divisons (5) et (6) membre à membre, nous arriverons à cette relation remarquable :

$$(A_m)^2 = 2\frac{(A_{m-1})^3}{A_{m-2}+A_{m-1}}. \quad (7)$$

Ainsi, *les aires des polygones successifs inscrits sont les termes d'une suite telle, que le carré de chaque terme est égal au double du cube du terme précédent, divisé par la somme de celui-ci et du terme qui le précède.*

Prenons pour unité le rayon du cercle, et partons du carré inscrit. Un calcul direct donne pour l'aire de ce carré le nombre 2, et pour celle de l'octogone inscrit, $2\sqrt{2}$. Ainsi,

$$A_0 = 2, \quad A_1 = 2\sqrt{2}.$$

Pour obtenir l'aire du polygone inscrit de seize côtés, j'emploie la formule ci-dessus ; elle donne

$$(A_2)^2 = 2\frac{(2\sqrt{2})^3}{2+2\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 16\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 16(2-\sqrt{2}).$$

Donc

$$A_3 = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Prenant m égal à 3, j'obtiens de même,

$$(A_3)^2 = 2\frac{4^3(\sqrt{2-\sqrt{2}})^3}{2\sqrt{2}+4\sqrt{2-\sqrt{2}}} = 64\frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$= 64\frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}\left[2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right]}{4(2-\sqrt{2})-2}$$

$$= 32\frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}\left[2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right]}{3-2\sqrt{2}}$$

$$= 32(2-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}\left[2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right]$$

$$= 32(2+\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}\left[2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right]$$

$$= 32(2+\sqrt{2})\left[2(2-\sqrt{2})-\sqrt{2(2-\sqrt{2})}\right]$$

$$= 32\left[2(4-2)-\sqrt{2(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^2}\right]$$

$$= 32\left[4-\sqrt{4(2+\sqrt{2})}\right] = 64\left[2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right],$$

et enfin

$$A_3 = 8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

On voit que la complication du calcul augmente rapidement. Nous engageons les commençants à former, en partant des valeurs de A_2 et de A_3, l'expression de A_4, laquelle, toutes réductions faites, devient

$$A_4 = 16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}};$$

ainsi que nous le démontrerons plus loin.

Je reprends l'équation (7), et, afin d'arriver à une relation plus simple entre les aires successives, je renverse la fraction dans le second membre de cette équation, ce qui donne d'abord

$$\left(\frac{A_{m-1}}{A_m}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{A_{m-2}}{A_{m-1}}+1\right],$$

ou

$$\frac{1}{\left(\frac{A_m}{A_{m-1}}\right)^2} = \frac{1}{2\left(\frac{A_{m-1}}{A_{m-2}}\right)}+\frac{1}{2}.$$

Posant alors

$$A_m = \frac{2^m}{a_m}, \qquad (8)$$

j'obtiens

$$\left(\frac{a_m}{a_{m-1}}\right)^2 = \left(\frac{a_{m-1}}{a_{m-2}}\right)+2. \qquad (9)$$

Si, comme ci-dessus, nous partons du carré inscrit, nous aurons d'abord

$$A_0 = 2, \qquad A_1 = 2\sqrt{2};$$

d'où

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{a_1}{a_0} = \sqrt{2};$$

après quoi la formule (9) donnera successivement :

$$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad \frac{a_3}{a_2} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \text{ etc.},$$

valeur dont la loi est complétement évidente. Ces valeurs donnent ensuite,

$$a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \; a_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \text{ etc.}$$

Substituant dans l'équation (9), nous aurons donc

$$A_1 = 2\frac{2}{\sqrt{2}}, \quad A_2 = 2\frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$A_3 = 2\frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \text{ etc.}$$

La limite des aires A_0, A_1, A_2, est l'aire du cercle du rayon 1, laquelle est représentée par π ; donc :

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \quad (10$$

Le second membre de cette équation est composé d'un nombre infini de facteurs, tous plus grands que l'unité, qui est leur limite. Cet exemple prouve donc combien il est nécessaire d'insister sur cette proposition : *La puissance* n^e *d'une quantité plus grande que l'unité, peut dépasser toute limite, lorsque* n *est suffisamment grand.*

L'équation (10) peut être écrite autrement. En effet,

$$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}},\qquad \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}},$$

$$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}}{2}}},\ \text{etc.}$$

Or,

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\cos\frac{\pi}{4};$$

donc,

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}=\cos\frac{\pi}{8},\quad \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}}{2}}=\cos\frac{\pi}{16},\ \text{etc}$$

Donc,

$$\frac{\pi}{2}=\text{séc.}\frac{\pi}{4}.\,\text{séc.}\frac{\pi}{8}.\,\text{séc.}\frac{\pi}{10}.\,\text{séc.}\frac{\pi}{32}\ldots.. \quad (11)$$

Cette formule élégante n'est pas nouvelle ; elle a été donnée par Euler (nov. comm. Petrop., année 1760-61). La construction géométrique est évidente, et elle a ceci de remarquable, que chaque opération conduit à deux valeurs de plus en plus approchées de $\frac{\pi}{2}$, l'une par défaut, l'autre par excès.

Si l'on avait pris pour point de départ un polygone régulier inscrit différent du carré, on aurait trouvé des résultats aussi curieux que les précédents, mais moins simples.

Reprenons l'équation (7), et posons

$$A_m = 2^m b_m, \qquad (12)$$

de telle sorte que

$$b_m = \frac{1}{a_m}.$$

A l'aide de cette substitution, nous obtiendrons

$$(b_m)^2 = \frac{(b_{m-1})^3}{2b_{m-1} + b_{m-2}}. \qquad (13)$$

On a,

$$b_0 = 2,\ b_1 = \sqrt{2},\ \text{d'où}\ b_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}},\ b_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

De ces deux valeurs, on conclut :

$$(b_3)^2 = 2 - \sqrt{4 - (b_2)^2}.$$

Pour reconnaître si cette relation a lieu généralement, admettons-la pour un instant, et posons :

$$(b_m)^2 = 2 - \sqrt{4 - (b_{m-1})^2}. \qquad (14)$$

Par le changement de m en $(m-1)$, nous obtiendrons facilement

$$b_{m-2} = b_{m-1} \sqrt{4 - (b_{m-1})^2}.$$

Or, en substituant ces valeurs dans l'équation (13), on la transforme en une identité ; la loi se trouve vérifiée, et l'on a généralement :

$$b_m = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}: \qquad (15)$$

le nombre des radicaux étant m.

Par suite, la valeur de A_m devient, à cause de (12),

$$A_m = 2^m \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}; \qquad (16)$$

ainsi que nous l'avions annoncé.

La limite du premier membre de cette dernière équation est l'aire du cercle ; donc

$$\pi = \textit{limite de } 2^m \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + . \sqrt{\ldots}}}}; \qquad (17)$$

ce qui est assez curieux.

Si l'on compare les deux valeurs différentes trouvées pour A_m, on trouve la relation

$$2 = \sqrt{2} . \sqrt{2 + \sqrt{2}} . \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 \ldots}}}$$
$$\times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + . \sqrt{\ldots}}}}; \qquad (18)$$

dans laquelle le nombre des facteurs avant le signe $\times$ est égal au nombre des radicaux qui suivent ce signe. Ainsi, par exemple :

$$2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}, \quad 2 = \sqrt{2} . \sqrt{2 + \sqrt{2}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$2 = \sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \text{ etc.}$$

Du reste, ces égalités se vérifient immédiatement.

CONSIDÉRATIONS

SUR LE TRIANGLE RECTILIGNE.

(Suite, *voyez* p. 79.)

Théorème.

22. Dans un triangle, les trois hauteurs se coupant en six segments ; les milieux des segments qui partent des angles ; les pieds des hauteurs ; les milieux des côtés du triangle, don-

nent neuf points situés sur la même circonférence ; le centre de cette circonférence est sur le milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de rencontre des trois hauteurs ; le rayon de la circonférence est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit ; et cette circonférence touche intérieurement le cercle inscrit, et extérieurement, les trois cercles ex-inscrits.

Démonstration. Soit ABC le triangle ; nous conservons les mêmes lettres et les mêmes notations qu'on trouve à la page 80 ; de plus :

H', centre du cercle passant par les neuf points ;

G', centre du cercle ex-inscrit touchant le côté AB et les deux côtés AC, BC prolongés ;

ρ' rayon de ce cercle ex-inscrit ;

$G'E = e''$,

$G'H = f'$.

Les trois points milieux des côtés, le pied d'une hauteur, sont évidemment les quatre sommets d'un trapèze ayant deux diagonales égales. Ce trapèze est donc inscriptible. Donc, les trois pieds des hauteurs et les trois points milieux sont sur une même circonférence : ces derniers trois points et un point milieu d'un segment des hauteurs adjacent à un angle forment un quadrilatère ayant deux angles opposés droits ; il est donc inscriptible : d'où l'on conclut que les neuf points mentionnés sont sur une même circonférence, ayant pour rayon $\frac{R}{2}$ et on voit facilement que son centre H' est situé au milieu de EH.

Menons les trois droites GE, GH', GH ; on a

$$2GH'^2 = GE^2 + GH^2 - \frac{HE^2}{2} \text{ (Legend., liv. III, pr. XIV)},$$

ou

$$2GH'^2 = e^2 + f^2 - \frac{k^2}{2} ;$$

remplaçant e, f, k par leurs valeurs (pages 81 et 82), on trouve

$$2GH'^2=\frac{R^2}{2}-2R\rho+2\rho^2,\quad \text{d'où}\quad GH'=\frac{R}{2}-\rho\,;$$

ainsi, la distance GH′ des deux centres est égale à la différence des rayons; donc, le cercle des neuf points touche intérieurement le cercle inscrit au triangle ABC.

Menons les droites G′H, G′H′, G′E, on a, par la proposition citée,

$$2G'H'^2=G'E^2+G'H^2-\frac{HG^2}{2}\quad \text{ou}\quad 2G'H'^2=e'^2+f'^2-\frac{k^2}{2}\,;$$

On peut calculer e', f' directement, mais on peut déduire ces valeurs de celles de e et f en changeant ρ en $-\rho'$, et remplaçant p par $a+b-c$; car

$$\rho'=\frac{2\rho}{a+b-c}\,;$$

ainsi, on obtient

$$e'^2=4R^2-4R\rho'+3\rho'^2-\frac{(a+b-c)^2}{4},$$

$$f'^2=R^2+2R\rho',$$

$$k^2=9R^2-8R\rho'+2\rho'^2-\frac{(a+b-c)^2}{2},$$

d'où

$$2G'H'^2=\frac{R^2}{2}+2R\rho'+2\rho'^2,\quad \text{et}\quad G'H'=\frac{R}{2}+\rho'\,;$$

ainsi, la distance G′H′ des deux centres est égale à la somme des rayons; donc, le cercle des neuf points touche extérieurement le centre du cercle ex-inscrit, tangent au côté AB; il en est de même pour les deux autres cercles ex-inscrits, etc. C.Q.F.D.

23. On a (p. 84):

$$\frac{R}{2}-\rho=\frac{f^2}{2R},\quad \text{ainsi}\quad 2R.GH'=GH^2\,;$$

ce qu'on peut énoncer sous cette forme de théorème : La distance des centres des cercles inscrits et circonscrits à un triangle est une moyenne proportionnelle entre le diamètre du cercle circonscrit et la distance du centre du cercle inscrit au centre du cercle des neuf points.

24. *Généralisation du théorème.* Un triangle étant inscrit dans une section conique, si par chaque sommet on mène une droite transversale respectivement conjuguée au côté opposé(*), ces trois droites, se rencontrant en un point, forment six segments ; les milieux des segments qui partent des angles, les pieds des transversales, les milieux des côtés, sont neuf points situés sur une seconde section conique, semblable à la conique circonscrite et semblablement placée, et elle touche une troisième section conique inscrite au triangle semblable aux deux premières, et semblablement placée.

La méthode des projections cylindriques suffit pour transporter du cercle à l'ellipse certaines propriétés des diamètres conjugués, des tangentes, des intersections de lignes, des proportions géométriques, des moyennes distances. Il n'en est pas ainsi pour la parabole et l'hyperbole ; ces courbes exigent des démonstrations spéciales ; car on ne peut les considérer que comme des projections coniques du cercle. Or, ni les diamètres conjugués, ni les proportions géométriques, ni les points de moyenne distance ne restent tels, quand on les projette coniquement. Il faut alors avoir recours à la proportion harmonique qui se projette cylindriquement et coniquement ; c'est celle qu'on rencontre le plus fréquemment, c'est celle dont on ne s'occupe d'aucune manière, dont le nom n'est pas même prononcé dans les traités officiels.

Observation. La dénomination de cercle ex-inscrit a été introduite par Simon Lhuillier (*Annales de Gergonne*, tome 1, pag. 156, année 1812).

(*) Deux droites sont conjuguées lorsqu'elles sont parallèles à deux diamètres conjugués.

25. Soient $\rho, \rho', \rho'', \rho'''$; f, f', f'', f''' les rayons des quatre cercles tangents aux côtés du triangle et les distances des quatre centres au centre du cercle circonscrit; un calcul très-facile donne

$$\rho' + \rho'' + \rho''' = 4R + \rho,$$

$$\rho'\rho'' + \rho''\rho''' + \rho'\rho''' = \frac{S^2}{\rho^2},$$

$$\rho'\rho''\rho''' = \frac{S^2}{\rho},$$

$$\rho'\rho''\rho''' = \rho(\rho'\rho'' + \rho'\rho''' + \rho''\rho'''),$$

$$f^2 + f'^2 + f''^2 + f'''^2 = 12R^2.$$

Connaissant donc les trois rayons des cercles ex-inscrits, on peut trouver le rayon du cercle inscrit, le rayon du cercle circonscrit et l'aire du triangle; et par conséquent, les coefficients de l'équation du troisième degré qui a pour racines les trois côtés du triangle.

26. Conséquemment, lorsque deux triangles ont les rayons des cercles ex-inscrits proportionnels, les triangles sont semblables. En général, lorsque trois quantités déterminent *complétement* les côtés d'un triangle, ces trois quantités données variant proportionnellement, les côtés varient dans le même rapport et le triangle reste semblable ; car, chaque côté est nécessairement une fonction linéaire homogène, rationnelle ou irrationnelle de ces quantités : or, lorsque ces quantités augmentent ou diminuent toutes dans le même rapport, il est dans la nature de ces fonctions d'augmenter ou de diminuer dans le même rapport.

TM.

CENTRE DE GRAVITÉ

D'un arc quelconque d'hélice tracée sur un cylindre droit à base circulaire.

Soit H (*Fig.* 48) un arc quelconque d'hélice moindre qu'une spire. Soit A l'arc de cercle qui lui sert de projection sur la base du cylindre ; je dis que le centre de gravité de H se trouve à l'intersection de la perpendiculaire élevée par le point g, centre de gravité de l'arc A, et du plan parallèle à la base, mené à égales distances des deux extrémités de H.

Pour le démontrer, remarquons que la tangente, en un point quelconque de l'hélice, fait constamment le même angle avec le plan de la base du cylindre ; ou autrement, que chaque élément de cette courbe est également incliné sur ce plan.

Cela posé, il est facile de voir que si tous les éléments de H sont chargés de poids égaux ; les éléments de l'arc A, projection de H, seront aussi chargés de poids égaux.

Donc, le centre de gravité de H se projette en g, centre de gravité de A ; donc la première partie de la proposition que nous avons eu en vue est démontrée.

Quant à la seconde, savoir, que le centre de gravité de H est sur le plan parallèle à la base qui coupe l'arc H en deux parties égales, elle est évidente d'elle-même, parce que ces deux parties peuvent se superposer comme les deux moitiés d'un arc de cercle se superposent.

Si l'arc d'hélice est composé d'une ou de plusieurs spires, son centre de gravité tombe évidemment au centre o de la base du cylindre, et le poids dont ce centre est chargé est proportionnel au nombre des spires dont se compose l'hélice.

Enfin, si l'arc d'hélice se compose d'un nombre exact d'hélices plus de l'arc H, nous représenterons tout à la fois par *o* le centre de gravité de toutes ces spires et leur poids; de sorte que si *g* continue d'être le poids et le centre de gravité de l'arc H, il suffira de partager la distance *og* en parties inversement proportionnelles aux poids *o* et *g* pour avoir la projection du centre de gravité de l'arc total d'hélice que l'on considère. Soit *k* ce point : arrivé là, il ne restera plus qu'à couper la perpendiculaire au plan de la base, par un plan parallèle à cette base, à égales distances des deux extrémités de l'arc dont on s'occupe.

CENTRE DE GRAVITÉ

De la surface d'un filet de vis carré ou triangulaire, comprise entre deux positions de la génératrice.

Soit d'abord une portion d'héliçoïde H, moindre que celle qui correspond à une spire, je dis que, dans ce cas, le centre de gravité de cette portion se trouve sur la perpendiculaire élevée par le centre de la projection de H sur le plan horizontal, et encore sur le plan parallèle à la base de la vis, mené à égales distances des deux génératrices qui limitent la portion d'héliçoïde H.

Pour le démontrer, remarquons que l'on peut considérer tous les points qui composent la surface du filet, comme appartenant à des hélices décrites sur des cylindres de même axe, mais de rayons différents; et si l'on représente par *mo* et *no*, les projections sur le plan de la base, de la génératrice considérée dans deux positions différentes, il est aisé de voir que tous les arcs d'hélice compris entre ces deux positions, sont des arcs semblables, c'est-à-dire dont tous les éléments sont parallèles, chacun à chacun, et par conséquent en même nombre, se projetant selon des arcs de cercles semblables *mn*, *pq*.......*rs*, ce dernier étant sur l'axe de la vis (*Fig.* 49).

Or, tous ces arcs d'hélice étant chargés de poids égaux, les arcs *mn*, *pq*.... *rs* sont aussi chargés de poids égaux entre eux; d'où il suit que, si par le centre de gravité de la portion de secteur circulaire *mnrs*, on élève une perpendiculaire à ce plan, cette perpendiculaire ira passer par le centre de gravité de H, donc la première partie de la proposition que j'ai en vue est démontrée.

Quant à la seconde, savoir: que le centre de gravité de H est sur le plan parallèle à la base, à égales distances des deux génératrices qui limitent H, elle est évidente d'elle-même, parce que ces deux portions peuvent se superposer, comme les deux moitiés d'un secteur de cercle se superposent.

Si la portion de la surface H correspond à un nombre exact de spires, son centre de gravité tombe évidemment au centre de la base du cylindre, et le poids dont ce centre est chargé, est proportionnel au nombre des spires qui correspondent à H.

Enfin, si H correspond à un nombre exact de spires plus à une portion de spire, on opérera comme on a opéré dans l'article précédent, lorsqu'il était question de l'arc d'hélice composé de plusieurs spires, plus d'un arc moindre qu'une spire.

FERRIOT,

Ancien recteur de l'Académie de Grenoble.

Saint-Imier, près Grenoble, 27 mars 1842.

ANALYSE D'OUVRAGES.

Complément de géométrie analytique, par C.-E Page, professeur à l'École royale d'artillerie de La Fère. Paris, 1841, in-8° de 180 pages, 4 planches (*).

Les anciens attachaient à la droite et au cercle des idées particulières de beauté et de perfection ; en conséquence de cette disposition superstitieuse, ils ont désigné ces deux lignes sous le nom par excellence de *lignes géométriques ;* nom qu'elles ont conservé dans les mathématiques modernes, science où il règne encore, comme nous aurons souvent lieu de le remarquer, beaucoup de superstitions. Les propriétés principales de ces deux lignes, celles des aires et volumes les plus simples, qu'elles sont susceptibles d'engendrer, remplissent les 15 livres et les données (*data*) d'Euclide, ainsi que les 8 livres de Legendre. On n'y rencontre que la proportion dite aussi *géométrique,* qui, lorsqu'elle devient continue, donne lieu à la moyenne géométrique et à la section bizarrement désignée par moyenne et extrême raison. Presque toutes les propositions relatives à cette espèce de proportion sont fondées sur ce qu'elle se projette cylindriquement sur un plan sans s'altérer, tandis qu'elle s'altère, généralement parlant, dans les projections coniques (**).

C'est dans l'école de Platon, livrée à des recherches d'en-

(*) Chez Carilian-Gœury et V[or] Dalmont, éditeurs, quai des Augustins, n[os] 39 et 41, à Paris.

(**) La projection cylindrique s'opère par un système de droites parallèles, et la projection conique par un système de droites convergentes vers un même point fixe.

tités métaphysiques, que, par une exception assez inattendue, on s'est occupé d'autres lignes que la droite et le cercle, et principalement de celles que donne l'intersection du cône et du plan; mais les propriétés de ces lignes exigent qu'on fasse attention à une autre sorte de proportions et de sections de la droite, dites *harmoniques*, et qui se projettent, sans s'altérer, cylindriquement et coniquement; on rencontre ces sections, pour ainsi dire, à chaque pas. Aussi, les géomètres s'en sont-ils beaucoup enquis jusqu'au dix-huitième siècle; alors ces propriétés ont disparu des traités didactiques, et elles n'appartenaient plus qu'à l'histoire et à la science, lorsque le célèbre Carnot publia, en 1803, sa géométrie de position, qu'il avait fait précéder de considérations sur les corrélations des figures. La théorie des transversales de ce géomètre, en 1806, et les travaux graphiques de l'École polytechnique ont ramené l'attention sur les proportions et les progressions harmoniques, sur les involutions de Desargues, sur les pôles et polaires : c'est, grâces à cette nouvelle impulsion, que la géométrie doit les immenses progrès qu'elle a faits dans ces derniers temps, comme s'exprime M. Liouville (*).

La géométrie des coniques, lignes et surfaces a fait, depuis un demi-siècle, d'immenses progrès; mais les livres classiques qui en traitent sont restés stationnaires, et sont au même point, et peut-être même en deçà, où nous ont laissés Rivard, Marie, Lacaille, et certainement très-arriérés sur Sauri et Mauduit. On dirait, à en juger par certains ouvrages, que Descartes a introduit l'analyse dans la géométrie, non pour l'enrichir, mais pour l'appauvrir. Heureusement que, dans la capitale du moins, beaucoup de professeurs suppléent par l'enseignement à la maigreur du programme officiel; mais il était à désirer qu'on pût mettre entre les mains des élèves un

(*) Journal des mathématiques, t. VI, p. 346. 1841.

ouvrage peu volumineux et renfermant les principales propositions de la géométrie des transversales.

M. Page, auteur du livre que nous allons analyser, remplit parfaitement cette condition. Si nous disions que ce livre est utile, nous ne serions justes qu'à demi ; car ce livre est indispensable à tous ceux qui tiennent à se mettre à la hauteur de l'état actuel de l'enseignement dans beaucoup de colléges de Paris.

L'introduction (1-29) est entièrement consacrée à la théorie analytique des fonctions et de leurs dérivées, et des discussions qu'elles présentent lorsque ces fonctions admettent des facteurs rationnels, irrationnels, égaux ou inégaux, finis ou infinis, réels ou imaginaires. L'auteur donne la théorie des limites. Mais Lagrange a déjà fait observer que la sous-tangente n'est pas la limite des sous-sécantes. Aussi l'auteur donne une démonstration ingénieuse, qui n'est pourtant pas à l'abri d'une objection, de l'existence de la fonction prime ; démonstration qui rentre dans celle d'Ampère. Au fond tout revient à démontrer que le plan des xy coupe la surface représentée par l'équation $f(x+z)-fx=zy$.

Après l'établissement des théorèmes de Taylor et de Maclaurin, viennent les interprétations de certaines valeurs particulières des dérivées, les valeurs *maxima*, *minima*, etc. On aurait désiré que l'auteur indiquât le beau théorème de Lagrange, modifié par M. Cauchy, pour évaluer le reste de la série de Taylor. Cette évaluation peut seule légitimer l'emploi de la série.

L'ouvrage est divisé en 5 livres.

Le premier livre (31 à 44) est consacré à des généralités sur l'algèbre, l'homogénéité et sur la manière de déterminer la position d'un point.

« On peut définir l'algèbre, en disant qu'elle consiste simplement à intervertir l'ordre des opérations. » — Je ne comprends pas cette définition, malgré l'explication qui la suit. Le rapport *enharmonique* a été introduit par Chasles (*). Il exprime, une droite étant divisée en trois segments, le quotient du produit des segments extrêmes divisé par le produit du segment moyen et de la ligne entière. Cette définition, donnée par M. Page, est plus précise que celle de M. Chasles. Lorsque ce quotient est l'unité, le rapport est *harmonique*; et lorsque le produit de deux rapports enharmoniques est égal à l'unité, ces rapports sonts dits *inverses*. Parmi les quatre points que fournit la division d'une droite en trois segments harmoniques, le premier et le troisième, sont dits *conjugués*, ainsi que le deuxième et le quatrième.

L'*involution* qu'on doit à Desargues consiste en ceci : Soient six points situés en ligne droite et désignés par les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6; regardons 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6, comme des points réciproquement conjugués; si quatre quelconques de ces points fournissent un quotient enharmonique égal ou inverse à leurs conjugués, les points sont dits être en involution; il existe alors un septième point nommé centre d'involution sur la droite, tel que le produit de ses distances à deux points conjugués est constant, et réciproquement, lorsqu'un tel septième point existe, les six autres sont en involution. On voit comment les coordonnées d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes, peuvent servir à mettre des points en involution.

Le livre 2 (48 à 61) est consacré à la théorie des transversales, des pôles et polaires des droites (**); de la propriété des transversales l'auteur déduit directement, et d'une manière simple, ces théorèmes qu'il suffit d'énoncer.

1er. Si deux triangles ont leurs sommets situés trois droites

(*) Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, in-4. 1837.

(**) Le mot pôle pris dans ce sens a été introduit par M. Servois. (Journal de Gergonne, t. I, p. 337. 1809.)

concourant en un point, les trois points de rencontre des côtés opposés sont en ligne droite (p. 53).

2^{me}. Dans tout hexagone inscrit à deux droites, les trois points de rencontre des côtés opposés sont en ligne droite (cas particulier de l'hexagramme de Pascal, et déjà énoncé dans la collection de Pappus). Après avoir expliqué ce qu'on entend par *faisceaux* enharmoniques et harmoniques, l'auteur passe au quadrilatère complet et démontre facilement que les milieux des trois diagonales sont en ligne droite; et si l'on coupe par une transversale les quatre côtés et les deux diagonales d'un quadrilatère simple, les six points d'intersection sont en involution (cas particulier du théorème général de Desargues).

Le troisième livre (65 à 79) traite des lieux géométriques et des courbes engendrées par la variation d'un des coefficients de l'équation de la droite; l'auteur déduit de là le théorème connu de Carnot, relatif aux segments formés sur les côtés d'un triangle par une circonférence qui les traverse, et ensuite ce théorème de Desargues; les quatre côtés d'un quadrilatère inscriptible et la circonférence circonscrite sont coupés par une transversale quelconque en six points en involution.

La théorie des courbes commence au livre quatrième (80 à 117). On y trouve les théorèmes de Newton et de Carnot sur les segments. Les recherches sur les centres, tangentes, normales, points singuliers, d'inflexions, points multiples, branches infinies, asymptotes, sont exposées avec clarté et concision (84 à 115).

Il y a cinq exemples de discussion de courbes du troisième et quatrième degré; on explique la génération des courbes enveloppes d'une droite. On donne pour exemple la courbe engendrée par une droite de longueur constante, dont les extrémités sont constamment sur les côtés d'un angle droit; la courbe est du sixième degré, non du huitième, et aurait dû être discutée.

Le cinquième livre, en 59 pages, nous procure un traité complet des lignes du second ordre, infiniment plus complet que ce qu'on nous raconte là-dessus dans des ouvrages dix fois plus volumineux. Cet avantage est le résultat des théories générales développées dans les livres précédents. Outre les propriétés vulgaires concernant la classification, les diamètres conjugués, les axes principaux, les foyers, on lit (p.128), tout ce qui concerne les pôles et polaires, exposé par une analyse courte et facile. Ayant établi la génération des coniques, au moyen de deux droites mobiles pivotant autour de points fixes, théorème qu'on doit au pasteur Braikenridge, l'auteur démontre facilement le théorème de Desargues, rapporté ci-dessus, mais généralisé, et le célèbre hexagramme de Pascal, si fécond et si propre à résoudre tant de problèmes, rien qu'avec la règle seulement, sans compas. De là, l'auteur passe aux coniques considérées comme enveloppes d'une droite et démontre la belle théorie de M. Brianchon sur les polaires réciproques (*) et l'hexagramme circonscrit du même géomètre, formant le pendant de l'hexagramme inscrit de Pascal. L'ouvrage est terminé par six problèmes pour construire les coniques, au moyen de cinq données consistant en tangentes ou en points.

En finissant l'examen de cet excellent écrit, nous nous permettrons quelques observations critiques. Le titre n'est pas exact ; ce n'est pas un *complément*; il faudrait y ajouter peu pour en faire un traité élémentaire complet de géométrie analytique à deux dimensions; toutefois, quelques propositions essentielles manquent; entre autres, ce beau théorème qu'on doit à M. Poncelet : Deux coniques étant dans le même plan, si on mène une tangente à la première, qu'on en cherche le pôle par rapport à la seconde; le lieu

(*) Journal de l'École polytechnique, cahier X, p. 14. 1810.

de ce pôle est une troisième conique, et *vice versâ*. Peut-être aussi l'auteur n'a-t-il pas toujours tiré assez parti de la méthode analytique. Toutes les propriétés de l'espace doivent se déduire de la théorie des équations, de l'élimination et du changement de coordonnées. Il n'est pas une proposition de cette théorie qui ne puisse se traduire en propriété graphique. C'est ainsi que la géométrie sert à éclaircir l'analyse, et celle-ci à enrichir la géométrie, et c'est le véritable esprit de la méthode qu'on doit au génie sublime d'un Français, le plus grand philosophe du dix-septième siècle. Pour millième exemple, nous citerons le beau mémoire de M. Liouville sur l'élimination (*), si riche en investigations géométriques, et dont nous nous proposons d'entretenir nos lecteurs prochainement. TM.

THÉORIE DES PARALLÈLES, *par* F. Durand de Monestral, *ingénieur géomètre*. Paris, 1838. In-8°, 28 pages, sans planches, imprimé à Draguignan.

Le onzième axiome du premier livre d'Euclide est ainsi littéralement énoncé :

Deux lignes droites étant coupées par une troisième, de telle sorte que les deux angles intérieurs d'un même côté soient ensemble plus petits que deux angles droits, se rencontrent, suffisamment prolongées, du même côté. Les modernes ont cessé de regarder cette proposition comme un axiome, et ont essayé, mais toujours vainement, d'en donner une démonstration. Ces essais peuvent se ranger sous trois catégories :

1° *Diminution de la distance*. Lorsque la somme des angles intérieurs est moindre que deux angles droits, on démontre

---

(*) Journal de mathématiques, t. VI, p. 345. 1841 facilement que les perpendiculaires abaissées sur une de ces droites, de points situés sur l'autre, vont en diminuant en s'approchant du point de rencontre ; ces perpendiculaires peuvent-elles devenir plus petites qu'aucune longueur donnée ? Voilà ce qu'il faudrait, et qu'on n'a pas encore su démontrer.

2° *Somme constante des angles d'un triangle.* La théorie des parallèles admise, on démontre facilement que la somme des angles d'un triangle est constamment égale à deux angles droits, et *vice versâ*, si cette proposition était démontrée, on en déduirait aisément toute la théorie des parallèles. On est parvenu à prouver que s'il existe un seul triangle qui ait la somme de ses angles égale à deux angles droits, il en serait de même dans tout autre triangle (*) ; mais on n'est pas encore parvenu à prouver la possibilité d'un tel triangle.

3° *Aires infinies.* M. Bertrand de Genève est le premier, je crois, qui ait fait usage de cette sorte de considérations que Legendre n'a pas désapprouvées, et la brochure de M. de Monestral appartient à cette catégorie et à la précédente. Les principales propositions appartenant à ce genre de démonstration se réduisent aux suivantes :

1° L'aire du plan est infinie ; car, quelle que soit l'aire d'une figure fermée tracée sur ce plan, on peut en concevoir une seconde qui lui soit égale et tracée sur ce même plan ; ainsi, l'aire du plan est plus grande qu'aucune aire finie ; donc, etc. ;

2° L'aire d'un angle droit est infinie ; car, si cette aire était une étendue finie, quatre fois cette aire serait aussi une étendue finie ; mais quatre fois l'angle droit renferme le plan entier ; donc, etc. ;

3° L'aire d'un angle quelconque est infinie ; il suffit de le démontrer pour un angle aigu.

(*) Manuel de géométrie, 2e édition.

Si l'angle droit, divisé par l'angle, donne un quotient commensurable, la proposition se démontre par le même raisonnement que la précédente; si le quotient est incommensurable, on a recours au principe des limites. L'auteur n'énonce pas explicitement ces propositions, mais il faut les supposer. Ceci posé, il démontre ainsi la proposition XIX du premier livre de Legendre : savoir que la somme des trois angles est égale à deux angles droits.

Soit le triangle ABC ; prolongeons BC vers G, CB vers D, AB vers E, et AC vers F : l'angle ABC est égal à son opposé au sommet DBE; il en est de même des angles BCA, GCF ; ainsi l'on a

$$\text{angle } ABC + \text{angle } ACB + \text{angle } BAC = \text{angle } DBE + \text{angle } GCF + \text{angle } EAF;$$

mais ces angles sont proportionnels aux aires infinies qu'ils renferment; on peut donc remplacer ces angles par ces aires; mais l'aire infinie DAF est égale à l'aire fermée du triangle BAC, plus l'aire infinie ouverte EBCF; négligeant le fini par rapport à l'infini, l'équation devient, entre les aires

$$ABC + ACB + BAC = DBE + GCF + EBCF.$$

Le second membre renferme même aire que deux angles droits; donc,

$$ABC + ACB + BAC = 2^q.$$

Passant des aires aux angles, on en déduit, etc.

L'auteur, sans doute, en vue d'être concis, supprime tous ces raisonnements; mais ils sont nécessaires et doivent être sous-entendus.

Le reste de la brochure contient les autres propositions du premier livre de Legendre.

Par inadvertance, l'auteur dit que la proposition d'Euclide est un *postulatum*, tandis qu'elle est un axiome; ce qui est fort différent. Le premier livre contient trois *postulata* qui ne sont relatifs qu'à des constructions à faire, et non à des propositions. L'axiome d'Euclide peut être remplacé avantageusement par un autre de M. Gergonne ; savoir : Par le même point, ne peuvent passer deux parallèles à une droite donnée. Cette proposition a l'évidence intuitive d'un axiome et suffit à tout. M. Lionnet a adopté cet axiome comme base de la théorie des parallèles : c'est un exemple à suivre. TM.

EXTRAITS DES JOURNAUX.

JOURNAL DE CRELLE, 1841, tome 22, 1er cahier.

Les abonnés qui désirent des renseignements plus détaillés doivent s'adresser aux rédacteurs.

STERN (A) à Goettingue.

Sur la résolution des équations transcendantes (p. 1 à 62).

Ce mémoire a remporté le prix proposé sur ce sujet en 1837, par l'Académie des sciences de Copenhague.

L'auteur indique une méthode pour trouver les racines réelles, avec toute approximation désirable dans les équations *numériques* transcendantes à *une inconnue*, et aussi pour découvrir l'existence des racines imaginaires. Cette méthode est fondée sur le théorème de Fourrier, pour trouver le nombre des racines réelles, à l'aide des dérivées successives, la seule qu'on puisse jusqu'ici employer pour les équations transcendantes; on sait que M. Sturm a trouvé depuis une autre suite de fonctions pour les équations algébriques, fonctions qui ne sont que les dérivées combinées avec les racines de l'équation aux carrés des différences (*). Nous donnons quelques équations résolues par M. Stern ;

(*) Voir Nouvelles Annales, p. 166.

1° $x \log x = 100$, x entre 3,5972850 et 3,5972851.

Euler avait trouvé $x = 3,5972852$;

2° $x - \cos x = 0$, $x = 0,73908512$ à 10^{-8} près;

Euler trouve 0,7390847,

3° $x - \operatorname{tang} x = 0$, $x = 4,49340964$ à 10^{-8} près;

ce qui répond à un arc de 257°.27′.12″,268; Euler trouve 4,49340834; et Poisson 4,49331; ou il y a une faute typographique à la quatrième décimale (*); on indique ici la valeur de la plus petite racine; il est évident qu'il existe une infinité de valeurs positives, et que la $n^{\text{ème}}$ est comprise entre $n\pi$ et $(n+\frac{1}{2})\pi$;

4° $e^x = x$, n'a que des racines imaginaires, et l'auteur trouve $x = 0,318133 \pm 1,337238\sqrt{-1}$; par un autre procédé, M. Cauchy trouve $x = 0,3181317 \pm 1,3372357\sqrt{-1}$ (Leçons sur le calcul intégral. Leçon 14).

L'auteur montre (p. 59), comment la nouvelle méthode de M. Cauchy, pour approcher de la valeur des racines réelles, dans les équations algébriques ou transcendantes, peut se déduire de la méthode de Fourrier. (Voy. *Compte Rendu* de l'Académie des sciences, n° 10, 1837.) Nous donnerons les deux méthodes prochainement.

M. Oettinger, professeur à Fribourg, dans le Brisgau.

Sur la décomposition des fractions algébriques fractionnaires et rationnelles en fractions partielles (63 à 95).

Par des procédés combinatoires, l'auteur indique une méthode facile pour trouver, directement, chaque coefficient dans les numérateurs des fractions partielles. Les signes combinatoires n'étant pas connus en France, nous ne pouvons,

---

(*) Mémoires de l'Académie des Sciences, tome VIII, p. 420; pour la valeur de la seconde racine, on donne ici 7,73747; la vraie valeur est 7,725.

sans trop allonger, rendre compte de cet intéressant travail.

M. GAUSS, professeur à Goettingue (p. 96).

Déduction élémentaire d'un théorème de Trigonométrie sphérique dû à Legendre.

Nous croyons utile de faire précéder cette élégante déduction, de quelques éclaircissements élémentaires.

1° Soient a, b, c, A, B, C, les valeurs circulaires exprimées en degrés et parties de degrés, des trois côtés et des trois angles d'un triangle sphérique tracé sur une sphère d'un rayon R donné en unités métriques, et soit T l'aire de ce triangle exprimée en unités superficielles métriques; on aura $T = \frac{A+B+C-180^\circ}{180^\circ}.\pi.R^2$; la partie fractionnaire, ainsi que π, sont des nombres abstraits. Cette évaluation qu'on trouve maintenant dans tous les ouvrages classiques, a été indiquée pour la première fois par Girard (Albert) (*) et démontré ensuite par Cavalleri (Bonaventure) (**);

2° Faisant $A+B+C-180^\circ=3\omega$, et $a+b+c=2p$, et supposons $p < 2^q$; l'on a

$$4\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c\sin^2\frac{3}{2}\omega=\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c),$$

si a, b, c diminuent, ω diminue. En effet, il suffit de démontrer que ω diminue avec c, lorsque a et b conservent leurs valeurs; or $\cos\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}b$ ne changent pas; $\cos\frac{1}{2}c$ augmente; le second membre peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{4}[\cos a-\cos(b+c)]\,[\cos(b-c)-\cos a],$$

les deux facteurs sont essentiellement positifs, et c diminuant, chaque facteur diminue; donc, etc.;

(*) Invention nouvelle en algèbre. Amsterdam, 1629.

(**) Né à Milan en 1598, mort le 5 décembre 1694; *voy.* son *Directorium generale uranometricum*.

3° Supposons que sur une autre sphère de rayon $R' > R$, on trace un triangle sphérique dont les côtés aient mêmes longueurs métriques que les côtés du triangle tracé sur la sphère R, les valeurs circulaires de ces côtés seront diminuées dans le rapport de R à R'; elles deviennent $\frac{Ra}{R'}$, $\frac{Rb}{R'}$, $\frac{Rc}{R'}$; donc dans ce second triangle la valeur de ω est moindre que dans le premier. Augmentant indéfiniment R, l'excès 3ω des trois angles du triangle sur deux angles droits ira sans cesse en décroissant, et il est facile de voir que zéro est la limite de ce décroissement; car, lorsque le rayon devient infini, la sphère se réduit à un plan, le triangle devenu rectiligne, la somme des angles est égale à deux droits et l'excès est nul; ainsi sur une sphère d'un rayon égal au rayon moyen de la terre, si l'on trace un triangle équilatéral de 40,000 mètres de côté, l'excès est réduit à $3''.20'''$;

4° Soient a', b', c', les longueurs métriques des arcs a, b, c; on a

$$a' = \frac{a}{180^\circ}\pi R, \quad b' = \frac{b}{180^\circ}\pi R, \quad c' = \frac{c\pi}{180^\circ} R,$$

avec a', b', c', construisons par la pensée un triangle rectiligne A'B'C'; on aura

$$A - A' + B - B' + C - C' = 3\omega,$$

soit

$$A - A' = \omega + x,$$
$$B - B' = \omega + y,$$
$$C - C' = \omega + z,$$

d'où

$$x + y + z = 0;$$

supposons R très-grand et qu'on peut négliger R^{-4}. On a, à cet ordre près, $x = y = z = 0$, de sorte que

$$A' = A - \omega, \quad B' = B - \omega, \quad C' = C - \omega$$

ce qui revient à cet énoncé : Lorsque les côtés d'un triangle sphérique sont très-petits, relativement au rayon de la sphère, on peut traiter ce triangle comme s'il était rectiligne, sauf à diminuer les angles du triangle sphérique chacun du tiers de l'excès de la somme de ses angles sur deux angles droits.

Tel est le théorème que Legendre a énoncé le premier en 1787 (*), il en a donné une démonstration fondée sur les développements en série, en l'an VII, 1799 (**). La même année, Lagrange a modifié cette démonstration, dans son célèbre mémoire, intitulé : Solutions de quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques, avec une analyse complète de ces triangles (*Journal de l'École Polytechnique*, VI[e] cahier). Mémoire qui, selon la marche habituelle de l'illustre géomètre, poursuit, développe et enrichit un semblable travail d'Euler. M. le docteur Gauss, un des plus grands analystes contemporains, a traité le même sujet, dans le présent Mémoire. Faisant un moindre emploi des séries, sa démonstration est plus élémentaire.

5° Conservant les mêmes notations que ci-dessus, décomposons 2^q en trois angles A', B', C' et faisons

$$A = A' + \omega,$$
$$B = B' + \omega,$$
$$C = C' + \omega,$$

on a (Legendre, Trig. sph. prop. l. XXXI),

$$\sin^2\tfrac{1}{2}a = -\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C} = \frac{\sin\frac{3}{2}\omega\sin(A'-\frac{1}{2}\omega)}{\sin(B'+\omega)\sin(C'+\omega)},$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\cos\frac{1}{2}(B+A-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B\sin C} = \frac{\sin(B'-\frac{1}{2}\omega)\sin(C'-\frac{1}{2}\omega)}{(\sin B'+\omega)(\sin C'+\omega)}$$

(*) Mémoire sur les opérations trigonométriques, dont les resultats dépendent de la figure de la terre. Mém. de l'Académie des sciences, 1787, p. 352.

(**) Méthode analytique pour la détermination d'un arc du méridien. Note II, page 12. Il fait voir qu'à l'aide du triangle polaire, le même théorème peut servir à résoudre un triangle droit qui a deux angles très-aigus ; Legendre a donné la même démonstration dans ses Éléments ; dans le précédent ouvrage, p. 88, Delambre donne une vérification du théorème.

d'où

$$\frac{\sin^6 \frac{1}{2} a}{\cos^2 \frac{1}{2} a} = \frac{\sin^3 \frac{3}{2}\omega \sin^3(A' - \frac{1}{2}\omega)}{\sin^2(B'+\omega)\sin(B'+\frac{1}{2}\omega)\sin^2(C'+\omega)\sin(C'-\frac{1}{2}\omega)};$$

on obtient une équation analogue en changeant a en b, A en B et *vice versâ* ; divisant la première équation par la seconde, membre à membre, et extrayant la racine carrée, on obtient

$$\frac{\sin^3 \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} b}{\sin^3 \frac{1}{2} b} = \frac{\sin(A'+\omega)\sin^2(A'-\frac{1}{2}\omega)}{\sin(B'+\omega)\sin^2(B'-\frac{1}{2}\omega)};$$

or, l'on a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \ldots;$$

d'où, lorsque a est très-petit,

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2} a - \frac{a^2}{48} + \ldots,$$

$$\sin^3 \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{8} a^3 - \frac{a^4}{32} + \ldots,$$

$$\cos \tfrac{1}{2} a = 1 - \frac{a^2}{8} + \ldots,$$

$$\frac{\sin^3 \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a} = \tfrac{1}{8} a^3 + \frac{a^5}{64} + \ldots.$$

de même

$$\frac{\sin^3 \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} b} = \tfrac{1}{8} b^3 + \frac{b^5}{64},$$

et lorsque les côtés a, b, c sont petits, ω est aussi très-petit (2); le second membre est donc à très-peu près égal à $\frac{\sin^3 A'}{\sin^3 B'}$; ainsi, on a à des infiniment petits du quatrième ordre près

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{\sin^3 A}{\sin^3 B} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B};$$

c'est le théorème de Legendre.

6° Le triangle sphérique est formé par trois lignes de plus courtes distances entre trois points situés sur une sphère; étant donnés trois points sur une surface quelconque, les trois plus courtes distances, forment un triangle sur cette surface. M. Gauss a étendu le théorème de Legendre à ces triangles en général, dans un ouvrage intitulé: *Disquisitiones generales circa superficies curvas*.

7° L'équation (1) du paragraphe II, n'étant pas dans les éléments, nous devons la démontrer; on a

$$\left.\begin{aligned}\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)=&\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C-\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\\&-\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}C-\cos\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\end{aligned}\right\}, \quad (2)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{\sin b\sin c}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{\sin b\sin c}}.$$

On a des valeurs analogues pour

$$\sin\tfrac{1}{2}B, \quad \cos\tfrac{1}{2}B, \quad \sin\tfrac{1}{2}C, \quad \cos\tfrac{1}{2}C,$$

substituant dans l'équation (2), il vient

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\sin p-\sin(p-a)-\sin(p-c)-\sin(p-b)}{\sin a\sin b\sin c}$$

$$\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)},$$

$$\sin p-\sin(p-a)=2\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(b+c),$$

$$\sin(p-c)+\sin(p-b)=2\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(b+c),$$

$$\sin a=2\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a;$$

d'où

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{-2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c},$$

or

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega=-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C);$$

ce qui donne la formule (1);

8° Les trois cordes AB, AC, BC du triangle sphérique ABC sont les trois côtés d'un triangle rectiligne et égaux respectivement à $2\sin\frac{1}{2}c$, $2\sin\frac{1}{2}b$, $2\sin\frac{1}{2}a$; le rayon étant pris pour unité. Nommant α l'angle que font les cordes AB, AC, on a la relation

$$\cos\alpha = \cos A\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c - \sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c.$$

Cagnoli (*), se sert de cette relation pour comparer les petits triangles sphériques aux triangles rectilignes. On la démontre facilement (voy. *Nouvelles Annales*, p. 35).

COMPTES RENDUS MENSUELS DE L'ACADÉMIE DE BERLIN (Bericht über die, etc.). Août, septembre, octobre 1841.

POGGENDORFF. Méthode pour déterminer la force électromotive dans les chaînes galvaniques à courants non constants. (Pag. 263-377.)

LEJEUNE DIRICHLET. Recherches sur les fonctions homogènes du troisième degré et des degrés supérieurs.

Soit la fonction homogène

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 = m, \qquad (1)$$

a, b, c, m sont des nombres entiers, et il s'agit de trouver des nombres entiers pour x, y qui satisfassent à l'équation.

Considérant x et y comme les coordonnées d'une ligne, la question ne présente aucune difficulté lorsque l'équation présente une ellipse, une parabole ou deux droites convergentes.

1° *Ellipse*. Par un changement de coordonnées, on fait disparaître le rectangle, et on parvient à l'équation

$$x^2 + Bz^2 = M, \qquad (2)$$

(*) Traité de trigonométrie rectiligne et sphérique, par M. Cagnoli, p. 293. *Paris, 1786. Le traité le plus complet sur cette partie de la science.* L'ouvrage a été traduit de l'italien par M. Chompré, sous les yeux de l'auteur.

où B et M sont des nombres entiers; il suffit de multiplier l'équation donnée par a, et de faire ensuite $ay+bx=z$; pour résoudre l'équation (2), il faut rendre $M-Bz^2$ un carré parfait; on essaye à cet effet tous les nombres entiers, 0, 1, 2, 3, jusqu'à $z=\sqrt{\frac{M}{B}}$. Si parmi ces valeurs on trouve un carré, on aura la valeur de x, et $\frac{z-bx}{a}$ doit être entier. Si ces deux conditions ne peuvent être remplies à la fois, le problème est impossible.

2° *Parabole.* Il faut pour la possibilité que le premier membre de l'équation soit un carré parfait, et par conséquent, il faut que m soit un carré; extrayant la racine, on parvient à une équation du premier degré $cy+dx=n$, qui est toujours possible, lorsque c et d sont premiers entre eux.

3° Deux droites convergentes; dans ce cas, l'équation (1) prend la forme

$$(mx+ny)(px+qy)=m;$$

soit $m=ef$, posant

$$mx+ny=e,$$
$$px+qy=f;$$

les valeurs de x, y, tirées de ces équations, doivent être des nombres entiers, sinon la question est impossible; il faut essayer autant de solutions que m peut se décomposer en deux facteurs, parmi lesquels il faut comprendre l'unité.

4° *Hyperbole.* La solution dépend de la réduction en fraction continue d'une équation du second degré (v. pag. 1). M. Gerono a développé cette solution dans ce journal. Il suffit de remarquer ici que, par un changement de coordonnées, on ramène l'équation à cette forme:

$$t^2+(ac-b^2)u^2=1. \qquad (3)$$

Si on représente par T et U deux nombres entiers qui satisfont à cette équation, et par X et Y deux nombres entiers qui satisfont à l'équation (1), on trouve une infinité d'autres solutions, à l'aide de cette formule due à Euler :

$$ax+(b+\sqrt{b^2-ac})y=\pm(aX+\sqrt{b^2-ac}.y)(T+U\sqrt{b^2-ac})^n, \quad (4$$

n est un nombre entier quelconque, positif ou négatif, développant et égalant séparément les parties rationnelles et irrationnelles; on trouve deux équations du premier degré qui donnent les valeurs de x et de y. La difficulté est donc réduite à trouver X et Y. Monsieur L. D., par des considérations fort simples, en renfermant la valeur du premier membre de l'équation (4), entre des limites données, ramène la recherche de X et Y à un petit nombre d'essais.

De là l'auteur passe à la solution des fonctions homogènes du troisième degré, à trois variables, de la forme

$$(x+\alpha y+\alpha^2 z)\ (x+\beta y+\beta^2 z)\ (x+\gamma y+\gamma^2 z)=m,$$

α, β, γ, étant les trois racines incommensurables de l'équation algébrique $s^3+as^2+bs+c=0$, où a, b, c, sont des nombres rationnels donnés (p. 280-85). Voir aussi Legendre, Théorie des nombres. Novembre 1841.

1° Le professeur NEUMANN DE KÖNIGSBERG. Lois de la double réfraction de la lumière dans les corps comprimés ou dans les corps non cristallisés, et non uniformément échauffés (p. 330 à 353).

Le mémoire est divisé en trois sections. Dans la première, l'auteur considère les lois de la double réfraction dans les corps non cristallisés, uniformément dilatés ou comprimés; la seconde section contient les formules relatives aux couleurs produites par la lumière polarisée dans les corps uniformément dilatés. Ces deux sections servent de base à la troisième, qui traite de la théorie des couleurs qu'une inégalité distincte de température développe dans les corps transparents non cristallisés. L'auteur applique ses formules aux cercles colorés que manifeste une sphère de température uniforme et plongée dans un fluide dont la température est plus ou moins élevée que celle de la sphère; les équations différentielles auxquelles monsieur N... parvient pour déterminer le système des dilatations d'un corps, pour une distribution quelconque de température, s'accordent avec celles de M. Duhamel. (Mém. des sav. étrangers, t. V. 1838.)

MAGNUS. Sur la dilatation des gaz par la chaleur (p. 367-373).

Voici les coefficients moyens de la dilatation pour divers gaz :

Air atmosphérique. . . .	0,366508
Hydrogène.	0,365659
Acide carbonique.	0,369087
Acide sulfurique.	0,385618

Ils diffèrent du coefficient 0,375 admis dans les traités de physique.

MÉMOIRE

SUR

LES SECTIONS CONIQUES,

PAR C. E. PAGE,
Professeur à l'École royale d'artillerie de La Fère.

---

1. Dans les cours de géométrie analytique, on a coutume de se borner à démontrer l'identité des courbes du second ordre avec les sections planes du cône droit à base circulaire; ou si l'on étend la démonstration au cône oblique, c'est au moyen de calculs assez diffus, et qui ne peuvent s'appliquer

au cas où la directrice n'est pas une circonférence. Je me suis proposé de traiter la question d'une manière plus étendue et de trouver les formules générales de transformation au moyen desquelles, étant donnée l'équation d'une courbe servant de directrice à la surface d'un cône, on puisse trouver immédiatement l'équation de la courbe résultant de l'intersection de cette surface par un plan donné.

2. Soit KK′ (*fig.* 50) un arc de courbe servant de directrice au cône dont le sommet est au point S. En supposant cette surface coupée par un plan, nous pouvons toujours mener par le sommet, un plan perpendiculaire à la fois au plan coupant et au plan de la courbe. Prenons ce plan pour plan vertical de projections et le plan de la courbe pour plan horizontal.

Soit XX′ la ligne de terre.

La trace horizontale du plan coupant sera une droite OY perpendiculaire à la ligne de terre, et sa trace verticale une droite OA faisant avec la ligne de terre un angle égal à celui que le plan coupant fait avec le plan horizontal.

Une droite quelconque menée par le sommet rencontre le plan horizontal et le plan coupant en deux points que l'on nomme *points homologues;* par conséquent les points homologues des deux courbes sont ceux qui sont situés sur une même génératrice.

Un plan quelconque mené par le sommet coupe ces deux mêmes plans suivant deux droites que l'on nomme *lignes homologues;* il est évident que deux lignes homologues doivent toujours venir se rencontrer en un même point de la trace horizontale du plan coupant.

Par le sommet S menons une droite parallèle à la ligne de terre, cette droite ira rencontrer le plan coupant en un point A de sa trace verticale, le point homologue du point A sur le plan horizontal sera situé à l'infini.

Par la droite SA et par un point quelconque M de la directrice, faisons passer un plan, ce plan coupera le plan horizontal suivant une droite Mα parallèle à la ligne de terre, et le plan coupant suivant une droite qui joindra le point A au point α, où la première rencontre la trace horizontale du plan coupant.

Par le sommet S menons une droite parallèle à la trace verticale du plan coupant, cette droite ira rencontrer le plan horizontal en un point B situé sur la ligne de terre, le point homologue du point B sur le plan coupant sera situé à l'infini.

Par la droite SB et par le point M faisons passer un plan, ce plan coupera le plan horizontal suivant la droite BM et le plan coupant suivant une droite parallèle à la trace verticale AO et passant par le point β, où la ligne BM coupe la trace horizontale OY.

La ligne d'intersection des deux plans SAM et SBM, se confond avec la génératrice qui joint le point S au point M, par conséquent, le point d'intersection de la droite menée par le point β, parallèlement à la trace verticale AO, avec la droite qui joint le point A au point α, est le point homologue du point M sur le plan coupant.

Si l'on fait tourner le plan coupant autour de la trace OY comme charnière pour le rabattre sur le plan horizontal, la trace verticale OA se confond avec la ligne de terre, le point A vient prendre la position a, la droite qui joint le point A au point α se confond avec la droite $a\alpha$, la droite menée par le point β, parallèlement à la trace verticale OA se confond avec la droite menée par le point β parallèlement à la ligne de terre; par conséquent, le point m intersection de cette droite avec la droite $a\alpha$ est le rabattement sur le plan horizontal du point homologue du point M.

Au moyen des deux points a et B on peut construire le rabattement de la courbe d'intersection sur le plan horizontal; en effet, supposons que deux droites mobiles dont l'une tourne autour du point B et dont l'autre reste parallèle à la ligne de terre, soient assujetties à se couper constamment sur la directrice, ces deux droites rencontreront la trace OY en deux points mobiles, la première au point β et la seconde au point α; maintenant, supposons que deux autres droites mobiles, dont l'une tourne autour du point a et dont l'autre reste parallèle à la ligne de terre, soient dirigées dans leurs mouvements, la première par le point mobile α et la seconde par le point mobile β, le point d'intersection de ces deux droites décrira la courbe demandée.

Cette construction va nous conduire sans peine à la solution du problème que nous nous sommes proposé.

3. Soit

$$y = \varphi(x), \qquad (1)$$

l'équation de la directrice rapportée aux axes OX et OY. Représentons les distances constantes Oa par a, et OB par b, les distances variables Oα par α, et Oβ par β.

L'équation de la droite mobile Bβ sera

$$by + \beta x = b\beta. \qquad (2)$$

L'équation de la droite mobile menée par le point α parallèlement à l'axe OX sera

$$y = \alpha. \qquad (3)$$

Les variables α et β sont liées entre elles par la condition que les deux droites mobiles se coupent sur la directrice; on obtiendrait une équation exprimant cette condition en éliminant x et y entre les équations (1), (2) et (3).

L'équation de la droite mobile $a\alpha$ est

$$ay' + \alpha x' = a\alpha. \qquad (4)$$

L'équation de la droite mobile menée par le point β parallèlement à l'axe OX est

$$y' = \beta. \qquad (5)$$

On obtiendra l'équation du lieu géométrique engendré par le point d'intersection de ces deux droites, en éliminant α et β entre ces deux dernières équations, et l'équation résultant de l'élimination de x et de y entre les trois premières. Il s'en suit que l'on aura l'équation de ce lieu géométrique en éliminant les quatre variables α, β, x et y entre les cinq équations

$$y = \varphi(x), \qquad (1)$$
$$by + \beta x = b\beta, \qquad (2)$$
$$y = \alpha, \qquad (3)$$
$$ay' + \alpha x' = a\alpha, \qquad (4)$$
$$y' = \beta; \qquad (5)$$

des équations (2), (3), (4) et (5), on tire

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{ay'}{a - x'}, \\ x &= -\frac{bx'}{a - x'}. \end{aligned}\right\} \qquad (\Delta)$$

En remplaçant x et y par ces valeurs dans l'équation (1), on obtient l'équation cherchée entre x' et y'.

Les constantes a et b sont parfaitement déterminées, quand on connaît la position du sommet du cône et celle du plan coupant; par conséquent, les formules Δ sont les formules générales de transformation au moyen desquelles on peut trouver immédiatement l'équation de la courbe résultant de l'intersection d'un cône donné par un plan donné.

Si dans une équation algébrique d'un degré quelconque, on remplace x et y par les formules Δ, le degré de l'équation ne change pas, d'où l'on conclut que toutes les courbes résultant des intersections d'une même surface conique par différents plans sont des courbes du même degré.

4. Appliquons ces formules au cône droit ou oblique à base circulaire.

La directrice étant une circonférence, l'équation (1) est de la forme :

$$(y-c')^2+(x-c)^2=R^2\,;$$

en remplaçant dans cette équation x et y par les formules Δ, on a une équation transformée du second degré, représentons cette équation par

$$A_1y'^2+B_1x'y'+C_1x'^2+D_1y'+E_1x'+F_1=0,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}A_1&=a^2,\\ B_1&=2c'a,\\ C_1&=c'^2+c^2-2bc+b^2-R^2\,;\end{aligned}$$

d'où

$$B_1^2-4A_1C_1=4a^2(R^2-b^2+2bc-c^2)=4a^2(R-c+b)\,(R+c-b)\,;$$

lorsque b est compris entre $C+R$ et $C-R$, ce produit est positif, il est négatif lorsque b n'est pas compris entre $C+R$ et $C-R$. Enfin il est nul lorsque b est égal à $C+R$ ou à $C-R$. On en conclut que la courbe d'intersection est une hyperbole lorsque la trace horizontale du plan mené par le sommet, parallèlement au plan coupant, rencontre la circonférence de la base en deux points, la courbe est une ellipse quand cette trace horizontale ne rencontre pas la circonférence de la base; enfin, elle est une parabole, quand cette trace horizontale est tangente à la circonférence.

5. Maintenant supposons que la directrice soit une courbe quelconque du second ordre, son équation sera de la forme

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0\,;\qquad\text{(A)}$$

remplaçant x et y par les formules Δ, nous aurons une équation transformée du second degré,

$$A_1y'^2+B_1x'y'+C_1x'^2+D_1y'+E_1x'+F_1=0,$$

$$A_1 = Aa^2,$$
$$B_1 = -Bab - Da,$$
$$C_1 = Cb^2 + Eb + F,$$

d'où

$$B_1^2 - 4A_1C_1 = a^2\,[(B - 4AC)\,b^2 + 2\,(BD - 2AE)\,b + D^2 - 4AF].$$

En discutant cette expression, il est facile d'en conclure que la courbe d'intersection est une hyperbole quand la trace du plan mené par le sommet parallèlement au plan coupant rencontre la directrice en deux points; que la courbe est une ellipse quand cette trace ne rencontre pas la directrice; et qu'elle est une parabole quand cette trace est tangente à la directrice.

6. Maintenant proposons-nous la question suivante: Un cône qui a pour directrice une courbe quelconque du second ordre, peut-il toujours être coupé par un plan suivant une circonférence?

Pour que la courbe d'intersection soit une circonférence, il faut qu'on ait

$$B_1 = 0 \quad \text{et} \quad A_1 = C_1;$$

ce qui donne les deux équations

$$Bb + D = 0, \qquad (1) \qquad \text{et} \qquad Aa^2 = Cb^2 + Eb + F. \qquad (2)$$

Occupons-nous d'abord de la première, on en tire

$$b = -\frac{D}{B};$$

or l'équation du diamètre qui divise en deux parties égales un système de cordes parallèles à l'axe des y, est comme on sait

$$y_1 = -\frac{Bx_1 + D}{2A};$$

si dans cette équation on fait $y_1 = 0$, on en tire pour l'abscisse du point où ce diamètre va rencontrer l'axe OX,

$$x_1 = -\frac{D}{B}.$$

Il suit de là que le point B doit être situé sur le diamètre qui divise en deux parties égales un système de cordes parallèles à l'axe OY, c'est-à-dire à la trace horizontale du plan coupant (*fig.* 51).

Mettant à la place de b sa valeur dans l'équation (2), on en tire

$$a^2 = \frac{CD^2}{AB^2} - \frac{ED}{AB} + \frac{F}{A}.$$

Si l'on met cette même valeur à la place de x dans l'équation A, et qu'on représente par y_1 la valeur correspondante de y, on en tire

$$y^2 = -\frac{CD^2}{AB^2} + \frac{ED}{AB} - \frac{F}{A};$$

d'où

$$a^2 = -y^2.$$

La valeur de a est réelle quand celle de y est imaginaire et réciproquement ; ce qui fait voir que la trace horizontale du plan mené par le sommet parallèlement au plan coupant, ne doit pas rencontrer la directrice.

Si la courbe est une parabole en appelant m le point où elle rencontre le diamètre qui passe par le point B, et p' le paramètre de ce diamètre, on aura

$$y_1^2 = p'.mB \quad \text{d'où} \quad a^2 = -p'.mB. \qquad (a)$$

Si la courbe est une ellipse ou une hyperbole, le diamètre qui passe par le point B la rencontre en deux points m et n ; en appelant a' la moitié de ce diamètre et b' la moitié de son conjugué, on aura

$$\frac{a^2}{b'^2} = \frac{Bm.Bn}{b'^2}. \qquad (b)$$

7. On peut démontrer géométriquement que toutes les fois que les conditions ci-dessus sont satisfaites, la courbe d'intersection est une circonférence.

Supposons que la directrice soit une ellipse (*fig.* 51); par le diamètre mn et par le sommet S, faisons passer un plan. Ce plan coupe la surface du cône suivant deux génératrices Sm et Sn qui se projettent verticalement suivant les deux droites Sm' et Sn'. Son intersection avec le plan coupant, est une droite parallèle à BS, par conséquent perpendiculaire à DE et qui rencontre les deux génératrices Sm et Sn en deux points G et H projetés verticalement en g et h.

Le triangle SBn semblable au triangle HCn et le triangle SBm semblable au triangle mCG donnent

$$\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{CH}} = \frac{\mathrm{B}n}{\mathrm{C}n} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{CG}} = \frac{\mathrm{B}m}{\mathrm{C}m},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{BS}^2}{\mathrm{CH.CG}} = \frac{\mathrm{B}n.\mathrm{B}m}{\mathrm{C}n.\mathrm{C}m};$$

mais

$$\mathrm{BS} = \mathrm{OA} = a,$$

on a donc

$$\frac{\mathrm{BS}^2}{\mathrm{CD}^2} = \frac{\mathrm{B}n.\,\mathrm{B}m}{\mathrm{C}n.\,\mathrm{C}m},$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{CD}^2 = \mathrm{CH.CG}.$$

On démontrerait que cette relation a lieu pour toutes les ordonnées de la courbe d'intersection en menant par chacune de ces ordonnées, un plan parallèle au plan horizontal, on en conclut que la courbe d'intersection est une circonférence.

8. Le problème de couper une surface conique dont la directrice est une courbe quelconque du second ordre, de manière que la courbe d'intersection soit une circonférence, se trouve donc ramené au suivant :

Trouver sur le plan d'une courbe du second ordre, un point B tel que la droite qui joint ce point à un point donné

P, soit perpendiculaire à la direction conjuguée du diamètre qui passe par le point B, et que l'équation (a) ou l'équation (b) soit satisfaite, suivant que la courbe est une parabole ou qu'elle a un centre.

Occupons-nous d'abord du cas où la courbe est une parabole (*fig.* 52).

Soit

$$y^2 = 2px \qquad (1)$$

l'équation de cette parabole rapportée à son sommet et à ses axes.

Soient P la projection du sommet du cône sur le plan de la courbe,
h la hauteur du sommet au-dessus de ce plan,
B le point cherché,
p' le paramètre du diamètre qui passe par le point B.

On devra avoir

$$\mathrm{B}p^2 + h^2 = -p'.m\mathrm{B}.$$

Soient α et β les coordonnées du point P,
x_1 et y_1 les coordonnées du point B,
x et y les coordonnées du point m;

on aura

$$\mathrm{B}p^2 = (y_1 - \beta)^2 + (x_1 - \alpha)^2,$$

$$p' = 4\left(x + \frac{p}{2}\right) = \frac{2y^2}{p} + 2p,$$

$$m\mathrm{B} = x_1 - x,$$

d'où

$$(y_1 - \beta)^2 + (x_1 - \alpha)^2 + h^2 = \left(\frac{2y^2}{p} + 2p\right)(x - x_1); \qquad (2)$$

il ne s'agit plus que de remplacer dans cette équation x_1 et y_1 par leurs valeurs en fonction de x et de y.

On a d'abord

$$y_1 = y,$$

la droite PB est perpendiculaire à la direction conjuguée du diamètre Bm, par conséquent perpendiculaire à la tangente menée par le point m, son équation sera donc

$$y_1-\beta=-\frac{y}{p}(x_1-\alpha),$$

d'où l'on tire en remplaçant y_1 par sa valeur y,

$$x_1=\frac{p}{y}(\beta-y)+\alpha;$$

remplaçant x_1 et y_1 par leurs valeurs dans l'équation (2), il vient

$$(y-\beta)^2+\left(\frac{p\beta}{y}-p\right)^2+h^2=\left(\frac{2y^2}{p}+2p\right)\left(\frac{y^2}{2p}-\frac{p\beta}{y}+p-\alpha\right);$$

effectuant les développements et les réductions, il vient

$$y^6+2p^2y^4-2p\alpha y^4+(p^2-2p\alpha-\beta^2-h^2)p^2y^2-p^4\beta^2=0;$$

remplaçant y^2 par sa valeur $2px$, il vient

$$x^3+(p-\alpha)\,x^2+\frac{(p^2-2p\alpha-\beta^2-h^2)}{4}\,x-\frac{p\beta^2}{8}=0. \qquad (3)$$

Pour que le problème soit possible, il ne suffit pas que cette équation admette une racine réelle positive, il faut en outre que la position correspondante du point B soit extérieure à la courbe, c'est-à-dire que les valeurs correspondantes des coordonnées x_1 et y_1, satisfassent à l'inégalité

$$y_1^2>2px_1,\quad \text{or}\quad y_1^2=y^2=2px,\quad \text{d'où}\quad x>x_1;$$

à la place de x_1 mettant sa valeur, on a

$$x>\frac{p\beta}{\pm\sqrt{2px}}+\alpha-p \quad \text{ou} \quad x-(\alpha-p)>\frac{p\beta}{\pm\sqrt{2px}}.$$

Quel que soit le signe de β, à cause du double signe du radical, il y a toujours une des deux valeurs du second membre de cette inégalité qui est négative, il suffit donc que l'équation admette une racine qui satisfasse à la condition

$$x>\alpha-p.$$

Lorsque α est négatif, cette condition est évidemment satisfaite, car l'équation admet une racine réelle positive; lorsque α est positif en remplaçant dans (3) x par $\alpha - p$, on obtient un résultat négatif dont l'équation admet une racine positive plus grande que $\alpha - p$.

Il résulte de cette discussion que le problème est toujours possible; c'est-à-dire, qu'un cône dont la directrice est une parabole, peut toujours être coupé par un plan suivant une circonférence. Comme nous avons déjà démontré qu'un cône dont la directrice est une courbe quelconque du second ordre, peut toujours être coupé par un plan suivant une parabole, nous serions en droit d'en conclure qu'un cône dont la directrice est une courbe quelconque du second ordre, peut toujours être coupé par un plan suivant une circonférence; néanmoins nous allons résoudre directement le problème dans le cas où la courbe serait une ellipse ou une hyperbole.

9. Soit

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \qquad (1)$$

l'équation d'une ellipse (*fig.* 53) rapportée à son centre et à ses axes.

Soient P la projection du sommet sur le plan de la courbe,
h sa hauteur,
B le point cherché,
a' le demi-diamètre passant par le point B,
b' le demi-diamètre conjugué de a'.

On aura

$$\frac{p\mathrm{B}^2 + h^2}{b'^2} = \frac{\mathrm{B}m.\mathrm{B}m'}{a'^2}. \qquad (2)$$

Soient α et β les coordonnées du point P,
x_1 et y_1 les coordonnées du point B,
x et y les coordonnées du point m.

On aura

$$pB^2 = (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2,$$

$$Bm.Bn = \left(\sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x^2+y^2}\right)\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$= x_1^2 + y_1^2 - x^2 - y^2,$$

$$a'^2 = x^2 + y^2,$$

$$b'^2 = a^2 + b^2 - x^2 - y^2 = \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{a^2b^2};$$

mettant ces valeurs dans l'équation (2), il vient

$$\frac{(x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2 + h^2}{a^2 + b^2 - x^2 - y^2} = \frac{x_1^2 + y_1^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; \quad (3)$$

il ne s'agit plus que de remplacer dans cette équation x_1 et y_1 par leurs valeurs en fonction de x et de y.

L'équation du diamètre mn est

$$y_1 = \frac{y}{x} x_1,$$

la tangente de l'angle que le diamètre conjugué du diamètre mn fait avec l'axe des x est $-\frac{b^2x}{a^2y}$.

Par conséquent l'équation de la droite menée par le point P perpendiculairement à ce diamètre est

$$y_1 - \beta = \frac{a^2y}{b^2x}(x_1 - \alpha).$$

Pour déterminer x_1 et y_1, on a donc les deux équations

$$y_1 = \frac{y}{x} x_1 \quad \text{et} \quad y_1 - \beta = \frac{a^2y}{b^2x}(x_1 - \alpha);$$

on en tire

$$x_1 = \frac{a^2\alpha y - b^2\beta x}{(a^2 - b^2)y} \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{a^2\alpha y - b^2\beta x}{(a^2 - b^2)x},$$

d'où

$$x_1 - \alpha = \frac{b^2(\alpha y - \beta x)}{(a^2 - b^2)y}, \quad y_1 - \beta = \frac{a^2(\alpha y - \beta x)}{(a^2 - b^2)x};$$

mettant ces valeurs dans l'équation (3), il vient

$$(b^4x^2+a^4y^2)(\alpha y-\beta x)^2+x^2y^2(a^2-b^2)^2h^2$$
$$=[(a^2\alpha y-b^2\beta x)^2-x^2y^2(a^2-b^2)^2](a^2+b^2-x^2-y^2);$$

remarquant que

$$b^4x^2+a^4y^2=a^2b^2(a^2+b^2-x^2-y^2),$$

il vient en simplifiant

$$(b^4x^2+a^4y^2)(\alpha^2y^2+\beta^2x^2)+x^2y^2(a^2-b^2)^2h^2$$
$$=[a^4\alpha^2y^2+b^4\beta^2x^2-x^2y^2(a^2-b^2)^2](a^2+b^2-x^2-y^2);$$

en remplaçant dans cette équation y^2 par sa valeur $b^2-\dfrac{b^2x^2}{a^2}$, on obtient une équation du sixième degré, qui ne contient que des puissances paires de x. Posant $x^2=z$, on obtient une équation du troisième degré qui a toujours une racine réelle.

La marche des calculs serait la même dans le cas où la directrice serait une hyperbole.

SOLUTION DU PROBLÈME 10 (p. 56).

PAR M. A. DE BEAUSACQ,
Elève au collége de Versailles.

La base AB d'un triangle rectiligne ABC est donnée de grandeur et de position, la somme des deux autres côtés AC, BC du triangle est égale à une droite donnée; on suppose que ce triangle tourne autour d'un axe rectiligne DE tracé sur son plan; déterminer le sommet C du triangle, de manière que la somme des surfaces décrites par les deux côtés AC, BC, adjacents à la base, soit un maximum ou bien un minimum.

On sait que lorsqu'un système de droites tourne autour d'un axe situé dans son plan, la surface décrite par ce système est égale à la somme des génératrices multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité du système, donc pour résoudre le problème, il suffira de chercher parmi tous les triangles que l'on peut construire avec les données de la question, ceux dans lesquels les centres de gravité des côtés variables, seront l'un le plus éloigné, l'autre le plus rapproché de la droite DE.

Or, supposons que le triangle ABC (*fig.* 56), résolve le problème ; prenons le point G milieu de AC, le point K milieu de BC menons la droite GK et divisons-la en deux parties GM et KM telles que l'on ait

$$(1) \qquad AC : BC :: MK : MG.$$

Le point M sera le centre de gravité du système des droites AC et CB. Il nous suffit donc de chercher les coordonnées de ce point. A cet effet, posons $AC+CB=2a$, $AB=2c$ et $a^2-c^2=b^2$.

Prenons pour axe des x la droite AB, pour axe des y la perpendiculaire EF menée par son milieu, et appelons x' et y' les coordonnées du point C. Ce point doit évidemment se trouver sur une ellipse, ayant pour foyers les points A et B, et pour grand axe $2a$, nous aurons donc entre x' et y', la relation :

$$(2) \qquad a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2.$$

Cela posé, si nous appelons X et Y les coordonnées du point M, nous aurons $Y = \frac{y'}{2}$, d'où l'on tire

$$(3) \qquad y' = 2Y,$$

et

$$X = OP - MK = \frac{c + x'}{2} - MK\ (^*).$$

D'ailleurs la proportion (1) donne

$AC+CB$ ou $2a : AC :: MK+MG$ ou $c : MK$ d'où $MK = \frac{c \times AC}{2a}$,

(*) La perpendiculaire KP sur AB est omise dans la figure.

et remplaçant le rayon vecteur AC par sa valeur $\frac{a^2+cx}{a}$, il viendra $MK = \frac{c(a^2+cx)}{2a^2}$ et par suite

$$X = \frac{c+x'}{2} - \frac{c(a^2+cx')}{2a^2} = \frac{b^2}{2a^2}x',$$

d'où (4) $$x' = \frac{2a^2}{b^2}X.$$

Remplaçant alors dans l'équation (2) x' et y' par leurs valeurs, nous aurons $4a^2Y^2 + \frac{4a^4}{b^2}X^2 = a^2b^2$, ou

(5) $$b^2Y^2 + a^2X^2 = \frac{1}{4}b^4.$$

Telle est la relation à laquelle doivent satisfaire X et Y, et l'on voit d'ailleurs facilement par cette équation que le lieu géométrique du point M est une ellipse. Maintenant puisque le triangle ACB résout le problème, le point M est sur ce lieu le point le plus éloigné ou le point le moins éloigné de la droite DE; il doit donc se trouver au point de contact d'une tangente menée parallèlement à DE.

Or, dans l'équation de cette tangente, le coefficient de x est égal à la dérivée prise par rapport à X, dans l'équation de la courbe, divisée par la dérivée prise par rapport à Y, le tout précédé du signe moins; de plus puisque cette tangente est parallèle à DE, si nous appelons g la tangente de l'angle EDQ(*), g devra être aussi le coefficient de x dans son équation, nous aurons donc la relation

$$g = -\frac{a^2X}{b^2Y} \quad \text{d'où} \quad Y = -\frac{a^2X}{b^2g}.$$

Et remplaçant Y par sa valeur dans l'équation (5), il viendra

$$\frac{a^4X^2}{b^2g^2} + a^2X^2 = \frac{1}{4}b^4 \quad \text{ou} \quad a^2X^2(a^2+b^2g^2) = \frac{1}{4}b^6g^2,$$

(*) Q est sur le prolongement de BD.

d'où l'on tire

$$X = \pm \frac{b^3 g}{2a\sqrt{a^2+b^2g^2}}, \text{ et par suite } Y = \mp \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2g^2}}.$$

Revenons enfin aux égalités (3) et (4), et nous en déduirons

$$x' = \pm \frac{abg}{\sqrt{a^2+b^2g^2}} \quad \text{et} \quad y' = \mp \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2g^2}}.$$

Telles sont les coordonnées des points cherchés; il est d'ailleurs évident que les signes supérieurs doivent être pris ensemble, et les signes inférieurs aussi ensemble.

D'après les valeurs de x' et de y', on voit que les deux points cherchés sont symétriques l'un de l'autre, par rapport aux deux axes, de plus les coordonnées de chacun d'eux seront de mêmes signes, si l'angle EDQ est obtus, et de signes contraires, si ce même angle est aigu.

Enfin si l'on pose $OE = l$, l'ordonnée du point qui donne le maximum devra toujours être de signe contraire à l, et l'ordonnée du point qui donne le minimum devra toujours être de même signe La position des deux points cherchés est donc déterminée.

Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que x' et y' soient des quantités réelles, ce qui exige que b le soit, c'est-à-dire que l'on ait $a^2 > c^2$ ou $a > c$; mais cette condition ne suffit pas; il faut encore que l'on ait, abstraction faite des signes, $x' < a$ et $y' < b$, ce qui a toujours lieu; d'où l'on conclut que le problème est possible toutes les fois que la somme des côtés variables est plus grande que la base donnée. Il pourrait arriver que la droite DE coupât un des triangles qui résout la question, ou même tous les deux; alors pour que la solution que nous venons de proposer puisse s'appliquer aussi à ce cas, il faudrait regarder comme négative la surface engendrée par la révolution des droites qui se trouveraient au-dessous de l'axe de rotation.

Il pourrait encore arriver que l'axe de rotation fut parallèle à la base donnée AB. Pour envisager ce cas, il suffit dans les valeurs de x' et de y' de faire $g=0$, on aura alors $x'=0$ et $y'=\mp b$. On est donc ainsi conduit au théorème suivant: De tous les triangles de même base dont les côtés variables font une somme donnée et qui tournent autour d'un axe situé dans leur plan parallèlement à la base, celui dans lequel la surface engendrée par les côtés variables est un maximum ou un minimum, est le triangle isocèle.

Ce cas comprend évidemment comme cas particulier, celui où l'axe de rotation se confondrait avec la base, c'est-à-dire celui où les triangles tourneraient autour de leur base.

Enfin, il peut arriver que l'axe de rotation soit perpendiculaire à la base; pour envisager ce cas, il nous suffit dans les valeurs de x' et de y' de faire $g=\infty$, nous aurons alors $x=\pm a$ et $y=0$, et nous serons ainsi conduits à cet autre théorème:

De tous les triangles de même base dont les côtés variables font une somme donnée et qui tournent autour d'un axe situé dans leur plan perpendiculairement à leur base, celui dans lequel la somme des surfaces engendrées par la révolution des côtés variables est maximum ou minimum, est le triangle dont les côtés variables diffèrent entre eux d'une quantité égale à la base; triangle qui se réduit à une droite.

SOLUTION DU PROBLÈME 5 (p. 123).

PAR M. MERLIEUX (ÉDOUARD).

—

Quel est le plus court chemin d'un point à un autre, en passant par deux droites situées dans l'espace.

SOLUTION.

Soient A et B les deux points et D et D', les deux droites données. Nous avons vu (p. 143), comment on détermine le plus court chemin d'un point à un autre, en passant par une droite donnée; si donc nous cherchons les plus courts chemins du point A aux points successifs de D' en passant par D, nous obtiendrons une surface ayant pour directrices les deux droites et la circonférence décrite, en prenant pour rayon la perpendiculaire abaissée de A sur D; nous trouverons de même la surface contenant les plus courts chemins du point B, aux différents points de D en passant par D'; les intersections de ces deux surfaces seront les plus courts chemins demandés.

Cherchons l'équation d'une de ces surfaces.

Déterminons le plan des xy tel que l'axe des z, perpendiculaire à ce plan, soit l'une des droites données, D par exemple, et tel aussi, d et d' étant les projections de D' sur les plans des xy et des yz, que d soit perpendiculaire à l'axe des x; nous aurons dans le premier plan $x=a$, a étant la distance de l'origine à d, et dans le second $z=my$; ce sont là les équations de D'. De même, on aura pour les équations de la droite génératrice M, $x=pz+q$, $y=p'z+q'$; p, p', q, q', étant des coefficients qu'il faut déterminer; appelant n la hauteur (au-dessus du plan des xy), du cercle perpendiculaire à D, nous aurons $z=n$, et, cherchant la projection sur le plan des xy, $x^2+y^2=r^2$; ce sont là les équations du cercle, son rayon étant r.

Cela posé, nous devons trouver dans l'équation de M la même valeur de z, soit que nous fassions $x=0$, ou $y=0$; la première est $z=-\frac{q}{p}$; la seconde $z=-\frac{q'}{p'}$, donc $\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$.

De $x=a$, $x=pz+q$, nous tirons $pz=a-q$, $z=\frac{a-q}{p}$.

De $z=my$, $y=p'z+q'$, nous tirons $z(1-mp')=mq'$, $z=\frac{mq'}{1-mp'}$ donc

$$\frac{a-q}{p}=\frac{mq'}{1-mp'}.$$

Nous avons

$$r^2=x^2+y^2,\quad x=pz+q,\quad y=p'z+q',\quad z=n,$$

d'où

$$r^2=(pn+q)^2+(p'n+q')^2.$$

Nous avons donc cinq équations, savoir :

$$x=pz+q, \tag{1}$$

$$y=p'z+q', \tag{2}$$

$$\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}, \tag{3}$$

$$\frac{a-q}{p}=\frac{mq'}{1-mp'}, \tag{4}$$

$$r^2=(pn+q)^2+(p'n+q')^2. \tag{5}$$

Des quatre premières, nous tirons

$$p=\frac{x(x-a)}{zx-amy},$$

$$p'=\frac{y(x-a)}{zx-amy},$$

$$q=\frac{ax(z-my)}{zx-amy},$$

$$q'=\frac{ay(z-my)}{zx-amy},$$

et substituant ces valeurs dans la cinquième, nous trouvons l'équation cherchée du 4ième degré

$$r^2=(x^2+y^2)\left[\frac{n(x-a)+a(z-my)}{zx-amy}\right]^2.$$

Comme il n'y a pas de quantité toute connue, cette surface passe par l'origine.

$a=0$. Les deux droites sont convergentes; on a alors $r^2z^2=n^2(x^2+y^2)$; c'est un cône droit; et $x=0$; c'est le plan des yz qui résout la question.

$n=0$, $r=0$. Le cercle est réduit à son centre qui est à l'origine, et l'équation devient $a^2(x^2+y^2)(z-my)^2=0$, qui se décompose en $x^2+y^2=0$, qui représente l'origine et $z=my$, la projection de D sur le plan des yz.

$r=0$. Il vient: $(x^2+y^2)(az-amy+nx-an)^2=0$, c'est-à-dire $x^2+y^2=0$, encore l'origine, et un plan dont l'équation est $az-amy+nx-an=0$.

SOLUTION DU PROBLÈME 6 (p. 58).

LIMITE DE LAGRANGE.

PAR M. PURY.

$-Ax^{m-p}$, $-Bx^{m-r}$, $-Cx^{m-s}$, etc., étant les termes négatifs d'une équation algébrique à coefficients réels, du degré m: on aura une limite supérieure des racines positives, en additionnant les deux plus grandes des quantités $\sqrt[p]{A}$, $\sqrt[r]{B}$, $\sqrt[s]{C}$, etc.

Démonstration. Le cas le plus défavorable est évidemment celui où l'équation ayant tous ses termes négatifs, à partir du second, est de cette forme :

$$x^m-A_1x^{m-1}-A_2x^{m-2}-\ldots-A_px^{m-p}-\ldots-A_rx^{m-r}-\ldots-A_m=0, \quad (1)$$

d'où l'on tire

$$1=\frac{A_1}{x}+\left(\frac{\sqrt{A_2}}{x}\right)^2+\left(\frac{\sqrt[3]{A_3}}{x}\right)^3+\ldots\left(\frac{\sqrt[p]{A_p}}{x}\right)^p+\ldots\left(\frac{\sqrt[r]{A_r}}{x}\right)^r+\ldots \quad (2)$$

Soient $\sqrt[p]{A_p}$, $\sqrt[r]{A_r}$, les deux plus grandes quantités de la suite A_1, $\sqrt{A_2}$, $\sqrt[3]{A_3}$, etc...

Soit de plus $\sqrt[p]{A_p}=n\sqrt[r]{A_r}$, n étant d'abord plus grand que l'unité; faisant $x=\sqrt[p]{A_p}+\sqrt[r]{A_r}=(n+1)\sqrt[r]{A_r}$, la fraction $\frac{\sqrt[p]{A_p}}{x}$ devient égale à $\frac{n}{n+1}$, toutes les autres fractions $\frac{A_1}{x}$, $\frac{\sqrt{A_2}}{x}$, etc., seront plus petites que $\frac{1}{n+1}$, vu que $\sqrt[r]{A_r}$, est plus grand qu'aucune des quantités A_1, $\sqrt{A_2}$, etc.; donc le second membre de l'équation (2) en y substituant cette valeur de x, devient plus petit que la somme

$$\frac{1}{1+n}+\frac{1}{(1+n)^2}+\frac{1}{(1+n)^3}+\ldots\frac{1}{(1+n)^p}+\ldots\frac{1}{(1+n)^m}$$
$$+\left(\frac{n}{1+n}\right)^p-\frac{1}{(1+n)^p}, \qquad (3)$$

$n+1$, étant plus grand que l'unité, cette somme est plus petite que $\frac{1}{n}+\left(\frac{n}{1+n}\right)^p-\frac{1}{(1+n)^p}$; or, ce trinôme est plus petit que l'unité; en effet, on voit facilement que $\frac{n^p-1}{(1+n)^p}<\frac{n-1}{n}$; il suffit de diviser de part et d'autre par $n-1$, donc en remplaçant x par $\sqrt[p]{A_p}+\sqrt[r]{A_r}$, le premier membre de l'équation (2) devient à fortiori plus grand que le second membre; il en est de même dans l'équation (1), etc.

Lorsque $n=1$; la somme (3) est remplacée par la progression géométrique $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^m}$, plus petite que l'unité.

RECHERCHES

DES

PROPRIÉTÉS DES DIAMÈTRES CONJUGUÉS,

D'APRÈS M. GERGONNE (*).

1° Les recherches de ces propriétés étant présentées d'une manière prolixe et difficile dans les traités classiques, je crois utile de rappeler la méthode simple, facile, proposée il y a plusieurs années par le vénérable recteur de l'Académie de Montpellier.

2° Ellipse,

$a =$ premier demi-diamètre principal, axe des x,

$b =$ second demi-diamètre principal, axe des y,

$a', b' =$ deux demi-diamètres conjugués,

$x', y' =$ coordonnées de l'extrémité de a',

$x'', y'' =$ coordonnées de l'extrémité de b';

posons

$$\frac{x'}{a} = \text{X}',$$

$$\frac{x''}{a} = \text{X}'',$$

$$\frac{y'}{b} = \text{Y}',$$

$$\frac{y''}{b} = \text{Y}'';$$

3° On a donc

$$\text{X}'^2 + \text{Y}'^2 = 1,$$

$$\text{X}''^2 + \text{Y}''^2 = 1,$$

$$\text{X}'\text{X}'' + \text{Y}'\text{Y}'' = 0.$$

(*) Annales des mathématiques, tome V, p. 29.

Les deux premières équations expriment que les extrémités des diamètres a', b' sont sur l'ellipse, et la troisième exprime que ces diamètres sont conjugués.

Or, on sait qu'un tel système d'équations peut toujours être remplacé par celui-ci :

$$X'^2+X''^2=1,$$
$$Y'^2+Y''^2=1,$$
$$(X'Y''-Y'X'')^2=1,$$

et remplaçant X',X'',Y',Y'' par leurs valeurs, on a

$$x'^2+x''^2=a^2,$$
$$y'^2+y''^2=b^2,$$
$$(x'y''-y'x'')^2=a^2b^2\,;$$

mais $x'^2+y'^2=a^2$, $x''^2+y''^2=b'^2$, donc $a'^2+b'^2=a^2+b^2$; première propriété.

$x'y''-y'x''$ est l'aire du parallélogramme construit sur les demi-diamètres conjugués ; donc cette aire est équivalente au rectangle construit sur les demi-axes principaux ; deuxième propriété.

4° Hyperbole ; même calcul et aussi pour les surfaces du second degré. Tm.

PROBLÈMES ET THÉORÈMES A DÉMONTRER.

23. Déduire des propriétés du triangle rectangle que le module de la somme de deux types imaginaires est plus petit que la somme des modules de ces deux types, et plus grand que leur différence. Le type imaginaire est représenté, comme on sait, par $a+b\sqrt{-1}$, et son module par $\sqrt{a^2+b^2}$, pris positivement.

24. Pour mesurer un angle solide, on conçoit une sphère

de rayon quelconque, ayant son centre au sommet de l'angle; la portion de la surface sphérique interceptée, divisée par le $\frac{1}{8}$ de la surface totale, donne un quotient proportionnel à l'angle solide. Ainsi, l'angle solide tri-rectangle a pour mesure l'unité, et la somme de tous les angles solides du cube est égale à 8. Quelle est la somme des angles solides dans chacun des quatre autres corps réguliers?

Observation. M. Catalan a trouvé, à l'aide du calcul intégral, la mesure de l'angle solide du cône inscrit dans un segment sphérique, c'est-à-dire d'un cône ayant son sommet sur la sphère et pour base celle du segment. Cette mesure est exprimée en fonctions elliptiques. (J. de Mathématiques, tome 6, p. 419, année 1841.)

25. De tous les cônes inscrits dans un segment sphérique, celui qui a pour sommet le pôle de la base a le plus petit angle solide: la somme des deux angles solides des cônes qui ont pour sommets respectifs les pôles de la base commune est égale à 4.

26. Dans un quadrilatère inscriptible, on prolonge les côtés opposés pour former le quadrilatère complet. Si l'on mène les bissectrices des deux angles extérieurs et qu'on prolonge ces lignes jusqu'à ce qu'elles coupent les côtés du quadrilatère, les milieux des portions de ces bissectrices interceptées dans le quadrilatère et les milieux des diagonales du quadrilatère sont sur une même droite.

27. Étant données deux équations algébriques, chacune à une inconnue, trouver une troisième équation qui ait pour racines les différences que l'on obtient en retranchant successivement chaque racine de la seconde équation de chaque racine de la première?

28. Parmi les m quantités a_1, a_2, a_3.... a_m, il y a p quantités négatives. Combien y a-t-il de termes négatifs dans le développement de $(a_1+a_2+a_3+....a_m)^n$, n étant un nombre entier positif?

29. Par un point A situé dans le plan d'une conique, on mène un diamètre, une seconde droite conjuguée à ce diamètre et une troisième droite quelconque rencontrant la courbe en deux points; menant deux tangentes par ces deux points, elles coupent la seconde droite en deux points également distants du point A.

30. Trouver la loi du développement de
1° sin $(a_1+a_2+a_3+\ldots a_m)$. 2° de cos $(a_1+a_2+a_3+\ldots a_m)$
3° En déduire les formules connues pour sinus na, cos na.

AVIS.

Désirant publier les solutions données par les élèves qui ont remporté les prix de mathématiques aux concours entre les colléges de Paris depuis la première année de l'institution, nous prions les lauréats de vouloir bien nous adresser des copies authentiques et les noms des professeurs : nous en ferons tirer un certain nombre d'exemplaires à part pour les tenir à leur disposition.

ANNONCES.

—

17. Cahiers de Géométrie élémentaire, troisième cahier, par Jules Planche. In-8 de 4 feuilles, plus une planche. Amiens, 1842.

18. Cours de Mathématiques élémentaires, par M. l'abbé D. Lecart. Paris, 1842. Prix : 2 fr. 50 c.

19. Nouveau Traité élémentaire d'Arithmétique décimale, par J. George fils, 4e édition in-18 de 4 f. et demie. Paris, Têtu. Pr. : 75 c., 1842.

20. Problèmes d'Algèbre et Exercices de calculs algébriques, avec les solutions, par M. Georges Ritt, 2e édition in-8 de 25 f. Pr. : 5 fr.

THÉORIE

DES APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES,

PAR M. GUILMIN,
Professeur de mathématiques.

—

1. Les quantités incommensurables ne pouvant être réunies dans une expression algébrique quelconque, que par voie d'addition, de soustraction, de multiplication, d'élévation aux puissances, de division, d'extraction de racines, il suffit de considérer successivement chacune de ces opérations.

Je supposerai qu'on sache calculer chaque quantité incommensurable isolée avec le degré d'approximation que l'on veut, comme cela a lieu pour les racines d'un degré quelconque, pour le nombre π, pour les logarithmes, et les lignes trigonométriques.

Le problème à résoudre pour chaque opération est celui-ci : déterminer une limite que ne pourra dépasser l'erreur commise sur chacune des quantités employées dans l'opération, pour que le résultat final obtenu, diffère du résultat vrai d'un nombre moindre que la fraction donnée $\frac{1}{\delta}$.

Addition.

2. Soit à calculer $A+B+C$ à $\frac{1}{\delta}$ près.

Je suppose qu'on prenne les nombres A, B, C par défaut, la somme calculée sera

$$(A-e')+(B-e'')+(C-e''')=A+B+C-(e'+e''+e'''),$$

erreur commise $e'+e''+e'''$: soit e la limite commune à déterminer de e', e'', e'''; à cause de $e>e'$, $e>e''$, $e>e'''$, on a $3e>e'+e''+e'''$; il suffira donc de choisir e tel que $3e$ soit moindre que $\frac{1}{\delta}$ ou $e<\frac{1}{3\delta}$, car on aura à fortiori $e'+e'+e'''<\frac{1}{\delta}$, (*).

On calculera donc chaque quantité à $\frac{1}{3\delta}$ près, et en général à $\frac{1}{m\delta}$ près; lorsque le nombre des quantités incommensurables à additionner sera m.

Soustraction.

3. Calculer $A-B$ à $\frac{1}{\delta}$ près.

Soient pris A et B par défaut. Différence vraie, $A-B$; différence calculée $(A-e')-(B-e'')=A-B-e'+e''$; erreur commise $e''-e'$; à cause de $e>e''$, $e>e'$, on a $e>e''-e'$ quelle que soit la plus grande des quantités e'', e'. Il suffira donc que la limite e soit moindre que $\frac{1}{\delta}$; car à fortiori, on aura $e''-e'<\frac{1}{\delta}$.

On prendra donc chaque quantité A, B, isolément à $\frac{1}{\delta}$ près.

En opérant ainsi, comme on ne sait pas laquelle est la plus grande des erreurs e'', e', on est bien assuré que l'erreur commise sur la différence est moindre que $\frac{1}{\delta}$, mais on ne peut dire dans quel sens elle est commise, en plus ou en moins.

(1) Dans tout ce qui suit, e', e'', e'''.... désigneront les erreurs numériques commises sur les diverses quantités incommensurables qui entrent dans les expressions dont on s'occupe; e désigne la limite commune de ces erreurs.

Lorsqu'on voudra le savoir d'une manière certaine, on prendra l'une des quantités A par défaut, et l'autre B par excès ; alors la différence calculée sera

$$(A-e')-(B+e'')=A-B-(e'+e''),$$

erreur en moins $e'+e''$; mais à cause de $e>e'$, $e>e''$, on a $2e>e'+e''$, il suffira donc de prendre $2e<\frac{1}{\delta}$ ou $e<\frac{1}{2\delta}$.

Si la différence devait être calculée par excès, on prendrait A par excès et B par défaut.

4. Dans le cas d'une somme composée de termes additifs et soustractifs $A+B-C+D-E-F$, on peut la partager en deux parties $A+B+D-(C+E+F)=M-N$. On calculera M et N isolément, d'après la formule relative à l'addition, à $\frac{1}{\delta}$ ou à $\frac{1}{2\delta}$ près, suivant qu'on voudra avoir le résultat à $\frac{1}{\delta}$ près, sans s'occuper du sens de l'erreur, ou précisément par défaut ou par excès.

Multiplication.

5. (*a*). Cas d'un seul facteur incommensurable.

Calculer mA à $\frac{1}{\delta}$ près.

Produit vrai mA, produit calculé $m(A-e')=mA-me'$, erreur commise me' qui doit être moindre que $\frac{1}{\delta}$; on choisira donc la limite e telle que $me<\frac{1}{\delta}$ ou $e<\frac{1}{m\delta}$.

(*b*). Calculer un produit de m facteurs incommensurables $ABC\ldots HK$ à $\frac{1}{\delta}$ près.

Considérons les trois produits.

Prod. vrai.	Produit calculé.	Produit auxiliaire.
$ABC\ldots HK$,	$(A-e')(B-e'')\ldots(H-e_{m-1})(K-e_m)$	$(A-e)(B-e)\ldots(H-e)(K-e)$.

(On sait que e est la limite commune de e', e''...... e_m).

Ces trois produits sont rangés par ordre de grandeurs décroissantes ; la différence entre les deux premiers qui est justement l'erreur commise est moindre que la différence, entre le premier et le troisième ; il suffit donc de déterminer e par la condition qu'on ait

$$ABC...HK-(A-e)(B-e)...(K-e)<\frac{1}{\delta}, \quad (1)$$

car on aura à fortiori

$$ABC...HK-(A-e')(B-e'')...(K-e_m)<\frac{1}{\delta}.$$

Pour plus de commodité et pour nous débarrasser des soustractions, posons $A-e=A'$, $B-e=B'$, etc.... ou $A=A'+e$, $B=B'+e$, etc.

Alors l'inégalité (1) devient

$$(2) \quad (A'+e)(B'+e)...(K'+e)(H'+e)-A'B'C'...K'H'<\frac{1}{\delta};$$

or

$$(A'+e)(B'+e)=(A'+e)B'+e(A'+e)=A'B'+B'e+e(A'+e)$$
$$=A'B'+e(B'+(A'+e),$$
$$(A'+e)(B'+e)(C'+e)=(A'+e)(B'+e)C'+e(A'+e)(B'+e)$$
$$=A'B'C'+e[B'C'+C'(A'+e)]+e(A'+e)(B'+e)$$
$$=A'B'C'+e[B'C'+C'(A'+e)+(A'+e)(B'+e)].$$

On aperçoit ici une loi qu'il est facile de généraliser. Le produit de m facteurs $(A'+e)(B'+e)...(H'+e)(K'+e)$, est égal au produit $A'B'...K'$ des m termes, plus le produit de e par la somme des produits $(m-1)$ à $(m-1)$ des mêmes facteurs A', B', C',... K', produit dans lequel certains de ces facteurs seraient remplacés par les mêmes nombres augmentés de e, exemple A' par $A'+e$.

En effet, supposons cette loi vraie pour n facteurs, et supposons qu'on ait $(A'+e)(B'+e)...(F'+e)=A'B'...F'+eS'_{n-1}$, en désignant par S'_{n-1} la somme de produits indiquée.

Prenons un facteur de plus $(A'+e)(B'+e)\ldots(F'+e)(G'+e)$; il suffira de multiplier le précédent par $G'+e$, ce qui donne

$$\begin{aligned}&A'B'\ldots F'G'+eS'_{n-1}G'+e(A'+e)(B'+e)\ldots(F'+e)\\&=A'B'\ldots F'G'+e[S'_{n-1}G'+(A'+e)(B'+e)\ldots(F'+e)].\end{aligned}$$

$[S'_{n-1}G'+(A'+e)(B'+e)\ldots(F'+e)]e$ est bien le deuxième terme qu'on doit obtenir d'après la loi; celle-ci est donc vraie pour $(n+1)$ facteurs. Or elle est vraie pour 3, donc elle l'est pour 4, etc...

Puisque $(A'+e)(B'+e)\ldots(K'+e)=A'B'\ldots K'+eS'_{m-1}$, l'inégalité (2) devient $eS'_{m-1}<\frac{1}{\delta}$.

Mais si dans S'_{m-1}, je mets partout A, B, C,... K, au lieu de A', B',... K', $A'+e$, $B'+e$, etc.... la somme augmentera de valeur, puisque $A=A'+e$, $B=B'+e$, etc..., et si on désigne par S_{m-1} la somme des produits $(m-1)$ à $(m-1)$ des nombres A, B,... K, on aura $eS'_{m-1}<eS_{m-1}$, donc si on choisit e tel que $eS_{m-1}<\frac{1}{\delta}$ ou $e<\frac{1}{S_{m-1}\delta}$, à fortiori $eS'_{m-1}<\frac{1}{\delta}$; on peut donc prendre pour limite de e la quantité $\frac{1}{S_{m-1}\delta}$.

Comme on ne connaît pas les nombres AB...K, on pourra les remplacer dans l'expression de cette limite par des nombres supérieurs quelconques.

6. On peut arriver autrement à la détermination de cette limite, en partant de la composition du produit $(A'+e)(B'+e)\ldots(H'+e)(K'+e)$, que l'on sait être égal à

$$A'B'\ldots H'K'+S'_{m-1}e+S'_{m-2}e^2+\ldots S'_1e^{m-1}+e^m;$$

il résulte de là que l'inégalité (1) devient

$$e(S'_{m-1}+S'_{m-2}e+S'_{m-3}e^2+\ldots S'_1e^{m-2}+e^{m-1})<\frac{1}{\delta}.$$

(S'_{m-1}, S'_{m-2}, etc., désignent les sommes des produits $m-1$ à $m-1$, $m-2$ à $m-2$, etc., de A', B', C',... K').

Or en désignant par S_{m-1}, la somme des produits $m-1$ à $m-1$ des nombres A,B,C,... K, ou $(A'+e)$, $(B'+e)$...$(K'+e)$; ontr ouve

$$S_{m-1}=S'_{m-1}+2S'_{m-2}e+3S'_{m-3}e^2+\ldots(m-1)S'_1e^{m-2}+me^{m-1},$$

(Voir note à la fin), donc

$$eS_{m-1}>e\,(S'_{m-1}+eS'_{m-2}+e^2S'_{m-3}+\ldots e^{m-2}S'_1+e^{m-1}).$$

Il suffit donc de prendre e tel que $eS_{m-1}<\frac{1}{\delta}$ comme ci-dessus.

Puissances.

7. Cette démonstration étant générale, supposons les facteurs égaux, et soit à calculer A^m à $\frac{1}{\delta}$ près.

La limite devient ici $e<\frac{1}{mA^{m-1}\delta}$. Car tous les produits de $(m-1)$ facteurs sont égaux entre eux et au nombre de m. On remplacera encore A par un nombre supérieur quelconque.

Division. $\left(\text{Approximation } \frac{1}{\delta}\right)$.

8. (a) Premier cas. Le diviseur seul étant incommensurable, soit à diviser m par B.

Quotient exact $\frac{m}{B}$, quotient calculé $\frac{m}{B+e'}$, si on prend B par excès. Erreur commise $\frac{m}{B}-\frac{m}{B+e'}$, qui doit être moindre que $\frac{1}{\delta}$. On a

$$\frac{m}{B}>\frac{m}{B+e'}>\frac{m}{B+e},$$

d'où

$$\frac{m}{B} - \frac{m}{B+e} > \frac{m}{B} - \frac{m}{B+e'}.$$

Il suffit de prendre $\frac{m}{B} - \frac{m}{B+e} < \frac{1}{\delta}$ ou $\frac{me}{B(B+e)} < \frac{1}{\delta}$. Soit B'' un nombre inférieur à B et par suite à $B+e$, on a évidemment $\frac{me}{B'' \times B''}$ ou $\frac{me}{B''^2} > \frac{me}{B(B+e)}$; donc si on prend e tel que $\frac{me}{B''^2} < \frac{1}{\delta}$, à fortiori aura-t-on $\frac{me}{B(B+e)} < \frac{1}{\delta}$, on prendra donc pour limite $e < \frac{B''^2}{m\delta}$.

Application. $\frac{17}{\pi}$ à $\frac{1}{100}$ près. On prendra π à l'approximation $\frac{3^2}{1700}$ ou $\frac{9}{1700}$ ou $\frac{1}{\left(\frac{1700}{9}\right)}$. Évidemment il suffit de prendre π à $\frac{1}{1000}$ près.

(b) Deuxième cas. $\frac{A}{B}$, A et B étant tous deux incommensurables.

Je prends A par défaut et B par excès; on a

$$\frac{A}{B} > \frac{A-e'}{B+e''} > \frac{A-e}{B+e},$$

d'où

$$\frac{A}{B} - \frac{A-e}{B+e} > \frac{A}{B} - \frac{A-e'}{B+e''},$$

qui est l'erreur commise. Il suffit donc de prendre e tel que $\frac{A}{B} - \frac{A-e}{B+e} < \frac{1}{\delta}$, ou bien effectuant $\frac{e(A+B)}{B(B+e)} < \frac{1}{\delta}$.

Soient A' et B' deux nombres plus grands que A et B, B'' un nombre inférieur à B et par suite à $B+e$ on a $A'+B' > A+B$, et $B'' \times B''$ ou $B''^2 < B(B+e)$, donc

$\frac{e(A'+B')}{B''^2} > \frac{e(A+B)}{B(B+e)}$, donc si nous prenons e tel que $\frac{e(A'+B')}{B''^2} < \frac{1}{\delta}$, à fortiori $\frac{e(A+B)}{B(B+e)} < \frac{1}{\delta}$; on prendra donc $e < \frac{B''^2}{(A'+B')\delta}$. C'est pour ce cas la limite de l'approximation avec laquelle on doit calculer séparément A et B.

Il faut se rappeler que A doit être pris par défaut et B par excès.

Application. $\frac{\sqrt[3]{17}}{\pi}$ à $\frac{1}{100}$ près; on prendra $\sqrt[3]{17}$ et π, chacun à l'approximation $\frac{3^2}{(3+4)100} = \frac{9}{700} = \frac{1}{\left(\frac{700}{9}\right)}$. On voit qu'il suffit pour l'objet que l'on a en vue de calculer $\sqrt[3]{17}$ et π chacun à 0,01 près.

Ainsi la question de l'approximation numérique est résolue pour un polynôme algébrique quelconque, composé d'un nombre limité de termes.

9. Je vais pour plus de commodité récapituler les diverses formules, pour l'approximation $\frac{1}{\delta}$ relative au résultat de chaque opération.

(a) *Addition.* $(A+B+C\ldots)$, m quantités incommensurables.

Limite commune de l'approximation avec laquelle chaque quantité doit être calculée :

$$e < \frac{1}{m\delta}.$$

(b). *Soustraction.* A—B. Limite $e < \frac{1}{\delta}$ ou $e < \frac{1}{2\delta}$, suivant qu'on veut ou non connaître sûrement le sens de l'erreur.

(c). *Multiplication.* Cas d'un seul facteur incommensurable : mA. Limite $e < \frac{1}{m\delta}$.

(c'). Cas de m facteurs ABCD.... FH incommensurables. Limite $e < \frac{1}{S''_{m-1}\delta}$, S''_{m-1} étant la somme des produits différents $m-1$ à $m-1$ des nombres A, B, C,... F, H, remplacés respectivement par des nombres plus grands quelconques.

(d). *Puissances*. A^m : approximation $e < \frac{1}{mA^{m-1}\delta}$.

(e). *Division*. $\frac{m}{B}$. B seul étant incommensurable. On prendra B par excès à l'approximation $\frac{B''^2}{m\delta}$, on sait ce que désigne B''.

(e'). $\frac{A}{B}$, A et B étant incommensurables. On prendra A par défaut, B par excès, chacun à l'approximation $\frac{B''^2}{(A'+B')\delta}$.

(f). *Extraction de racines*. On s'en rapporte aux règles connues.

10. Applications. Soit $\frac{A}{B} = \frac{\pi^3+\pi^2-7\sqrt[3]{2}}{\pi^2-1}$ à $\frac{1}{100}$ près. Il s'agit ici d'un quotient; employons la formule $e < \frac{B''^2}{(A'+B')\delta}$. Il faut voir quels nombres on mettra pour A', B', B''. Pour avoir $A' > A$, je prendrai 4, nombre supérieur à π. $4^3+4^2=80$; je prends 7×1 au lieu de $7\sqrt[3]{2}$, pour avoir moins à retrancher, puisque je tends à avoir un plus grand nombre que le numérateur; je prendrai donc pour A', 80—7 ou 73. Pour avoir B', je prends 4 au lieu de π et j'aurai pour B', $15 > \pi^2-1$.

Comme B'' doit être moindre que que B, ou π^2-1, je prends 3 au lieu de π et 9—1 ou 8 pour B'', alors on voit qu'il suffit de prendre $e = \frac{8^2}{(73+15)100} = \frac{64}{8800}$; on calculera donc A par défaut à $\frac{64}{8800}$ ou $\frac{1}{\left(\frac{8800}{64}\right)} = \frac{1}{\delta'}$ près, et B par excès de même.

Or A est la différence de $(\pi^3+\pi^2)$ à $7\sqrt[3]{2}$. Il faudra calculer $\pi^3+\pi^2$ et $7\sqrt[3]{2}$, chacun séparément à l'approximation $\frac{1}{2\delta'}$ ou $\frac{1}{\left(\frac{2\times 8800}{64}\right)}$, $\pi^3+\pi^2$ par défaut et $7\sqrt[3]{2}$ par excès. On sait ce qu'il faut faire pour $7\sqrt[3]{2}$; quant à $\pi^3+\pi^2$, d'après ce qui a été dit pour une somme, on prendra π^3 et π^2 à $\frac{1}{2.2\delta'}$ près, ou $\frac{1}{4\delta'}$, et d'après la formule relative aux puissances, on prendra le premier π à l'approximation $\frac{1}{3.4^2.4\delta'}$ ou $\frac{1}{192\delta'}$, le deuxième à l'approximation $\frac{1}{2.4.4\delta'}$ ou $\frac{1}{32\delta'}$, mettant pour δ' sa valeur, on aura pour le premier π l'approximation $\frac{1}{\frac{192\times 8800}{64}} = \frac{1}{3\times 8800} = \frac{1}{26400}$, et pour l'autre $\frac{1}{\frac{32.8800}{64}} = \frac{1}{4400}$ près.

Quant au π^2 du dénominateur, comme le terme -1 est commensurable il faudra π^2 à l'approximation $\frac{1}{\delta'}$, ou π à l'approximation $\frac{1}{2.4.\delta'}$ ou $\frac{1}{\frac{8.8800}{64}} = \frac{8}{8800} = \frac{1}{1100}$, et on prendra ici π par excès. Ainsi on mettra pour $\frac{A}{B}$, en ne prenant que des approximations décimales,

$$\frac{(3,14159)^3 + (3,1415) - 7\sqrt[3]{2}}{(3,1416)^2 - 1}.$$

Je n'ai pas pas mis la valeur de $7\sqrt[3]{2}$, on la calcule à l'approximation $\frac{1}{\frac{2.8800}{64}} = \frac{32}{8800} = \frac{4}{1100} = \frac{1}{\left(\frac{1100}{4}\right)}$ or $\frac{1100}{4}$, étant < 1000, il suffira évidemment de prendre $7\sqrt[3]{2}$ ou $\sqrt[3]{646}$ à 0,001 près.

On voit facilement qu'il faut mettre pour A', B', etc., les nombres les plus petits possibles, et pour B'' et les nombres qui doivent être inférieurs, les nombres les plus grands possibles.

Il y aura dans chaque exemple particulier des simplifications qu'on ne peut qu'indiquer ici, et qui tendent à rendre le dénominateur de e le plus petit possible. Je ferai seulement quelques observations.

En substituant des nombres supérieurs ou des nombres inférieurs aux nombres incommensurables, suivant le cas, il sera souvent plus avantageux de prendre au lieu des nombres entiers qui les suivent ou les précèdent immédiatement des valeurs plus approchées, ayant une ou deux décimales, quand surtout on les connaîtra facilement. Je citerai pour exemple le cas où il fallait prendre un nombre supérieur à π^3; on peut prendre 3,2 comme nombre supérieur à π, et alors $(3,2)^3$ ou 32,768 est plus grand que π^3; on prendra 33 pour plus de simplicité à la place de π^3 dans la composition de A' (exemple précédent), au lieu de 4^3 ou 64, et ainsi des autres. Cela est facile à pratiquer et on aura ainsi des limites plus simples. J'ai seulement ébauché le calcul pour faire voir que les formules données permettaient d'obtenir avec certitude l'expression assez compliquée $\frac{\pi^3 + \pi^2 - 7\sqrt[3]{2}}{\pi^2 - 1}$, et toute autre comme celle-là à telle approximation que l'on voudrait.

11. La limite e se présente souvent sous la forme $\frac{m}{n}$; si on veut la remplacer par une limite décimale, on l'écrira sous la forme $\frac{1}{\frac{n}{m}}$; on verra à la simple inspection de $\frac{n}{m}$, le nombre des chiffres de la partie entière du quotient; on pourra remplacer la limite par l'unité décimale de l'ordre marqué par ce nombre de chiffres. Exemple. Soit $e=\frac{54}{36762}$, on écrira $e=\frac{1}{\frac{36762}{54}}$. La division partielle de 367 par 54 donnera un chiffre qui sera ensuite suivi de 2 autres; la partie entière du quotient ayant 3 chiffres, on pourra prendre pour limite $\frac{1}{1000}$ ou 0,001.

12. Lorsqu'on résout cette question, évaluer un quotient $\frac{A}{B}$ à $\frac{1}{\delta}$ près, la formule donnée pour ce cas, fait voir qu'on peut changer la division de A par B, en celle de deux nombres approximatifs que je désignerai par α et β, tels que le quotient exactement calculé $\frac{\alpha}{\beta}$, diffère du véritable $\frac{A}{B}$, d'un nombre moindre que $\frac{1}{\delta}$. Mais dans la plupart des applications, on évalue le quotient $\frac{\alpha}{\beta}$ en décimales, quand on ne peut l'obtenir exactement, et on s'arrête au chiffre décimal d'un certain ordre; l'erreur commise alors s'ajoutant à celle que l'on commet en considérant $\frac{\alpha}{\beta}$ au lieu de $\frac{A}{B}$ peut être plus grande que $\frac{1}{\delta}$. En effet soit $\frac{A}{B}-\frac{\alpha}{\beta}=e'$ ou $\frac{A}{B}=\frac{\alpha}{\beta}+e'$, désignons par q le quotient décimal approché qui doit remplacer $\frac{\alpha}{\beta}$ et soit $\frac{\alpha}{\beta}-q=e''$ on a $\frac{\alpha}{\beta}=q+e''$ et $\frac{A}{B}=q+e'+e''$.

Or e' pouvant approcher $\frac{1}{\delta}$ de très-près, $e'+e''$ peut évidemment dépasser $\frac{1}{\delta}$. On évitera cet inconvénient en prenant la limite donnée par la formule générale telle que $\frac{A}{B}-\frac{\alpha}{\beta}<\frac{1}{2\delta}$, et on évaluera $\frac{\alpha}{\beta}$ en décimales à $\frac{1}{2\delta}$ près.

13. On a souvent besoin de calculer exactement le plus grand nombre entier contenu dans la valeur d'un résultat compliqué d'incommensurables. Prenons l'exemple bien simple $m\pi$. On se met tout aussitôt à chercher la valeur de ce produit à moins d'une unité, et pour cela on décide qu'il faut prendre π avec un nombre de décimales tel que l'erreur commise sur ce rapport, soit moindre que $\frac{1}{m}$. Soit p le nombre adopté. On aura $\pi=p+e'$, e' étant moindre que $\frac{1}{m}$; donc mp exprime la valeur de $m\pi$ à moins d'une unité ; mais mp est le plus ordinairement un nombre décimal et c'est un nombre entier qu'il nous faut. Soit n la partie entière de mp et d la partie décimale, on aura

$$mp=n+d \quad \text{or} \quad m\pi=mp+me',$$

donc $m\pi=n+d+me'$; on sait seulement que me' est plus petit que 1 ; mais peut-on affirmer que $d+me'$ est plus petit que 1, et que n répond à la question? Ex. 89π. Je prends π à $\frac{1}{89}$ ou plutôt à $\frac{1}{100}$ près, j'ai 3,14,

$$3,14.89=279,46.$$

On peut affirmer que 279,46 est la valeur de 89π à une unité près, mais peut-on dire que 279 est le plus grand nombre entier contenu dans ce produit.

Pour obvier à cet inconvénient, je proposerai la méthode suivante : on choisira la limite de l'erreur commise sur π d'après la condition que la valeur décimale, à laquelle on arrive après la multiplication par m soit approchée à 0, 1 près. Tout calcul fait, si le premier chiffre décimal du résultat est moindre que 9, le nombre entier qu'il contient répond évidemment à la question.

S'il arrivait que ce premier chiffre décimal fût un 9, on recommencerait en se proposant d'avoir $m\pi$ à 0,01; si les deux premiers chiffres décimaux ne forment pas 0,99, le nombre entier du résultat répondra à la question principale; et ainsi de suite jusqu'à ce que le chiffre décimal de l'ordre de l'approximation avec laquelle on s'est proposé de calculer $m\pi$ ne soit pas un 9, si cela est possible.

Cette remarque est importante dans le calcul de l'extraction des racines et la marche indiquée pourra être suivie pour une quantité incommensurable quelconque, dans le cas de la question posée.

NOTE. (Voir p. 254.)

Voici comment on trouve cette valeur de S_{m-1} : on forme un des produits de $m-1$ facteurs $(A'+e)(B'+e)\ldots(H'+e)$; on a $(A'+e)(B'+e)\ldots(H'+e)=A'B'\ldots H'+S'_{m-2}e+S'_{m-3}e^2+\ldots e^{m-1}$, S'_{m-2}, S'_{m-3} étant la somme de produits $m-2$ à $m-2$, $m-3$ à $m-3$ des $m-1$ nombres A', B',… H'.

Supposons formés les m produits qui composent S_{m-1} et ajoutons-les. Le développement sera de la forme

$$S_{m-1}=S'_{m-1}+P_{m-2}e+P_{m-3}e^2+\ldots P_1e^{m-2}+me^{m-1}.$$

Chaque coefficient est symétrique par rapport à A', B',…$H'K'$; P_{m-2}, P_{m-3},… désignent des sommes de produits $m-2$ à $m-2$, $m-3$ à $m-3$,… de ces m nombres. Pour savoir combien de fois un produit $A'B'C'$… de $m-n$ facteurs entre dans le coefficient P_{m-n} de e^{n-1}, il suffit d'observer que pour que le produit $A'B'C'$… se trouve dans le coefficient de e^{n-1} dans un des produits partiels de $m-1$ facteurs $(A'+e)(B'+e)\ldots(H'+e)$, il faut et il suffit que le facteur tel que $K'+e$ laissé de côté pour former ce produit, ne soit pas un de ceux qui correspondent aux $m-n$ facteurs A', B', C'... du produit considéré.

Or, on peut laisser successivement n facteurs de côté sans en laisser aucun de ceux-là ; donc chaque produit de $m-n$ facteurs $A'B'C'$,..... se trouve dans n produits partiels, donc $P_{m-n}=nS'_{m-n}$. Donnant à n les valeurs successives 1, 2, 3,... $m-1$, on a la formule

$$S_{m-1}=S'_{m-1}+2S'_{m-2}e+3S'_{m-3}e^2+\ldots+(m-1)S'_1e^{m-2}+me^{m-1},$$

qu'il fallait démontrer (*).

On peut choisir entre les deux démonstrations; mais la première me semble se rapprocher davantage de l'arithmétique proprement dite.

LIEU GÉOMÉTRIQUE

DES POLES D'UNE SECTION CONIQUE,

PAR RAPPORT A UNE AUTRE.

PAR M. HERMITE,
Elève du collége Louis-le-Grand (institution Mayer).

—

On donne sur un plan deux sections coniques A, B ; on considère une tangente menée à la première, comme une polaire par rapport à l'autre, et on demande le lieu de son pôle en supposant que le point de tangence parcourt la courbe A.

(*) Par exemple dans P_2 le produit $A'B'$ existe $m-2$ fois, car ce produit se trouve chaque fois qu'une des autres lettres manque. Tm.

Soit rapportée la courbe A à un axe et à la tangente au sommet, Oy, son équation sera : $y^2=2px+nx^2$, et celle de sa tangente au point (α, β) :

$$\beta y=p(x+\alpha)+nx\alpha, \quad (1)$$

avec la condition

$$\beta^2=2p\alpha+n\alpha^2. \quad (2)$$

Soit $Ay^2+Bxy+....=0$, l'équation de la courbe B, celle de sa polaire par rapport au point x', y', sera comme on sait $yY'+xX'+V'=0$, en l'identifiant avec l'équation (1) de la tangente, on aura: $-\frac{X'}{Y'}=\frac{p+n\alpha}{\beta}$, $-\frac{V'}{Y'}=\frac{p\alpha}{\beta}$, de telle sorte que si α et β étaient effectivement donnés, ces relations détermineraient les coordonnées du pôle, x' et y'; on aura donc l'équation du lieu cherché en éliminant α et β, entre ces équations et l'équation (2). Pour faire le calcul, j'observe qu'elles donnent tout d'abord :

$$\alpha=\frac{pV'}{pX'-nV'}, \quad \beta=\frac{-p^2Y'}{pX'-nV'},$$

d'où il résulte en substituant dans (2),

$$\frac{p^4Y'^2}{(pY'-nV')^2}=\frac{2p^2V'}{pX'-nV'}+\frac{np^2V'^2}{(pX'-nV')^2},$$

d'où

$$p^2Y'^2=2V'(pX'-nV')+nV'^2,$$

et enfin

$$p^2Y'^2=2pV'X'-nV'^2,$$

comme X', Y', V', sont des fonctions linéaires de x' et y', le lieu est encore une section conique(*).

(*) Le théorème avec la réciproque est de M. Poncelet (*Annales de Gergonne*, t. 13, p. 201). Si B est un cercle ayant pour centre un foyer de A, la troisième conique est aussi un cercle. (Voir le Géomètre, p. 113). Tm.

SOLUTION DU PROBLÈME 12 (page 59).

PAR M. MERLIEUX* (ÉDOUARD).

Déterminer l'équation d'une ligne telle, qu'en lui menant une tangente en un point quelconque, la partie de cette tangente comprise dans l'intérieur d'un angle donné, soit constamment égale à une droite donnée.

Fig. 61. Prenons pour axes les deux côtés de l'angle donné; appelons l la droite donnée, et, cette droite étant dans une certaine position, a et b les distances à l'origine de ses intersections avec les axes des x et des y.

L'équation de la droite sera évidemment

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \text{ou} \quad ay+bx=ab, \qquad (1)$$

et on aura dans le triangle formé par a, b, l,

$$l^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma, \qquad (2)$$

γ étant l'angle donné.

Supposons maintenant qu'on fasse varier infiniment peu cette première position de l, de sorte que a devienne $a+h$, et b, $b+k$, h et k étant très-petits; on aura alors les deux équations :

$$(a+h)y+(b+k)x=(a+h)(b+k), \qquad (3)$$

$$l^2=(a+h)^2+(b+k)^2-2(a+h)(b+k)\cos\gamma; \qquad (4)$$

ôtant (2) de (4), il vient :

$$2ah+h^2+2bk+k^2-2(ak+bh+kh)\cos\gamma=0.$$

k^2, h^2 et kh étant des infiniment petits du second ordre, nous pouvons les supprimer et, divisant par 2, écrire ainsi cette équation :

$$ah+bk-ak\cos\gamma-bh\cos\gamma=0, \quad \text{d'où} \quad h=\frac{k(a\cos\gamma-b)}{a-b\cos\gamma}.$$

Maintenant, résolvant les équations (1) et (3), par rapport à x et à y,

$$x = \frac{ab(a+h) - a(a+h)(b+k)}{b(a+h) - a(b+k)} = \frac{-ak(a+h)}{bh - ak} = \frac{-a^2k}{bh - ak},$$

$$y = \frac{b(a+h)(b+k) - ab(b+k)}{b(a+h) - a(b+k)} = \frac{bh(b+k)}{bh - ak} = \frac{b^2h}{bh - ak},$$

Remplaçant h par sa valeur,

$$x = \frac{-a^2k(a - b\cos\gamma)}{bk(a\cos\gamma - b) - ak(a - b\cos\gamma)} = \frac{a^2(a - b\cos\gamma)}{l^2},$$

d'où $$l^2x = a^2(a - b\cos\gamma),$$

$$y = \frac{b^2k(b - a\cos\gamma)}{bk(a\cos\gamma - b) - ak(a - b\cos\gamma)} = \frac{b^2(b - a\cos\gamma)}{l^2},$$

d'où $$l^2y = b^2(b - a\cos\gamma).$$

Nous avons donc le système d'équations :

$$\begin{aligned} ay + bx &= ab, \\ l^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma, \\ l^2x &= a^2(a - b\cos\gamma), \\ l^2y &= b^2(b - a\cos\gamma), \end{aligned}$$

équations entre lesquelles il faut éliminer les variables a et b; or cette élimination est très-longue; elle se simplifie beaucoup lorsque $\gamma = 90°$; alors les équations deviennent :

$$ay + bx = ab, \qquad \text{(I)}$$
$$l^2 = a^2 + b^2, \qquad \text{(II)}$$
$$l^2x = a^3, \qquad \text{(III)}$$
$$l^2y = b^3. \qquad \text{(IV)}$$

De (III) et de (IV), nous tirons : $a = \sqrt[3]{l^2x}$, $b = \sqrt[3]{l^2y}$;
substituant dans (I) ou (II), $\sqrt[3]{l^2} = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}$.

De cette dernière équation, on obtient par une double élévation au cube, l'équation demandée qui est du sixième degré :

$$(l^2 - x^2 - y^2)^3 - 27l^2x^2y^2 = 0.$$

La courbe ne passe donc pas à l'origine, ce que l'intuition montre suffisamment. Elle est symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle, car on ne change en rien l'équation en remplaçant partout x par y et y par x. En prenant les bissectrices pour axes, l'équation devient :

$$4(l^2-x^2-y^2)^3-27l^2(x^2-y^2)^2=0.$$

Elle a quatre branches ; car, reprenant la première équation, si nous faisons $x=0$, nous avons $l^2-y^2=0, y=\pm l$, ce qui prouve qu'en portant l de l'origine sur l'axe des y positivement et négativement, les deux points appartiennent également à la courbe ; de même si $y=0$, $x=\pm l$, ce qui prouve qu'en portant l de l'origine sur l'axe des x positivement et négativement, les deux points appartiennent encore à la courbe. Ces branches sont finies, car il est évident qu'on ne peut donner à x et à y des valeurs plus grandes que l.

L'équation $l\sqrt[3]{}^2=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}$ peut s'écrire $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$, d'où l'on voit que la courbe est de forme circulaire. Elle a un centre ; et ce centre est l'origine, car les axes des x et des y sont évidemment des diamètres.

Si nous faisons varier l de grandeur, toutes les courbes seront semblables ; car développons

$$(l^2-x^2-y^2)^3-27l^2x^2y^2=0,$$

il vient :

$$[x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6]-3l^2[x^4-7x^2y^2+y^4]$$
$$+3l^4[x^2+y^2]-l^6=0.$$

Si l devient αl, on aura :

$$[x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6]-3\alpha^2l^2[x^4-7x^2y^2+y^4]$$
$$+3\alpha^4l^4[x^2+y^2]-\alpha^6l^6=0.$$

On voit que les termes des degrés 4, 2 et 0, sont multipliés par α^2, α^4, α^6, ce qui est le caractère des courbes semblables. Cette propriété démontre qu'on peut employer cette courbe pour mener la ligne minima dans un angle droit donné, par un point donné.

Supposons que dans l'angle xOy (*fig.* 61), il faille mener par le point A, la droite la plus courte interceptée entre Ox et Oy; si on mène par le point A une courbe semblable à celle que nous traitons, la tangente RS sera la droite demandée.

En effet, car si RS n'est pas la droite minima passant par A, supposons que ce soit $R'S'$; cette dernière sera tangente à la branche $M'N'$ d'une courbe semblable à MNPQ; or OM' étant évidemment $> OM$ et $OM' = R'S'$, $OM = RS$, on aura $R'S' > RS$; donc RS est la droite minima.

Les milieux des tangentes RS à la courbe sont sur une même circonférence, car les triangles rectangles ORS, $OR''S''$ ont l'hypoténuse égale, donc les médianes passant par l'angle droit sont égales (*).

NOTE

SUR

LA DÉTERMINATION DES TANGENTES AUX COURBES,

PAR M. H. COLARD,

Professeur de mathématiques, ancien élève de l'École polytechnique.

Il ne sera peut-être pas sans intérêt de présenter, sous un point de vue géométrique, la détermination de la tangente à une courbe dont l'équation renferme implicitement la fonction et la variable indépendante.

1. On sait que, lorsque la fonction est sous forme finie explicite, c'est-à-dire lorsque l'équation de la courbe est résolue

(*) Cette courbe peut servir à mener par un point pris sur une hyperbole équilatère, une normale à l'autre branche. Tm.

par rapport à cette fonction, comme $y=f(x)$, c'est la définition même de la tangente à une courbe qui fournit immédiatement son équation. Ainsi, de la considération d'un petit triangle, dont un des côtés est la sécante, dans une de ses positions particulières autour du point de contact (x', y'), et dont les autres côtés sont les accroissements que prennent l'abscisse et l'ordonnée ou la variable et la fonction, quand on passe de ce point à un second point voisin situé sur la courbe, on tire sur-le-champ : $y-y'=\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}(x-x')$, pour l'équation de la sécante ; et l'on en conclut à la limite, c'est-à-dire pour l'équation de la tangente au point x', y' :

$$y-y'=f'(x')(x-x').$$

2. Ceci rappelé, supposons la fonction implicite. Soit donc $F(x,y)=0$ l'équation de la courbe ; équation telle que la fonction s'y trouve liée à la variable indépendante, sans qu'on veuille lui donner une forme finie, comme cela pourrait se faire pour les équations des quatre premiers degrés, ou sans qu'on puisse lui donner cette forme, comme on l'a démontré pour l'équation complète du cinquième degré et des degrés supérieurs.

Prenons des axes quelconques, ox, oy (*fig.* 54), et figurons par MAN le lieu géométrique de l'équation $F(x,y)=0$ par rapport à ces axes, au moins dans le voisinage du point M, (x', y'), que nous choisissons pour point de contact. Dans le premier membre de l'équation $F(x, y)=0$, regardons y comme ayant une valeur constante et égale à l'ordonnée y' du point de contact, et représentons la fonction $F(x, y')$, variable par rapport à x seulement, par l'ordonnée Y d'une courbe dont x serait l'abscisse. L'équation $Y=F(x, y')$ sera celle d'un lieu géométrique tel que M'A'N' passant par le pied de l'ordonnée y' : ce qu'il est facile de reconnaître dans l'équation $Y=F(x, y')$ qui donne $Y=0$ pour $x=x'$. Si, au contraire, dans le premier membre de l'équation F $(x, y)=0$, l'on regarde x comme ayant une valeur déterminée et égale à x', abscisse du point de contact, et qu'on représente par X la fonction F (x', y), variable par ce rapport à y seulement, l'équation $X=F(x', y)$ appartiendra à un certain lieu géométrique M″ A″ N″ passant par le pied M″ de l'abscisse x' comptée parallèlement à l'axe des x; car X s'annule pour $y=y'$ (*).

Cela posé, le point M de la courbe MAN ayant déterminé le système des deux courbes M′A′N′, M″A″N″, partant leurs tangentes en M′, M″; et, réciproquement, le système des deux courbes M′A′N′, M″A″N″, et par suite celui de leurs tangentes en M′, M″ déterminant le point M de la courbe MAN et la tangente en ce point, il est clair qu'il existe une relation unique entre les fonctions qui déterminent les inclinaisons des tangentes aux trois courbes en ces points. C'est cette relation que nous allons établir.

Considérons à cet effet les trois sécantes correspondantes MN, M′N′, M″N″ dont les positions limites sont simultanément les trois tangentes aux trois courbes, aux points M, M′, M″, et composons les triangles MNP, M′N′P′, M″N″P″ dont l'usage a été indiqué n° 1. Nous aurons évidemment :

$$\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{MP}}=\frac{\mathrm{M''P''}}{\mathrm{M'P'}}=\frac{\left(\dfrac{\mathrm{N'P'}}{\mathrm{M'P'}}\right)}{\left(\dfrac{\mathrm{N''P''}}{\mathrm{M''P''}}\right)}\cdot\frac{\mathrm{N''P''}}{\mathrm{N'P'}}.$$

Observons que les quantités N″P″ et N′P′ diminuent ensemble à mesure que le point N se rapproche du point M, mais de telle façon que leur rapport tend vers l'unité. Si l'on considère en effet les deux fonctions $F(x, b)$, $F(a, y)$, a et b désignant deux quantités numériques quelconques mises à la place d'x et d'y dans la fonction $F(x, y)$, on reconnaît que

(*) La lettre A″ est omise dans la figure.

le rapport $\frac{F(a,y)}{F(x,b)}$ converge vers l'unité, quand x converge vers a et y vers b, et qu'enfin ce rapport est 1 quand on pose $x=a, y=b$. Ce résultat, qui est une conséquence même de la forme des deux fonctions, ayant lieu quelles que soient les quantités a, b, aura lieu encore quand on fera $a=x'$, $b=y'$, double hypothèse par laquelle le rapport en question se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, lorsque les variables des deux fonctions deviennent en même temps x' et y'.

Si nous établissons maintenant du même coup la triple réunion des points N, N', N'', aux points M, M', M'' respectivement, et que, conformément à ce qu'on a vu n° 1, nous désignions par $f'(x')$ le rapport cherché $\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{MP}}$ (la fonction y étant conçue sous la forme explicite $y=f(x)$) par $-\mathrm{F}'_{x'}(x', y')$, $\mathrm{F}'_{y'}(x', y')$ les rapports analogues $\frac{\mathrm{N'P'}}{\mathrm{M'P'}}$, $\frac{\mathrm{N''P''}}{\mathrm{M''P''}}$, nous obtiendrons la relation suivante :

$$f'(x') = -\frac{\mathrm{F}'_{x'}(x', y')}{\mathrm{F}'_{y'}(x', y')}.$$

Il reste encore à présenter une observation essentielle. Le signe —, qui affecte le second membre de cette équation, provient uniquement de ce que, dans notre tracé des courbes M'A'N', M''A''N'', nous les avons fait s'étendre, celle-ci dans l'angle supérieur, à droite des coordonnées ; celle-là dans l'angle inférieur, à droite, pour les valeurs d'y et d'x croissantes à partir d'y' et d'x'. Mais rien de formel n'ayant été dit à cet égard, il s'ensuit que l'égalité ci-dessus n'est rigoureusement démontrée qu'au signe près du second nombre, et qu'il faut justifier l'explication du signe —. C'est le cas particulier où l'équation $\mathrm{F}(x, y)=0$ a la forme implicite $y-f(x)=0$, qui va décider la question ; il suffira pour cela de lui appliquer la règle qui résulte de ce qu'on sait de vrai sur l'égalité ci-dessus.

Or, on a dans ce cas :

$$F'_{x'}(x', y') = -f'(x') \quad \text{et} \quad F'_{y'}(x', y') = 1,$$

ce qui donne évidemment :

$$f'(x') = -\frac{F'_{x'}(x', y')}{F'_{y'}(x', y')} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

On pourrait d'ailleurs concevoir, *à priori*, que, si la dérivée $f'(x)$ était positive, par exemple, les deux dérivées $F'_{x'}(x', y')$, $F'_{y'}(x', y')$ devaient être de signes contraires; ce qui signifie en d'autres termes, que si x et y allaient en croissant à partir d'x' et d'y', les fonctions $F(x, y')$, $F(x', y)$ devaient aller l'une en croissant, l'autre en décroissant à partir d'x' et d'y', c'est-à-dire, dans ce cas, être de signes contraires, puisque $F(x', y')$ est nul.

En effet, si l'on a en même temps : $F(x', y')=0$ et $F(x'+h, y')<0$, l'équation de condition $F(x'+h, y'+k)=0$ relative à tout point voisin du point (x', y'), indique qu'on doit avoir $F(x', y'+k)>0$; h étant, comme on le voit, un accroissement qui fait diminuer $F(x', y')$, et k, un accroissement qui fait augmenter $F(x'+h, y')$ et par suite $F(x', y')$.

NOTE

SUR

LA CONSTRUCTION DES TABLES DE SINUS NATURELS,

Principalement en ce qui a rapport au degré d'approximation des calculs.

PAR A.-J.-H. VINCENT,
Professeur au collége St.-Louis.

Partons de la formule

$$\sin a = 3 \sin \frac{1}{3}a - 4 \sin^3 \frac{1}{3}a,$$

qui donne, en substituant dans le dernier terme, $\frac{1}{3}a$ au lieu de $\sin\frac{a}{3}$,

$$\sin a > 3\sin\frac{1}{3}a - \frac{4}{27}a^3.$$

Dans cette inégalité, remplaçons partout a par $\frac{a}{3}$, nous aurons

$$\sin\frac{1}{3}a > 3\sin\frac{1}{9}a - \frac{4}{27^2}a^3;$$

remplaçons de même a par $\frac{a}{3}$ dans cette seconde inégalité, puis de même a par $\frac{a}{3}$ dans l'inégalité obtenue, et ainsi de suite; nous obtiendrons de cette manière une série d'inégalités successives que nous pourrons écrire ainsi, en reprenant à partir de la première :

$$\sin a > 3\sin\frac{a}{3} - 4\frac{a^3}{3^3},$$

$$\sin\frac{a}{3} > 3\sin\frac{a}{3^2} - 4\frac{a^3}{3^6},$$

$$\sin\frac{a}{3^2} > 3\sin\frac{a}{3^3} - 4\frac{a^3}{3^9},$$

$$\sin\frac{a}{3^3} > 3\sin\frac{a}{3^4} - 4\frac{a^3}{3^{12}},$$

. . . .

et généralement

$$\sin\frac{a}{3^{n-1}} > 3\sin\frac{a}{3^n} - 4\frac{a^3}{3^{3n}}.$$

Maintenant, supposons que l'on multiplie ces diverses inégalités, à partir de la seconde, par les puissances successives de 3 jusqu'à 3^{n-1}, et que l'on ajoute tous les résultats; il en résultera, quand on aura supprimé tous les termes qui se détruisent :

$$\sin a > 3^n\sin\frac{a}{3^n} - 4\frac{a^3}{27}\left\{1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \dots\right\}.$$

Dans ce résultat, faisons $n=\infty$; l'arc infiniment petit $\frac{a}{3^n}$ se confondra avec son sinus, ce qui réduira la première partie du second membre à l'arc a lui-même, en introduisant aux deux termes de la fraction le facteur commun 3^n que l'on pourra supprimer. Quant à la seconde partie, la progression indéfinie par quotient qui est dans l'accolade se réduira à $\frac{9}{8}$; et ainsi $\left(\text{attendu que } \frac{4}{27} \times \frac{9}{8} = \frac{1}{6}\right)$, l'inégalité se réduira à la suivante :

$$\sin a > a - \frac{1}{6}a^3,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$a - \sin a < \frac{1}{6}a^3 :$$

C'est-à-dire que la limite de l'erreur commise quand on prend un petit arc à la place de son sinus, est égale à *un sixième du cube de ce petit arc.*

Sous un autre point de vue, les quantités a et $a - \frac{1}{6}a^3$, étant deux limites, l'une supérieure, l'autre inférieure, entre lesquelles se trouve comprise la valeur de $\sin a$, cherchons de même deux limites pour $\cos a$. Or, celles-ci s'obtiendront en substituant dans $\cos a$ exprimé en fonction de $\sin a$, ou mieux de $\sin \frac{1}{2}a$, les deux valeurs limites de cette dernière ligne trigonométrique, ce qui donnera :

1° $$\cos a = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}a,$$

2° $$\cos a > 1 - 2\frac{a^2}{4}, \quad \text{ou} \quad \cos a > 1 - \frac{a^2}{2},$$

3° $$\cos a < 1 - 2\left\{\left(\frac{a}{2}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{2}\right)^3\right\}^2,$$

ou $$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2}\left\{1 - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}^2,$$

et *à fortiori*, en développant et supprimant le terme négatif du sixième degré dans le second membre,

$$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}.$$

Ainsi, comme on le voit, au moyen des quatre termes $\frac{a}{1}$, $\frac{a^2}{1.2}$, $\frac{a^3}{1.2.3}$ et $\frac{a^4}{1.2.3.4}$, on peut exprimer les valeurs approchées des *sinus* et des *cosinus*, ainsi que les limites de ces valeurs approchées; ce sont:

Pour la valeur approchée *en plus*, de $\sin a$, le terme a, et pour la limite de l'erreur $\frac{a^3}{6}$.

Pour la valeur approchée *en moins*, de $\cos a$, l'expression $1 - \frac{a^2}{2}$, et pour la limite de l'erreur $\frac{a^4}{24}$, c'est-à-dire, *un vingt-quatrième de la quatrième puissance de l'arc.*

Et par suite encore, $a - \frac{a^3}{6}$ serait une valeur du sinus approchée *en moins*, et $1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}$ une valeur du cosinus approchée *en plus.*

(L'unité ou le terme 1, peut même aussi, quand l'arc est extrêmement petit, être lui-même considéré comme une valeur du cosinus approchée *en plus*, la limite de l'erreur étant alors $\frac{a^2}{2}$ ou la *moitié du quarré de l'arc.*)

Prenons pour a la *seconde du degré centésimal*, ou la *millionième* partie du quadrant, dont la valeur, quand on fait le rayon égal à l'unité, est

$$\frac{\pi}{2\,000000} = 0{,}000001570796326795:$$

l'erreur commise en employant cet arc pour son *sinus*, sera alors moindre que

$$\frac{1}{6}(0{,}0000016)^3, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{6}(0{,}000000000000000004096),$$

ou 0,000000000000000001, c'est-à-dire *l'unité décimale du* dix-huitième ordre : on pourra donc pousser le calcul de la valeur de a jusqu'à la dix-huitième décimale, et considérer le résultat comme représentant jusqu'à cette limite la valeur de sin a, ce qui exige l'emploi des douze premières décimales du nombre π.

Quant à la valeur de cos a, en la supposant égale à $1-\frac{a^2}{2}$, on ne commettra pas d'erreur dans les vingt-quatre premières décimales, car il est facile de voir que $\frac{1}{24}$ $(0,000002)^4$, est moindre que l'unité du vingt-quatrième ordre ; et pour atteindre ce degré d'approximation pour le cosinus, la même valeur de a est encore suffisante : en effet, le terme $\frac{a^2}{2}$ ayant onze zéros avant le premier chiffre significatif, et présentant d'ailleurs autant de chiffres significatifs exacts que a, les 12 décimales de π, ou les 18 de a, nous en donneront 24 pour cos a.

Cela posé, prenons les deux formules de *Th. Simpson :*

$$\sin(m+1)a = \sin ma \times 2\cos a - \sin(m-1)a,$$
$$\cos(m+1)a = \cos ma \times 2\cos a - \cos(m-1)a,$$

dans lesquelles nous ferons $a=1''$; et supposons-y successivement $m=1$, $m=2$,... jusqu'à $m=999999$, hypothèse finale qui reproduit le quadrant. En réalité d'ailleurs, on n'a pas besoin de dépasser le demi-quadrant ; mais en admettant même le cas défavorable où l'on irait jusqu'au quadrant entier, nous voulons faire voir que néanmoins, et *malgré l'accumulation successive des erreurs*, on obtiendrait encore *douze décimales exactes* pour les sinus et cosinus des arcs même les plus rapprochés de cette limite extrême.

A cet effet, soit représentée par δ la fraction d'unité du dix-huitième ordre dont sin $1''$ est en défaut; l'erreur de cos $1''$ devra être négligée comme étant d'un ordre décimal beaucoup plus élevé, ou plutôt parce que le nombre de chiffres significatifs exacts de cos $1''$ est beaucoup plus élevé que celui de sin $1''$ (24 au lieu de 18).

D'après cela, la limite de l'erreur de sin $2''$ sera 2δ, celle de sin $3''$ sera $2\delta \times 2 - \delta$, ou 3δ, celle de sin $4''$ sera $3\delta \times 2 - 2\delta$, ou 4δ, et généralement la limite de l'erreur de sin $(m+1)1''$, sera $m\delta \times 2 - (m-1)\delta$, ou $(m+1)\delta$. Par conséquent, ces erreurs successives, ou plutôt leurs limites supérieures, formant une progression par différence dont la raison est δ, il en résultera pour l'arc de $1000000''$, c'est-à-dire pour le quadrant, une erreur limite de 1000000δ, ce qui fait la même fraction de l'unité décimale du 12^e ordre, que δ l'est du 18^e. Conséquemment, le nombre des décimales certainement exactes ou sur lesquelles on peut compter, se trouvera ainsi réduit de 18 à 12; mais il ne sera pas nécessaire de descendre au-dessous de ce dernier nombre.

De même, soit ε la fraction de l'unité décimale du 24^e ordre, dont le cos $1''$ est en défaut. L'erreur limite de cos $2''$ sera 4ε, parce qu'ici les deux facteurs du terme $\cos 1'' \times 2 \cos 1''$ étant comparables, on ne doit plus rien négliger. Celle de cos $3''$ sera $5\varepsilon \times 2 - \varepsilon = 9\varepsilon$; celle de cos $4''$ sera de même $10\varepsilon \times 2 - 4\varepsilon = 16\varepsilon$; celle de cos $5''$ sera $17\varepsilon \times 2 - 9\varepsilon = 25\varepsilon$, et ainsi de suite; c'est-à-dire en généralisant, que cos $(m+1)\,1''$ comporte une erreur limite de

$$(m^2+1)\varepsilon \times 2 - (m-1)^2\varepsilon = (m+1)^2\varepsilon,$$

ce qui montera pour l'arc de $100°$, à $10^{12}\varepsilon$, et fera par conséquent perdre à la série des cosinus, 12 décimales sur les 24, de même que la série des sinus en avait perdu 6 sur 18.

On voit donc que d'un côté comme de l'autre, *on conserve 12 décimales exactes dans toute la suite des calculs.*

NOTE

SUR

LE CENTRE DE GRAVITÉ DE L'ARC DE CERCLE

ET

DES SURFACES SPHÉRIQUES.

Arc de cercle.

1° Soit une droite de longueur l uniformément pesante et touchant un cercle d'un rayon r, soit h la distance du point de contact à un diamètre donné, ce point de contact étant le centre de gravité de la droite, et désignons par l' la projection de l sur ce diamètre. Le moment statique de la droite l par rapport à ce diamètre $= hl$ et les triangles semblables donnent $hl = rl'$, d'où $h = \frac{rl'}{l}$.

2° De là on conclut facilement que la somme des moments d'un système quelconque de droites uniformément pesantes, et touchant une circonférence par leurs centres de gravité, relativement à un diamètre, est égale au rayon multiplié par la somme des projections de ces droites sur le diamètre.

3° A la limite, un arc de cercle se confondant avec le polygone circonscrit, il s'ensuit que le moment statique d'un arc de cercle uniformément pesant, relativement à un diamètre, est égal au rayon multiplié par la projection de l'arc sur ce diamètre.

4° La distance du centre de gravité de l'arc à un diamètre, étant égale au moment statique divisé par la longueur de l'arc, il s'ensuit que cette distance est une quatrième proportionnelle à l'arc, à sa projection sur le diamètre, et au rayon.

5° La distance du centre de gravité d'un arc au diamètre parallèle à sa corde, est donc une quatrième proportionnelle à l'arc, à la corde et au rayon.

Surfaces sphériques.

6° Soit une surface plane d'une aire l^2, uniformément pesante et touchant par son centre de gravité une sphère d'un rayon r; et h la distance du point de contact à un plan diamétral donné; désignons par l'^2 l'aire de la projection de l^2 sur ce plan diamétral; le moment statique de l'aire l^2, pris par rapport à ce plan, est $=hl^2=rl'^2$, car $\frac{h}{r}$ est le cosinus de l'angle que forme le plan tangent avec le plan diamétral; et on sait que $l'^2=l^2\frac{h}{r}$.

7° De là on déduit que la somme des moments d'un système quelconque de surfaces planes, uniformément pesantes relativement à un plan diamètre, et touchant une sphère par leurs centres de gravité, est égale au rayon de la sphère multiplié par la somme des projections de ces aires sur le plan diamètre.

8° Passant aux limites, il s'ensuit que le moment statique d'une surface sphérique, pris par rapport à un plan diamètre, est égal au rayon de la sphère multipliée par l'aire de la projection de cette surface sur le plan.

9° On conclut, comme ci-dessus, que la distance du centre de gravité d'une surface sphérique à un plan diamétral, est une quatrième proportionnelle à l'aire de la surface, à sa projection sur le plan et au rayon de la sphère.

10° Soit ABC un triangle sphérique; O le centre de la sphère; choisissons pour plan diamètre celui dont A est le pôle; la projection du triangle sphérique se confond avec celle du secteur OBC; l'aire de ce secteur est $\frac{1}{2}r.a$; a désignant la longueur métrique de l'arc a opposé à l'angle A ; le cosinus de l'angle que forme le plan de ce secteur avec le plan diamètre est $= \sin c \sin B$; donc la projection du triangle sphérique $= \frac{1}{2} ra \sin c \sin B$; nommant S l'aire du triangle, la distance de son centre de gravité au plan diamètre sera $= \frac{r^2 a \sin c \sin B}{2S}$.

11° Autrement; soit α l'arc perpendiculaire abaissé du sommet A sur la base BC ; on a $\sin\alpha = \sin c \sin B$; désignant par d la distance du centre de gravité du triangle sphérique au plan polaire de A, on a donc $d = \frac{r^2 a \sin\alpha}{2S}$.

12° Soit P le volume de la pyramide qui a pour sommet le centre O et pour base le triangle sphérique ABC, et Q le volume de la pyramide qui a pour sommet A et pour base le secteur OBC; on a

$$3P = rS,$$

$$3Q = \frac{r^2 a \sin\alpha}{2};$$ car $r\sin\alpha$ est la hauteur de cette pyramide,

donc $d = \frac{rQ}{P}$; ainsi les trois distances du centre de gravité d'un triangle sphérique aux trois plans polaires des sommets, sont proportionnelles aux volumes des pyramides qui ont respectivement pour sommet un des sommets du triangle, et pour base le secteur opposé.

13° Les trois distances du centre de gravité aux plans polaires, sont parallèles respectivement aux trois arêtes de la pyramide sphérique, et forment un angle trièdre symétrique à l'angle trièdre donné. Tm.

NOTE

Sur un moyen élémentaire de résoudre les questions de géométrie relatives aux intersections successives de lieux géométriques renfermés tous dans une même équation ou dans un même système d'équations.

PAR M. H. COLARD,
Professeur de mathématiques, ancien élève de l'École polytechnique.

1. Soit AB (*fig.* 55) un lieu géométrique quelconque donné par une équation à deux variables $F(x, y) = 0$. Supposons que, par rapport à un point quelconque M' (x', y') de ce premier lieu, on en considère un nouveau $N'P'$ satisfaisant à des conditions géométriques données, parmi lesquelles, d'ailleurs, se trouve ou non celle de passer par le point en question. Celui-ci, en coordonnées x et y, pourra être représenté par le système des équations

$$\varphi(x, y, x', y') = 0, \qquad F(x', y') = 0.$$

Si l'on fait varier x', ce système produit diverses lignes $N'P'$ $N''P''$, $N'''P'''$, etc., relatives aux divers points M', M'', M''', etc., de la courbe proposée. Ces lignes, par leurs intersections consécutives, forment un polygone $N'N''N'''\ldots$, et, si l'on vient à supposer que le paramètre x' varie d'une manière continue, le polygone $N'N''N'''$ se change dans la courbe dont on demande l'équation.

Pour fixer les idées, soient α et β les coordonnées du point N' commun aux deux lieux géométriques relatifs aux points M' et M'' de la courbe donnée, on aura, pour déterminer ce point, les équations

$$\varphi(\alpha, \beta, x', y') = 0, \qquad F(x', y') = 0,$$
$$\varphi(\alpha, \beta, x'', y'') = 0, \qquad F(x'', y'') = 0.$$

Si l'on interprète maintenant ces équations par rapport au système

$$\varphi(\alpha, \beta, x, y) = 0, \qquad F(x, y) = 0;$$

on y trouve exprimé la double condition, que le lieu M'QM'' représenté par $\varphi(\alpha, \beta, x, y) = 0$ passe par les deux points (x', y'), (x'', y'') de la courbe proposée. En sorte que, pour établir la réunion de ces points en un seul, comme cette réunion a lieu en même temps sur deux courbes, il suffit d'exprimer que le lieu géométrique proposé, et la courbe M'QM'', que nous pouvons appeler courbe auxiliaire, ont une tangente commune au point x', y'. Or, d'après ce que nous avons établi ailleurs (*) par des considérations purement géométriques, les coefficients angulaires des équations des deux tangentes relatives au même point (x', y'), des deux courbes sont $-\frac{\varphi'_{x'}(\alpha, \beta, x', y')}{\varphi'_{y'}(\alpha, \beta, x', y')}$ et $-\frac{F'_{x'}(x', y')}{F'_{y'}(x', y')}$; donc, on aura entre les coordonnées α et β d'un point du lieu, la nouvelle équation

$$\frac{\varphi'_{x'}(\alpha, \beta, x', y')}{\varphi'_{y'}(\alpha, \beta, x', y')} = \frac{F'_{x'}(x', y')}{F'_{y'}(x', y')},$$

et la question se résoudra par l'élimination des quantités x' et y' entre cette équation et les deux autres $\varphi(\alpha, \beta, x', y') = 0$, $F(x', y') = 0$, ou, plus généralement, entre les équations

$$\varphi(x, y, x', y') = 0, \qquad F(x', y') = 0,$$

$$\frac{\varphi'_{x'}(x, y, x', y')}{\varphi'_{y'}(x, y, x', y')} = \frac{F'_{x'}(x', y')}{F'_{y'}(x', y')},$$

les coordonnées x, y appartenant alors à un point quelconque du lieu demandé.

Dans les applications, on se rappellera que la troisième équation à joindre aux deux équations du lieu proposé et de la ligne variable, pour éliminer x' et y', s'obtient en égalant

(*) P. 268.

entre elles les dérivées par rapport à x' des fonctions y' qui entrent implicitement dans ces deux équations; toutes les autres quantités qui s'y trouvent étant considérées comme des constantes. Au point de vue algébrique, voici donc le théorème qui se trouve établi : *si deux fonctions de* x *prennent des valeurs égales pour une même valeur* x' *attribuée à* x, *et que cela ait encore lieu pour une autre valeur* x'' *attribuée à* x, *les dérivées de ces fonctions seront égales quand on aura* x' = x'' (*).

2. Lorsque les lignes dont les intersections successives forment le lieu demandé, sont renfermées dans une seule et même équation, contenant par conséquent un paramètre arbitraire, comme $\varphi(x, y, m) = 0$, l'équation de la courbe cherchée est le résultat de l'élimination de m entre les équations

$$\varphi(x, y, m) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(x, y, m) = 0.$$

En effet, soient m' et m'' deux valeurs particulières à m, et

$$\varphi(x, y, m') = 0, \quad \varphi(x, y, m'') = 0$$

les équations des deux lieux géométriques correspondants. Désignons encore par α et β les coordonnées de leur point de rencontre ; il vient

$$\varphi(\alpha, \beta, m') = 0, \quad \varphi(\alpha, \beta, m'') = 0,$$

et par suite

$$\frac{\varphi(\alpha, \beta, m') - \varphi(\alpha, \beta, m'')}{m' - m''} = 0;$$

équation qui, à la limite, c'est-à-dire lorsqu'on pose $m' = m''$, se transforme comme on sait dans celle-ci :

$$\varphi'_{m'}(\alpha, \beta, m') = 0.$$

On a donc entre, les coordonnées α et β d'un point du lieu cherché, les deux équations

$$\varphi(\alpha, \beta, m') = 0, \quad \varphi'_{m'}(\alpha, \beta, m') = 0,$$

(*) Si $\dfrac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} = \dfrac{\varphi(x') - \varphi(x'')}{x' - x''}$ en faisant $x' = x''$, on obtient $f'(x') = \varphi'(x')$, les valeurs infinies sont exceptées. Tm.

et l'élimination de m' entre ces deux équations, ou de m entre les suivantes

$$\varphi(x, y, m) = 0, \quad \varphi'_m(x, y, m) = 0,$$

conduira à l'équation du lieu cherché. C.Q.F.D.

Dans ce cas, on voit que l'équation à joindre à celle qui représente la famille des lieux géométriques considérés est l'équation dérivée par rapport à m de celle qui renferme ce paramètre variable (*).

3. La théorie ainsi établie d'une manière élémentaire, nous l'appliquerons successivement à deux grandes questions, celle des développées des courbes planes et celle des contacts d'un ordre quelconque de deux courbes planes.

Supposons qu'il s'agisse d'abord de trouver la *développée* d'une courbe plane, en d'autres termes, le lieu géométrique des intersections successives des normales aux différents points de cette courbe, qui, par rapport à la développée, est dite *développante*. Soit $F(x, y)$ l'équation de la courbe considérée, équation que nous pouvons concevoir sous la forme explicite $y = f(x)$; soient, d'ailleurs x' et y' les coordonnées d'un point particulier de cette courbe, nous aurons pour déterminer la normale en ce point, les équations

$$y - y' = -\frac{1}{f'(x')}(x - x'), \quad F(x', y') = 0.$$

Nous rappellerons que la composition de $f'(x')$, établie plus haut, ne dépend nullement de la connaissance de $f(x)$. Égalons maintenant les deux dérivées des fonctions y' qui entrent dans ces équations, après avoir calculé ces dérivées comme il a été prescrit pour toute fonction implicite, et joignons-la aux équations qui précèdent, nous obtiendrons le système suivant, qui fournira l'équation de la développée, par l'élimination des quantités x' et y' :

(*) Ce cas particulier entre dans le théorème général. Il suffit de remplacer zéro par une fonction arbitraire de x, y, m identiquement nulle. TM.

$$(y-y')f'(x')+(x-x')=0\,,\qquad F(x',y')=0,$$
$$\frac{(y-y')f''(x')-1}{f'(x')}=f'(x'),$$

et ce système, si nous substituons à $f'(x')$, son expression générale $-\dfrac{F'_{x'}(x',y')}{F'(x',y')}$, que nous désignerons, pour plus de simplicité, par $-\dfrac{F'_{x'}}{F'_{y'}}$, pourra lui-même être remplacé par cet autre

$$(y-y')F'_{x'}-(x-x')F'_{y'}=0,\qquad F(x',y')=0,$$
$$(y-y')F'_{y'}F''_{x'}+(x-x')F'_{x'}F''_{y'}-2(y-y')F'_{x'}F''_{x',y'}+F'^2_{x'}+F'^2_{y'}=0,$$

$F''_{x',y'}$ désignant la dérivée de $F'_{x'}$ par rapport à y', ou de $F'_{y'}$ par rapport à x'. (*)

4. *Application à l'ellipse.*

$$F(x',y')=a^2y'^2+b^2y'^2-a^2b^2,\ F'_{x'}=2b^2x',\ F'_{y'}=2a^2y',$$
$$F''_{x'}=2b^2,\quad F''_{y'}=2a^2,\quad F''_{x',y'}=0.$$

Le système des équations précédentes devient

$$b^2x'(y-y')-a^2y'(x-x')=0,\qquad a^2y'^2+b^2x'^2-a^2b^2=0,$$
$$a^2b^2y'(y-y')+a^2b^2x'(x-x')+a^4y'^2+b^4x'^2=0.$$

En écrivant la première et la troisième ainsi qu'il suit :

$$(b^2y+c^2y')x-a^2xy'=0,\ (b^2y+c^2y')a^2y'-(c^2x'-a^2x)b^2x'=0;$$

éliminant ensuite par réduction la quantité b^2y+c^2y'; puis enfin, remplaçant y'^2 par sa valeur en fonction de x', on rend plus prompte l'élimination de y', et l'on obtient, réductions faites $a^4x-c^2x'^3=0$, c désignant la demi-excentricité. Or, la symétrie permet d'écrire sur-le-champ, comme résultat de l'élimination de x', l'équation

$$b^4y-c^2y'^3=0\,;$$

voici donc deux équations très-simples, pour remplacer la

(*) La dérivée de $F'_{x'}$ est $F''_{x'}-F''_{x',y'}\dfrac{F'_{x'}}{F'_{y'}}$, celle de $F'_{y'}$ est $F''_{x'y'}-F''_{y'}\dfrac{F'_{x'}}{F'_{y'}}$.

Tm.

première et la troisième du système ci-dessus. On en déduit immédiatement, pour équation de la développée de l'ellipse :

$$a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}, \qquad (*)$$

équation qu'il ne s'agit pas ici de discuter.

Application à l'hyperbole.

En changeant simplement b^2 en $-b^2$, on obtient

$$a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}},$$

c désignant encore la demi-excentricité.

Application à la parabole.

$$\mathrm{F}(x',y')=y'^2-2px',\ \mathrm{F}'_{x'}=-2p,\ \mathrm{F}'_{y'}=2y',\ \mathrm{F}''_{x'}=0,$$
$$\mathrm{F}''_{y'}=2,\quad \mathrm{F}''_{x',y'}=0.$$

Le système en question devient donc

$$p(y-y')+y'(x-x')=0,\quad y'^2-2px'=0,$$
$$p(x-x')-p^2-y'^2=0.$$

Partant, l'on obtient pour équation de la développée,

$$y^2=\frac{8}{27p}(x-p)^3.$$

On sait que cette équation est aussi celle du lieu des points d'où l'on peut mener deux normales à la parabole, lieu qui sépare la région des points d'où l'on peut mener trois normales à cette courbe, de celle des points d'où l'on n'en peut mener qu'une.

5. Théorie des contacts des divers ordres.

On sait que deux courbes sont dites avoir un contact de l'ordre n, lorsqu'elles ont $n+1$ points communs réunis en un seul, ou n éléments consécutifs communs.

(*) Lieu géométrique des points d'où l'on peut mener trois normales à la conique; par des points à l'intérieur on peut mener quatre, et à l'extérieur deux normales; de même pour l'hyperbole. Toutes les courbes données par l'équation $a^m x^m+b^m y^m=c^{2m}$ jouissent de propriétés communes que M. Lamé a développées dans un admirable ouvrage publié en 1818. Tm.

Il est facile, d'après ce qui précède, d'établir les conditions analytiques de cet ordre de contact; mais commençons par le contact du deuxième ordre, celui du premier ordre étant déjà connu.

Soient M′, M″, M‴ trois points communs à deux courbes A et B, dont les équations sont généralement $F(x, y)=0$ et $\varphi(x, y)=0$, que nous pouvons concevoir sous les formes explicites $y=f(x)$ et $y=\varphi(x)$. (Nous nous dispenserons de tracer une figure, il est facile de se la représenter). Si nous désignons par x' et y', x'' et y'', x''' et y''', les coordonnées de ces trois points, nous avons les trois équations de condition :

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \left\{ \begin{array}{l} F(x', y')=0, \quad \varphi(x', y')=0, \\ \text{ou} \quad f(x')=\varphi(x'), \end{array} \right. \\
(2) & \qquad f(x'')=\varphi(x''), \\
(3) & \qquad f(x''')=\varphi(x''');
\end{array}
$$

dans lesquelles il faut exprimer que les quantités, d'abord distinctes, x', x'', x''', viennent se confondre dans la seule quantité x', par exemple.

Le théorème énoncé n° 1 (p. 283), appliqué au système des équations (1) et (2), où l'on voit deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, qui sont égales pour une même valeur x', puis pour une autre valeur x'', que l'on considère eusuite comme devenant égale à x', nous permet de remplacer l'équation (2) par celle qu'on obtient en égalant les deux premières dérivées de ces fonctions, savoir $f'(x')$, $\varphi'(x')$. Pareillement l'équation (3), par rapport à l'équation (2), peut se remplacer par l'équation $f'(x'')=\varphi'(x'')$; en sorte que nous avons déjà le système suivant, pour remplacer les trois équations primitives :

$$
\begin{gathered}
f(x')=\varphi(x'), \\
f'(x')=\varphi'(x'), \\
f'(x'')=\varphi'(x'').
\end{gathered}
$$

En appliquant encore le théorème dont il s'agit aux deux dernières équations, dans lesquelles on trouve deux fonctions $f'(x')$ et $\varphi'(x')$, qui satisfont aux conditions de ce théorème, nous obtenons enfin les équations:

$$\begin{array}{lll} f(x')=\varphi(x'), & & f=\varphi, \\ f'(x')=\varphi'(x'), & \text{ou simplement} & f'=\varphi', \\ f''(x')=\varphi''(x'), & & f''=\varphi'', \end{array}$$

qui présentent les trois conditions connues d'un contact du deuxième ordre, savoir l'égalité des fonctions au point que l'on considère, l'égalité de leurs premières dérivées et l'égalité de leurs secondes dérivées.

Passons au contact du troisième ordre.

Soient M', M'', M''', M$^{\text{iv}}$, les quatre points communs aux deux courbes A et B, et x' et y', x'' et y'', x''' et y''', etc.; les coordonnées respectives de ces points. Les équations primitives sont

$$\begin{array}{ll} (1) & f(x')=\varphi(x'), \\ (2) & f(x'')=\varphi(x''), \\ (3) & f(x''')=\varphi(x'''), \\ (4) & f(x^{\text{iv}})=\varphi(x^{\text{iv}}). \end{array}$$

En vertu du théorème du n° 1, nous les remplaçons successivement par les systèmes que voici:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x')=\varphi(x'), \\ f'(x')=\varphi'(x'), \\ f'(x'')=\varphi'(x''), \\ f'(x''')=\varphi'(x''')), \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} f(x')=\varphi(x'), \\ f'(x')=\varphi'(x'), \\ f''(x')=\varphi''(x'), \\ f''(x'')=\varphi''(x''), \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} f(x')=\varphi(x'), \\ f'(x')=\varphi'(x'), \\ f''(x')=\varphi''(x'), \\ f'''(x')=\varphi'''(x'), \end{array}\right.$$

ou simplement

$$f=\varphi, \quad f'=\varphi', \quad f''=\varphi'', \quad f'''=\varphi'''.$$

Maintenant, sans qu'il soit besoin d'effectuer de semblables transformations de systèmes, on peut s'élever aux conditions du contact d'un ordre n en général. L'analogie permet d'écrire ces conditions ainsi qu'il suit:

$$f=\varphi,\quad f'=\varphi',\quad f''=\varphi'',\quad f'''=\varphi''',\ldots\quad f^{(n)}=\varphi^{(n)}.$$

Au reste, si l'on voulait donner à cette conséquence toute la rigueur possible, on pourrait démontrer facilement, à la manière en usage dans le binôme de Newton, la généralité de la loi qui s'établit d'elle-même pour les contacts des deuxième et troisième ordres.

En revenant sur le sens géométrique de la question, si l'on interprète particulièrement chacun des systèmes consécutifs, on reconnaît que la question est complétement résolue, et l'on voit en outre en quoi chaque système contribue à la résoudre. Ainsi, dans le cas du contact du troisième ordre, par exemple, le premier système indique seulement l'existence de quatre points communs aux deux courbes A et B. Le deuxième témoigne que chacun des points, à partir du quatrième, est venu se réunir au précédent, en sorte que les deux courbes n'ont plus que trois points communs distincts; mais aussi trois tangentes communes en ces points. Le troisième système indique que chacun de ces trois points s'est réuni au précédent, en sorte que les deux courbes n'ont plus que deux points communs distincts, mais aussi deux tangentes communes, dont l'une est la réunion de deux éléments. Enfin, le dernier système montre que les deux courbes ont un point commun et trois éléments consécutifs communs en ce point; ce qui est le caractère propre du contact du troisième ordre.

Ce serait ici le lieu de parler du cercle osculateur et de ses propriétés. Mais nous n'avons eu pour but que de faire voir comment on peut rendre tout à fait élémentaire la résolution des deux genres de questions que nous avons traitées dans cette note.

QUESTIONS PROPOSÉES AUX EXAMENS.

PAR M. CIRODDE,
Professeur au Collége royal de Henri IV.

1. *Circonscrire à une ellipse un rectangle équivalent à un carré donné* m².

1^re^ SOLUTION. Soit CDEF (*fig.* 64), le rectangle demandé : ses sommets appartiennent, comme on sait, à une circonférence concentrique à l'ellipse proposée et qui a pour rayon $\sqrt{a^2+b^2}$, c'est-à-dire, la corde AB; donc ses diagonales se croisent au centre O et sont ainsi des diamètres de l'ellipse. Or, DF étant un diamètre qui passe par le point de concours des deux tangentes DC et DE, divise en deux parties égales la corde GI, qui joint leurs points de concours; donc GI est parallèle à CE (réciproque d'un théorème connu de géométrie), et par conséquent les deux diamètres CE et DF sont conjugués. Il suit de là que si l'on peut déterminer l'angle sous lequel ces diagonales se coupent, il sera facile de les tracer, et par suite de construire le rectangle demandé, car il suffira, pour cela, de joindre deux à deux les points où leurs directions rencontreront la circonférence décrite du centre O avec un rayon égal à la corde AB.

Soit θ l'angle inconnu COD : l'aire du triangle COD aura pour expression $\frac{1}{2}$CO.DO. $\sin\theta$, de sorte que l'équation du problème sera

$$2\text{CO.OD.}\sin\theta = m^2,$$

ou bien

$$2(a^2+b^2)\sin\theta = m^2, \quad \text{d'où} \quad \sin\theta = \frac{m^2}{2(a^2+b^2)}.$$

Pour construire cet angle θ, je commence par substituer le rapport de deux lignes à celui des deux carrés $\frac{m^2}{2}$ et (a^2+b^2), en cherchant une troisième proportionnelle aux droites $AB=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\sqrt{\frac{m^2}{2}}$. Je prends donc sur la tangente au point A une distance AK égale à la moitié de la diagonale du carré donné m^2, je décris une circonférence du point A comme centre, et avec AB pour rayon ; je joins LK, et en élevant au point K une perpendiculaire KZ à LK, j'aurai $AZ=\frac{m^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ et par conséquent $\sin\theta=\frac{AZ}{AB}$; maintenant, je mène par le point Z une perpendiculaire ZT terminée à la circonférence que je viens de décrire, je joins TA, et l'angle T est égal à θ.

Il ne s'agit donc plus que de trouver deux diamètres conjugués qui fassent entre eux un angle égal à T, ce qui sera facile, car le prolongement de AT coupera la direction du petit axe précisément au centre de l'arc AMM'A' capable du supplément de l'angle T.

Le problème est susceptible de deux solutions, puisque l'on peut, en général, trouver deux systèmes de diamètres conjugués qui se croisent sous un angle donné, et les deux rectangles qui le résolvent sont placés symétriquement par rapport aux deux axes.

2. *Quel est le plus grand rectangle que l'on puisse circonscrire à une ellipse?* — L'aire du rectangle circonscrit ayant pour expression $2(a^2+b^2)\sin\theta$, on voit que cette aire sera maximum quand l'angle θ sera droit : or, les axes de l'ellipse étant les seuls diamètres conjugués qui soient rectangulaires, on en conclut que les diagonales du rectangle maximum sont dirigées suivant les axes de la courbe, et que, par conséquent, ce rectangle est le carré formé en joignant les points où les di-

rections de ces axes rencontrent la circonférence décrite du point O comme centre, avec un rayon égal à AB.

3. *Quel est le plus petit rectangle que l'on puisse circonscrire à une ellipse?* — L'aire du rectangle circonscrit sera minimum quand sin θ sera le plus petit possible, c'est-à-dire, quand ses diagonales seront dirigées suivant les diamètres conjugués égaux de l'ellipse, de sorte que le rectangle minimum est celui même qui est construit sur les axes de cette courbe.

Il est facile de voir que notre solution conduit à ces limites inférieure et supérieure du rectangle circonscrit. En effet, pour que nos constructions puissent s'effectuer, il faut d'abord que la perpendiculaire ZT rencontre la circonférence AL, et par conséquent que AZ soit plus petit que AB : donc

$$\frac{m^2}{2\sqrt{a^2+b^2}} < \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \text{d'où} \qquad m^2 < 2(a^2+b^2);$$

Ainsi le maximum de l'aire du rectangle circonscrit à notre ellipse est $m^2=2(a^2+b^2)$; la valeur correspondante de sin θ étant l'unité, nous en concluons que les diagonales de ce rectangle sont dirigées suivant les axes principaux de l'ellipse.

AZ étant plus petit que AB, on pourra construire le triangle AZT, ce qui fera connaître l'angle T; mais il faut encore que l'arc capable de cet angle, et qui a AA' pour corde, rencontre l'ellipse, et pour cela que son rayon O'A soit plus grand que O'B. Or, il est facile de voir que $OO' = \dfrac{a}{\operatorname{tang}\theta}$, $O'A = \dfrac{a}{\sin\theta}$; donc

$$\frac{a}{\sin\theta} > b + \frac{a}{\operatorname{tang}\theta},$$

condition qui revient à

$$a > b\sin\theta + a\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant sin θ et cos θ par leur valeur

$$a > \frac{bm^2 + a\sqrt{4(a^2+b^2)^2 - m^4}}{2(a^2+b^2)},$$

on tirera facilement de cette dernière inégalité

$$m^2 > 4ab.$$

Ainsi, l'aire du plus petit rectangle que l'on puisse circonscrire à une ellipse est égale à $4ab$, ce qui donne

$$\sin\theta = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Or, l'angle formé par les cordes supplémentaires qui joignent l'une des extrémités du petit axe à celles du grand a précisément $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ pour sinus ; donc les diagonales du plus petit rectangle que l'on puisse circonscrire à une ellipse sont les directions mêmes des diamètres conjugués égaux.

4. 2^e^ SOLUTION. Ayant reconnu, comme nous l'avons fait plus haut, que les diagonales du rectangle demandé forment un système de diamètres conjugués, je suppose que l'on ait pris pour axes des ordonnées et des abscisses le petit et le grand axe de l'ellipse proposée, et j'appelle (x', y') les coordonnées du sommet D : l'équation de la droite GI, qui joint les points de contact des deux tangentes DC et DE, sera

$$a^2y'y + b^2x'x - a^2b^2 = 0,$$

et par conséquent on aura pour celle du diamètre CE qui lui est parallèle

$$a^2y'y + b^2x'x = 0.$$

Donc la perpendiculaire abaissée de D sur CE aura pour expression

$$\frac{a^2y'^2 + b^2x'^2}{\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}},$$

de sorte que l'on exprimera que l'aire du rectangle **CDEF** est égale à celle du carré m^2, en écrivant

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.\frac{a^2y'^2+b^2x'^2}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}}=\frac{m^2}{4},$$

ou, ce qui revient au même,

$$m^4(a^4y'^2+b^4x'^2)=4(a^2+b^2)(a^2y'^2+b^2x'^2)^2\ldots. \quad (1)$$

d'ailleurs

$$x'^2+y'^2=a^2+b^2\ldots\ldots \quad (2)$$

puisque le point D appartient à la circonférence décrite du point O comme centre avec $\sqrt{a^2+b^2}$ pour rayon. Telles sont les deux équations du problème.

En éliminant y' entre les deux équations (1) et (2) on aura

$$4(a^2-b^2)^2x'^4+[-8a^2(a^2+b^2)+m^4]$$
$$(a^2-b^2)x'^2+a^4\left\{4(a^2+b^2)^2-m^4\right\}=0\ldots.. \quad (3)$$

Or x' ne représente pas l'abscisse d'un sommet en particulier, donc les racines de cette équation doivent être toutes quatre réelles, ce qui exige déjà que son dernier terme soit positif; donc il faut que

$$m^2<2(a^2+b^2);$$

mais cette condition n'est pas suffisante, il faut encore que l'on ait

$$\left\{8a^2(a^2+b^2)-m^4\right\}^2-16a^4\left\{4(a^2+b^2)^2-m^4\right\}>0,$$

d'où $$m^2>4ab.$$

Ainsi le maximum du rectangle circonscrit est $2(a^2+b^2)$, ce qui donne $x'^2=0$ et $x'=\pm\sqrt{a^2+b^2}$; et son minimum est $4ab$. Dans ce cas, le premier membre de l'équation (3) est un carré parfait, et comme son dernier terme se réduit à $4a^4(a^2-b^2)^2$, lorsque $m^2=4ab$, on en conclut que le produit des deux valeurs de x'^2 est a^4, et que comme elles sont égales $x'^2=a^2$, d'où $x'=\pm a$. Le rectangle minimum est donc le rectangle même qui est construit sur les axes de l'ellipse, et le rectangle maximum a pour sommets les points où ces mêmes axes sont rencontrés par la circonférence décrite du point O comme centre avec un rayon égal à $\sqrt{a^2+b^2}$.

Lorsque m^2 sera compris entre $4ab$ et $2(a^2+b^2)$, les quatre racines de l'équation (3) seront réelles, et comme à chacune correspondent deux valeurs de y' égales et de signes contraires, le problème admettra deux solutions qui seront fournies par deux rectangles symétriquement placés par rapport aux deux axes de l'ellipse.

5. *Quelle est la courbe engendrée par le sommet d'une parabole de forme invariable qui se meut en restant constamment tangente à deux droites rectangulaires données.*

Nous prendrons les deux droites données pour axes des coordonnées, et alors si l'on désigne par (α, β) les coordonnées du foyer de la parabole mobile, dans l'une de ses positions, son équation sera de la forme

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=(my+nx+p)^2$$

avec la condition

$$m^2+n^2=1\ldots\ldots \qquad (1)$$

Mais comme la directrice d'une parabole est le lieu des sommets de tous les angles droits dont les côtés sont tangents à cette courbe, on doit avoir

$$p=0\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

puisque dans toutes les positions que la parabole pourra prendre, sa directrice passera toujours par le point d'intersection des deux droites données, c'est-à-dire par l'origine.

L'axe étant une perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice, a pour équation

$$y-\beta=\frac{m}{n}(x-\alpha)\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

Si l'on appelle (x', y') les coordonnées du point où il coupe la directrice, et (x, y) celles du sommet, on aura évidemment $x = \frac{x'+\alpha}{2}$ et $y = \frac{y'+\beta}{2}$, d'où $x' = 2x - \alpha$ et $y' = 2y - \beta$; quantités qui doivent vérifier l'équation $my + nx = o$ de cette directrice ; donc

$$m(2y - \beta + n(2x - \alpha) = 0 \ldots\ldots. \qquad (4)$$

Le paramètre $2k$, dont la valeur fixe les dimensions de la parabole mobile, est double de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice ; ainsi

$$m\beta + n\alpha = \pm k \ldots\ldots\ldots \qquad (5)$$

Enfin on trouvera facilement que la condition de contact de la courbe avec l'axe des x est

$$(\beta^2 + \alpha^2)n^2 - \beta^2 = 0 \ldots\ldots\ldots \qquad (6)$$

Telles sont les équations qui expriment toutes les conditions de la question, car en écrivant que la directrice passe par l'origine des coordonnées rectangulaires et que l'axe des x est tangent à la courbe, nous avons écrit que l'axe des y la touche aussi.

Il suit de là que pour tout système de valeurs des quantités m, n, d, b qui vérifieront les équations (1), (5) et (6), on tirera des équations (3) et (4) un couple de valeurs de x et y, qui seront les coordonnées du sommet de la parabole, dans la position que lui assigne le système de valeurs de m, n, α, β dont il s'agit. Par conséquent, si on élimine m, n, α, β entre les cinq équations (1), (3), (4), (5) et (6), on obtiendra une équation en x et en y qui sera satisfaite par tous les couples et par les seuls couples de valeurs de x et de y qui, conjointement avec certaines valeurs de ces variables m, n, α, β, peuvent vérifier ces équations ; donc le lieu de cette équation finale est précisément celui des sommets de la parabole mobile. Et en effet, cette équation finale étant indépendante des quantités m, n, α, β qui fixent la position du sommet dont on a désigné les coordonnées par x et par y, n'exprime pas une propriété particulière aux coordonnées de ce point plutôt qu'à celles de tout autre point déterminé par les mêmes conditions : elle est donc l'expression de la relation constante qui existe entre les coordonnées du sommet de notre parabole dans chacune des positions qu'il peut prendre ; donc elle est l'équation de la courbe qu'il décrit.

Il s'agit donc d'effectuer l'élimination des quantités m, n, α, β entre les équations (1), (3), (4), (5) et (6) ; pour y parvenir, j'additionne membre à membre les équations (4) et (5), ce qui me permet de remplacer l'équation (4) par l'équation résultante

$$2(my+nx)=\pm k\,;\ldots\ldots \tag{7}$$

Puis, au carré de l'équation (5) j'ajoute l'équation (6), et en ayant égard successivement à l'équation (1) et à l'équation (5), je substitue ainsi à l'équation (6) l'équation

$$2n\alpha=\pm k, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha=\pm\frac{k}{2n}.$$

En remplaçant α par cette valeur dans (5), on trouvera $\beta=\pm\dfrac{k}{2m}$. Je substitue maintenant ces valeurs de α et de β dans (3), ce qui donne

$$2mx\,(ny+mn)=\pm k(n^2-m^2).$$

Mais si on élimine k entre cette équation et la 7ᵉ, il viendra

$$n^3x-m^3y=0, \qquad \text{d'où} \qquad m=n\sqrt[3]{\frac{x}{y}},$$

puis, en reportant cette valeur dans (7),

$$2n(\sqrt[3]{xy^2}+x)=\pm k, \qquad \text{d'où} \qquad n=\pm\frac{k}{2\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})}$$

et par suite

$$m=\pm\frac{k}{2\sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})}$$

Il ne reste plus, pour avoir l'équation cherchée, qu'à substituer ces valeurs dans (1), et on trouvera ainsi

$$4\sqrt[3]{x^2y^2}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)=k^2.$$

Si l'on veut faire évanouir les radicaux de cette équation, on posera

$$\sqrt[3]{x^2}=t, \qquad \sqrt[3]{y^2}=v,$$

et on trouvera ensuite

$$4vt(t+v)=k^2, \qquad \text{d'où} \qquad 64v^3t^3\left\{t^3+3tv(t+v)+v^3\right\}=k^6.$$

Mais $\quad vt(t+v)=\dfrac{k^2}{4}, \quad$ donc enfin,

$$64x^2y^2\left(x^2+y^2+\frac{3}{4}k^2\right)=k^6\ (^*).$$

Telle est l'équation demandée.

Pourriez-vous construire par points la courbe décrite par le sommet de la parabole? — Par le point d'intersection O (*fig.* 64) des deux droites données, menons une droite quelconque RS et prenons-la pour directrice; alors si on lui mène une parallèle à une distance égale au quart du paramètre, ce sera la tangente au sommet, et par conséquent le lieu des projections du foyer sur toutes les tangentes à la parabole dans la position que nous lui supposons; donc les points A et B où elle coupe les deux droites données sont les projections sur cette droite du foyer de cette parabole. Donc, en menant par A et par B des parallèles aux droites données, on aura le foyer F, de sorte qu'en abaissant de F une perpendiculaire sur AB, le sommet C sera déterminé. En donnant une seconde position à la droite RS, on aura une seconde position du sommet, et ainsi de suite.

(*) On facilite la discussion de la courbe en passant aux coordonnées polaires. On a $4z^4(4z^2+3k^2)=k^6\,\text{coséc}^2\varphi$, équation qu'on peut trouver directement.
Tm.

Déterminer l'équation de la courbe d'après ce tracé. — Soient OA et OB les axes des x et des y ; α et β les coordonnées de F, l'équation de AB sera

$$\frac{y}{\beta}+\frac{x}{\alpha}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Par conséquent, on aura pour celle de FC

$$y-\beta=\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha) \ldots\ldots \quad (2)$$

Mais FC est le quart du paramètre $2k$, donc

$$\frac{k}{2}=\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \ldots\ldots \quad (3)\ (^*)$$

En éliminant les variables α et β entre ces équations, on aura l'équation du lieu des sommets.

De l'équation (1) je tire

$$\beta=\frac{\alpha y}{\alpha-x}, \qquad \text{d'où} \qquad y-\beta=-\frac{xy}{\alpha-x}:$$

puis je substitue cette valeur de $(y-\beta)$ dans (2), ce qui donne

$$(\alpha-x)^3=xy^2, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha=\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}).$$

Mais comme les équations (1) et (2) sont composées symétriquement des quantités x et y, α et β, j'aurai par une simple permutation de lettres

$$\beta=\sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}).$$

Il n'y a plus qu'à substituer ces valeurs de α et de β dans l'équation (3) pour obtenir l'équation du lieu demandé, ce qui ne saurait présenter de difficulté.

(*) Cette équation est le lieu géométrique du foyer; ligne du quatrième degré; il est facile maintenant de trouver le lieu d'un point quelconque, situé dans le plan de la parabole mobile : $z=k$ coséc. 2φ ; équation polaire du lieu du foyer. Tm.

Observations. 1° Posons

$$\left.\begin{array}{l} y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}=\dfrac{k^{\frac{2}{3}}}{m} \\ 4x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}=mk^{\frac{4}{3}} \end{array}\right\}.$$

La première équation représente l'enveloppe d'une droite de longueur constante $\dfrac{k}{m^{\frac{3}{2}}}$, s'appuyant par les extrémités sur les axes des coordonnées; la seconde est l'équation d'une hyperbole équilatère; faisant varier m, l'intersection de ces deux courbes décrira le lieu cherché du sommet de la parabole.

2° Posons

$$x^2+y^2=\frac{k^2}{m}-\frac{3}{4}k^2,$$

$$64x^2y^2=mk^4.$$

La première équation représente un cercle et la seconde une hyperbole équilatère; faisant varier m, l'intersection de ces courbes mobiles donne encore le lieu cherché. Tm.

NOTE

SUR

LES DIAMÈTRES CONJUGUÉS;

PAR M. CAMUS,
Professeur au Collége Bourbon.

1. Soient OA,OB' (*fig.* 66), deux demi-diamètres conjugués, soient x', y' les coordonnées du point A', x'', y'' celles du point B', je dis qu'on aura les relations

$$x'^2+x''^2=a^2,\quad y'^2+y''^2=b^2,$$

les équations des droites OA′,OB′ sont

$$y=\frac{y'}{x'}x, \qquad y=\frac{y''}{x''}x,$$

ces droites étant des diamètres conjugués, on a la relation

$$\frac{y'y''}{x'x''}=-\frac{b^2}{a^2}, \tag{1}$$

les deux points (x',y'), (x'',y'') appartenant à l'ellipse, on a les relations

$$(2)\quad y'^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2), \qquad (3)\ y''^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x''^2),$$

en les multipliant entre elles on a

$$y'^2y''^2=\frac{b^4}{a^4}(a^2-x'^2)(a^2-x''^2);$$

l'équation (1) donne $y'^2y''^2=\dfrac{b^4}{a^4}x'^2x''^2$. Substituant dans l'équation précédente on a

$$\frac{b^4}{a^4}x'^2x''^2=\frac{b^4}{a^4}(a^2-x'^2)(a^2-x''^2),$$

d'où

$$x'^2x''^2=(a^2-x'^2)(a^2-x''^2)=a^4-a^2(x'^2+x''^2)+x'^2x''^2.$$

On tire immédiatement de cette relation

$$x'^2+x''^2=a^2\ ; \tag{4}$$

en vertu de cette relation les équations (2) et (3) deviennent

$$y'^2=\frac{b^2}{a^2}x''^2, \qquad y''^2=\frac{b^2}{a^2}x'^2,$$

ajoutant membre à membre ces deux équations, on a

$$y'^2+y''^2=\frac{b^2}{a^2}(x'^2+x''^2)=\frac{b^2}{a^2}\times a^2, \quad \text{ou} \quad y'^2+y''^2=b^2. \tag{5}$$

La figure donne immédiatement les relations

$$a'^2=y'^2+x'^2, \qquad b'^2=y''^2+x''^2,$$

d'où l'on tire

$$a'^2+b'^2=y'^2+y''^2+x'^2+x''^2,$$

or, les équations (4) et (5) étant ajoutées ensemble donnent

$$a^2+b^2=x'^2+x''^2+y'^2+y''^2,$$

donc on a

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2,$$

2. Le parallélogramme construit sur les diamètres conjugués est OA',CB' (*fig.* 67), en menant B'F parallèle à OA, on obtient le parallélogramme OB'FT équivalent au premier. Ce dernier a pour mesure OT$\times y''$. Or, OT (distance de l'origine au point où la tangente rencontre l'axe des x) est égal à $\frac{a^2}{x'}$; y'' d'après les relations précédentes est égal à $\frac{b}{a}x'$, donc le parallélogramme

$$\text{OB'FT}=\frac{a^2}{x'}\times\frac{b}{a}x'=ab,$$

donc aussi le parallélogramme OA'CB' construit dans les demi-diamètres conjugués est égal au rectangle ab construit sur les demi-axes.

3. Pour appliquer cette démonstration à l'hyperbole dont l'équation est $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, on considère en même temps l'hyperbole conjuguée dont l'équation est $a^2y^2-b^2x^2=a^2b^2$.

OA' (*fig.* 68) étant un diamètre de la première (qui la rencontre au point A' dont les coordonnées sont x',y'), son conjugué sera OB' (qui rencontre la deuxième au point B' dont les coordonnées sont x'',y'') : A' étant un point de la première on a

$$(1)\qquad y'^2=\frac{b^2}{a^2}(x'^2-a^2),$$

B' étant un point de la deuxième on a

$$(2)\qquad y''^2=\frac{b^2}{a^2}(x''^2+a^2),$$

d'où en multipliant membre à membre on a

$$(3) \qquad y'^2y''^2=\frac{b^4}{a^4}(x'^2-a^2)(x''^2+a^2),$$

OA′,OB′ étant des diamètres conjugués on a $\frac{y'\,y''}{x'\,x''}=\frac{b^2}{a^2}$ d'où $y'^2y''^2=\frac{b^4}{a^4}x'^2x''^2$, comparant avec (4), on a

$$x'^2x''^2=(x'^2-a^2)\;(x''^2+a^2)=x'^2x''^2-a^2(x''^2-x'^2)-a^4,$$

d'où on tire $x'^2-x''^2=a^2$ (5). En vertu de cette équation les équations (1) et (2) deviennent

$$y'^2=\frac{b^2}{a^2}x''^2; \qquad y''^2=\frac{b^2}{a^2}x'^2,$$

d'où l'on tire $y'^2-y''^2=\frac{b^2}{a^2}(x''^2-x'^2)$, ou $y'^2-y''^2=-b^2$(6);

ajoutant ensemble les équations (5) et (6) on a

$$x'^2+y'^2-(x''^2+y''^2)=a^2-b^2.$$

La figure donne immédiatement

$$x'^2+y'^2=a'^2,\; x''^2+y''^2=b'^2\cdot$$

en substituant dans l'équation précédente on a

$$a'^2+b'^2=a^2-b^2.$$

On voit de même que le parallélogramme OA′CB′ se transforme dans OTFB′ qui a pour mesure OT$\times y''$.

$$\mathrm{OT}=\frac{a^2}{x'}, \qquad y''=\frac{b}{a}x',$$

donc OTFB′, et par suite

$$\mathrm{OA'CB'}=\frac{a^2}{x'}\times\frac{b}{a}x'=ab. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

4. On peut abréger de la manière suivante la démonstration donnée dans l'ouvrage de M. Lefébure de Fourcy (*Géométr. analyt.*, 4^e édit., p. 262), on a

$$(1)\qquad a'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha},\quad (2)\ b'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha'+b^2\cos^2\alpha'},$$

$$(3)\ \operatorname{tg}\alpha\times\operatorname{tg}\alpha'=-\frac{b^2}{a^2}:$$

divisant les deux termes des fractions a'^2 et b'^2 par $\cos^2\alpha$ et $\cos^2\alpha'$, et observant que

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha=1+\operatorname{tg}^2\alpha,\quad \frac{1}{\cos^2\alpha'}=\sec^2\alpha'=1+\operatorname{tg}^2\alpha',$$

on a

$$(4)\qquad a'^2=\frac{a^2b^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{a^2\operatorname{tg}^2\alpha+b^2},\quad (5)\qquad b'^2=\frac{a^2b^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha')}{a^2\operatorname{tg}^2\alpha'+b^2},$$

l'équation (3) donne $\operatorname{tg}\alpha'=-\dfrac{b^2}{a^2\operatorname{tg}\alpha}$, substituant dans (4) on trouve en faisant les réductions $b'^2=\dfrac{a^4\operatorname{tg}^2\alpha+b^4}{a^2\operatorname{tg}^2\alpha+b^2}$ (6), ajoutant (4) et (6) on a

$$a'^2+b'^2=\frac{a^2\operatorname{tg}^2\alpha(a^2+b^2)+b^2(a^2+b^2)}{a^2\operatorname{tg}^2\alpha+b^2}=a^2+b^2.$$

5. Même démonstration pour l'hyperbole.

QUESTIONS PROPOSÉES AUX EXAMENS.

PAR M. GUILMIN,
Professeur de mathématiques.

—

1. Trouver les propriétés communes aux paraboles représentées par l'équation

$$c^2y^2+2cxy+x^2+2cy-2c^2x-c^2=0. \qquad (1)$$

(les axes des coordonnées étant supposées rectangulaires).

On appelle *propriété commune* aux courbes représentées par une équation qui renferme des constantes arbitraires, une relation existant entre les coefficients de chacune d'elles, indépendamment de toutes valeurs particulières attribuées à ces constantes.

Dans les questions semblables à la proposée, on doit d'abord déterminer le nombre des propriétés communes essentiellement distinctes que doivent avoir les courbes dont on s'occupe. Il est facile de voir que les paraboles dont il s'agit en ont trois et pas davantage. En effet, l'équation générale des paraboles renferme quatre coefficients arbitraires; si on les identifie avec ceux de l'équation (1), nous aurons quatre équations entre ces coefficients et c; éliminant c entre ces équations, il en restera trois qui devront, quelque valeur que l'on attribue à cette constante, être vérifiées par les coefficients de chacune des paraboles représentées par (1), ce qui constitue bien *trois* propriétés communes qu'il nous faut découvrir.

Il n'y en a pas plus de trois *distinctes*. En effet, s'il y en avait seulement quatre, les coefficients seraient déterminés, ce qui évidemment n'est pas.

Pour déterminer ces propriétés, on peut suivre la marche indiquée tout à l'heure en partant de l'équation générale des courbes du second ordre $Ay^2+Bxy+Cx^2+\ldots=0$; on identifie les coefficients avec ceux de (1), et sans compter la relation $B^2-4AC=0$, on en trouve trois autres que voici: $D=B, \frac{E}{A}=-2, \frac{F}{A}=-1$. La question peut ainsi être considérée comme résolue. Mais on peut demander d'expliquer les conséquences qui résultent de ces propriétés communes pour les points ou les lignes remarquables de ces paraboles; on demande même le plus souvent de déterminer directement des propriétés communes à ces points ou à ces lignes équivalant aux relations ci-dessus.

Il est important d'observer qu'on appelle *propriété commune* à ces points ou à ces lignes toute relation entre les quantités servant à fixer la position ou la direction qui leur convient, indépendamment de toute valeur particulière attribuée à la constante c.

Je vais traiter la question proposée sous ce second point de vue. Pour cela, il est plus commode d'écrire l'équation de la parabole sous la forme suivante, déduite de la propriété du foyer :

$$(y-y')^2+(x-x')^2-(py+qx+r)^2=0. \qquad (2)$$

dans laquelle y' et x' désignent les coordonnées du foyer, $py+qx+r$ étant l'expression générale de la distance au foyer d'un point de la courbe, exprimée en fonction des coordonnées de ce point.

(On sait qu'alors l'équation de la directrice est... $py+qx+r=0$.)

Développant l'équation (2) et identifiant ses coefficients avec ceux de (1), on a

$$(3)\left\{\begin{array}{l} 1-p^2=mc^2,\quad pq=-mc,\quad 1-q^2=m,\quad y'+pr=-mc, \\ \qquad\qquad x'+qr=mc^2, \\ y'^2+x'^2-r^2=-mc^2, \qquad \text{on a de plus} \qquad p^2+q^2=1. \end{array}\right.$$

relation commune à toutes les paraboles et qui correspond à la relation $B^2-4AC=0$.

On obtient, en combinant les équations (3), les résultats suivants : $1-p^2$ ou $q^2=mc^2$, $1-q^2$ ou $p^2=m$, d'où $p^2+q^2=m(1+c^2)=1$, d'où $m=\dfrac{1}{1+c^2}$, et par suite $q^2=\dfrac{c^2}{1+c^2}$, $p^2=\dfrac{1}{1+c^2}$; de $y'+pr=pq$, on déduit $y'=p(q-r)$; de $x'+qr=1-p^2=q^2$, on tire $x'=q(q-r)$; d'où $y'^2+x'^2=(p^2+q^2)(q-r)^2=(q-r)^2$ à cause de $p^2+q^2=1$. Substituant cette valeur dans

$$y'^2+x'^2-r^2=-mc^2=-(1-p^2)=-q^2,$$

il vient $(q-r)^2-r^2=-q^2$, d'où $q^2-2qr=-q^2$ ou $2q^2-2qr=0$, ou enfin $2q(q-r)=0$.

Cette équation est satisfaite par $q=0$, $q=r$; la première valeur ne satisfait pas à la question, c'est ce qui est facile à voir.

La valeur $q=r$ donne $y'=0$, $x'=0$, ce qui prouve que l'origine actuelle des coordonnées est un foyer commun à toutes les courbes représentées par l'équation proposée; ce qui équivaut, comme on sait, à deux relations entre les coefficients ou à *deux* propriétés communes. La relation $pq=-mc$ et $p^2=m$ donne $pq=-p^2c$, d'où $-\frac{q}{p}=c$ et à cause de $q=r$ on a aussi $-\frac{r}{p}=c$. Mais l'équation de la directric e peut s'écrire $y=-\frac{q}{p}x-\frac{r}{p}$, elle devient $y=cx+c=c(x+1)$. Elle est satisfaite par $y=0$, $x=-1$, quel que soit c; donc les directrices de toutes les courbes dont nous nous occupons coupent l'axe des x au point $x=-1$, ce qui donne une relation entre les coefficients, distincte des *deux* que nous avons signalées. La question est donc complétement résolue.

2. On peut trouver d'autres propriétés communes aux points et lignes remarquables, mais elles ne peuvent plus être que des conséquences de celles que nous avons trouvées, sans quoi il y aurait plus de trois relations distinctes entre les coefficients. La recherche de ces propriétés peut être l'objet de nouvelles questions, mais nous n'avons pas à nous en occuper, car on ne saurait trop alors où s'arrêter.

3. Pour familiariser les élèves avec les questions de ce genre, je vais traiter un deuxième exemple.

Déterminer les *propriétés communes* à toutes les hyperboles qu'on obtient en faisant varier c dans l'équation

$$x^2(1-c^2)+2cxy+2cy-2c^2x-c^2=0. \qquad (1)$$

Ces propriétés communes, telles qu'on les a définies, sont ici au nombre de *quatre*. La démonstration serait la même que pour les paraboles de la question précédente. Si on veut trouver les relations entre les coefficients de la courbe, on opérera comme il a été dit et on trouvera facilement celles-ci

$$A=0, \quad D=B, \quad E=2F, \quad C=\frac{(E^2-B^2)}{2E}.$$

Traitons maintenant la question sous le deuxième point de vue indiqué, c'est-à-dire cherchons des propriétés communes aux points et lignes remarquables, tels que le foyer, la directrice, les asymptotes, etc., équivalant aux relations que nous venons d'écrire.

Comme l'équation manque du terme en y^2, nous nous occuperons tout naturellement de l'asymptote parallèle aux y. On déduit de l'équation (1)

$$y=-\frac{x^2(1-c^2)-2c^2x-c^2}{2cx+2c}=-\frac{x^2(1-c^2)-2c^2x-c^2}{2c(x+1)};$$

d'où il résulte que la droite $x=-1$ est une asymptote commune à toutes les hyperboles (1), ce qui équivaut à deux relations entre les coefficients de la courbe.

4. Pour en trouver d'autres je prends l'équation

$$(y-y')^2+(x-x')^2-(py+qx+r)^2=0. \tag{2}$$

Nous aurons en identifiant avec la proposée

$$(3)\begin{cases} 1-p^2=0,\ 1-q^2=m(1-c^2),\ pq=-mc,\ y'+pr=-mc, \\ x'+qr=mc^2,\quad y'^2+x'^2-r^2=-mc^2. \end{cases}$$

Combinons ces équations, on a de suite $p=\pm 1$; d'où $\pm q=-mc$ et $q^2=m^2c^2$; d'où $1-m^2c^2=m(1-c)^2$, équation satisfaite par $m=1$, $m=-\frac{1}{c^2}$; (je prouverai plus tard que $m=-\frac{1}{c^2}$ ne convient pas). Prenons en conséquence $m=1$.

Nous avons

$$y'+pr=pq, \quad \text{ou} \quad y'=p(q-r); \; x'+pr=mc^2=c^2=q^2,$$

d'où $x'=q\ (q-r)$; transportons ces valeurs dans

$$y'^2+x'^2-r'^2=-mc^2,$$

il vient à cause de $p=\pm 1$ ou $p^2=1$

$$(q-r)^2+q^2(q-r)^2-r^2=-q^2,$$

d'ou

$$(q-r)\left[(q-r)+q^2(q-r)+(q+r)\right]=0,$$

ou

$$(q-r)\left[2q+q^2(q-r)\right]=0. \tag{3}$$

Équation satisfaite par $q=r$. En prenant cette valeur on trouve $y'=0$, $x'=0$. Ce qui fait voir que l'origine actuelle est un foyer commun à toutes les hyperboles de l'équation (1). Ce résultat équivaut à deux nouvelles relations entre les coefficients ou à deux nouvelles propriétés communes. La question est donc résolue.

5. Cependant il est nécessaire de prouver que $m=-\frac{1}{c^2}$ ne peut convenir pour les courbes (1); de plus il faut voir ce que signifie la deuxième valeur de q (sans compter la valeur 0 qui ne convient pas), que l'on déduit du deuxième facteur du premier membre de (4). Sans quoi on pourrait croire que les courbes de l'équation (1) se partagent en deux classes dont nous n'aurions examiné qu'une.

D'abord $m=-\frac{1}{c^2}$ ne convient pas; en effet

$$x'+qr=mc^2=-1$$

dans notre hypothèse donne $x'=-(1+qr)$. Substituons dans

$$y'^2+x'^2-r^2=-mc^2=1,$$

il vient

$$p^2(q-r)^2+(1+qr)^2-r^2=1;$$

développant et observant que $p^2=1$ et $q^2=m^2c^2=1$ on a

$$q^2-2qr+r^2+1+2qr+q^2r^2-r^2=1,$$

se réduisant à

$$q^2+q^2r^2=0, \qquad \text{ou} \qquad q^2(1+r^2)=0,$$

ou enfin $1+r^2=0$ équation impossible pour des valeurs réelles de r.

Maintenant $2q+q^2(q-r)=0$ ou $2+q(q-r)=0$, en laissant de côté $q=0$, donne $q-r=-\frac{2}{q}$. Cette relation correspond à la position particulière du deuxième foyer dépendant des propriétés déjà trouvées et ne constitue rien de particulier. En effet nous avons trouvé $x'=q(q-r)$; substituant $q-r=-\frac{2}{q}$ on trouve $x'=-2$ ou x' est justement l'abscisse constante du 2e foyer pour toutes les hyperboles jouissant des propriétés déjà trouvées.

Soient Ax, Ay les axes et AB étant égal à -1, BC l'asymptote commune. La perpendiculaire AB abaissée du foyer A sur l'asymptote est la longueur commune de l'axe non transverse de ces hyperboles. Soit ACD la direction de l'axe transverse de l'une quelconque d'entre elles, le deuxième foyer sera de l'autre côté de BC en un point D tel que AC sera constamment égal à CD, de sorte que tous ces seconds foyers sont sur une parallèle à BC ou à Ay à une distance de cette dernière égale à AE$=$2AB$=-2$ ce qu'il fallait prouver.

On voit ici un exemple d'autres propriétés communes aux foyers, axes, etc., mais qui dépendent de celles déjà trouvées.

DEUXIÈME

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2 (page 57). (*)

PAR M. H. GROUT DE SAINT-PAER,

Elève du collége de Versailles.

—

Soient AE et CD, *fig*. 62, les deux bissectrices égales, je dis qu'on aura $AB = BC$. Soit K le point où les deux bissectrices AE et CD se coupent; menons BK et prolongeons cette ligne jusqu'à la rencontre de AC en M. BKM sera bissectrice de l'angle ABC. Par les trois points D, B, C faisons passer une circonférence et soit O son point d'intersection avec BKM; le point O est le milieu de l'arc DPC, et si l'on mène DO les deux triangles semblables DKO, DBO donneront :

$$(OK+BK)\,OK = \overline{DO}^2.$$

Par les trois points A, B, E faisons passer une circonférence, il est aisé de voir qu'elle sera égale à celle qui passe par les trois points D, B, C; je dis qu'elle passera par le point O. Désignons par α la distance du point K au milieu de l'arc AQE, comme α doit être comptée à partir du point K sur BK prolongée, si nous montrons que $\alpha = OK$, il faudra que le point O soit sur l'arc AQE et en son milieu; mais si nous joignions ce milieu au point E, en observant que la corde qui en résulterait égalerait DO, nous aurions : $(\alpha+BK)\,\alpha = \overline{DO}^2$, donc $\alpha = OK$. Mais si O est milieu de l'arc AQE nous aurons $AO = OC$, donc les angles AOB, COB sont égaux; d'ailleurs l'angle $ABO = OBC$, le côté BO est commun, donc les deux triangles OAB, OCB sont égaux, donc $AB = BC$.

(*) Voir p. 138.

NOTE

SUR

LE FAISCEAU HARMONIQUE,

PAR M. A. J. CHEVILLARD,
Ancien élève de l'École polytechnique, répétiteur de mathématiques
au Collége royal de Bourbon.

—

1. *Définitions.* Sous un angle quelconque, on tire dans un plan deux *axes fixes* Ox, Oy, *fig.* 69. D'un point quelconque M, on tire à volonté deux transversales AB, CD qui coupent les axes fixes en A, B, C, D. Ces points d'intersection joints deux à deux donnent deux nouvelles transversales AD, CB qui se coupent en N. On joint l'origine O aux deux *points correspondants* M, N, ce qui donne deux axes Ot, Oz nommés *mobiles* parce qu'ils varient avec M. Deux axes de même nom sont dits *conjugués* l'un à l'autre. Le système des deux axes fixes et des deux axes mobiles est un *faisceau harmonique.*

2. *Si, dans un faisceau harmonique, d'un point quelconque d'un axe on mène deux transversales, on trouve sur les deux axes non conjugués au premier quatre points déterminant deux nouvelles transversales qui se rencontrent toujours sur l'axe conjugué au premier* (*).

Pour démontrer cette propriété, ayant construit un faisceau harmonique (1), je prends pour axes coordonnés les axes fixes Ox, Oy et X, Y pour les coordonnées du point M. On aura pour les équations de AB, CD,

$$y-Y=a(x-X),\qquad y-Y=a'(x-X),$$

(*) Le problème VIII du n° 225 de la Géométrie analytique de M. Lefébure de Fourcy, est un cas particulier de cette propriété. (Ch.)

d'où l'on tire les coordonnées à l'origine

$$OA = Y - aX,\quad OB = \frac{aX - Y}{a},\quad OC = Y - a'X, OD = \frac{a'X - Y}{a'},$$

et pour les équations des transversales

$$AD \ldots \frac{x}{OD} + \frac{y}{OA} = 1,\qquad BC \ldots \frac{x}{OB} + \frac{y}{OC} = 1,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{a'x}{a'X - Y} + \frac{y}{Y - aX} = 1,\qquad \frac{ax}{aX - Y} + \frac{y}{Y - a'X} = 1;$$

retranchant ces équations membre à membre, on arrive aisément à la relation

$$x(aY - a'Y) + y(aX - a'X) = 0,$$

c'est-à-dire

$$xY + yX = 0,\qquad \text{ou}\qquad \frac{y}{x} = -\frac{Y}{X},$$

dont les coordonnées x, y conviennent seulement au point N. Cette relation par sa forme et son indépendance de a, a' montre qu'en menant deux autres transversales par M, elles se couperont sur l'axe aN. De plus comme tous les points de l'axe Ot donnent le même rapport $\frac{Y}{X}$, on voit que le point M variant sur l'axe OM, le point N variera sur l'axe ON. Enfin tout ce qui est vrai de M relativement à N peut se dire de N relativement à M, puisque $\frac{Y}{X} = -\frac{y}{x}$, de sorte que tout point d'un des axes mobiles fera retrouver l'autre axe mobile. D'ailleurs on peut changer x, y, X, Y en X, Y, x, y, c'est-à-dire, prendre les axes mobiles pour axes fixes, sans que les résultats précédents changent. Ainsi la propriété en question est démontrée.

3. *Une transversale quelconque coupe les quatre axes d'un faisceau harmonique en quatre points harmoniques.*

Soit un faisceau (NO, NE), (NB, ND), *fig.* 70. Coupons-le par une transversale quelconque OBED que je prendrai pour axe des x. Pour prouver que les quatre points O, B, E, D sont harmoniques, je mène par O une autre transversale OY que je prends pour axe des y. On sait que les deux droites AB, CD se couperont en un point M de l'axe NE conjugué à NO. L'angle YOX et les quatre longueurs $OB=\alpha$, $OD=\alpha'$, $OC=\beta'$, $OA=\beta'$ peuvent composer toutes les données. On a pour

$$CB\ldots\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1, \qquad AD\ldots\frac{x}{\alpha'}+\frac{y}{\beta'}=1.$$

$$CD\ldots\frac{x}{\alpha'}+\frac{y}{\beta}=1, \qquad AB\ldots\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta'}=1.$$

Si l'on ajoute les deux premières ou les deux secondes équations, on trouve également la relation

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{\alpha'}+\frac{y}{\beta}+\frac{y}{\beta'}=2,$$

qui représente par conséquent la droite NM. On en tire pour $y=0$, $OE=\dfrac{2\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'}$. On voit donc que les trois longueurs

$$OB=\alpha, OE=\frac{2\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'}, \ OD=\alpha',$$

sont en proportion harmonique.

On aurait pu prendre pour axes coordonnés les axes fixes du faisceau (*fig.* 69). Les équations des axes mobiles auraient été alors de la forme $y=mx$ pour Ot, $y=-mx$ pour Oz (2), et en prenant $y=ax+b$ pour la transversale quelconque NAD, on aurait trouvé pour les trois distances comptées à partir du point D sur cette transversale

$$\delta=\frac{mb}{a(m-a)}\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta}, \quad \delta'=\frac{b}{a}\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta},$$

$$\delta''=\frac{mb}{a(m+a)}\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta},$$

qui sont visiblement en proportion harmonique.

4. La composition des distances δ, δ', δ'' conduit à des conséquences remarquables. Si les trois longueurs δ, δ', δ'' sont données sur la ligne fixe NAD (*fig.* 69), la troisième n'étant qu'une combinaison $\frac{\delta\delta'}{2\delta-\delta'}$, des deux premières, on n'a que les deux relations

$$\delta=\frac{mb}{a(m-a)}\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta},\qquad \delta'=\frac{b}{a}\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta},$$

entre les quantités δ, δ', θ, m, a, b. Prenant à volonté θ et a avec δ et δ', m et b existeront toujours, ne dépendant que du premier degré. On aura ainsi quatre droites qui concourent et satisfont à la relation $\frac{y}{x}+\frac{Y}{X}=0$ (2). Ce sera donc un faisceau harmonique.

La variation arbitraire de θ et de a permet de donner à $b=\frac{\delta'}{\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{2\cos\theta}{a}}}$ telle grandeur qu'on voudra et telle inclinaison qu'on voudra sur la ligne fixe NAD. Il est donc démontré qu'*en joignant un point quelconque à quatre points harmoniques d'une droite, on forme un faisceau harmonique.*

En éloignant constamment le sommet du faiscean des quatre points harmoniques, les axes du faisceau s'approcheront du parallélisme, et comme rien ne limite cette variation, il s'ensuit qu'en menant par quatre points harmoniques quatre droites parallèles, on a un *faisceau harmonique à axes parallèles* pour lequel les propriétés précédentes, subsistent et pourraient se démontrer *à priori* (*fig.* 71).

5. Lorsqu'on détermine un faisceau on en détermine toujours une infinité. Car ayant construit avec un point M (*fig.* 72) et deux axes le faisceau (Ox, Oy), (Oz, Ot) conformément à la définition, il résulte de la propriété (2), qu'on a aussi les autres faisceaux (NB, ND), (NO, NE) et (MD, MB),

(ME, MO), et de sorte qu'à partir de chaque sommet de faisceau, il y a sur chaque axe des points harmoniques, d'après la propriété (3). De même le faisceau à axes parallèles (Ox, Oy), (Oz, Ot), détermine aussi des faisceaux concourants (ND, NB), (NE, Nt) et (MD, MB), (ME, Mz) (*fig.* 71).

La propriété générale (3) donne un moyen très-simple de construire un terme d'une proportion harmonique à l'aide des deux autres, car cela reviendra toujours à donner le quatrième axe d'un faisceau quond on en connaît trois. Ainsi, dans la proportion harmonique a, b, c, si l'on veut trouver le troisième terme c, on prendra sur une droite DE$=a$, DA$=b$ (*fig.* 69), et d'un point quelconque O on tirera OD, OE, OA; on déterminera le conjugué de OE par la construction ordinaire (1), et l'on aura ainsi le troisième terme DN. S'il s'agissait de trouver le moyen harmonique b, on prendrait DE$=a$, DN$=b$, et tirant les axes OD, OE, ON, le conjugué de OD fera trouver le moyen DA.

6. La relation qui existe entre les angles d'un faisceau est $\frac{y}{x}+\frac{Y}{X}=0$, quand on prend pour axes coordonnés deux axes conjugués (2). On peut l'écrire $\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha'-\alpha)}=\frac{\sin\alpha''}{\sin(\alpha'-\alpha'')}$ en désignant par α, α', α'' les angles des trois faisceaux avec l'axe OX (*fig.* 69). En rapportant le faisceau harmonique à deux axes coordonnés rectangulaires, désignant par a, a', a'', a''' les tangentes trigonométriques des quatre angles que font les axes du faisceau avec l'axe des x, on arrive, à l'aide de la formule précédente et de la relation

$$\sin(p-q)=\frac{\operatorname{tang}p-\operatorname{tang}q}{\sqrt{(1+\overline{\operatorname{tang}p}^2)(1+\overline{\operatorname{tang}q}^2)}},$$

à la formule

$$\frac{(a'-a)^2}{(a'''-a)^2}=\frac{(a''-a')^2}{(a''-a''')^2},\qquad \text{d'où}\qquad \frac{a'-a}{a'''-a}=\pm\frac{a''-a'}{a''-a'}.$$

Négligeant le signe supérieur qui ne convient pas à la question, on trouve enfin

$$\frac{(a'+a''')(a+a'')}{a'a'''+aa''}=2,$$

pour la relation qui existe entre les tangentes de quatre droites $y=ax$, $y=a'x$, $y=a''x$, $y=a'''x$, afin qu'elles forment un faisceau harmonique.

On pourrait prendre le premier axe du faisceau pour axe des x, la relation précédente sera alors

$$\frac{(a'+a''')\,a''}{a'a'''}=2,$$

ce qui montre que les trois tangentes a', a'', a'' sont en proportion harmonique, résultat qui n'est qu'une application de la propriété (3), car ces trois tangentes sont sur une transversale perpendiculaire au premier axe du faisceau. En discutant cette dernière formule, on verra que les considérations de faisceaux harmoniques doivent se présenter souvent dans la géométrie. Par exemple, en supposant deux axes conjugués droits, on a $a''=\infty$, ce qui donne $\frac{a'+a'''}{a'a'''}=0$, condition à laquelle on satisfait de plusieurs manières, entre autres par $a'=-a'''$. Ainsi quand deux axes conjugués forment un angle droit, il suffit, pour l'existence d'un faisceau harmonique, que les deux autres axes s'inclinent également sur l'un des deux premiers, ce qui montre que les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires forment, avec un de ces angles, un faisceau harmonique; que dans l'ellipse, les diamètres conjugués rectangulaires forment, avec les diamètres conjugués égaux, un faisceau harmonique, et que dans l'hyperbole, il en est de même des diamètres conjugués rectangulaires avec les deux asymptotes.

7. Si d'un point d'un plan, on mène deux sécantes qui coupent en deux points chacune deux droites quelconques, ou

même une courbe quelconque, on détermine aussitôt par suite des points d'intersection une infinité de faisceaux harmoniques, cela est évident (5). Si la courbe traversée est une courbe du second degré il y a de plus une propriété remarquable qui naît de ce que *la propriété générale du faisceau* (2) *n'est qu'un cas particulier des propriétés générales de la polaire dans les courbes du second degré.* En effet, on peut représenter deux droites quelconques par l'équation générale

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0,$$

avec une relation entre les coefficients a, b, c, d (*). Si d'un point quelconque, que nous supposerons l'origine des axes coordonnés, on mène deux sécantes à travers les deux droites proposées, qu'on cherche l'équation de l'axe conjugué à celui qui passe par l'origine et par le concours des deux droites proposées, on trouve facilement l'équation $dy+ex+2f=0$, qui représente, comme on sait, la polaire de l'origine quand l'équation $ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0$ est une courbe. On sait d'ailleurs que la propriété principale d'une polaire NQ (*fig.* 73), dans les courbes du deuxième degré, consiste en ce que si du pôle P on mène deux sécantes quelconques PB, PA qui coupent la courbe aux points D, B, C, A, les transversales que déterminent ces points de section concourent sur la polaire. Or, dans le faisceau harmonique (NP, NQ) (NS, NL), quelles que soient les deux sécantes PSL, PRK qu'on mène par le point P, on aura toujours deux transversales KS, RL se coupant sur l'axe NQ, et à cause que cet axe est la polaire du point P, les deux mêmes sécantes fournissent sur la courbe deux transversales EF, HG, se coupant aussi sur l'axe NQ. Telle est la propriété que je voulais con-

---

(*) $ae^2-bde+cd^2+f(b^2-4ac)=0$, et $b^2-4ac=$ ou >0; cette fonction des coefficients que les auteurs classiques omettent, que les élèves ignorent, est aussi importante, d'un emploi plus fréquent, que l'éternel b^2-4ac. Tm.

sidérer. On la résume en disant que *relativement à une polaire d'une courbe du deuxième degré deux axes non conjugués à cette polaire peuvent remplacer la courbe.*

EXAMENS DE 1842.

A l'approche des examens, nous croyons utile d'indiquer aux candidats comme exercices, les principales questions ordinairement proposées à Paris, en commençant par la géométrie analytique; les autres parties suivront. Cet énoncé est aussi un document historique pouvant servir à constater l'état actuel des examens pour l'École polytechnique (*).

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Sections coniques.

1. Déterminer une conique connaissant: 1° un foyer et trois tangentes; 2° un foyer et trois points; 3° le centre et trois points.

2. *Ellipse.* Construire l'ellipse, connaissant : 1° le foyer, le sommet et un point; 2° un sommet, une tangente et une directrice; 3° le foyer, le sommet et une tangente.

3. Par un point donné dans le plan d'une ellipse, mener une droite de manière que la corde interceptée soit d'une longueur donnée.

4. Inscrire dans une ellipse un rectangle équivalent à une aire donnée. Le rectangle maximum inscrit et circonscrit (p. 291).

5. Sur un billard elliptique se trouvent deux billes A et B;

(*) *Avis.* MM. les abonnés sont priés de nous communiquer tout ce qu'ils jugeraient convenable au bien des examens. Les renseignements dûment constatés seront publiés.

quelle direction faut-il donner à la bille A pour qu'elle aille toucher la bille B (p. 36).

6. *Parabole.* Mener une normale à la parabole par un point extérieur. Discussion de l'équation. Lieu des points qui n'ont que deux normales (p. 286).

7. Construire une parabole, connaissant : 1° la directrice et deux points ; 2° le paramètre, deux tangentes et un point ; 3° la directrice, une tangente et le point de contact ; 4° le foyer, un point et une tangente ; 5° le sommet et deux tangentes ; 6° le sommet, une tangente et le point de contact ; 7° le paramètre, le foyer et une tangente.

8. *Hyperbole.* Construire une hyperbole, connaissant : 1° une asymptote, une directrice et l'excentricité ; 2° une asymptote, un sommet et l'excentricité ; 3° une asymptote, un foyer et un point de la courbe ; 4° une asymptote, une directrice et un point de la courbe ; 5° un foyer, un sommet et une tangente ; 6° une asymptote, une tangente et une directrice ; 7° une asymptote, une tangente et un foyer ; 8° un sommet, une tangente et le point de contact ; 9° une asymptote, un sommet et un point ; 10° une directrice, une asymptote et la longueur de l'axe transverse ; 11° un point, une asymptote et deux tangentes ; 12° une asymptote et trois points.

Lieux géométriques.

9. Lieu du sommet d'une hyperbole ayant une asymptote et une directrice fixes.

10. Lieu du sommet d'une hyperbole ayant une asymptote, le centre et l'excentricité fixes.

11. Lieu des foyers d'une hyperbole ayant une asymptote et une directrices fixes.

12. Lieu des foyers d'une hyperbole ayant une asymptote et un sommet fixes.

13 Lieu de la projection du centre d'une ellipse sur la normale. Trouver directement l'équation polaire de cette courbe.

14. Lieu du foyer d'une parabole donnée touchant deux axes rectangulaires fixes (p. 299).

15. Lieu du sommet d'une parabole, ayant un foyer fixe et passant par un point fixe. Construire la courbe par points.

16. Lieu du foyer d'une parabole, ayant une directrice fixe et touchant une droite fixe.

17. Lieu du foyer d'une parabole dont le sommet est fixe et qui touche une droite fixe.

18. Lieu de la projection du sommet d'une parabole sur une tangente à cette courbe.

19. Lieu du sommet d'une parabole ayant une directrice et une tangente fixes.

20. Lieu des sommets des paraboles représentées par l'équation $y^2 - 2cxy + c^2x^2 - x = 0$ en faisant varier c.

21. Lieu des extrémités des diamètres non transverses d'une hyperbole. L'hyperbole qu'on trouve est-elle égale à celle qui est donnée?

22. Lieu du sommet d'un angle constant dont les côtés touchent une parabole donnée.

23. Lieu du foyer d'une parabole ayant un sommet et un point fixes.

24. Lieu du sommet d'une parabole mobile donnée, tangente à deux droites fixes rectangulaires (p. 296).

25. Lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du centre d'une ellipse donnée sur une tangente à cette ellipse.

26. Lieu de la projection du sommet d'une parabole sur une normale à cette parabole.

27. Lieu du sommet d'un triangle donné dont les deux autres sommets s'appuient sur deux axes rectangulaires.

28. Lieu des points d'un plan également éclairés par deux lumières, d'intensités données, placées sur ce plan.

29. Etant donnée une circonférence dont A est le centre, menons une droite fixe AN et un rayon quelconque AC; par le point C, on mène une tangente; elle rencontre la droite fixe AN au point O. Par ce point on élève une perpendiculaire OM à la droite fixe; le point M étant l'intersection de cette perpendiculaire avec AC prolongée; on demande de trouver le lieu géométrique du point M.

30. Suivant quelle ligne monte un réverbère, si on tire la corde à un des points de suspension.

31. Lieu des foyers d'une ellipse donnée de grandeur, tangente à deux axes rectangulaires.

Discussions de courbes.

32. Discutez ce qu'ont de commun les diverses hyperboles représentées par l'équation

$$x^2(1-c^2)+2cxy+2cy-2c^2x+c=0,$$

en faisant varier c (p. 304).

33. Trouver les propriétés communes aux paraboles représentées par $c^2y^2+2cxy+x^2-2cy-2c^2x=c^2$, en faisant varier c (p. 304).

34. Trouver les propriétés communes aux hyperboles représentées par l'équation $2xy=2cy-2cx+c^2$, en faisant varier c.

35. Trouver les conditions pour que les deux courbes $y^2=ax$, $x^2+y^2=bx$ se touchent.

36. Trouver les conditions pour que les deux courbes $y^2+x^2=1$ et $y=ax+bx^2$ se touchent; et, dans ce cas, quel est le lieu des foyers de la parabole.

37. Trouver les conditions pour que les deux courbes $y^2 = 6y + 4x$ et $xy = ax + by + c$ aient un foyer commun.

38. Quelles sont les conditions pour que les deux courbes $xy = ax + by$ et $y^2 + axy = x^2 + b$ aient un sommet principal commun

Discussion et construction des courbes de degré supérieur au second.

Observation. La discussion comprend : 1° la forme générale de la courbe ; 2° les points singuliers, d'inflexion multiples, isolés, etc. ; 3° la courbe étant coupée par une droite, discuter les cas où l'équation résultante a des racines égales, imaginaires, infinies, etc. ; 4° mener une tangente par un point extérieur (p. 268, 286).

39. Troisième degré.

1° $y = x^3$,

2° $x^3 + y^3 = 1$,

3° $x^3 + xy^2 = 1$,

4° $y^2 = \dfrac{x}{1+2x}$,

5° $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$,

6° $y^3 + 3xy + x^3 = 0$,

7° $y = x^3 - x$,

8° $y^2 = x - x^3$,

9° $y^3 + x^3 = -1$,

10° $y^2 = \dfrac{2}{1-x}$.

40. Quatrième degré.

1° $x^4 + y^4 = 1$,

2° $y^2 = \dfrac{x^3}{1-x^2}$,

3° $y^2 = x - x^4$,

4° $y^2 = x^3 - x^4$,

5° $y^2 - x^4 = 1$.

41. Cinquième degré.

1° $y = x^5$,

2° $y^3 + x^5 = 1$,

3° $y^2 = \dfrac{x^3 + x^2}{x^3 - 4}$,

4° $y^2 = x^5$.

42. Septième degré.

$$y = x^4 - x^7.$$

43. Équation de la cissoïde, nombre de conditions nécessaires pour déterminer une cissoïde.

44. *Théorie générale des tangentes aux courbes algébriques* (p. 268).

45. Théorie générale des asymptotes.

46. Déterminer a, b, c dans les courbes $y^2 = 4x - 9x^2$, $xy = ax + by + c$, pour qu'elles soient concentriques.

47. Déterminer a, b, c dans les courbes $xy = ax + b$ et $y^2 + axy + c^2x^2 = 4x$, pour qu'elles aient un foyer commun, même centre et même sommet.

48. Déterminer a, b, c de manière que la courbe $y^2 + ay + bx^2 + cx = 0$ représente deux droites.

49. Construire la courbe $y^2 + 2xy + x^2 = x$. Trouver le point de la branche qui ne passe point par l'origine, le plus rapproché de cette origine.

50. Mener, dans la parabole, une corde d'une longueur donnée ; lieu des milieux de ces cordes.

51. Déterminer les conditions pour que la courbe $y^2 = ax + by$ touche la courbe $y^2 = x^3$.

52. Construire $xy = x^3 - a^5$.

53. Relations qui doivent exister pour que les courbes $y^2 = ax + by$ et $xy = bx + c$ aient une même directrice.

54. Conditions pour que $y^3 + bx^3 = s$ et $xy - ax = c$ aient même asymptote.

55. Construire la courbe $\rho = a[1 + \mathrm{tg}^2\omega]$.

Problèmes divers.

56. Déterminer le volume d'un tétraèdre connaissant les coordonnées rectangulaires des quatre sommets.

57. Circonscrire à la sphère un cône d'une aire donnée. Surface minima.

58. Trouver le plus court chemin d'un point à un autre sur un cylindre.

59. De tous les triangles équivalents, quel est celui dans lequel le carré inscrit est un maximum ?

60. Un carré a un sommet placé sur un axe fixe situé dans son plan, comment ce carré doit-il être placé pour que le solide engendré par la rotation du carré autour de l'axe soit un *maximum* (p. 236)?

61. Mener une corde qui partage le cercle en deux parties qui soient entre elles :: 2 : 5 ; de même pour la circonférence.

62. Discussion de l'équation de sin $\frac{1}{3}\alpha$, prouver par la géométrie que la somme des racines est nulle.

Ces questions sont presque toutes complétement résolues dans cet ouvrage qui vient de paraître :

21. Application de l'algèbre à la géométrie suivie de la discussion des courbes d'un degré supérieur au second par *C. Jacob*, ancien élève de l'École polytechnique, capitaine d'artillerie. Metz et Paris, 1842, in-8. de 684 pages.

On en rendra compte, ainsi que des suivants :

22. Éléments de Géométrie, par Eugène Lionnet, professeur au collége Louis-le-Grand. Les quatre premières livraisons comprenant la géométrie de l'espace, sont en vente chez Desobry, libraire.

23. Application de la méthode des projections à la recher-

che de certaines propriétés de l'espace, par L.-A.-S. Ferriot, recteur honoraire de l'Académie de Grenoble. Paris, 1838, in-8. de 133 pages; Bachelier, prix 3 fr.

24. Développement de plusieurs points de la Théorie des perturbations des Planètes, par V.-J. Le Verrier, in-4, n° 1, 2, 3. Bachelier.

25. Nouvelle Cosmologie raisonnée, par M. J. Lavezzari. Paris, Blondeau, 1842.

CONSIDÉRATIONS

SUR LA

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DE L'ÉQUATION DU 5e DEGRÉ,

PAR M. HERMITE,
Élève du collége Louis-le-Grand (institution Mayer).

—

Le célèbre Abel (*), dont la science pleurera encore longtemps la mort prématurée, sans avoir connu les travaux de *Ruffini*, a entrepris aussi de démontrer l'impossibilité de résoudre l'équation générale du cinquième degré, en d'autres termes, l'impossibilité de l'existence d'une fonction algébrique des coefficients de l'équation qui, substituée à la place de l'inconnue, satisfasse à l'équation. Les raisonnements de l'illustre analyste sont fondés sur une classification des formes primordiales des fonctions algébriques, formes intégrantes *sui generis*, qui ne peuvent se transformer les unes dans les

---

(*) Abel (Nicolas-Henri), né le 25 août 1802, à Frindoë, village sur la côte occidentale de Norwége, mort le 6 avril 1829, aux mines de fer de Froland, en Norwége.

autres. L'impossibilité de cette transformation, signalée par *Laplace* (*), n'a été solidement établie que par M. *Liouville* (**). Un des plus beaux théorèmes de M. *Cauchy* (***) sur le nombre de formes que peut prendre une fonction non symétrique de plusieurs variables, en permutant les variables de toutes les manières possibles, sert de base à la démonstration d'Abel. Son mémoire, publié à Christiania en 1826, a été inséré la même année dans le journal de M. Crelle (tome I, p. 65). L'auteur en a donné un extrait dans le Bulletin des Sciences Mathématiques (tome VI, p. 347, juin 1826). Nous traduisons ce mémoire avec quelques éclaircissements pour les lecteurs des *Nouvelles Annales*. Occupé de ce travail, nous venons de recevoir sur le même sujet des considérations fort remarquables. Le jeune auteur (****), déjà versé dans les écrits de nos grands analystes et familiarisé avec les plus hautes conceptions de la science, parvient aux mêmes conclusions que le géomètre norwégien par une voie plus courte et au moyen de théorèmes exposés dans la note XIII de *Lagrange*, généralement connue.

Voici la marche que M. Hermite a suivie. On sait qu'Euler s'est occupé à diverses fois de la théorie des équations, où son génie a laissé des traces qui, comme d'ordinaire chez lui, sont celles du lion. Après avoir donné une forme nouvelle aux résolutions des quatre degrés, il montre que la racine d'une équation quelconque doit être représentée par un type unique renfermant des radicaux du degré de l'équation ; chacun

---

(*) Théorie analytique des probabilités, page 6.

(**) Journal des Mathématiques, tome II, p. 56, 1837 ; il ne paraît pas même qu'une équation algébrique puisse avoir de racines transcendantes.

(***) Journal de l'École polytechnique, cahier XVII.

(****) M. Hermite a obtenu en 1841 le 1er accessit de mathématiques spéciales au concours général des colléges de Paris ; il est des premiers dans la classe de M. Richard, professeur distingué au collége Louis-le-Grand.

de ces radicaux surmontant des radicaux de degré moindre. Ainsi, pour le cinquième degré, on a

$$x = \mathrm{A} + \sqrt[5]{\mathrm{B}} + \sqrt[5]{\mathrm{C}} + \sqrt[5]{\mathrm{D}} + \sqrt[5]{\mathrm{E}},$$

B,C,D,E ne renferment que des radicaux de degré au-dessous de cinq ; or, M. Hermite démontre que ce type est inadmissible dans le cas général pour les équations du cinquième degré ; donc la résolution des équations de ce degré est impossible. Il démontre de plus que lorsque, dans un cas particulier, ce type existe, la solution est possible, et telle est, entre autres, l'équation de Vandermonde ; et en général toutes les fois que toutes les racines sont les fonctions rationnelles de l'une d'entre elles, la solution peut s'effectuer. Cette condition existe dans toutes les classes d'équations binômes et autres que l'on est parvenu à résoudre.

Nous croyons opportun de répondre ici à une question qui nous a été adressée. Est-il rigoureusement prouvé qu'on ne puisse, avec la règle et le compas, construire la duplication du cube, la trisection de l'angle, la double moyenne proportionnelle ? L'impossibilité de cette sorte de construction n'a été définitivement établie que par M. Wantzel, auquel on doit cet important théorème. Les racines de toute équation *irréductible*, dont le degré n'est pas une puissance de deux, ne peuvent se construire à l'aide d'un système de droites et de cercles ; or, les trois célèbres problèmes conduisent à ce genre d'équations. (*Journal de Mathématiques*, t. II, p. 369, 1837.)

Il est à désirer que le même géomètre donne suite à ses belles considérations sur les quantités incommensurables numériques dont la théorie est si peu avancée. (*Journal de l'École Polytechnique*, cahier 25, 1837.) Tm.

(*La suite prochainement.*)

CONSIDÉRATIONS

SUR LA

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DE L'ÉQUATION DU 5e DEGRÉ,

PAR M. HERMITE,
Élève du collége Louis-le-Grand (institution Mayer).

(Suite, v. p. 326.)

—

1. On sait que Lagrange a fait dépendre la résolution algébrique de l'équation générale du 5e degré, de la détermination d'une racine d'une équation *particulière* du 6e degré, qu'il nomme *réduite* (Résolut. des Équations numériques, note XIII). De sorte que si cette réduite était décomposable en facteurs rationnels du second ou du troisième degré, on aurait la résolution de l'équation du 5e degré. Je vais essayer de démontrer qu'une telle décomposition est impossible. A cet effet, j'ai besoin de la proposition suivante due à Lagrange (Mém. de l'Acad. de Berlin, tom. 3), et de quelques observations sur les permutations.

2. Deux fonctions semblables non symétriques des racines d'une même équation $X=0$ peuvent toujours s'exprimer rationnellement l'une par l'autre.

Démonstration. On appelle fonctions semblables de racines, celles qui varient ensemble ou deviennent les mêmes pour les mêmes permutations : telles sont

$$\alpha+\beta, \quad \alpha^m+\beta^m, \quad \alpha^m\beta^m, \text{ etc.}$$

Soient donc φ et ψ deux fonctions quelconques semblables des racines d'une équation, et supposons qu'en permutant les racines de toutes les manières possibles la fonction φ ait n valeurs représentées par

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3 \ldots\ldots \varphi_{n-1}, \varphi_n,$$

les valeurs correspondantes de ψ sont

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \psi_3 \ldots\ldots \psi_{n-1}, \psi_n.$$

Il est évident, par la théorie des équations, que les n valeurs de φ sont racines d'une équation de degré n, qu'on obtient en effectuant le produit des facteurs

$$F(x) = (x-\varphi_1)(x-\varphi_2)(x-\varphi_3)\ldots(x-\varphi_{n-1})(x-\varphi_n) = 0,$$

et par les formules des fonctions symétriques, on connaît les coefficients de cette équation.

On a de même

$$f(x) = (x-\psi_1)(x-\psi_2)\ldots\ldots(x-\psi_{n-1})(x-\psi_n) = 0;$$

désignons par $F'(\varphi_1)$, $F'(\varphi_2)$, etc., les valeurs successives de la dérivée de Fx, en remplaçant x par φ_1, φ_2, φ_n.

Formons la fonction suivante du degré $n-1$

$$\frac{Fx}{(x-\varphi_1)F'(\varphi_1)}\psi_1 + \frac{F(x)}{(x-\varphi_2)F'(\varphi_2)}\psi_2 + \ldots \frac{Fx}{(x-\varphi_n)F'(\varphi_n)}\psi_3 = \pi(x),$$

et par la théorie des fonctions symétriques, les coefficients de cette fonction sont donnés en fonction des coefficients de $X=0$; car on reconnaît facilement que les racines de l'équation $X=0$ y entrent sous forme invariable; donc $\pi(x)$ est une fonction rationnelle de x, fesant dans cette identité $x=\varphi_1$, le premier membre se réduit à son premier terme, car le quotient $\dfrac{Fx}{x-\varphi_1}$ devient $F'(\varphi_1)$, lorsque $x=\varphi_1$, et tous les autres termes s'évanouissent : on suppose d'ailleurs tous les facteurs inégaux ; donc $\psi_1 = \pi(\varphi_1)$; de même $\psi_2=\pi(\varphi_2)$, etc. C.Q.F.D.

3. *Application.* $X = x^3 + px^2 + qx + r = 0$,

racines $(\alpha, \beta, \gamma.)$

$$\varphi = \alpha\beta, \quad \psi = \alpha + \beta,$$

$$\varphi_1 = \alpha\beta, \quad \varphi_2 = \alpha\gamma, \quad \varphi_3 = \beta\gamma,$$

$$Fx = (x - \alpha\beta)(x - \alpha\gamma)(x - \beta\gamma),$$

$$\psi_1 = \alpha + \beta, \quad \psi_2 = \alpha + \gamma, \quad \psi_3 = \beta + \gamma,$$

$$fx = (x - \alpha - \beta)(x - \alpha - \gamma)(x - \beta - \gamma),$$

$$F'(\varphi_1) = \alpha\beta(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma), \text{ etc.}$$

$$\pi(x) = \frac{(x - \alpha\gamma)(x - \beta\gamma)}{\alpha\beta(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)} + \text{, etc......}$$

et fesant les réductions

$$\pi(x) = \frac{-x^2}{\alpha\beta\gamma} + x\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{x^2 - qx}{\gamma}.$$

Soit $X = x^3 - 7x + 6$; $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $\gamma = -3$;

$\pi(x) = \dfrac{x^2 + 7x}{6}$; donnant à x successivement les trois valeurs de φ, savoir 2; -3; -6, on obtient $+3$; -2; -1; les trois valeurs de ψ.

4. Tous les coefficients des diviseurs d'une équation sont des fonctions semblables des racines de cette équation; par conséquent, connaissant un de ces coefficients, on peut déterminer tous les autres, en fonction rationnelle du coefficient connu.

5. Venons aux permutations: 5 quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ permutées 5 à 5 fournissent 120 permutations qu'on peut partager en 24 groupes de 5 permutations rangées par ordre *circulant*; ex.: le 1[er] groupe commence par $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, et sa formation est indiquée par l'échelle 23451; cela veut dire que la première lettre doit être remplacée par la seconde; la seconde par la troisième; la 3[e] par la 4[e], etc.; de sorte que le second terme de ce groupe est $\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha$, qui donne le 3[e] $\gamma\delta\varepsilon\alpha\beta$, etc.; le 1[er] terme du second groupe est $\alpha\beta\gamma\varepsilon\delta$; l'échelle de formation est toujours

23451; de sorte que le second terme est $\beta\gamma\varepsilon\delta\alpha$, et ainsi de suite; les têtes de groupes sont donc fournies par les 24 permutations des 4 lettres $\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$; ces 24 permutations peuvent se diviser en 6 groupes de quatre termes rangés aussi par ordre *dérivatif* avec l'échelle 2413, c'est-à-dire à remplacer la 1^re^ lettre par la 2^e^; la 2^e^ par la 4^e^; la 3^e^ par la 1^re^, et la 4^e^ par la 3^e^ : ainsi le 1^er^ terme du 1^er^ groupe étant $\beta\gamma\delta\varepsilon$, donne le second $\gamma\varepsilon\beta\delta$, d'où l'on déduit le 3^e^ $\varepsilon\delta\gamma\beta$; le 4^e^ $\delta\beta\varepsilon\gamma$. Les têtes de groupe sont données par les permutations de $\gamma\delta\varepsilon$ et les divers termes par l'indice constant 2413.

6. Soit maintenant l'équation générale du 5^e^ degré

$$x^5-A_1x^4+A_2x^3-A_3x^2+A_4x-A_5=0, \qquad (1)$$

$$(\text{racines } \alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon).$$

Les coefficients sont supposés réels et rationnels.

Formons l'équation au produit de deux racines; elle est de la forme

$$x^{10}-B_1x^9+B_2x^8 \ldots\ldots\; B_{10}=0. \qquad (2)$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha\beta,\beta\gamma,\gamma\delta,\delta\varepsilon,\varepsilon\alpha \\ \alpha\gamma,\gamma\varepsilon,\varepsilon\beta,\beta\delta,\delta\alpha\end{matrix}\right\}\text{racines.}$$

B_1, B_2.... sont des coefficients connus, réels et rationnels, et $B_1=A_2$; soit $f(m,n,p,q,r)$ une fonction symétrique quelconque des cinq quantités qui y entrent; remplaçons d'abord les 5 quantités respectivement par les 5 racines de la 1^re^ ligne, on obtient $\qquad f(\alpha\beta,\beta\gamma,\gamma\delta,\delta\varepsilon,\varepsilon\alpha)=\varphi,$

et ensuite par les 5 racines de la seconde ligne, on obtient

$$f(\alpha\gamma,\gamma\varepsilon,\varepsilon\beta,\beta\delta,\delta\alpha)=\psi.$$

Quelques permutations qu'on fasse entre les racines, $\varphi+\psi$ ne peut prendre que six valeurs différentes. En effet φ n'est susceptible au plus que de 120 valeurs différentes ou de 24 groupes de 5 termes chacun donnés par l'indice 23451; il est évident par la seule inspection que les 5 termes de chaque groupe deviennent identiques : ainsi le 1er terme du 1er groupe est $f(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta, \delta\varepsilon, \varepsilon\alpha)$; et le second terme devient

$$f(\beta\gamma, \gamma\delta, \delta\varepsilon, \varepsilon\alpha, \alpha\beta)$$

égal au 1er. Donc les 120 valeurs de φ et de ψ se réduisent à 24 termes donnés par les permutations des quatre racines $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, lesquelles se rangent en 6 groupes de 4 termes fournis par l'indice 2413 ; mais il est évident que φ se change par cet indice en ψ, et *vice versâ* ; car, $\gamma\varepsilon\beta\delta$, qui appartient à φ, donne en vertu de cet indice $\gamma\varepsilon\beta\delta$, qui appartient à ψ, et ainsi des autres.

On prouvera de même que $\varphi\psi$ n'est susceptible que de six valeurs.

II.

7. Soit

$$\varphi = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha,$$
$$\psi = \alpha\gamma + \gamma\varepsilon + \varepsilon\beta + \beta\delta + \delta\alpha ;$$

l'équation d'où dépendent les valeurs de $\varphi\psi$ sera donc de la forme

$$x^6 - C_1 x^5 + C_2 x^4 \ldots\ldots\ldots\ldots C_6 = 0, \tag{3}$$

désignant les 6 racines par λ_1, λ_2, $\lambda_3 \ldots\lambda_6$, on aura

$$
\begin{array}{ll}
1 & (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha)\ (\alpha\gamma + \gamma\varepsilon + \varepsilon\beta + \beta\delta + \delta\alpha) = \lambda_1 \\
2 & (\alpha\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\ (\alpha\beta + \beta\delta + \delta\gamma + \gamma\varepsilon + \varepsilon\alpha) = \lambda_2 \\
3 & (\alpha\gamma + \gamma\beta + \beta\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha)\ (\alpha\delta + \delta\gamma + \gamma\varepsilon + \varepsilon\beta + \beta\alpha) = \lambda_3 \\
4 & (\alpha\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\beta + \beta\alpha)\ (\alpha\varepsilon + \varepsilon\gamma + \gamma\beta + \beta\delta + \delta\alpha) = \lambda_4 \\
5 & (\alpha\varepsilon + \varepsilon\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\alpha)\ (\alpha\gamma + \gamma\varepsilon + \varepsilon\delta + \delta\beta + \beta\alpha) = \lambda_5 \\
6 & (\alpha\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\gamma + \gamma\beta + \beta\alpha)\ (\alpha\gamma + \gamma\delta + \delta\beta + \beta\varepsilon + \varepsilon\alpha) = \lambda_6.
\end{array}
$$

Ces six racines se composent de 12 facteurs ; la somme de deux facteurs de la même racine est connue et constamment égale à A_2 ; de plus chaque facteur a 2 ou 3 termes en commun avec 10 autres facteurs, et ces termes communs sont des racines de l'équation (2). Cela posé, je dis que l'équation (3) ne peut admettre un facteur rationnel ni du 2^e^, ni du 3^e^ degré; supposons qu'il existe un facteur rationnel du 2^e^ degré, et qu'il comprenne les deux racines λ_1, λ_2 : dans cette hypothèse, ces deux racines sont déterminables et n'impliquent qu'un radical carré : connaissant le produit et la somme de deux facteurs on connaît les facteurs; donc, les quatre facteurs qui servent à former les racines λ_1, λ_2 sont connus et ne renferment que des radicaux carrés. Or, l'équation (2) admet 252 facteurs du 5^e^ degré, tous de la forme

$$x^5 - C_1x^4 + C_2x^3 - C_3x^2 + C_4x - C_5.$$

Il est évident que dans le nombre il existe 4 facteurs où C_1 a pour valeurs les 4 facteurs des racines $\lambda_{(2)}, \lambda_{(1)}$; C_1 est donc déterminé, et ne renferme que des radicaux carrés; et par conséquent tous les autres coefficients C_2, C_3, C_4 sont aussi déterminés d'après la proposition énoncée (4); parmi ces quatre facteurs du 5^e^ degré il y en a deux au moins qui ont 2 racines en commun; dans l'exemple choisi, c'est $\alpha\beta$ et $\alpha\varepsilon$, ou bien $\beta\gamma$ et $\delta\varepsilon$: si on avait pris les deux racines $\lambda_{(5)}$ et $\lambda_{(1)}$, on trouverait dans les diviseurs du 5^e^ degré 3 racines en commun $\alpha\beta, \gamma\delta, \delta\varepsilon$. D'après la théorie des équations, des racines communes à 2 diviseurs peuvent être données séparément; donc $\alpha\beta$ est racine d'une équation, soit du 2^e^, soit du 3^e^ degré, car les coefficients ne renferment que des radicaux carrés; donc la valeur de $\alpha\beta$ est donnée en fonction des coefficients de l'équation (1) et ne renferme que des radicaux carrés et cubes, mais $\alpha+\beta$ peut toujours s'exprimer rationnellement en fonction de $\alpha\beta$ (2) : il s'ensuivrait donc que les racines α et β, de l'équation du 5^e^ degré ne renfermerait que des racines carrées et cubiques, résultat absurde, qui provient de l'admission d'un facteur rationnel du second degré dans l'équation (3); donc ce facteur n'existe pas. On démontrerait de la même manière et *à fortiori*, que cette équation n'a pas de facteur rationnel du 3^e^ degré ; et par conséquent les racines λ_1, λ_2....etc., ne peuvent s'exprimer en radicaux carrés et cubiques.

III.

8. Je vais maintenant démontrer comme une conséquence de ce qui précède que les racines de la réduite de Lagrange ne peuvent non plus s'exprimer en radicaux carrés et cubiques. En effet, rappelons succinctement la manière d'obtenir cette réduite. On pose l'équation

$$\mu^5-1=0, \quad \text{et l'on fait} \quad t=\alpha+\mu\beta+\mu^2\gamma+\mu^3\delta+\mu^4\varepsilon,$$

d'où

$$t^5=A^5+(\mu-1)\xi'+(\mu^2-1)\xi''+(\mu^3-1)\xi'''+(\mu^4-1)\xi^{\prime v}=\theta,$$

où $\xi',\xi'',\xi''',\xi^{\prime v}$ sont des fonctions déterminées des cinq racines de l'équation (1) ; la réduite dont il s'agit a pour racines les valeurs que peut prendre une fonction symétrique de ces quantités, pour toutes les permutations entre les racines $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$; or ces valeurs se réduisent à 6, par la même raison que les valeurs de $\varphi\psi$ se sont réduites à 6 (7) : 1° à cause de l'échelle de permutation 2 3451, qui les réduit à 24 ; 2° de l'échelle 2413, qui réduit les 24 à 6 : nommons l une racine quelconque de la réduite de Lagrange, et λ une racine correspondant à la même permutation de notre équation (3). Il est évident que ces quantités varient simultanément, ou restent les mêmes pour les mêmes permutations : elles sont donc des fonctions semblables des racines ; l'une peut donc s'exprimer en fonction rationnelle de l'autre ; on a ainsi $\lambda=F(l)$; donc si l ne renfermait que des radicaux carrés et cubes, il en serait de même de λ, ce qui a été démontré impossible : donc l doit admettre d'autres radicaux ; par conséquent la réduite de Lagrange est essentiellement irréductible, n'a pas de facteurs rationnels du 2° et du 3° degré. Or, elle devrait en avoir pour que la résolution de l'équation du 5^e degré fût possible, donc cette résolution est impossible et à fortiori la résolution des équations de degré supérieur.

(*La suite prochainement.*)

PROBLÈMES SUR LES POLAIRES.

PAR M. MIDY,

Ancien professeur dans les Colléges royaux.

Problème. Une droite, située dans le plan d'une courbe du second degré, est tangente à une courbe du même ordre située dans le même plan. On demande quel sera le lieu décrit par le pôle de la droite, relatif à la première courbe, lorsque cette droite, restant toujours tangente à la seconde courbe, prendra dans le plan toutes les positions possibles (*).

1. *Solution.* Soient

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0, \qquad (1)$$

$$a'y^2+b'xy+c'x^2+d'y+e'x+f'=0 \qquad (2)$$

les équations des deux courbes; (α, β), les coordonnées d'un point du plan.

$$2a\beta y+b(\beta x+\alpha y)+2c\alpha x+d(y+\beta)+e(x+\alpha)+2f=0 \quad (3)$$

sera par rapport à la courbe (1) l'équation de la polaire d'un point.

L'équation générale de la tangente à la courbe (2) au point (x', y'), est

$$2a'yy'+b'(xy'+yx')+2c'xx'+d'(y+y')+e'(x+x')+2f'=0. \quad (4)$$

(*) Voir page 263.

En identifiant les équations (3) et (4) on est conduit aux deux relations suivantes

$$\frac{2a'y'+b'x'+d'}{d'y'+c'x'+2f'}=\frac{2a\beta+b\alpha+d}{d\beta+e\alpha+2f}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}, \tag{5}$$

$$\frac{2c'x'+b'y'+e'}{d'y'+e'x'+2f'}=\frac{2c\alpha+b\beta+e}{d\beta+e\alpha+2f}=\frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{D}}, \tag{6}$$

on en déduit les équations

$$(2a'\mathrm{D}-d'\mathrm{N})y'+(b'\mathrm{D}-e'\mathrm{N})x'+d'\mathrm{D}-2f'\mathrm{N}=0, \tag{7}$$

$$(b'\mathrm{D}-d'\mathrm{N}')y'+(2c'\mathrm{D}-e'\mathrm{N}')x'+c'\mathrm{D}-2f'\mathrm{N}'=0. \tag{8}$$

Or l'élimination de x entre les deux équations donne

$$\left.\begin{array}{l}[(2a'\mathrm{D}-d'\mathrm{N})\ (2b'\mathrm{D}-e'\mathrm{N}')-(b'\mathrm{D}-d'\mathrm{N}')\ (b'\mathrm{D}-e'\mathrm{N})]y \\ +(d'\mathrm{D}-2b'\mathrm{N})\ (2c'\mathrm{D}-c'\mathrm{N}')-(e'\mathrm{D}-2f'\mathrm{N}')\ (b'\mathrm{D}-e'\mathrm{N})\end{array}\right\}=0.$$

On aperçoit sans peine qu'en effectuant les multiplications indiquées les termes indépendants de D s'entre-détruisent. Le facteur D devient alors commun à tous les termes.

En le supprimant, le numérateur et le dénominateur de la valeur de y' seront du premier degré en N, N′, D et par suite en α, β.

Il en sera de même de la valeur de x'.

Il suit de là qu'en substituant ces valeurs dans l'équation

$$a'y'^2+b'x'y'+c'x'^2+d'y'+e'x'+b'=0,$$

qui exprime que le point (x', y') est sur la seconde courbe ; ou dans l'équation

$$2a\beta y'+b(\beta x'+\alpha y')+2c\alpha x'+d(\beta+y')+e(\alpha+x')+2f=0,$$

qui exprime qu'il est sur la polaire, l'équation résultante ne pourra être que du second degré en α et β, et sera le lieu demandé.

Si le facteur D n'avait point été supprimé, il aurait été commun à tous les termes de l'équation, et en l'égalant à zéro l'on aurait eu

$$d\beta+e\alpha+2f=0.$$

C'est par rapport à la première courbe, l'équation de la polaire de l'origine des coordonnées, ou le lieu des pôles de toutes les droites qui passent par ce point. Ce facteur est donc étranger au lieu demandé et doit être supprimé.

L'équation du 2e degré, à laquelle on serait conduit par l'analyse précédente, serait trop compliquée pour qu'on pût aisément en déduire pour chaque cas particulier la nature et la position du lieu cherché. Il sera toujours plus simple de traiter à priori ces différents cas. Nous allons choisir quelques-uns des plus remarquables et qui offrent le plus d'intérêt. Ce sera le sujet des recherches auxquelles nous allons nous livrer (*).

2. Nous allons supposer d'abord que les deux courbes données sont deux ellipses dont les grands axes coïncident avec la droite qui joint leurs centres.

Soient

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \tag{1}$$

$$a'^2y^2+b'^2(x-d)^2=a'^2b'^2 \tag{2}$$

leurs équations. Alors

$$a^2\beta y+b^2\alpha x=a^2b^2, \tag{3}$$

sera relativement à la première ellipse l'équation de la polaire du point (α, β) du plan, et

$$a'^2 y y'+b'^2(x-d)(x'-d)=a'^2b'^2, \tag{4}$$

celle de la tangente à la 2e au point (x',y').

En identifiant des équations de ces droites, on sera conduit aux deux équations suivantes

$$(a^2-\alpha d)\ (x'-d)=a'^2\alpha, \tag{5}$$

$$b^2a'^2\alpha y'-a^2b'^2\beta\ (x'-d)=0. \tag{6}$$

(*) Cette équation développée n'est pas trop compliquée, elle a été donnée dans *le Géomètre*, p. 114; elle est aussi l'enveloppe des polaires, les points étant pris sur la première conique. Cette équation générale facilite et abrége les discussions particulières qui suivent. Tm.

D'aileurs l'équation

$$a^2\beta y'+b^2\alpha x'-a^2b^2=0,$$

qui exprime que le point (x', y') est sur la polaire, peut être m ise sous la forme

$$a^2\beta y'+b^2\alpha(x'-d)-b^2(a^2-\alpha d)=0. \tag{7}$$

L'élimination de y' entre (6) et (7) donne

$$x'-d=\frac{b^4a'^2(a^2-\alpha d)\alpha}{a^4b'^2\beta^2+b^4a'^2\alpha^2},$$

et la substitution de cette valeur dans (5) conduit à l'équation suivante

$$a^4b'^2\beta^2+b^4(a'^2-d^2)\alpha^2+2a^2b^4d\alpha-a^4b^4=0, \tag{8}$$

qui est celle du lieu cherché. On voit qu'elle est du 2^e degré en α et β; donc, suivant que l'on aura $a'>d$, ou $a'=d$, ou $a<d$, le lieu des pôles sera une ellipse, ou une parabole, ou une hyperbole.

3. Si les deux ellipses (1) et (2) sont semblables, alors $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$, d'où $b'=\frac{ba'}{a}$. Par suite (8) devient

$$a^2a'^2\beta^2+b^2(a'^2-d^2)\alpha^2+2a^2b^2d\alpha-a^4b^2=0. \tag{9}$$

Si de plus $d=0$, cette équation se réduit à

$$a^2a'^2\beta^2+b^2a'^2\alpha^2=a^4b^2. \tag{10}$$

C'est celle d'une ellipse concentrique aux deux ellipses données. En désignant ses demi-axes par A et B, l'on trouve

$$\mathrm{A}=\frac{a^2}{a'}, \qquad \mathrm{B}=\frac{ab}{a'},$$

d'où il suit que $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{a}{b}$, ou que cette ellipse est semblable aux deux ellipses données. Elle est intérieure ou extérieure à la première, selon que celle-ci est elle-même intérieure ou extérieure à la seconde. Deux circonférences concentriques rentrent dans le cas actuel.

4. Revenons à l'équation (9). Supposons $d<a'$ et différent de zéro. La courbe cherchée est alors une ellipse dont nous allons déterminer la grandeur et la position. Cette équation (9) peut se mettre sous la forme

$$a^2a'^2\beta^2+b^2(a'^2-d^2)\left\{\alpha+\frac{a^2d}{a'^2-d^2}\right\}^2=\frac{a^4b^2a'^2}{a'^2-d^2}.$$

En y changeant $\alpha+\dfrac{a^2d}{a'^2-d^2}$ en α, l'origine sera transportée au centre et la courbe sera rapportée à son centre et à ses axes. D'où il suit qu'en désignant ses demi-axes par A et B, et l'excentricité par E, l'on a

$$A^2=\frac{a^4a'^2}{(a'^2-d^2)^2},\qquad B^2=\frac{a^2b^2}{a'^2-d^2},\qquad E^2=\frac{a^2\left\{a'^2(a^2-b^2)+b^2d^2\right\}}{(a'^2-d^2)^2}.$$

Lorsque $a=b$, ou quand les deux ellipses sont deux cercles, $E=\dfrac{a^2d}{a'^2-d^2}$. D'où il suit qu'un des foyers est au centre du premier cercle.

5. Avec les valeurs trouvées de A et B, on peut construire la courbe. Mais les considérations géométriques suivantes vont nous en fournir les moyens.

Soient A et A', *fig.* 74, les centres des deux ellipses semblables : BC, B'C' leurs grands axes, et DE, D'E' leurs petits axes.

Supposons $A'C'>AA'$ mais $<A'C$. La seconde ellipse coupera la première et lui sera en partie extérieure et en partie intérieure. Du sommet B' de la seconde, menons les tangentes B'G, B'H à la première, la droite du contact sera perpendiculaire sur l'axe BC, et son intersection avec cet axe déterminera le pôle B'' de la tangente G'H' au point B' de la seconde ellipse. Ce sera l'un des sommets de l'ellipse cherchée. La tangente au point C' déterminera la corde KL, et menant aux points K et L des tangentes à la première ellipse, leur point de con-

cours déterminera sur l'axe le pôle C″ de la corde KL. et en même temps le second sommet de l'ellipse cherchée. Le milieu A″ de B″C″ sera le centre. Si l'on mène les tangentes T_1T_1', T_2T_2', communes aux deux ellipses, les points de contact T_1, T_2 seront les pôles de ces tangentes et par conséquent seront des points de l'ellipse cherchée.

Il ne reste qu'à déterminer le second axe. Pour cela du centre A″ et avec un rayon égal au demi grand axe connu A″B″, nous décrirons la circonférence B″MC″ coupée par la droite T_1T_2 en N. Nous projetterons T en I sur A″M par une parallèle à l'axe B″C″, puis décrivant du centre A″ et du rayon A″I un arc de cercle ID″, son intersection avec la perpendiculaire A″D″ sur ce même axe déterminera la longueur du demi petit axe A″D″. Par suite on aura les foyers $F''_1F''_2$ et l'on pourra construire les courbes.

Tant que le point de contact de la tangente G′H′ parcourra l'arc $T'_1B'T'_2$ de la 2^e ellipse, le pôle parcourra l'arc intérieur $T_1B''T_2$ de la 3^e, et lorsque ce même point décrira l'arc elliptique opposé $T'_1C'T'_2$, le pôle parcourra l'arc extérieur $T_1C''T_2$.

6. Soit $a'=d$; l'équation (9) se réduit à

$$a^2a'^2\beta^2+2a^2ba'\alpha-a^4b^2=0,$$

et devient, en la divisant par $a^2a'^2$,

$$\beta^2+\frac{2b^2}{a'}\alpha-\frac{a^2b^2}{a'^2}=0.$$

C'est l'équation d'une parabole. En la mettant sous la forme

$$\beta^2+\frac{2b^2}{a'}\left(\alpha-\frac{a^2}{2a'}\right)=0,$$

on voit que l'abscisse du sommet est égale à $\frac{a^2}{2a'}$, et que le paramètre est égal à $\frac{2b^2}{a'}$.

Mais la droite qui joint les points d'intersection des deux ellipses a pour équation

$$x = \frac{a^2}{2a'},$$

la position du sommet est donc donnée par l'intersection de de cette corde commune avec la droite des centres.

Il sera facile de vérifier d'ailleurs que cette même corde est également distante des droites parallèles qui joignent sur chaque ellipse les points de contact des tangentes communes aux deux courbes. On pourra donc construire la courbe de la manière suivante.

L'intersection de la corde commune GH avec AA', *fig.* 75, déterminant comme nous venons de le dire le sommet B'' de la parabole, les points de contact T_1, T_2 des tangentes communes aux deux ellipses, donnera sur la première deux points de la parabole cherchée. D'ailleurs, en menant les cordes de contact T_1T_2, $T'_1T'_2$ l'on aura

$$B''I = B''K.$$

Il suit de là que KT_1, KT_2 seront des tangentes à la parabole, et la perpendiculaire T_2P sur T_2K déterminera la sous-normale IP égale au demi-paramètre. La parabole est donc complétement déterminée et pourra être construite avec ces éléments connus.

Quand le point de contact de la tangente G'H' à la seconde ellipse parcourra l'arc T'B'T, le pôle de cette tangente décrit l'arc parabolique $T_1B''T_2$, intérieur à la première ellipse. Quand ce même point décrira l'arc opposé $T'AT'_2$, le pôle décrira la partie extérieure de la parabole.

7. Soit $a' < d$, l'équation (9) est celle d'une hyperbole. On la construira comme il suit.

Des sommets B' et C', *fig.* 76, de la seconde ellipse que nous supposerons l'un et l'autre extérieurs à la première, nous mènerons à celle-ci des tangentes et les droites de contact KL, MN détermineront sur la droite des centres des deux ellipses, les deux sommets $B''C''$ de l'hyperbole. Le milieu A'' de $B''C''$ sera le centre ; en menant du centre A de la 1re ellipse des tangentes Ap_1, Ap_2 à la seconde, les tangentes aux extrémités des diamètres de la première qu'elles détermineront seront parallèles aux deux asymptotes. On connaîtra donc celles-ci, et il sera facile avec ces éléments connus de construire la courbe.

En menant les tangentes communes tant intérieures qu'extérieures aux deux ellipses, les points de contact T_1, T_2 t_1, t_2 appartiendront aux deux branches de la courbe cherchée.

Quand le point de contact de la tangente mobile $G'H'$ par courra l'arc elliptique $T_1'B'T_2'$, le pôle de cette tangente décrira l'arc hyperbolique intérieur $T_1C''T_2$. Quand il parcourt les arcs de l'ellipse $T_1'P_1t_1$, $T_2'P_2t_2$, le pôle décrit les arcs hyperboliques extérieurs T_1V, t_1u, T_2v, t_2U, et quand ce même point de contact décrit t'_1 C_1 t_2, le pôle décrit le reste $t_2B''t$ de l'hyperbole.

8. Si dans l'équation (8) on change le signe de b^2 ou de b'^2, ou des deux à la fois, l'une des deux ellipses ou toutes deux se changeront en hyperbole. Si l'on suppose une ellipse et une hyperbole concentriques et construites sur les mêmes axes en introduisant ces modifications dans l'équation (9), on reconnaîtra que chacune de ces deux courbes est par rapport à l'autre le lieu des pôles de ses propres tangentes (*).

9. Enfin dans le cas où les deux courbes seraient deux pa-

(*) Autrement si d'un point de l'hyperbole on mène deux tangentes à l'ellipse, la corde de contact est tangente à l'hyperbole et vice versâ. Tm.

raboles ayant leurs axes sur une même ligne droite, leur équation étant

$$y^2=2px, \qquad (1)$$

$$y^2=2p(x-2d), \qquad (2)$$

la polaire du point (α,β) relative à la première aurait pour équation

$$\beta y=p(x+\alpha), \qquad (3)$$

et l'équation de la tangente à la seconde serait

$$yy'=p'(x+x'-2d). \qquad (4)$$

L'identité de ces deux droites donne les deux équations suivantes

$$py'-\beta p'=0, \qquad (5)$$

$$x'-\alpha-2d=0. \qquad (6)$$

D'ailleurs aussi $$\beta y'-px'-p\alpha=0. \qquad (7)$$

En retranchant la première de ces trois équations multipliée par β de la somme des deux autres multipliées respectivement par p^2 et par p; il vient en divisant par p'

$$\beta^2=\frac{2p^2}{p'}(\alpha+d)$$

pour l'équation du lieu demandé. C'est celle d'une 3e parabole: la discussion et la construction qui s'en suivent sont trop aisées après ce que nous avons dit précédemment, pour qu'il soit utile de nous y arrêter. Nous nous bornerons seulement à faire observer que si l'on suppose $p'=-p$ et $d=0$; ce qui revient à supposer deux paraboles égales et opposées par le sommet, chacune d'elles sera, relativement à l'autre, le lieu des pôles de ses propres tangentes, et c'est par là que nous terminerons cette discussion encore incomplète des différents cas que la question générale peut nous présenter (*).

(*) Il manque le cas important des coniques confocales. Tm.

SOLUTION DU PROBLÈME 30 (p. 248).

PAR M. VACHETTE.

Développer $\begin{matrix}\sin(a_1+a_2+\ldots+a_m)\\ \cos(a_1+a_2+\ldots+a_m)\end{matrix}$ en fonctions des sinus et cosinus de a_1, a_2, ... a_m.

Désignons par $x_1\, x_2 \ldots x_m$ les sinus de $a_1, a_2, \ldots a_m$,
$y_1\, y_2 \ldots y_m$ les cosinus de $a_1, a_2, \ldots a_m$,
et par $x_{1,m}$ le $\sin(a_1+a_2+\ldots+a_m)$, par $y_{1,m}$ le cosinus du même arc; par $\Sigma x_1x_2x_3y_4y_5\ldots y_m$ la somme de tous les produits qu'on peut former avec 3 facteurs pris parmi les sinus, et $m-3$ parmi les cosinus : pour la symétrie nous écrirons $\Sigma y_1y_2\ldots y_m$, et $\Sigma x_1x_2x_3\ldots x_m$.

D'après ces notations, on aura les égalités fondamentales

$$x_{1,m}=x_{1,m-1}y_m+y_{1,m-1}x_m;\quad y_{1,m}=y_{1,m-1}y_m-x_{1,m-1}x_m.$$

Nous allons chercher alternativement

$$\begin{matrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \ldots\ldots & x_{1,m}\\ y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} & & y_{1,m}\end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_{1,1}=x_1\\ y_{1,1}=y_1\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2}=x_1y_2+y_1x_2=\Sigma x_1y_2\\ y_{1,2}=y_1y_2-x_1x_2=\Sigma y_1y_2-\Sigma x_1x_2\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,3}=\Sigma x_1y_2y_3-\Sigma x_1x_2x_3\\ y_{1,3}=\Sigma y_1y_2y_3-\Sigma y_1x_2x_3\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,4}=\Sigma x_1y_2y_3y_4-\Sigma x_1x_2x_3y_4\\ y_{1,4}=\Sigma y_1y_2y_3y_4-\Sigma y_1y_2x_3x_4+\Sigma x_1x_2x_3x_4\end{cases}$$

On obtient le 1er terme de $x_{1,4}$, par exemple, $\Sigma x_1y_2y_3y_4$, en multipliant par y_4 le premier terme de $x_{1,3}$; par x_4 le 1er terme de $y_{1,3}$ et ajoutant les 2 produits; on a ainsi tous les termes de la forme $x_1 y_2 y_3 y_4$, comme il est aisé de s'en assurer.

On aura le 2e terme en ajoutant les seconds termes, multipliés respectivement par y_4 et x_4, de $x_{1,3}$ et $y_{1,3}$.

Le 1er terme de $y_{1,4}$ s'obtient en multipliant par y_4 le 1er terme de $y_{1,3}$; le 2e en ajoutant le 2e terme de $y_{1,3}$ et le 1er de $x_{1,3}$, multipliés respectivement par y_4 et $-x_4$; le 3e en multipliant par $-x_4$ le dernier terme de $x_{1,3}$.

Le procédé est général; on trouvera de même

$$\begin{cases} x_{1,5} = \Sigma x_1 y_2 y_3 y_4 y_5 - \Sigma x_1 x_2 x_3 y_4 y_5 + \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ y_{1,5} = \Sigma y_1 y_1 y_3 y_4 y_5 - \Sigma y_1 y_2 y_3 x_4 x_5 + \Sigma y_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \end{cases}$$

. . . .

etc., et généralement

$$\begin{cases} x_{1,m} = \Sigma x_1 y_2 \ldots y \quad - \Sigma x_1 x_2 x_3 y_4 \ldots y_m \\ \qquad + \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 y_6 \ldots y_m - \ldots + \ldots \\ y_{1,m} = \Sigma y_1 y_2 \ldots y_m - \Sigma y_1 y_3 \ldots y_{m-2} x_{m-1} x_m \\ \qquad + \Sigma y_1 \ldots y_{m-4} x_{m-3} x_{m-2} x_{m-1} x_m \ldots - \ldots + \ldots \end{cases}$$

Les termes de $x_{1,m}$ sont alternativement positifs et négatifs; tous les termes sont des sommes de produits de m facteurs: le 1er d'un facteur x, et de $m-1$ facteurs y; le 3e de 3 facteurs x, et de $m-3$ facteurs y;.... ainsi de suite, le nombre des facteurs x augmentant de 2 unités à chaque terme; si m est de la forme $4m'+1$, le dernier terme sera, avec le signe $+$, $\Sigma x_1 \ldots x_m$; si m est de la forme $4m'+2$, le dernier terme sera, avec le signe $+$, $\Sigma x_1 \ldots x_{m-1} y_m$; si m est de la forme $4m'+3$, il sera $-\Sigma x_1 x_1 \ldots x_m$; si m est de la forme $4m'$, il sera $-\Sigma x_1 x_2 \ldots x_{m-1} y_m$.

Les termes de $y_{1,m}$ sont alternativement positifs ou négatifs: ils sont tous des sommes de produits de m facteurs, le 1er de m facteurs y, le 2e de $m-2$ facteurs y et 2 facteurs x; le 3e de $m-4$ facteurs y et 4 facteurs x..... et ainsi de suite, le nombre des facteurs y diminuant de 2 unités à chaque terme. Si m est de la forme $4m'+1$, le dernier terme est $+\Sigma y_1 x_2 \ldots x_m$; si m est de la forme $4m'+2$, il est $-\Sigma x_1 x_2 \ldots x_{m-2} x_{m-1} x_m$; si m est de la forme $4m'+3$, il est $-\Sigma y_1 x_2 \ldots x_m$; si m est de la forme $4m'$, il est $+\Sigma x_1 x_2 \ldots x_m$.

Ces formules, reconnues vraies par la seule analogie, peuvent se démontrer par la méthode connue ; si elles sont vraies pour m termes, elles le seront pour $m+1$ termes : la démonstration en est très-facile (*).

Si on suppose
$$x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_m = \sin a$$
$$y_1 = y_2 = \ldots\ldots = y_m = \cos a$$
on aura $\quad x_{1,m} = \sin ma \quad$ et $\quad y_{1,m} = \cos ma$;

et l'on retrouve les formules de Jean Bernoulli (1720)

$$\sin ma = \frac{m}{1} \sin a \cos^{m-1} a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \sin^3 a \cos^{m-3} a$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} \sin^5 a \cos^{m-5} a - \ldots\ldots$$

$$\cos ma = \cos^m a - \frac{m(m-1)}{1.2} \cos^{m-2} a \sin a$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \cos^{m-4} a \sin^4 a$$
$$- \frac{m(m-1)\ldots(m-5)}{1.2.3.4.5.6} \cos^{m-6} a \sin^6 a.$$

EXAMENS DE 1842.

(Suite, v. p. 319.)

GÉOMÉTRIE.

1. Trouver en hectares la surface de la zône tempérée.
2. Volume du prisme tronqué polygonal ; *id.* du cylindre tronqué.

(*) On peut arriver au même résultat par le théorème d'Euler sur les facteurs imaginaires trigonométriques (Legendre, Trig. XXXII). Tm.

3. Déterminer le diamètre d'un fil de platine tel que le kilomètre de ce fil pèse un gramme; la densité du platine est 20 environ.

4. Volume du segment sphérique à une base en fonction du rayon et de la hauteur du segment (p. 97).

5. Volume du corps engendré par l'octogone tournant autour d'un de ses côtés, en fonction de ce côté; *id.* par l'hexagone régulier.

6. Inscrire dans une sphère, un cône d'un volume donné; déterminer le cône maximum.

7. Inscrire dans un triangle donné, un rectangle d'une aire donnée.

8. Déterminer le diamètre d'un bassin circulaire inaccessible.

9. Combien peuvent subsister de personnes sur notre planète, à raison d'un hectare et demi par personne.

10. Volume d'un tronc de cône; en prenant une sphère donnée pour unité de volume et un cercle donné pour unité de surface.

11. Poids d'un obélisque en granit. Côté de la base carrée inférieure $= 2^m$; côté du carré supérieur $= 0,8$; arête, 20^m; densité du granit 2,5.

12. Aire d'un polygone régulier de 18 côtés en fonction des côtés; côté du carré équivalent; et contour du polygone.

13. Connaissant l'aire et le volume d'une niche, déterminer ses dimensions; connaissant l'aire seulement, déterminer la hauteur pour que le volume soit un maximum.

14. Évaluer le poids de la terre en tonneaux (de 2000 kilog.); la densité moyenne de la terre est 5,5.

15. Rapport du volume de la sphère à celui du cône équilatéral circonscrit; en déduire celui de la sphère au cône équilatéral inscrit.

16. Cuber un tuyau de poêle (cylindre tronqué).

17. Rayon du cercle dans lequel l'aire du décagone inscrit est un hectare.

18. Quel doit être le rayon d'un ballon chargé de 400 kilogrammes pour qu'il puisse s'élever; la pesanteur spécifique de l'hydrogène est 0,0688; celle de l'air étant 1.

19. Étant donnés le volume et l'aire d'une tour cylindrique surmontée d'un cône équilatéral, déterminer les dimensions?

20. Par un point pris dans l'intérieur d'un triangle, mener une droite qui le divise en deux parties équivalentes.

TRIGONOMÉTRIE.

1. Déterminer tangente $\frac{1}{3}a$ en fonction de tang. a; démontrer par la trigonométrie et l'algèbre que les trois racines sont réelles.

2. Construction des tables de sinus.

3. Tangente $\frac{1}{3}a$ en fonction de tangente a; prouver trigonométriquement que le dernier terme de l'équation $=+1$.

4. A quelle hauteur faut-il s'élever sur la terre pour avoir un horizon de 20 myriamètres; quand on s'élève à une hauteur double, l'horizon est-il deux fois plus grand?

5. Comment s'assurer que trois points inaccessibles sont en ligne droite?

6. Connaissant tang a, trouver directement tangente $\frac{1}{8}a$.

7. Trouver tangente $\frac{1}{5}a$ par la formule de Moivre.

8. Résoudre un quadrilatère inscriptible, connaissant les angles et les diagonales.

STATIQUE.

1. Équilibre d'une droite pesante placée entre deux plans; à résoudre par la trigonométrie.

2. *Id.* d'une droite pesante placée dans une calotte sphérique; la droite dépasse les bords de la calotte.

3. *Id.* d'un triangle équilatéral pesant placé entre deux plans inclinés.

4. *Id.* d'une ellipse pesante placée entre deux plans inclinés.

5. *Id.* d'un poids s'appuyant sur deux plans par deux points dont un seul à frottement.

6. *Id.* réverbère.

7. Démontrer par la géométrie, les théorèmes sur la composition des moments dans un plan.

8, Théorème de Guldin.

9. En quel point d'une table à trois pieds, faut-il placer un poids donné, pour que les pressions soient dans un rapport donné? n'y a-t-il qu'une position ?

10. Centre de gravité de la surface totale d'un cône tronqué.

11. *Id.* *id.* *id.* d'une niche.

ANALYSE.

1. Trouver l'équation aux quotients de $x^3+px=q$.

2. *Id.* *id.* aux produits de *id.*: équation aux sommes prises 2 à 2, le tout au moyen des coefficients.

3. $x^4-x^2+2x=c$; déterminer c de manière que le produit de deux racines soit égal à c.

4. $x^3+x^2=c$; déterminer c de manière que les trois racines soient en progression géométrique (voir p. 100), ou en progression arithmétique.

5. *Id.* *id.* qu'une racine soit la différence de deux autres et résoudre en ce cas l'équation.

6. *Id.* *id.* que la différence de deux racines soit 3.

7. Conditions pour qu'une équation ait 3 racines égales (voir p. 90).

8. Conditions pour que l'équation $x^4+px=q$ ait trois racines égales.

9. Résoudre $x^8+1=0$.

10. Un polynôme algébrique qui admet une racine est di-

visible par le variable moins la racine ; ce principe est-il applicable à une fonction quelconque ?

11. $x^4 - x^2 + 2x = m$; déterminer m de manière que les sommes de deux racines soient égales à leur produit et que la somme de deux autres racines $= 1$.

12. Réduire $\sqrt[3]{3}$ en fraction continue.

13. Résoudre $x^4 - 4x^2 + 5x + 4 = 0$; la somme des racines réelles $= -1$.

14. Une équation du second degré peut-elle avoir une racine commensurable et une racine incommensurable ?

15. Trouver une équation dont les racines soient les différences des racines des équations

$$x^2 + px + q = 0\ ; \quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

16. Deux équations distinctes du même degré, peuvent-elles fournir la même équation aux quotients ?

17. Former une équation du 5ème degré ayant trois racines réelles et privée du terme en x^4 et en x.

18. Soient les deux équations

$$x^3 - 2x + 5 = 0, \quad x^4 - 3x^2 + 7 = 0\ ;$$

trouver une troisième équation dont les racines soient la somme deux à deux des racines de la première avec les racines de la seconde ; l'équation est du 12ème degré ; est-elle susceptible d'abaissement ?

19. Composer une équation de manière qu'en éliminant x entre elle et l'équation $xy^2 + y^3 + x^5 - 1 = 0$, on retombe sur

$$y^4 - y^2 + y - 1 = 0.$$

20. Évaluer le produit des cent premières puissances de 2.

21. Interprétation géométrique du théorème de M. Sturm.

22. Quel est le degré d'approximation de $\sqrt[3]{\pi}$; π ayant 12 décimales.

GRAND CONCOURS DE 1842 (v. p. 248).

QUESTIONS PROPOSÉES.

Mathématiques spéciales. — La règle des signes de Descartes.

Mathématiques élémentaires. — Donner les divers moyens que fournit la trigonométrie pour transformer une expression composée de plusieurs termes en un autre qui ne contenant qu'un seul terme soit immédiatement calculable par logarithmes.

Faire une application à l'expression séc. $a +$ coséc. b.

Observations. Comparativement parlant la question élémentaire n'étant pas dans les ouvrages classiques est plus intéressante, plus difficile que la question spéciale, d'une remarquable banalité, qu'on trouve partout et que les professeurs expliquent à satiété. Il ne faut pas de grands efforts d'imagination pour offrir aux colléges de la capitale un programme que les plus médiocres peuvent remplir à l'égal des plus forts et quelquefois mieux, si doués d'une heureuse mémoire, ils ont mieux retenu les paroles du maître.

Les examens dans les classes servant à constater l'état général de l'instruction doivent rouler sur les théorèmes enseignés; mais tel n'est pas le but du grand concours Sa destination spéciale est de faire sortir de la foule, de mettre en évidence les esprits brillants, les intelligences privilégiées. Dès lors, on ne saurait mettre trop de soins, dans le choix des questions.

Tm.

LETTRE

DE M. FINCK,
Professeur au Collége royal de Strasbourg.

—

La note que M. Vincent a fait insérer dans votre numéro de juin (p. 272), me confirme dans une opinion que j'ai depuis longtemps adoptée, savoir qu'il serait convenable d'exiger des candidats à l'École polytechnique, les premiers éléments du calcul différentiel, sauf à restreindre quelques détails d'algèbre, de sections coniques, etc. On éviterait par là quelques embarras, doubles emplois, notamment pour la théorie des courbes (*).

Quoi qu'il en soit, la note en question m'a fait reconnaître que je suis allé trop loin dans ma Trigonométrie (**), en affirmant que l'emploi des formules de Simpson est restreint, comme je l'ai indiqué. Par contre, M. Vincent me paraît avoir négligé des *erreurs* qui modifient l'exactitude de ses résultats. En effet, dans la formule

$$\sin(m+1)a = \sin ma\, 2\cos a - \sin(m-1)a,$$

il ne suffit pas de supputer l'erreur dont ce second membre est affecté par suite des erreurs commises sur $\sin ma$, $\cos a$, $\sin(m-1)a$; il faut encore tenir compte des chiffres que l'on est *forcé* de négliger dans le produit $\sin ma \times 2\cos a$; car il est impossible de les conserver tous. De là une nouvelle erreur dont il est indispensable de tenir compte, ainsi que de

(*) Cette opinion du savant professeur est d'autant plus plausible que le calcul différentiel existe déjà dans les éléments, théorie et pratique, mais sous d'autres noms.

(**) Géométrie élémentaire, 2e édition, chez Mathias, quai Malaquais, 15. Tm.

celle qui affecte $\cos\alpha$. Je me contenterai de cette indication, me proposant de revenir sur cet objet.

Vous avez fait remarquer (p. 119), que j'ai donné le premier, dans les éléments (*), la division ordonnée, de Fourier : j'ajouterai que je l'ai complétée en montrant ce qu'il faut faire pour que le dernier chiffre du quotient soit *bon*.

Dans ce même ouvrage, cité en note, j'ai entre autres questions, que l'on ne trouve pas dans les livres élémentaires, traité un problème qui est susceptible d'une solution plus complète : il a pour objet de déterminer le nombre des opérations de la recherche du p. g. c. d. de deux nombres entiers.

On peut, pour arriver à ce but, suivre deux marches : l'une conduit aux séries récurrentes et à une équation exponentielle fort compliquée. Elle est fondée sur ce que le cas le plus défavorable est celui où tous les quotients sont égaux à l'unité, le dernier étant 2; de là on est amené à chercher le terme général de la suite

$$1,\quad 1.1+1,\quad (1.1+1)1+1,\quad \text{etc.}$$

Je ne m'arrêterai pas à développer ce calcul.

La seconde manière est la suivante :

Soient A, B les deux nombres, A étant $> B$.

Le reste est toujours moindre que la moitié du dividende ; nommons $B_1, B_2, B_3, \ldots$ les restes successifs ; on aura donc

$$\begin{array}{lcc} B_1 < \dfrac{A}{2} & \text{et au plus égal à} & \dfrac{A-1}{2}, \\[2ex] B_2 & id. & \dfrac{B-1}{2}, \\[2ex] B_3 & id. & \dfrac{B_1-1}{2}, \end{array}$$

(*) Traité élémentaire d'arithmétique, Paris, Mathias, 1841.

ou, au plus, $$=\frac{\frac{A-1}{2}-1}{2}=\frac{A-1-2}{2^2},$$

de même limite de $B_4=\dfrac{B-1-2}{2^2}$,

id. $B_5=\dfrac{A-1-2-2^2}{2^3}$,

$\vdots$

id. $B_{2n-1}=\dfrac{A-1-2-2^2\ldots-2^{n-1}}{2^n}=\dfrac{A-2^n+1}{2^n}$,

id. $B_{2n}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\dfrac{B-2^n+1}{2^n}$.

Donc si $\dfrac{B-2^n+1}{2^n}$ est <1, c'est que B_{2n} est nul, et le nombre des opérations est $2n$ au plus.

Posons donc $\dfrac{B-2^n+1}{2^n}<1$,

d'où $2^{n+1}>B+1$.

Ainsi la plus petite valeur (entière) de n qui satisfait à cette inégalité, sera la moitié de la limite cherchée.

Par exemple si $B=89$, on a $2^{n+1}>90$ $2^n>45$,

$n=6$,

$2n=12$.

Cette limite est assez approchée; car si l'on suppose $A=144$, le nombre effectif des opérations est 10, tandis que d'après la règle qu'on trouve dans un certain ouvrage la limite est $\dfrac{A}{2}$, ici 72.

Permettez-moi une dernière observation : plusieurs de vos numéros renferment des détails sur le calcul des expressions irrationnelles. On trouve tout cela traité d'une manière complète dans mon Algèbre, publiée en 1839 chez Mathias. (Suivent des questions, qu'on donnera prochainement.)

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 29 (p. 248).

PAR M. PURY.

Étant donnée une courbe quelconque du second degré : on joint un point donné du plan au centre, et on mène par le point la conjuguée du diamètre que nous venons de tracer. Si on suppose en outre que par le point on mène une sécante quelconque qui rencontre la courbe en deux points et que par les points de rencontre on mène les tangentes ; ces tangentes détermineront des segments égaux sur la conjuguée du diamètre passant par le point donné.

1° Pour démontrer ce théorème, je me servirai d'abord du lemme suivant (*) : Si A, B, C, D sont situés sur une droite et tels que l'on ait AB:BC::AD:CD ; si l'on joint un point S quelconque aux points A, B, C, D, toute ligne a, b, c, d qui rencontre les quatre lignes SA, SB, SC, SD aux points a, b, c, d sera partagée en ces points de la même manière que la ligne AD : c'est-à-dire que l'on aura $ab:bc::ad:cd$, et que si on mène une parallèle à l'une des lignes du faisceau harmonique, elle sera coupée par les trois autres en trois points dont l'un d'eux sera équidistant des deux autres : par le point c et le point C, je mène une parallèle à SA : on en déduit

$$\begin{aligned} CE : SA &:: DC : DA \\ FC : SA &:: BC : AB ; \end{aligned}$$

or, DC : DA :: BC : AB, donc CE = FC, donc par suite $ec = cf$: et en formant les proportions

$$\begin{aligned} ec : sa &:: dc : da \\ sc : sa &:: bc : ab ; \end{aligned}$$

comme $ec = fc$, il s'ensuit que $dc : da :: bc : ab$. C.Q.F.D.

(*) Voir p. 315.

2° Considérons actuellement le théorème proposé :

Soit o le centre de la courbe, soit A le point donné : AP la conjuguée du diamètre Ao ; soit AN une sécante partant du point A et qui rencontre la courbe aux points M et N ; soit MR la tangente en M, NR la tangente en N ; et enfin soit RS la polaire du point A : on sait qu'elle passe en R, qu'elle est parallèle au conjugué du diamètre oA : par conséquent parallèle à AP ; et enfin qu'elle détermine sur AN le quatrième point harmonique, de sorte que l'on a : NS : SM :: NA : MA ; donc, en vertu du théorème précédent, PQ est partagé en deux parties égales au point A. C.Q.F.D.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 26 (p. 247).

PAR M. PURY.

Si dans un quadrilatère inscrit dans un cercle, on prolonge les côtés opposés jusqu'à leur rencontre, les milieux des portions des bissectrices des angles ainsi formés, comprises entre les côtés du quadrilatère, sont situés sur la ligne qui joint les milieux des diagonales.

Soit ABCD le quadrilatère donné : prolongeons AD, BC jusqu'en F : AB, CD jusqu'en E : menons les bissectrices des angles E et F.

Soit FR la bissectrice de F : on peut remarquer qu'elle fait des angles égaux avec AE et ED ; en effet les deux angles en F sont égaux ;

donc l'arc RA — l'arc QD = l'arc RB — l'arc CQ ;

d'où l'arc RA + l'arc CQ + l'arc CB = l'arc RB + l'arc QD + l'arc CB ;

or, le 1er membre est la mesure du double de l'angle RIA ;

le 2^{e} membre est la mesure du double de l'angle RGC ; donc ces deux angles sont égaux : donc si l'on mène la bissectrice de l'angle AED, elle sera perpendiculaire sur la bissectrice RF, et la coupera en son milieu *o* et sera coupée elle-même en ce point, en son milieu.

On a donc $oI = oG$ et $oK = oH$, et comme ces droites sont perpendiculaires la figure IHGK est un losange : prouvons actuellement que IH est parallèle à BD et IK parallèle à CA : puisque FI est la bissectrice de F, on a

$$IB : IA :: FB : FA, \quad \text{or on a} \quad FB : FA :: BD : CA,$$

à cause des triangles semblables BDF, FCA, donc

$$IB : IA :: BD : CA.$$

La seconde bissectrice donne

$$HD : AN :: ED : EA,$$

or $\quad ED : EA :: BD : CA, \quad$ donc $\quad IB : IA :: HD : AN,$

donc HI et KG sont parallèles à BD, et on démontrerait de même que IK, et par suite GH sont parallèles à CA : actuellement soient L et M les milieux des diagonales : joignons CL, AL : la 1re coupe KG en P son milieu ;

la 2^{e} coupe HI en N son milieu.

Si l'on joint NP, d'après un théorème connu, cette ligne passe au centre du losange, est parallèle à IK et par suite à AC, et le milieu de cette droite se trouve en *o* centre du losange : donc si l'on joint L*o* et qu'on prolonge, cette ligne coupera AC en son milieu, puisque PN est coupée en son milieu en *o* : or L est le milieu de la diagonale BD, *o* est le milieu des deux bissectrices et M est le milieu de la diagonale AC : ces trois points sont en ligne droite. C.Q.F.D.

SUR LES APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES (p. 249).

PAR M. PURY.

Dans votre dernier numéro, je trouve une note de M. Guilmin sur les approximations, qui ne me paraît pas complète, car, pour ce qui concerne l'extraction des racines, il semble ne considérer que les racines des quantités commensurables : il est convenable de chercher quand on veut extraire une racine d'une quantité incommensurable, avec quelle approximation on doit calculer la quantité incommensurable pour que l'erreur commise soit plus petite que $\frac{1}{\delta}$.

Je proposerai la méthode suivante :

Supposons que l'on ait à extraire la $\sqrt[n]{A}$; A est une quantité incommensurable : on demande avec quelle approximation on doit calculer A pour que $\sqrt[n]{A}$ soit approchée à $\frac{1}{\delta}$ près. L'erreur sera égale à $\sqrt[n]{A+e}-\sqrt[n]{A}$. On a donc l'inégalité

$$\sqrt[n]{A+e}-\sqrt[n]{A}<\frac{1}{\delta},$$

je multiplie et je divise le 1er membre par le quotient de $A+e-A$ par $\sqrt[n]{A+e}-\sqrt[n]{A}$, il vient

$$\frac{e}{\left(\sqrt[n]{A+e}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{A+e}\right)^{n-2}\sqrt[n]{A}\ldots+\left(\sqrt[n]{A}\right)^{n-1}}<\frac{1}{\delta}.$$

Si je diminue le dénominateur et que je donne ensuite à e une valeur telle que le premier membre soit $<\frac{1}{\delta}$ à fortiori l'inégalité précédente sera-t-elle satisfaite : je remplace donc $\sqrt[n]{A+e}$ par $\sqrt[n]{A}$, il vient

$$\frac{e}{n\left(\sqrt[n]{A}\right)^{n-1}}<\frac{1}{\delta}.$$

Or, en satisfaisant à l'inégalité $e < \frac{nA'^{n-1}}{\delta}$, j'aurai satisfait à la précédente, A' étant une quantité plus petite que $\sqrt[n]{A}$.

J'ai l'honneur d'être, etc.

SOLUTION DU PROBLÈME 23 (page 246).

PAR M. MERLIEUX (ÉDOUARD).

—

Déduire des propriétés du triangle rectangle que le module de la somme de deux types imaginaires est plus petit que la somme des modules de ces deux types, et plus grand que leur différence. Le type imaginaire est représenté, comme on sait, par $a+b\sqrt{-1}$, et son module par $\sqrt{a^2+b^2}$ pris positivement.

Solution. Soient (*fig.* 57) $BB'=a'$, $BC=a$; en C j'élève une perpendiculaire à B'C; je fais $AC=b$, $OA=b'$; élevant aussi une perpendiculaire en B, je fais $A'B=OA=b'$; je mène AB, A'B', A'O et B'O.

J'ai, dans les triangles rectangles ABC, A'B'B et B'CO, $AB=\sqrt{a^2+b^2}$, $A'B'=\sqrt{a'^2+b'^2}$ et $B'O=\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2}$; ce sont les trois modules : or, dans le triangle A'B'O, on a $B'O<(A'B'+A'O)$ et $B'O>(A'B'-A'O)$, ou bien, à cause de $A'B=AO$,

$$\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2} < (\sqrt{a'^2+b'^2}+\sqrt{a^2+b^2}),$$

$$\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2} > (\sqrt{a'^2+b'^2}-\sqrt{a^2+b^2}). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Si $a=a'$ et $b=b'$, on a alors

$$\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2} = \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a'^2+b'^2},$$

et le triangle A'B'O se réduit à une droite.

LIEU GÉOMÉTRIQUE.

Des foyers des sections faites dans le cône circulaire droit par un plan tournant autour d'un point pris sur une génératrice, et restant perpendiculaire au plan méridien qui passe par cette génératrice.

PAR M. ALEXIS PERREY,
Professeur suppléant à la Faculté de Dijon.

I. Soit S le sommet du cône; Sx, $S\rho$ deux génératrices opposées; A le point fixe et sommet de la section; axes rectangulaires, la trace du plan sécant sur le plan des deux génératrices est l'axe des x.

L'équation des coniques est,

$$(1)\quad y^2 = \frac{2a\sin\beta\sin\alpha}{\cos\beta}\cdot x - \frac{\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta}\cdot x^2,$$

a étant la distance AS (*fig.* 63), 2β l'angle de deux génératrices opposées, et α l'angle que fait la trace du plan sécant avec SA.

La distance ρ des foyers au sommet A est donnée en général, dans l'équation

$$y^2 = 2px + qx^2 \qquad \text{(axes rectangulaires)},$$

par

$$q\rho^2 + 2p\rho - p^2 = 0,$$

ou

$$\rho = \frac{p}{q}(-1 \pm \sqrt{1+q}).$$

On aura donc en appliquant ce calcul à l'équation (1), l'équation

$$(2)\ \rho = -\frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha+2\beta)}\left\{-\cos\beta \pm \sqrt{\cos^2\beta - \sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}\right\}\ (^*),$$

ou

$$(3)\ \rho = -\frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha+2\beta)}\left\{-\cos\beta \pm \cos(\alpha+\beta)\right\},$$

à l'aide d'une transformation simple et connue (**). Telle est l'équation en coordonnées polaires du lieu cherché, les angles α étant comptés à partir de SA.

1° Pour $\alpha = 0$, $\rho = 0$ et $\rho = a$, on a les points A et S ; c'est le cas de l'ellipse se réduisant à une droite limitée, les foyers sont aux sommets.

2° $\alpha > 0$ et $< 90 - \beta$, ρ aura deux valeurs positives ; foyers d'une série d'ellipses, sur les segments AmC et SC ; trace AQ ; foyers m et m'.

3° $\alpha = 90 - \beta$, $\rho = a \sin\beta = AC$; c'est le cas du cercle, les deux foyers se réunissent au centre C.

4° $\alpha > 90 - \beta$ et $< 180 - 2\beta$, ρ a deux valeurs, correspondant à de nouvelles ellipses. Les branches se coupent, $\cos(\alpha+\beta)$ change de signe. Le signe supérieur qui a donné SC, donne CF, le signe inférieur qui a donné AmC, donne CG'U ; foyers G, G'.

5° $\alpha = 180° - 2\beta$, $\rho = a \sin^2\beta = AF$, ou le quart du paramètre dans l'équation (1) et $\rho = \infty$, c'est le cas de la parabole; F est le foyer.

6° $\alpha > 180 - 2\beta$ et $< 180°$, ρ a deux valeurs de signes contraires; c'est le cas des hyperboles ayant leurs foyers sur les arcs G''S et FA.

(*) Le lieu géométrique du centre est donc $\rho = \frac{a \sin\beta\cos\beta}{\sin(\alpha+2\beta)}$; une droite. Tm.

(**) $\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta) = \frac{1}{2}\cos 2\beta - \frac{1}{2}\cos 2(\alpha+\beta) = \cos^2\beta - \frac{1}{2} - \cos^2(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}$ $= \cos^2\beta - \cos^2(\alpha+\beta)$, etc. Tm.

7° $\alpha = 180°$, $\rho = -a$ et $\rho = 0$, les hyperboles se réduisent à la génératrice. Ainsi les points S et A sont les foyers des hyperboles et des ellipses qui tendent à se réduire à une droite.

8° $\alpha > 180°$, donne pour ρ des valeurs déjà trouvées.

II. La courbe s'étendant à l'infini vers G' et G'', a pour asymptote, la génératrice opposée V'SV, bien qu'il semble que la parabole considérée comme limite d'ellipses ou d'hyperboles doive avoir son second foyer sur son axe (*).

En effet, soit ω l'angle G'AP, on aura pour la distance r d'un point quelconque de la courbe à la droite AP, direction du rayon vecteur infini,

$$G'P = r = \rho \sin \omega,$$

ou

$$r = -\frac{a \sin\beta \sin\omega}{\sin(\alpha + 2\beta)} \{ -\cos\beta \pm \cos(\alpha + \beta) \},$$

faisons $\alpha = 180 - 2\beta + \omega$ puis $\omega = 0$, nous aurons successivement

$$r = -a \sin\beta \{ -\cos\beta \mp \cos(\beta - \omega) \}$$

et $\quad r = 0$, correspondant à $\rho = a \sin^2\beta$,

$r = a \sin 2\beta$, correspondant à $\rho = \pm \infty$.

Ainsi, comme $AQ = a \sin 2\beta$, V'SV est l'asymptote.

III. Si l'on prend pour axe des x la génératrice SA ; pour axe des y, l'axe de la parabole, on aura

$$\sin\alpha = \frac{y \sin 2\beta}{\rho},$$

$$\sin(\alpha + 2\beta) = -\frac{x \sin 2\beta}{\rho},$$

et

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\beta,$$

(*) Il en est ainsi ; l'axe de la parabole est parallèle à l'asymptote.

valeurs qui substituées dans l'équation

$$q\rho^2+2p\rho-p^2=0,$$

conduisent à

$$(4)\quad (a+x)y^2-\{a^2\sin^2\beta-2x(a+x)\cos2\beta\}\,y+(a+x)x^2=0.$$

Pour $x=0$, $y=0$ et $y=a\sin^2\beta$, distance focale de la parabole,

$$x=-\frac{a}{2},\quad y=+\frac{a}{2},$$

une seule valeur, c'est le cas du cercle.

$$x=-a,\ y=0,\ y=\pm\infty,$$

c'est le double cas de $\alpha=0$ et $\alpha=180$. Ce qui donne encore pour asymptote la génératrice V'SV.

PROBLÈME SUR DEUX CERCLES.

PAR FEU M. LÉVY,
Professeur au Collége Charlemagne.

Fig. 58. Par le point d'intersection A de deux circonférences données, mener une corde commune BAC, telle que le rectangle fait sur une partie de la corde comprise par l'une des circonférences, et une ligne donnée m, plus le rectangle fait sur l'autre partie de la corde, et une autre ligne donnée n, égale un carré donné p^2.

Supposons le problème résolu, et soit BAC la corde cherchée; par hypothèse, on a $m.\text{BA}+n.\text{AC}=p^2$. Du point A, je mène les diamètres AD, AE, et je joins BD, CE; les angles en B et en C étant droits, on conclut que BD et CE sont parallèles.

Je divise le diamètre AD en deux parties telles que l'on ait

$AD:AF::n:m$. Du point F, j'abaisse FG perpendiculaire à AB ; alors FG est parallèle à BD, et on a

$AD:AF::AB:AG$, donc $AB:AG::n:m$ ou $m.AB=n.AG$, donc, en substituant dans l'égalité qu'on a par hypothèse, celle-ci deviendra

$$n.AG+n.AC=p^2, \quad \text{ou} \quad n(AG+AC)=p^2, \quad \text{ou} \quad nGC=p^2.$$

Donc GC est une 3^e proportionnelle aux deux lignes n et p.

Joignons FE, et menons FH parallèle à BC, nous pourrons construire le triangle rectangle FEH, dans lequel nous connaissons l'hypoténuse et $FH=GC$: d'où résulte la construction suivante : du point A, menez les diamètres AD, AF ; partagez AD, de telle sorte que $AD:AF::n:m$; joignez FE, sur FE comme diamètre décrivez une demi-circonférence ; du point F comme centre, avec un rayon égal à la 3^e proportionnelle entre n et p, décrivez un arc de cercle qui coupe la demi-circonférence décrite sur FE en H. Joignez FH et prolongez-le jusqu'en C ; tirez CAB, ce sera la droite cherchée : si $n=m$ ou $n=-m$, on retombe sur des problèmes connus. Ce problème est susceptible de discussion.

(Communiqué par M. COUPY, un de ses élèves.)

DÉMONSTRATION

D'UN THÉORÈME DE M. CHASLES,

PAR M. BOUTROUX,

Élève du Collége royal d'Orléans.

Un système de forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, peut toujours se réduire à deux forces non situées dans le même plan, et cette réduction peut se faire d'une infinité de manières. Quelles que soient les deux forces qu'on considère, la pyramide triangulaire qui a pour sommets les extrémités des lignes qui représentent les forces, a un volume constant.

Démonstration. On sait qu'un système de forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, se ramène généralement à une force et à un couple qui ne sont pas dans le même plan. En transportant le couple parallèlement à son plan, de manière que l'une des extrémités de son bras de levier vienne sur le point d'application de la force, cette dernière et l'une des forces du couple étant appliquées au même point, se composent en une seule, et il reste deux forces non situées dans le même plan. Le couple pouvant être changé en une infinité d'autres équivalents et pouvant d'ailleurs tourner dans son plan, ce système de deux forces pourra varier d'une infinité de manières.

Considérons donc le couple (P, — P), dans l'une de ses positions; soit MN (*fig.* 80) le plan du couple, et Q la force qui doit se composer avec la force P du couple: construisons le parallélogramme, et soit AR la résultante. La pyramide construite sur les deux forces — P et AR aura pour mesure de son volume sa base ABP multipliée par le $\frac{1}{3}$ de la distance du point R au plan MN.

Faisons maintenant tourner le couple dans son plan autour du point A et supposons qu'il prenne la position P'AB'. Ramenons encore ce couple et la force AQ à deux forces — P et AR'; la pyramide construite sur ces deux forces aura même base que la précédente, car les triangles AB'P' et ABP sont égaux, puisque les deux couples sont identiques. Elle aura aussi même hauteur, car le plan MN et le plan des deux lignes RQ et R'Q sont parallèles d'après la construction. Les perpendiculaires abaissées des points R et R' sur le plan MN sont par conséquent égales, les deux pyramides ont donc des volumes équivalents.

Nous avons supposé que le couple se déplaçait sans que sa force changeât; s'il se transforme en un autre équivalent, c'est-à-dire d'un moment égal, le triangle qui forme la base de la pyramide conserve la même surface qu'auparavant, puisque le produit de sa base par sa hauteur ne varie pas. On démontrerait comme auparavant que la hauteur de la pyramide reste toujours la même; le théorème est donc démontré (*).

Observation. Le beau théorème de M. Chasles est une conséquence immédiate des conditions d'équilibre : 1° des forces sont en équilibre autour d'un axe fixe, lorsque la somme algébrique de leurs moments par rapport à cet axe est nulle : le moment d'une force par rapport à un axe, c'est le produit de cette force par sa plus courte distance à l'axe, multiplié par le sinus de l'angle des deux droites; 2° le volume d'une pyramide triangulaire est égal au sixième du produit de deux arêtes opposées par leur plus courte distance et par le sinus de leur angle; 3° donc, si sur l'axe fixe on prend deux points à volonté, ils forment généralement avec les extrémités d'une force les sommets d'une pyramide triangulaire; il y a autant de pyramides que de forces; donc dans le cas d'équilibre la somme algébrique des volumes des pyramides est nulle. 4° Soient m forces en équilibre, en prenant la direction d'une quelconque de ces forces pour axe fixe, l'équilibre subsistera encore; combinant les extrémités de cette force, successivement avec les extrémités des autres forces, on aura $m-1$ pyramides dont la somme des volumes sera nulle; faisant le même raisonnement pour chaque force, on obtient m équations entre $\frac{m(m-1)}{2}$ pyramides; il y a donc $\frac{m(m-3)}{2}$ inconnues de plus que d'équations; 5° soient

(*) L'auteur a depuis complété cette démonstration. Tm.

les quatre forces P, Q, R, S en équilibre ; représentons par PQ, PR, etc., les volumes des pyramides triangulaires dues aux forces P et Q, P et R, etc. ; on aura donc

$$\begin{aligned} PQ+PR+PS&=0,\\ QP+QR+QS&=0,\\ RP+RQ+RS&=0,\\ SP+SQ+SR&=0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire $PQ=RS$, $PR=QS$, $PS=QR$; ce qui revient au théorème de M. Chasles. Tm.

DÉMONSTRATION

D'UN THÉORÈME DE M. CAUCHY.

PAR M. BOUTROUX,
Élève du Collége royal d'Orléans.

La racine $m^{\text{ième}}$ du produit de m nombres est plus petite que la moyenne arithmétique entre ces m nombres.

Je commencerai par démontrer que le théorème est vrai, lorsque m est une puissance de 2.

Il est vrai pour la racine carrée : en effet, appelons a et b les deux nombres, je dis qu'on aura $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$: car on a identiquement

$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2;$$

ab est donc moindre que $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, et par conséquent $\sqrt{ab}$ est aussi moindre que $\frac{a+b}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

Il est facile de passer de là au cas où $m=4$; en effet

$\sqrt[4]{abcd}$ peut se mettre sous la forme $\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}$. Je considère $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{cd}$ comme deux facteurs; nous aurons donc la racine carrée des deux facteurs $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{cd}$ qui sera moindre que $\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}$; or $\sqrt{ab}$ est moindre que $\frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{cd}$ moindre que $\frac{c+d}{2}$, donc à plus forte raison $\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}$ ou $\sqrt[4]{abcd}$ sera moindre que $\frac{a+b+c+d}{4}$.

On passera de ce cas à celui où $m=8$, puis au cas où $m=16$ et ainsi de suite. Le théorème est donc vrai pour un nombre de facteurs égal à une puissance quelconque de 2.

Avant de démontrer le théorème pour tous les cas possibles, je vais faire voir que s'il est vrai pour le cas où l'on considère $m+1$ nombres, il sera encore vrai pour le cas où on n'en considère plus que m. Je suppose qu'on ait

$$\sqrt[m+1]{abcd\ldots\, kl} < \frac{a+b+c+d\ldots+k+l}{m+1},$$

et je dis qu'on aura

$$\sqrt[m]{abcd\ldots k} < \frac{a+b+c+d\ldots+k}{m};$$

en effet, $\sqrt[m]{abcd\ldots k}$ peut se mettre sous la forme

$$\sqrt[m+1]{\sqrt[m]{a^{m+1}b^{m+1}\ldots k^{m+1}}};$$

je fais sortir $a^m b^m \ldots k^m$ de dessous le deuxième radical, et j'ai ainsi $\sqrt[m+1]{abcd\ldots k\sqrt[m]{abcd\ldots k}}$. Or nous avons ici $m+1$ facteurs sous un radical dont l'indice est $m+1$, et nous avons supposé que dans ce cas le théorème est vrai; nous aurons donc

$$\sqrt[m+1]{abcd\ldots k\sqrt[m]{abcd\ldots k}}$$

ou

$$\sqrt[m]{abcd\ldots k} < \frac{a+b+c+d\ldots+k+\sqrt[m]{abcd\ldots k}}{m+1};$$

on tire de là ce qu'on voulait démontrer, savoir :

$$\sqrt[m]{abcd\ldots k} < \frac{a+b+c+d\ldots+k}{m}.$$

Si le théorème est vrai pour un certain nombre de facteurs, il est donc encore vrai lorsqu'on a un facteur de moins. Or quel que soit le nombre de facteurs que l'on considère, on pourra toujours trouver une puissance de 2 plus grande que ce nombre ; le théorème étant vrai pour un nombre de facteurs égal à cette puissance de 2, sera encore vrai pour ce nombre diminué d'une unité, puis de deux, de trois unités, et ainsi de suite. On descendra ainsi jusqu'au nombre proposé : le théorème est donc démontré.

Observation. La première partie de cette démonstration est celle de M. Cauchy ; la seconde en diffère un peu. (*Cours d'Analyse*, page 457, 1821.) MM. Lobbato et Bobillier en ont donné aussi une démonstration dans la *Correspondance Mathématique* de M. Quételet, tome IV, p. 169, 1828.
Tm.

QUADRATURE DES COURBES PLANES

ET CUBATURE DES SOLIDES DE RÉVOLUTION,

PAR M. CARVALLO,

Élève du Collège royal de Saint-Louis (*).

Quadrature des courbes planes.

Observation. Cette méthode d'approximation, basée sur

(*) Maintenant élève à l'École polytechnique ; il a le n° 3, et a été admis par le même principe, est moins exacte que celle qui est développée dans le tome II des Fonctions elliptiques de Legendre (p. 572). Nous avons admis ce travail parce que la marche est élémentaire, et que les résultats sont suffisants. On suppose, d'ailleurs, que la fonction y conserve toujours même signe et n'éprouve, non plus que les coefficients différentiels, des changements brusques pour de légers accroissements de la variable. Leibnitz est le premier qui ait essayé cette même méthode de quadrature (Act. erud. april., p. 178, ann. 1693). L'année suivante, Bernoulli (Jean), a donné sa célèbre série, qui est le point de départ ou d'arrivée de tout ce qu'on a fait depuis (Act., p. 438, ann. 1694). Tm.

1. Soit AM (fig. 85), une portion de courbe plane quelconque, qu'il s'agit de quarrer. Partageons OP$=x$ en m parties égales, élevons les ordonnées correspondant à chaque point de division, et formons les rectangles

MQP′P, M′Q′P″P′, ... etc.

Chacun d'eux deviendra un élément de la surface AMOP, si nous supposons $m=\infty$: leur somme devra donner cette surface.

Or, l'aire du premier rectangle est $\frac{x}{m}y$, celle du second $\frac{x}{m}y'$, celle de troisième $\frac{x}{m}y''$........, celle du $m^{\text{ième}}$ $\frac{x}{m}y_{m-1}$, leur somme sera, en la désignant par Σ,

$$\Sigma=\frac{x}{m}(y+y'+y''+\ldots+y_{m-2}+y_{m-1})\ (^*).$$

un des examinateurs, le 156e; cela semble dépasser les limites de la tolérance qu'il faut équitablement accorder aux erreurs dans les jugements.

(*) De là l'origine du mot *somme* pour exprimer une *intégration*. Cette dernière dénomination est due aux Bernoulli; car Leibnitz appelait l'intégrale *terminum differentiandum* et aussi *summatorium*. (J. Bernoulli, Op. omnia, t. I, p. 140.) Tm.

Soit $y=f(x)$ l'équation de la courbe, on aura évidemment :

$$y'=f\left(x-\frac{x}{m}\right),\ y''=f\left(x-\frac{2x}{m}\right)\ldots y_{m-1}=f\left(x-\frac{(m-1)x}{m}\right),$$

la somme des rectangles devient alors

$$\Sigma=\frac{x}{m}\left\{f(x)+f\left(x-\frac{x}{m}\right)+f\left(x-\frac{2x}{m}\right)+\ldots\ldots\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots+f\left(x-\frac{(m-2)x}{m}\right)+f\left(x-\frac{(m-1)}{m}x\right)\right\}.$$

On a d'ailleurs les égalités suivantes

$$f(x)=f(x)$$

$$f\left(x-\frac{x}{m}\right)=f(x)-\frac{x}{m}\,\frac{f'(x)}{1}+\frac{x^2}{m^2}\,\frac{f''(x)}{1.2}-\frac{x^3}{m^3}\,\frac{f'''(x)}{1.2.3}+\ldots$$
$$\ldots\pm\frac{x^n}{m^n}\,\frac{f^n(x)}{1.2.3\ldots n},$$

$$f\left(x-\frac{2x}{m}\right)=f(x)-\frac{2x}{m}\,\frac{f'(x)}{1}+\frac{(2x)^2}{m^2}\,\frac{f''(x)}{1.2}-\frac{(2x)^3}{m^3}\,\frac{f'''(x)}{1.2.3}+\ldots$$
$$\ldots\pm\frac{(2x)^n}{m^n}\,\frac{f^n(x)}{1.2.3\ldots n},$$

$$f\left(x-\frac{3x}{m}\right)=f(x)-\frac{3x}{m}\,\frac{f'(x)}{1}+\frac{(3x)^2}{m^2}\,\frac{f''(x)}{1.2}-\frac{(3x)^3}{m^3}\,\frac{f'''(x)}{1.2.3}+\ldots$$
$$\ldots\ldots\pm\frac{(3x)^n}{m^2}\,\frac{f^n(x)}{1.2.3\ldots n},$$

. . . .

$$f\left(x-\frac{(m-2)x}{m}\right)=f(x)-\frac{(m-2)x}{m}\,\frac{f'(x)}{1}+\frac{[(m-2)x]^2}{m^2}\,\frac{f''(x)}{1.2}$$
$$-\frac{[(m-2)x]^3}{m^3}\,\frac{f'''(x)}{1.2.3}+\ldots\pm\frac{[(m-2)x]^n}{m^n}\,\frac{f^n(x)}{1.2.3\ldots n},$$

$$f\left(x-\frac{(m-1)x}{m}\right)=f(x)-\frac{(m-1)x}{m}\,\frac{f'(x)}{1}+\frac{[(m-1)x]^2}{m^2}\,\frac{f''(x)}{1.2}$$
$$-\frac{[(m-1)x]}{m^3}\,\frac{f'''(x)}{1.2.3}\ldots\pm\frac{[(m-1)x]^n}{m^n}\,\frac{f^n(x)}{1.2.3\ldots n}.$$

Appelons T la somme des m égalités précédentes ; désignons en outre

$(1+2+3+\ldots(m-1))$ par S_1 ; $(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots(m-1)^2)$ par S_2, et généralement

$$(1^n+2^n+3^n+\ldots(m-1)^n) \text{ par } S_n,$$

nous aurons

$$T=mf(x)-\frac{x}{m}f'(x)\frac{S_1}{m}+\frac{x^2}{1.2}f''(x)\frac{S_2}{m^2}+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(x)\frac{S_3}{m^3}+\ldots$$
$$\ldots\ldots\pm\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^n(x)\frac{S_n}{m^n};$$

d'où

$$\frac{T}{m}=f(x)-\frac{x}{1}f'(x)\frac{S_1}{m^2}+\frac{x^2}{1.2}f''(x)\frac{S_2}{m^3}+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(x)\frac{S_3}{m^4}+\ldots$$
$$\ldots\pm\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^n(x)\frac{S_n}{m^{n+1}}.$$

Faisons maintenant $m=\infty$, nous obtiendrons

$$\frac{T}{\infty}=f(x)-\frac{x}{1.2}f'(x)+\frac{x^2}{1.2.3}f''(x)-\frac{x^3}{1.2.3.4}f'''(x)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\pm\frac{x^n}{1.2\ldots\ldots n.(n+1)}f^n(x),$$

car on sait que

$$\lim.\frac{S_1}{m^2}=\frac{1}{2};\ \lim.\frac{S_2}{m^3}=\frac{1}{3}\ldots\ldots\ \lim.\frac{S_n}{m^{n+1}}=\frac{1}{n+1}.$$

Mais nous avons trouvé plus haut $\Sigma=\frac{xT}{m}$, nous aurons donc pour l'expression de la surface cherchée :

$$\Sigma=\frac{x}{1}f(x)-\frac{x^2}{1.2}f'(x)+\frac{x^3}{1.2.3}f''(x)-\frac{x^4}{1.2.3.4}f'''(x)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\pm\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots n.n+1}f^n(x)\ (*).$$

(*) Série de Jean Bernoulli. (Voir Lacroix, Calcul differ., p. 358, 5e édition, 1837.) Tm.

2. *Remarques.* 1° Nous avons supposé dans tout ce qui précède que les axes étaient rectangulaires. Dans le cas où ils ne le seraient pas, en nommant α leur angle, on aurait pour expression de la nouvelle surface

$$\Sigma' = \sin\alpha\, \Sigma.$$

2° Si on voulait avoir seulement l'aire d'une portion telle que MKNP, on ferait $\mathrm{NP} = z$, et divisant z en m parties égales, les ordonnées successives seraient

$$y = f(x), \quad y' = f\left(x - \frac{z}{m}\right), y'' = f\left(x - \frac{2z}{m}\right) \ldots\ldots$$

Alors, par un calcul identique à celui que nous venons de faire, mais dans lequel $\frac{x}{m}, \frac{x^2}{m^2} \ldots\ldots$ etc., seraient remplacés par $\frac{z}{m}, \frac{z^2}{m^2} \ldots\ldots$ etc., on obtiendrait

$$\Sigma = \frac{z}{1} f(x) - \frac{z^2}{1.2} f'(x) + \frac{z^3}{1.2.3} f''(x) - \frac{z^4}{1.2.3.4} f'''(x) + \ldots\ldots$$
$$\ldots \pm \frac{z^{n+1}}{1.2.3\ldots\ldots n.(n+1)} f^n(x).$$

3° Nous avons admis que l'on avait généralement

$$\lim. \ \frac{\mathrm{S}_n}{m^{n+1}} = \frac{1}{n+1};$$

pour ne rien laisser à désirer, nous donnerons ici une démonstration de cette proposition.

Soient $a, b, c, d \ldots k, m$ les termes d'une progression par différence dont la raison soit 1, nous aurons :

$$b^n = (a+1)^n = a^n + na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} + \ldots\ldots + na + a^0,$$

$$c^n = (b+1)^n = b^n + nb^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} b^{n-2} + \ldots\ldots + nb + b^0,$$

$$d^n = (c+1)^n = c^n + nc^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} c^{n-2} + \ldots\ldots + nc + c^0,$$

. . . .

$$m^n = (k+1)^n = k^n + nk^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}k^{n-2} + \ldots\ldots + nk + k^0.$$

Faisons la somme membre à membre, nous obtiendrons en employant la notation adoptée plus haut :

$$m^n - a^n = n(S_{n-1} - m^{n-1}) + \frac{n(n-1)}{1.2}(S_{n-2} - m^{n-2})$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(S_{n-3} - m^{n-3}(+ \ldots (S_0 - 1).$$

De là on déduit, en faisant $a = 1$, et successivement $n = 1$ $n = 2\ldots\ldots$

$$S_0 = m$$

$$S_1 = \frac{1}{2}m(m+1),$$

$$S_2 = \frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m,$$

$$S_4 = \frac{1}{4}m^4 + \frac{1}{2}m^3 + \frac{1}{4}m^2.$$

Donc on a

$$\lim.\frac{S_0}{m} = \frac{1}{1},\ \lim.\frac{S_1}{m^2} = \frac{1}{2},\ \lim.\frac{S_3}{m^3} = \frac{1}{3},\ \lim.\frac{S_4}{m^4} = \frac{1}{4}.$$

Pour démontrer que cette limite est générale, supposons-la vraie pour $\frac{S_{n-1}}{m^n}$; je dis que l'on aura aussi $\lim.\frac{S_n}{m^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$.

En effet, d'après la formule précédente, nous avons

$$m^{n+1} - 1 = (n+1)(S_n - m^n) + \frac{(n+1)n}{1.2}(S_{n-1} - m^{n-1}) + \ldots$$

$$\ldots\ldots + (n+1)(S_1 - m) + (S_0 - 1),$$

d'où en divisant tout par m^{n+1}

$$1 - \frac{1}{m^{n+1}} = \frac{(n+1)}{1}\left(\frac{S_n}{m^{n+1}} - \frac{1}{m}\right) + \frac{(n+1)n}{1.2.m}\left(\frac{S_{n-1}}{m^n} - \frac{1}{m}\right)$$

$$+ \ldots\ldots \frac{n+1}{m^{n-1}}\left(\frac{S_1}{m^2} - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m^n}\left[\frac{S^0}{m} - \frac{1}{m}\right]$$

Enfin faisant $m = \infty$,

$$\lim. \frac{S_n}{m^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \text{ (*)}.$$

Donc, etc.

Applications.

3. *Quadrature du cercle.* L'équation du cercle est $y = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, ou en faisant $r = 1$, $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, nous aurons donc, en désignant pour abréger par A,B,C,D..... les coefficients numériques du développement de $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$:

$$
\begin{array}{lcl}
y = f(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 & & -Ax^2 - Bx^4 - Cx^6 - Dx^8 - \ldots\ldots \\
\text{d'où } f'(x) & = & -2Ax - 4Bx^3 - 6Cx^5 - 8Dx^7 - \ldots\ldots \\
f''(x) & = & -1.2A - 3.4Bx^2 - 5.6Cx^4 - 7.8Dx^6 - \ldots\ldots \\
f'''(x) & = & -2.3.4Bx - 4.5.6Cx^3 - 6.7.8Dx^5 - \ldots\ldots \\
f^{\text{iv}}(x) & = & -1.2.3.4B - 3.4.5.6Cx^2 - 5.6.7.8Dx^4 - \\
f^{\text{v}}(x) & = & -2.3.4.5.6Cx - 4.5.6.7.8Dx^3 - \ldots \\
f^{\text{vi}}(x) & = & -1.2.3.4.5.6C - 3.4.5.6.7.8Dx^2 - \\
f^{\text{vii}}(x) & = & -2.3.4.5.6.7.8Dx - \\
f^{\text{viii}}(x) & = & -1.2.3.4.5.6.7.8D -
\end{array}
$$

En multipliant $f(x)$ par $\frac{x}{1}$, $f'(x)$ par $\frac{-x^2}{2}$, et de même chacune des autres dérivées par une puissance de x divisée par un produit numérique convenable, comme l'indique la série (Σ) (n° 1), tous les termes d'une même colonne deviennent de même degré; ils deviennent aussi alternativement positifs et négatifs; ils sont toujours en nombre égal à l'exposant de x dans la colonne, et ce nombre est toujours impair; enfin ils se détruisent tous, à l'exception du dernier de chaque colonne, de la manière suivante : le premier est égal et de signe contraire à l'avant-dernier; le second est égal et de signe contraire au second avant-dernier, et ainsi de suite.

(*) C'est ce qu'on déduit directement de la formule (A), p. 176. Tm.

En sorte que nous avons pour la surface cherchée, en substituant à la place de A,B,C... leurs valeurs

$$S=x-\frac{1}{1}.\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{1.1}{1.2}.\frac{1}{2^2}\frac{x^5}{5}-\frac{1.1.3}{1.2.3}.\frac{1}{2^3}\frac{x^7}{7}-\frac{1.1.3.5}{1.2.3.4}\frac{1}{2^4}\frac{x^9}{9}-\ldots$$

Maintenant, si de l'espace AOMP, nous retranchons le triangle $OMP=\frac{1}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, nous obtiendrons pour la surface du secteur AOM

$$s=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1}+\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{x^9}{9}+\ldots\right)(^*).$$

Divisons cette expression par $\frac{1}{2}$: le quotient sera l'arc AM, en le désignant par a, et observant que $x=\sin a$, nous aurons

$$a=\sin a+\frac{1}{2}.\frac{\sin^3 a}{3}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{\sin^5 a}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\sin^7 a}{7}$$
$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{\sin^9 a}{9}+\ldots(^{**});$$

formule propre à donner le rapport de la circonférence au diamètre, car si on y fait $a=30°$, on aura $\sin a=\frac{1}{2}$, et

$$6a=\pi=3\left(1+\frac{1}{2^3 3}+\frac{3}{4}.\frac{1}{2^5.5}+\frac{3.5}{4.6}.\frac{1}{2^7.7}+\frac{3.5.7}{4.6.8}.\frac{1}{2^9.9}+\ldots\right).$$

Cubature des solides de révolution.

4. Proposons-nous de trouver le volume engendré par l'espace AOMP tournant autour de OX (*fig.* 85). Décomposons, comme précédemment, cette surface en rectangles élémentaires, chacun d'eux donnera naissance à un cylindre dont la mesure respective sera

$$\frac{x}{m}\pi y^2,\quad \frac{x}{m}\pi y'^2,\quad \frac{x}{m}\pi y''^2\ldots\quad \frac{x}{m}\pi y^2_{m-1}.$$

(*) Lacr., Calcul diff., page 311, 5e édition.

(**) *Ibid.*, p. 310.

Soit $y^2 = \varphi(x)$, l'équation de la courbe, on aura

$$y''^2 = \varphi\left(x - \frac{x}{m}\right),\ y'''^2 = \varphi\left(x - \frac{2x}{m}\right) \ldots y^2_{m-1} = \varphi\left(x - \frac{(m-1)x}{m}\right)$$

La somme des cylindres sera donc, en la désignant par V,

$$V = \frac{\pi x}{m}\left\{\varphi(x) + \varphi\left(x - \frac{x}{m}\right) + \varphi\left(x - \frac{2x}{m}\right) + \ldots + \varphi\left(x - \frac{(m-1)x}{m}\right)\right\}$$

En développant les termes de la parenthèse, comme au n° 1, et faisant $m = \infty$, on obtient pour le volume cherché

$$V = \pi\left\{\frac{x}{1}\varphi(x) - \frac{x^2}{1.2}\varphi'(x) + \frac{x^3}{1.2.3}\varphi''(x) - \frac{x^4}{1.2.3.4}\varphi'''(x) + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{\pm x^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{n-1}(x)\right\};$$

série semblable à celle qui donne la surface; seulement tous les termes sont multipliés par un facteur constant π, et $f(x)$ y est remplacée par $\varphi(x)$. On a d'ailleurs entre ces deux fonctions pour une même courbe, la relation

$$\varphi(x) = [f(x)^2].$$

9. L'application immédiate de la formule précédente aux équations

$$y^2 = \left(-\frac{r}{h}x + r\right)^2,$$
$$y^2 = x(2R - x),$$
$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}x(2A - x),$$
$$y^2 = 2px;$$

dont la première représente une droite, la seconde un cercle, la troisième une ellipse, la quatrième une parabole, donne

$V = \pi r^2 \frac{h}{3}$ pour le volume du cône,

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ pour le volume de la sphère,

$V = \frac{4}{3}\pi AB^2$ pour le volume de l'ellipsoïde de révolution,

$V = \frac{1}{2}\pi x y^2$ pour le volume du paraboloïde de révolution.

QUESTIONS D'EXAMEN.

Complément à la discussion des lignes courbes représentées par des équations algébriques quelconques.

PAR M. IMBERT,
Professeur.

Observation. Ce mode de discussion se présente naturellement, et a été pratiqué par Cramer (Intr. p. 129) et par divers. Les exemples choisis par l'auteur sont propres à faire ressortir les avantages de la méthode, et à faire connaître aux élèves diverses affections des lignes. Ce procédé sert encore: 1° dans les quadratures. Ainsi connaissant les aires des courbes représentées par $y=f(x)$, $y=F(x)$, etc., on a aussi l'aire de la courbe représentée par $y=fx+Fx+\ldots$ 2° à la construction de fonctions fractionnaires. Exemple: $y=\frac{fx}{Fx}$; si la méthode de la décomposition en fractions partielles est applicable, la construction de la courbe se ramène à la construction d'autres courbes plus simples. Aussi toutes les équations de cette forme $y=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x-a)(x-b)(x-c)}$, a, b, c étant des quantités réelles inégales, peuvent se construire à l'aide des coniques.

Les équations de la forme $f(x,y)F(x,y)=a$, qu'on rencontre très-souvent, et à laquelle on peut ramener souvent les équations qui n'ont pas cette forme, se construisent à l'aide de deux courbes variables plus simples. Il suffit de faire $f(x, y) = am$; et $F(x, y) = \frac{1}{m}$; m étant un paramètre variable; les intersections de ces deux courbes donnent les points de la première et peuvent servir quelquefois à découvrir ses propriétés. Tm.

Jusqu'ici, les méthodes employées pour discuter et construire les courbes représentées par des équations algébriques de degré supérieur, sont très-restreintes, soit à cause de l'impuissance complète de l'analyse dans certains cas; ou bien à cause des procédés trop pénibles dont il faut faire usage pour arriver à un résultat qui presque toujours est en lui-même d'une extrême simplicité.

Les théories ordinaires ne sont guère applicables qu'aux équations de la forme $y = \psi(x)$, $\psi(x)$ n'étant ni la somme, ni la différence de plusieurs fonctions, ou tout au plus de deux, et encore dans certains cas préparés à l'avance, à cause de l'immensité des calculs qu'il faut faire pour obtenir les tangentes, les asymptotes, le sens de la concavité, de la convexité, etc. Notre objet est d'étendre ces considérations jusqu'aux expressions plus générales

$$Y = \pm F(x) \pm F_1(x) \pm F_2(x) \pm \ldots F_m(x). \quad (1)$$

Désignons d'avance par $\varphi(X, Y) = 0$, l'équation de la courbe qu'on veut construire, puis posons

$$y = \pm F(x), \; y_1 = \pm F_1(x) \ldots \; y_m = \pm F_m(x) \ldots \quad (2)$$

ce qui revient à

$$f(x, y) = 0, \; f_1(x, y_1) = 0 \ldots f_m(x, y_m) = 0. \quad (3)$$

Supposons maintenant séparément, sur les mêmes axes coordonnés, chacune des courbes représentée par

$$f(x, y) = 0, \; f_1(x, y_1) = 0 \ldots \; \varphi[X, Y] = 0. \quad (4)$$

Si, par un point situé sur $\varphi(X, Y) = 0$, et dont les coordonnées sont α et β, on suppose une ordonnée indéfinie, cette ligne coupera toutes les lignes courbes de la suite (4), en une série de points dont les ordonnées seront le plus souvent de longueurs différentes, et dont toutes les abscisses correspondantes seront égales à α; alors (1) prendra la forme

$$\beta = \pm \beta \pm \beta_1 \pm \ldots . \pm \beta_m. \qquad (5)$$

On fera donc Y égal à la somme ou à la différence du second membre de (5) en ayant égard aux signes $+$ et $-$ qui précèdent chacune des quantités

$$\beta, \ \beta_1, \ \beta_2, \ \ldots . . \ \beta_m.$$

De cette manière, on aura une série de points appartenant tous à la courbe cherchée. On mènera ainsi des ordonnées successives par chaque point de l'axe des x, et on aura par points, la courbe représentée par $\varphi(X, Y) = 0$.

Si toutes les valeurs $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots$ sont différentes, on aura autant de points de $\varphi(X, Y) = 0$, qu'il y a d'unités dans le nombre 2^m; les quantités $\beta, \beta_1, \ldots .$ ayant chacune devant elle le double signe $\pm$. (*)

Si on a $\beta = \beta_1$, on aura un point double de $\varphi(X, Y) = 0$; de même un point triple, quadruple, etc., pour

$$\beta = \beta_1 = \beta_2, \quad \beta = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3, \text{ etc.}$$

Il est très-facile au surplus d'obtenir la courbe $\varphi(X, Y) = 0$. On construira d'abord séparément, si l'on veut $f(x, y) = 0$, et $f_1(x, y_1) = 0$, puis on prendra l'une de ces courbes telle que $f(x, y) = 0$ pour diamètre, ensuite on portera les ordonnées correspondantes, pour une même abscisse, de $f_1(x, y_1) = 0$, au-dessus ou au-dessous, ou ensemble en même temps, du diamètre construit, selon que l'on aura $Y = y + y_1$ ou $Y = y - y_1$ ou $Y = y \pm y_1$. On pourra dès lors, supprimer $f(x, y) = 0$, $f_1(x, y_1) = 0$, et leur

(*) $\beta, \beta_1 \ldots$ étant des qualités réelles. Tm.

substituer $\varphi(x, y)=0$, que l'on combinera absolument de la même manière avec l'équation suivante $f_2(x, y)=0$, et ainsi de suite, on aura finalement par ce moyen $\varphi(X, Y)=0$.

Il résulte de ces opérations que si deux, trois, quatre..... n courbes

$$f(x, y)=0, \quad f_1(x, y_1)=0 \dots f_{n-1}(x, y_{n-1})=0,$$

sont entre elles ou sécantes, ou tangentes, ou asymptotes, etc, la courbe représentée par $\varphi(X, Y)=0$, devra mettre cela en évidence, et il y aura dans $\varphi(X, Y)=0$, 2, 3, 4,.... n branches de courbes qui seront sécantes, tangentes ou asymptotes entre elles, etc.; et cela est visible puisqu'on ne fait que projeter une courbe sur une autre prise pour diamètre, puis projeter encore la courbe résultante de cette opération, selon la même loi, sur un autre diamètre et à l'infini. En sorte que la projection de chaque point parcourt, d'une manière continue, l'étendue d'une parallèle à l'axe des y, l'abscisse de ce point demeurant constante pour toutes les variations possibles de l'ordonnée de ce point. Le principe énoncé est donc vrai.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ces considérations générales.

Voici quelques exemples : soit proposé de discuter et de construire la courbe que représente $Y = x + \tan x \pm \sin x$, posons $y = x$, $y_1 = \tan x$, $y_2 = \pm \sin x$.

La première de ces équations représente (*fig.* 83) une bissectrice OK des axes coordonnés, la deuxième une tangentoïde COC', et la troisième une sinussoïde ROS. Menons une ordonnée ah, puis $y = dh$, $y_1 = ch$, $y_2 = \pm eh$; on aura donc pour le premier point de $\varphi(X, Y) = 0$, $dh + ch + eh = ah$, donc le point a est le point cherché; pour le deuxième il faut, au lieu d'ajouter eh, le retrancher, et comme $eh < dh$, il s'ensuit que $dh + ch - eh = hb$, donne un deuxième point de la courbe en b situé également au-dessus de la tangentoïde, on mènera ainsi des ordonnées successives en les assujettissant à l'équation ci-dessus, et on aura tous les points de la courbe cherchée. Si on ne veut que la forme de $\varphi(X, Y)=0$, deux ou trois points peuvent suffire, car on reconnaît bientôt que la tangente étant ∞ pour l'arc de $90°$, la tangentoïde a pour asymptote la ligne $V\alpha$, et que les deux branches AOA′, BOB′ de $\varphi(X, Y)=0$, ont aussi cette asymptote pour limite; donc les trois branches COC′, AOA′, BOB′ concourent au même point de l'asymptote $\beta V\alpha$ situé à ∞. Donc la courbe représentée par $\varphi(X, Y)=0$ est comprise tout entière entre *les deux lignes parallèles* $V\alpha$ *et* $V'\alpha'$. *Cette courbe dont la* discussion est fort simple par cette méthode, serait d'une difficulté inouïe par les procédés ordinaires, c'est-à-dire si on voulait la construire directement par points, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre.

SOLIDITÉ ENGENDRÉE PAR UN SEGMENT PARABOLIQUE,

PAR M. FERRIOT,

Recteur honoraire de l'Académie de Grenoble.

La surface d'un segment de la parabole $y^2=px$ étant élémentaire, j'ai cru qu'on ne serait pas fâché de voir comment on peut déterminer la solidité engendrée par ce même segment autour de son axe, sans avoir recours au calcul intégral (*).

La solidité engendrée par le segment AmP de la parabole $y^2=px$, tournant autour de son axe, est $\frac{1}{2}p\pi x^2$.

Concevons un polygone rectiligne quelconque $mm'm''$....

(*) V. page 379.

inscrit à la parabole $y^2=px$ (*fig.* 60) ; des sommets de ce polygone, menons des parallèles aux lignes AP, Pm; elles représenteront les abscisses et les ordonnées de ces sommets, ces lignes prolongées formeront les rectangles PP$'pm'$, P$'$P$''p'm''$... qui seront inscrits à la parabole, et les rectangles QQ$'qm'$, Q$'$Q$''q'm''$.... qui lui seront extérieurs.

En représentant les premiers par P, P$'$, P$''$.... les derniers par p, p', p''.... on aura

Solide engendré par PP$'pm'$ autour de l'axe $\pi y'^2(x-x')$,
Solide engendré par QQ$'qm'$... $\pi(y^2-y'^2)x'$,

ce dernier étant la différence des cylindres engendrés par les rectangles AQqP$'$, AQ$'m'$P$'$, dont les solidités respectives sont $\pi y^2 x'$ et $\pi y'^2 x'$.

Si on prend le rapport des solides précédents, on aura $\frac{P}{p}=\frac{y'^2(x-x')}{(y^2-y'^2)x'}$; mais parce que les sommets m, m' sont à la parabole, on a tout à la fois $y^2=px$, $y'^2=px'$, et par suite $\frac{P}{p}=\frac{y'^2(x-x')}{px'(x-x')}$ ou $\frac{P}{p}=\frac{y^2}{px}=1$, résultat indépendant de $(x-x')$, c'est-à-dire de la distance qui sépare les sommets m, m', m''.... du polygone inscrit.

Par des raisons semblables aux précédentes, on aura $\frac{P'}{p'}=1$, $\frac{P''}{p''}=1$... et par conséquent $\frac{P+P'+P''+\text{etc....}}{p+p'+p''+\text{etc....}}=1$.

Ce qui signifie que le solide engendré par le segment AmP qui se compose de la somme des rectangles P+P$'$+P$''$+etc.. est égal au solide engendré par AQm ou $p+p'+p''+$etc.... qui complète le rectangle APQm dont la solidité est $\pi y^2 x$.

Donc enfin le solide cherché est $\frac{1}{2}\pi y^2 x$, ou $\frac{1}{2}\pi px^2$, résultat conforme à celui que fournit le calcul intégral (*Voir* Calcul intégral de M. Lacroix, § 515).

QUESTIONS PAR ÉCRIT

Proposées à Paris aux candidats à l'École polytechnique, en 1842.

—

1re. Étant donnés un triangle ABC et deux points P et Q sur la base AB, on mène par ces points deux droites rencontrant respectivement les côtés CA, CB, en deux points a, b, variables de telle manière qu'on ait la relation $p.\frac{Ca}{Aa}+q.\frac{Cb}{Bb}=1$; ($p$ et q étant des constantes), trouver le lieu géométrique du point M de rencontre des deux droites Pa, Qb.

Solution. On prend pour axes la base AB et la médiane qui passe par l'angle C; le lieu géométrique est une droite.

2e. Par un point fixe O, pris dans le plan d'une ellipse, on mène arbitrairement une sécante Omm', et un diamètre aa' parallèle à cette sécante; puis, on prend sur la sécante un point M tel que $\mathrm{OM}=\frac{\overline{aa'}^2}{mm'}$; on demande le lieu géométrique du point M; mm' est une corde.

Solution. Le lieu géométrique est une courbe du deuxième degré.

[*Grand concours de* 1842. *M. Hermite, un des concurrents, a consigné cette propriété remarquable, peut-être non remarquée : Lorsque les coefficients de quatre termes consécutifs d'une équation forment une progression arithmétique, l'équation a nécessairement des racines imaginaires.*]

QUESTIONS D'EXAMEN. (*V*. p. 347).

Analyse.

23. Trouver approximativement, sans le secours des tables $\frac{\log 2}{\log 7 - \log 5}$.

Observation. $\frac{7^2}{5^2}$ est égal à peu près à 2.

Geométrie analytique.

63. Des extrémités d'un axe principal, on abaisse des perpendiculaires sur les cordes supplémentaires qui passent par ces extrémités; trouver le lieu géométrique des intersections de ces perpendiculaires.

64. Entre toutes les ellipses qu'on peut inscrire dans un parallélogramme donné, trouver celle dont l'aire est un maximum.

65. Comment connaître par la trigonométrie, que quatre points sont dans un même plan ?

66. Étant données les équations générales de deux courbes du second degré, quelles relations doivent exister entre les coefficients pour que les courbes soient égales ?

Solution. Soit $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$, l'équation d'une conique, faisons

$$b^2 - 4ac = m\,; \quad ae^2 - bde + cd^2 + f(b^2 - 4ac) = \mathrm{L},$$

écrivons l'équation

$$m^2z^2 - 4m\mathrm{L}(a + c - b\cos\gamma)z - 4\mathrm{L}^2\sin^2\gamma = 0,$$

γ étant l'angle des axes. Les carrés des demi-axes principaux sont les racines de cette équation qui suffit pour répondre à la question.

Géométrie descriptive.

1. Étant donnés deux plans et la projection horizontale d'une droite tracée dans un de ces plans, trouver les pro-

jectious d'une droite tracée dans l'autre plan, et dont la plus courte distance à la droite donnée est donnée.

2. Une droite est donnée par ses deux projections et un plan par ses deux traces; trouver les projections d'une droite située dans le plan et dont la plus courte distance à l'autre droite est donnée; quelle est l'enveloppe de ces droites?

Le problème 6 de statique est résolu p. 161.

RELATIONS

Entre les coordonnées de trois points dans l'espace.

D'après Lagrange.

—

1. La géométrie analytique à trois dimensions fait désormais partie des connaissances exigées pour entrer à l'École polytechnique. Les formules compliquées qu'entraîne cette géométrie, sont très-souvent singulièrement abrégées, à l'aide de certaines relations analytiques existant entre les coordonnées; relations dont Euler s'est occupé en 1770, comme une question de la théorie des nombres (Mémoires de S. P., t. XV, p. 75), et que Lagrange a admirablement développées dans son célèbre mémoire sur la pyramide (Mém. de Berlin, 1773, p. 149-176). Nous extrayons ici ces relations avec les moyens de les trouver; c'est un répertoire à consulter au besoin. Nous en donnons une application à la recherche des propriétés des diamètres conjugués dans les surfaces du second degré d'après M. Gergonne (*V.* p. 245).

2. *Notations.* x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; coordonnées rectilignes de trois points M', M'', M'''.

I.

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \alpha', \qquad x''x''' + y''y''' + z''z''' = \beta',$$
$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \alpha'', \qquad x'x''' + y'y''' + z'z''' = \beta'',$$
$$x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 = \alpha''', \qquad x'x'' + y'y'' + z'z'' = \beta'''.$$

II.

$$y''z''' - z''y''' = \xi', \qquad z''x''' - x''z''' = \eta', \qquad x''y''' - y''x''' = \zeta',$$
$$z'y''' - y'z''' = \xi'', \qquad x'z''' - z'x''' = \eta'', \qquad y'x''' - x'y''' = \zeta'',$$
$$y'z'' - z'y'' = \xi''', \qquad z'x'' - x'z'' = \eta''', \qquad x'y'' - y'x'' = \zeta'''.$$

III.

$$x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - x'z''y''' - y'x''z''' - z'y''x''' = \lambda.$$

IV.

$$\alpha''\alpha''' - \beta'^2 = a', \qquad \beta''\beta''' - \alpha'\beta' = b',$$
$$\alpha'\alpha''' - \beta''^2 = a'', \qquad \beta'\beta''' - \alpha''\beta'' = b'',$$
$$\alpha'\alpha'' - \beta'''^2 = a'''; \qquad \beta'\beta'' - \alpha'''\beta''' = b''',$$

V.

$$a''a''' - b'^2 = A', \qquad b''b''' - a'b' = B',$$
$$a'a''' - b''^2 = A'', \qquad b'b''' - a''b'' = B'',$$
$$a'a'' - b'''^2 = A''', \qquad b'b'' - a'''b''' = B'''.$$

VI.

$$\eta''\zeta''' - \zeta''\eta''' = X', \qquad \zeta''\xi''' - \xi''\zeta''' = Y', \qquad \xi''\eta''' - \eta''\xi''' = Z',$$
$$\zeta'\eta''' - \eta'\zeta''' = X'', \qquad \xi'\zeta''' - \zeta'\xi''' = Y'', \qquad \eta'\xi''' - \xi'\eta''' = Z'',$$
$$\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' = X''', \qquad \zeta'\xi'' - \xi'\zeta'' = Y''', \qquad \xi'\eta'' - \eta'\xi'' = Z''',$$

3. Les notations I, IV, V, ne donnent lieu à aucune observation.

Pour former la notation II, on écrit *circulairement* les trois termes xy, yz, zx; 1° le premier xy fournit $x'y''$, $x''y'''$, $x'''y'$, ce sont les trois termes positifs dans les trois dernières équations, le deuxième terme yz fournit de même

$y'z''$, $y''z'''$, $y'''z'$, les trois termes positifs dans les trois premières équations; le troisième terme zx donne $z'x''$, $z''x'''$, $z'''x'$, les trois termes positifs dans les trois équations intermédiaires; les termes négatifs se déduisent des termes positifs. Les lettres ξ, ζ, η de la notation VI correspondent aux lettres x, y, z de II, et se combinent d'une manière analogue; pour avoir l'expression III, on écrit *circulairement* xyz, yzx, zxy, qui fournit les trois termes positifs.

B. *Relations d'identité.*

VII.

$$\begin{aligned}
&\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = a', && \xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta''' = b', \\
&\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = a'', && \xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''' = b'', \\
&\xi'''^2 + \eta'''^2 + \zeta'''^2 = a''', && \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = b''',
\end{aligned}$$

Mode de déduction. Il suffit de remplacer les lettres par leurs valeurs en fonction des coordonnées.

VIII.

$$\begin{aligned}
&X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = A', && X''X''' + Y''Y''' + Z''Z''' = B', \\
&X''^2 + Y''^2 + Z''^2 = A'', && X'X''' + Y'Y''' + Z'Z''' = B'', \\
&X'''^2 + Y'''^2 + Z'''^2 = A''', && X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' = B'''.
\end{aligned}$$

Mode de déduction. Les équations VII, VI, V, sont *similaires* respectivement aux équations I, II, IV; on conclut de là les équations VIII, par de simples changements de lettres.

IX.

$$\begin{aligned}
&X' = \lambda x', && X'' = \lambda x'', && X''' = \lambda x''', \\
&Y' = \lambda y', && Y'' = \lambda y'', && Y''' = \lambda y''', \\
&Z' = \lambda z', && Z'' = \lambda z'', && Z''' = \lambda' z'''.
\end{aligned}$$

Mode de déduction. Dans les équations VI, on remplace les lettres η, ζ, ξ en fonction de x, y, z.

X.

$$A' = \lambda^2\alpha', \qquad B' = \lambda^2\beta',$$
$$A'' = \lambda^2\alpha'', \qquad B'' = \lambda^2\beta'',$$
$$A''' = \lambda^2\alpha''', \qquad B''' = \lambda^2\beta'''.$$

Déduction des équations VIII, IX et I.

XI.

$$\lambda^2 = \alpha'\alpha''\alpha''' + 2\beta'\beta''\beta''' - \alpha'\beta'^2 - \alpha''\beta''^2 - \alpha'''\beta'''^2.$$

Déduction des équations X, V, IV.

XII.

$$3\lambda^2 = a'\alpha' + a''\alpha'' + a'''\alpha''' + 2(b'\beta' + b''\beta'' + b'''\beta''').$$

Déduction des équations IV et XI.

XIII.

$$3\lambda^4 = A'a' + A''a'' + A'''a''' + 2(B'b' + B''b'' + B'''b''').$$

Déduction des équations XII et X.

XIV.

$$\lambda^4 = a'a''a''' + 2b'b''b''' - a'b'^2 - a''b''^2 - a'''b'''^2.$$

Déduction XIII et V.

XV.

$$\lambda^2 = \xi'\eta''\zeta''' + \eta'\zeta''\xi''' + \zeta'\xi''\eta''' - \xi'\zeta''\eta''' - \eta'\xi''\zeta''' - \zeta'\eta''\xi''.$$

Déduction. Le premier membre de l'équation III, élevé au carré est égal au second membre de l'équation XI, or à raison de la similitude des équations I et VII, on peut remplacer les lettres x, y, z, α, β, par ξ, η, ζ, a, b; et l'on obtient l'équation XV.

XVI.

$$x'\xi' + x''\xi'' + x'''\xi''' = \lambda, \quad y'\xi' + y''\xi'' + y'''\xi''' = 0, \quad z'\xi' + z''\xi'' + z'''\xi''' = 0,$$
$$x'\eta' + x''\eta'' + x'''\eta''' = 0, \quad y'\eta' + y''\eta'' + y'''\eta''' = \lambda, \quad z'\eta' + z''\eta'' + z'''\eta''' = 0,$$
$$x'\zeta' + x''\zeta'' + x'''\zeta''' = 0, \quad y'\zeta' + y''\zeta'' + y'''\zeta''' = 0, \quad z'\zeta' + z''\zeta'' + z'''\zeta''' = \lambda.$$

Déduction des équations II.

XVII.

$$x'\xi' + y'\eta' + z'\eta' = \lambda, \quad x''\xi' + y''\eta' + z''\zeta' = 0, \quad x'''\xi' + y'''\eta' + z'''\zeta' = 0,$$
$$x'\xi'' + y'\eta'' + z'\zeta'' = 0, \quad x''\xi'' + y''\eta'' + z''\zeta'' = \lambda, \quad x'''\xi'' + y'''\eta'' + z'''\zeta'' = 0,$$
$$x'\xi''' + y'\eta''' + z'\zeta''' = 0, \quad x''\xi''' + y''\eta''' + z''\zeta''' = 0, \quad x'''\xi''' + y'''\eta''' + z'''\zeta''' = \lambda.$$

Déduction des équations II.

XVIII.

$$\lambda\xi' = a'x' + b'''x'' + b''x''', \quad \lambda\eta' = a'y' + b'''y'' + b''y''',$$
$$\lambda\zeta' = a'z' + b'''z'' + b''z''',$$
$$\lambda\xi'' = b'''x' + a''x'' + b'x''', \quad \lambda\eta'' = b'''y' + a''y'' + b'y''',$$
$$\lambda\zeta'' = b'''z' + a''z'' + b'z''',$$
$$\lambda\xi''' = b''x' + b'x'' + a'''x''', \quad \lambda\eta''' = b''y' + b'y'' + a'''y''',$$
$$\lambda\zeta''' = b''z' + b'z'' + a'''z'''.$$

Déduction des équations XVII et VII.

XIX.

$$\lambda x' = \alpha'\xi' + \beta''\xi'' + \beta''\xi''', \quad \lambda y' = \alpha'\eta' + \beta'''\eta'' + \beta''\eta''',$$
$$\lambda z' = \alpha'\zeta' + \beta'''\zeta'' + \beta''\zeta''',$$
$$\lambda x'' = \beta'''\xi' + \alpha''\xi'' + \beta'\xi''', \quad \lambda y'' = \beta'''\eta' + \alpha''\eta'' + \beta'\eta''',$$
$$\lambda z'' = \beta'''\zeta' + \alpha''\zeta'' + \beta'\zeta''',$$
$$\lambda x''' = \beta''\xi' + \beta'\xi'' + \alpha'''\xi''', \quad \lambda y''' = \beta''\eta' + \beta'\eta'' + \alpha'''\eta''',$$
$$\lambda z''' = \beta''\zeta' + \beta'\zeta'' + \alpha'''\zeta'''.$$

Déduction des équations XVI et I.

C. *Interprétations géométriques.*

Soit O l'origine des coordonnées que nous supposons rectangulaires, et considérons la pyramide triangulaire OM'M''M''' ;

α' est le carré de l'arête OM',

β' est OM'.OM'' cos M'OM'', $M''M''' = \alpha'' + \alpha''' - 2\beta'$;

ξ' double de l'aire de la projection du triangle M''OM''' sur le plan des yz,

a' quatre fois le carré de l'aire du triangle M''OM''' ;

b' quatre fois le carré de l'aire du triangle

$$\mathrm{M'M''M} = a' + a'' + a''' + 2(b' + b'' + b''');$$

λ = six fois le volume de la pyramide SM'M''M'

On arrive facilement à ce résultat remarquable : 1° par des considérations géométriques ; soient P', P'', P''', les projections de M', M'', M''' sur le plan des xy ; le volume de la pyramide est égal à la somme des trois pyramides quadrangulaires AP'P''M'M'', AP'P''M'M'' ; plus le prisme triangulaire M'M''M'''P'P''P''' moins la pyramide SP''P''M''M''', volumes qui s'expriment directement en fonction des coordonnées ; on suppose que P' tombe dans l'intérieur du triangle AP''P''' ; 2° par l'analyse ; soit $mx+ny+pz+q=0$, l'équation du plan M'M''M''' , on sait que l'on a

$$\frac{m}{q} = -\frac{\xi'+\xi''+\xi'''}{\lambda}; \quad \frac{n}{q} = -\frac{\eta'+\eta''+\eta'''}{\lambda}, \quad \frac{p}{q} = -\frac{\zeta'+\zeta''+\zeta'''}{\lambda};$$

soit l la perpendiculaire abaissée de l'origine A sur le plan M'M''M''', l'on a $l^2 = -\frac{q^2}{m^2+n^2+p^2}$; remplaçant m, n, p, par leurs valeurs, et ayant égard aux relations VII ; il vient $l^2 = \frac{\lambda^2}{a'+a''+a'''+2(b'+b''+b''')}$ d'où $\lambda^2 = 4l^2 \times$ aire carrée du triangle M'M''M''' ; donc, etc.

De cette expression on déduit facilement le volume de la pyramide en fonction des côtés ; désignant ces arêtes par a, b, c, d, e, f, et le volume par v, on aura

$$\begin{aligned} 144v^2 = {} & c^2d^2[a^2+b^2+e^2+f^2-c^2-d^2] \\ & + a^2e^2[b^2+e^2+d^2+f^2-a^2-e^2] \\ & + b^2f^2[a^2+c^2+d^2+e^2-b^2-f^2] \\ & - [a^2b^2d^2+a^2c^2f^2+b^2c^2e^2+d^2e^2f^2], \end{aligned}$$

a et e sont des arêtes opposées ; de même e et d, b et f ; chacun des quatre derniers termes comprend les arêtes d'une même face. (Legendre. *Note* V, prob. VII.)

(*La suite prochainement.*)

ÉCOLE NORMALE.

Questions de Mathématiques proposées au premier concours d'entrée à l'école Normale (août 1842).

1. On donne une ellipse ou une hyperbole dont AB est l'axe transverse, et F un foyer. Par le sommet A le plus voisin de ce foyer, on mène une droite quelconque qui rencontre la courbe au point C et on la prolonge d'une quantité CD telle que le rapport $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}}$, soit constamment égal au rapport donné $\frac{m}{n}$; puis on tire les droites BC et FD qui se rencontrent au point E. Cela posé, on demande la courbe que décrit le point E quand la droite AD prend toutes les positions possibles autour du sommet A.

On examinera comment il conviendrait de modifier l'énoncé du problème dans le cas où la courbe donnée serait une parabole ayant son sommet en A et son foyer en F. Que deviendrait alors l'équation du lieu géométrique demandé ?

2. Étant donnée l'équation $f(x)=0$, on propose de trouver l'équation $\varphi(y)=0$, dont les racines sont toutes les combinaisons de la forme $y=\frac{x}{x'}+\frac{x'}{x}$, x et x' désignant deux racines quelconques de $f(x)=0$. On devra exclure de l'équation demandée les racines égales à 2.

On appliquera la théorie à l'exemple suivant

$$f(x)=x^3-3x+1=0.$$

La forme de cette équation permettra de simplifier les calculs qu'entraînerait la méthode générale de l'élimination.

Questions de Physique.

1. Deux miroirs concaves de métal étant situés vis-à-vis l'un de l'autre, de manière que leurs axes principaux se trouvent sur une même ligne droite, si l'on place un petit vase de métal poli plus froid que les corps environnants au foyer de l'un et un thermomètre au foyer de l'autre, on observe sur cet instrument un abaissement de température plus grand que celui qui aurait lieu sans le concours des miroirs. Le refroidissement est encore plus prononcé, lorsque la surface extérieure du vase froid est recouverte de noir de fumée, on demande l'explication de ces phénomènes.

2. Un objet linéaire de 5 centimètres étant placé sur l'axe principal d'un miroir sphérique concave, dont le rayon égale 40 centimètres, et perpendiculairement à cet axe, à une distance de 85 centimètres comptée depuis la surface du miroir, on demande :

1° A quelle distance de ce miroir, il faudra placer un écran pour obtenir une image nette de cet objet.

2° Si cette image sera droite ou renversée.

3° Quelle sera sa longueur.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE; THÉORÈMES A DÉMONTRER.

—

31. Trouver l'équation d'une surface algébrique sur laquelle, on ne puisse tracer qu'une seule et unique droite.

32. a et b étant les demi-axes principaux d'une ellipse, démontrer que le périmètre de l'ellipse est toujours compris entre $\pi(a+b)$ et $\pi\sqrt{2a^2+2b^2}$ (Jean Bernoulli).

33. Démontrer que les périmètres et les aires des portions

de polygones réguliers inscrits dans le même arc de cercle, augmentent avec le nombre de côtés.

34. Si d'un point situé sur une surface algébrique de degré m, on abaisse des perpendiculaires sur un système de plans fixes; le lieu géométrique des points de moyenne distance des pieds des perpendiculaires est une surface algébrique du même degré m.

35. Si l'on coupe un des angles solides S d'un octaèdre régulier par un plan qui y produise la section ABCD, on aura $\frac{1}{AS}+\frac{1}{CS}=\frac{1}{BS}+\frac{1}{DS}$ (Lévy).

36. La normale et la tangente menées par le point d'une conique interceptent, sur un axe principal, une longueur égale au produit des rayons vecteurs passant par ce point, divisé par la distance du point au second axe principal; dans la parabole cette longueur est égale au double du rayon vecteur (Poncelet).

37. Démontrer que l'équation $\frac{9\sin x}{5+4\cos x}=x$, n'a pas de racine réelle positive supérieure à 3, et n'a qu'une racine positive comprise entre 2 et 3 (Cauchy).

38. Trouver les n racines de l'équation

$$x^n - nax^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3} - \ldots - a^n = 0.$$

(Euler).

39. Démontrer que la courbe enveloppe d'une droite de longueur constante s'appuyant sur les côtés d'un angle droit (v. p. 265) est une épicycloïde engendrée par le point d'une circonférence roulant intérieurement sur une circonférence quatre fois plus grande (Sturm).

40. Soit ABC un triangle inscrit dans une conique, soit mené un diamètre parallèle à la tangente qui passe par A; ce point, le milieu de la portion du diamètre parallèle intercep-

tée entre AB et AC et le pôle du côté BC sont sur une même droite (Chasles).

Équation du cinquième degré.

41. Un géomètre anglais vient de démontrer que toute équation de ce degré peut se réduire à la forme

$$x^5 + x + a = 0.$$

DEUX PROBLÈMES

Sur une pyramide pentaèdre à base de trapèze.

—

Problème. Dans une pyramide pentaèdre SABCD (*fig.* 81), dont S est le sommet et ABCD la base trapèze, étant donnés : 1° la face SAD de grandeur et de position ; 2° l'inclinaison de cette face sur la base ABCD ; 3° les directions des arêtes parallèles AB, CD ; 4° les angles de la face SBC ; construire la pyramide.

1. *Solution.* Supposons la construction effectuée : du sommet S, abaissons la perpendiculaire SP sur la base, et la perpendiculaire SQ sur le côté BC ; à partir de Q, portons sur QC une longueur QR égale à QS ; cela posé,

1° La hauteur SP est donnée de grandeur et de position, et SQP étant un angle droit, l'on a $\overline{SQ}^2 - \overline{QP}^2 = \overline{SP}^2$,

et aussi $\overline{RQ}^2 - \overline{QP}^2 = \overline{SP}^2$.

2° Le triangle SBC étant donné d'espèce, les rapports $\frac{BQ}{CQ}$, $\frac{SQ}{CQ}$ ou $\frac{RQ}{CQ}$ sont connus ; ainsi les parallèles aux côtés AB, CD passant par les points Q et R sont données de position.

3° le triangle PQR est rectangle en Q, les deux sommets Q et R sont sur des parallèles données, le troisième sommet

P est donné de position ; et la différence des carrés des côtés de l'angle droit $\overline{RQ}^2 - \overline{QP}^2$ est connue ; la recherche d'un tel triangle mène facilement à une équation du second degré, géométriquement constructible et toujours possible.

C.Q.F.T.

2. Cette solution simple est due à Lhuilier, de Genève (*Annales* de Gergonne, t. II, p. 293, année 1811). Elle sert à résoudre ces deux problèmes importants : 1° faire dans un prisme triangulaire donné, une section semblable à un triangle donné ; 2° étant donné un triangle de grandeur et de position, mener un plan tel qu'en y projetant le triangle par des parallèles données de direction, la projection soit semblable à un triangle donné.

3. *Problème* (fig. 82). Dans la même pyramide que dessus, étant donnés : 1° la face SAD de grandeur et de position ; 2° l'inclinaison de SAD sur le plan donné de SBC ; 3° les trois angles de SBC ; construire la pyramide.

Solution. Soit MN l'intersection des deux plans donnés SAD, SBC, les droites AD et BC prolongées, rencontrent cette intersection au même point M ; ainsi le point M est donné de même que la longueur MS ; AB et CD étant parallèles, le rapport $\frac{MC}{MB}$ est égal au rapport connu $\frac{MD}{MA}$, les angles SCM, SBM sont connus. Avec ces données, on détermine facilement le triangle SBC, de grandeur et de position.

C.Q.F.T.

4. Le problème précédent revient à celui-ci : étant donnés deux plans et un triangle tracé dans un des plans, projeter ce triangle sur le second plan, de telle sorte que sa projection soit semblable à un triangle donné. Tm.

QUESTION D'EXAMEN.

Proposition sur le prisme triangulaire et sur le théorème statique de Varignon.

1° Dans tout prisme triangulaire, l'aire d'une face est plus petite que la somme des deux autres faces, et plus grande que leur différence; en effet, menons un plan perpendiculaire à l'arête du prisme, les aires des faces sont évidemment proportionnelles aux côtés du triangle, résultant de cette section, donc, etc.

2° Ainsi dans tout parallélipipède, l'aire du parallélogramme diagonale est donc toujours comprise entre la somme des aires des deux faces adjacentes, et leur différence. Car, ce parallélogramme diagonale partage le solide, en deux prismes triangulaires.

3° On démontre en statique que pour des forces situées dans un même plan, le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes; le centre des moments est dans le plan du triangle. C'est le théorème statique dit de Varignon; le moment d'une force étant égal au double de l'aire du triangle ayant pour base la droite qui représente cette force et le centre des moments pour sommet, le théorème statique peut se transformer en théorème de géométrie, et se démontrer d'après les principes de cette science seulement. Lorsque le centre des moments est hors du plan des forces, le théorème cesse d'être vrai, et le moment de la résultante est toujours plus petit que la somme des moments des composantes. En effet, soient AB, AC deux forces et AD leur résultante, et O un point, centre de moments situé hors du plan BACD; considérons AO, AB, AC, comme les trois arêtes adjacentes d'un parallélipipède ; les moments des forces composantes AB, AC sont respectivement égaux aux aires des faces parallélogrammes OAB, OAC et le moment de la résultante est l'aire du parallélogramme diagonale; donc (2), le moment de la résultante est plus petit que la somme des moments des composantes. Le même raisonnement s'étend à tant de forces qu'on voudra, situées dans un même plan et ayant une résultante. C'est M. Gérono qui m'a communiqué ce moyen de démonstration.

4° Soient deux forces parallèles P et Q, agissant dans le même sens et ayant pour résultante R, et soit O un point hors du plan des forces, et duquel on abaisse sur les directions de ces forces les perpendiculaires OA, OB, OC, on peut supposer les forces P, R, Q appliquées respectivement aux points A, B, C, qui sont en ligne droite. Les trois moments sont $P \times OA$, $R \times OB$, $Q \times OC$; ces moments sont aussi proportionnels aux produits $BC \times OA$, $AC \times OB$, $AB \times OC$; mais dans tout triangle AOC, le second produit est toujours compris entre la somme et la différence absolue du premier et du troisième produit; donc *le moment de la résultante pour deux forces parallèles, et relativement à un point hors du plan, est compris entre la somme et la différence absolue des moments des composantes.*

5° Le théorème cité sur le triangle se démontre facilement : par le point B, menons BM, BN respectivement parallèles à AO et CO; dans le parallélogramme BMON, on a $BO <$ $BM+BN$, $BO > BM-BN$, or $BM = \frac{BC.AO}{AC}$, $BN = \frac{AB.CO}{AC}$ donc, etc.

Tm.

PROBLÈME PAR ÉCRIT.

Proposé à Paris aux examens de 1842, pour l'admission à l'École polytechnique (V. p. 385).

—

Soit VPQV' une ellipse donnée ; A le centre ; M un point donné dans le plan de l'ellipse ; MPQ une sécante quelconque ; PQ partie de la sécante interceptée par l'ellipse ; VAV' un diamètre parallèle à la sécante ; N un point de la sécante tel que l'on a $NM \times PQ = \overline{VV'}^2$; trouver le lieu géométrique de N.

Solution. Prenons le diamètre AM passant par le point donné M pour axe des y ; le centre A pour origine des coordonnées que nous supposons rectangulaires. Soit $AM = q$, longueur connue, et soit φ l'angle variable du diamètre VV' avec l'axe des y ; c'est aussi l'angle de la sécante MPQ avec le même axe ; l'équation de l'ellipse rapportée à son centre est en général de la forme

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 - F = 0. \qquad (1)$$

Soit $y = mx$ équation du diamètre VAV', ou $m = \cot\varphi$, désignant par d la longueur de ce diamètre, on trouve facilement

$$d^2 = +\frac{4F(m^2+1)}{Am^2+Bm+C}, \qquad (2)$$

l'équation de la sécante est

$$y = mx + q, \qquad (3)$$

soient x', y', les coordonnées du point P ; x'', y'', les coordonnées du point Q ; et soit $PQ = c$, on aura

$$c^2 = (x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 = (m^2+1)(x'-x'')^2. \qquad (4)$$

Éliminant y entre les équations (1) et (3), on trouve

$$x^2(Am^2+Bm+C)+qx(2Am+B)+Aq^2-F=0\,, \quad (5)$$

x' et x'' sont les deux racines de cette équation. On en déduit

$$(x'-x'')^2=(x'+x'')^2-4x'x''=\frac{q^2(2Am+B)^2}{(Am^2+Bm+C)^2}-\frac{4(Aq^2-F)}{Am^2+Bm+C}$$
$$=\frac{+4AFm^2+4BFm+q^2(B^2-4AC)+4CF}{(Am^2+Bm+C)^2}.$$

Soit $MN=z$, on a donc, en vertu de la condition du problème, $cz=d^2$ ou $c^2z^2=d^4$; remplaçant c^2 et d^2 par leurs valeurs, on a

$$z^2[+4AFm^2+4BFm+q^2(B^2-4AC)+4CF]=(m^2+1)16F^2;$$

mettant $\cot\varphi$ au lieu de m, il vient

$$z^2[+4AF\cos^2\varphi+4BF\sin\varphi\cos\varphi+\sin^2\varphi(q^2(B^2-4AC)+4CF)]=16F^2. \quad (6)$$

Équation polaire du lieu cherché: M est le pôle, et les angles φ sont comptés de l'axe des y; passant aux coordonnées rectangulaires, on a $\cot\varphi=\frac{y}{z}$, $\sin\varphi=\frac{x}{z}$, $z^2=y^2+x^2$; il vient

$$AFy^2+BFxy+N^2x^2-4F^2=0 \text{ ou } 4N^2=q^2(B^2-4AC)+4CF,$$

conique ayant son centre au point M.

ANALYSE D'OUVRAGES.

Application de la méthode des projections à la recherche de certaines propriétés géométriques; par L. A. S. Ferriot, recteur honoraire de l'Académie de Grenoble, Paris 1838, 1 v. in-8 de 103 pages, 4 pl. (*).

L'art de découvrir les propriétés d'une certaine courbe, à l'aide des propriétés d'une seconde ayant certaines relations avec la première, n'a rien de nouveau. Il remonte au moins au siècle de Newton; dans les *principes*, le lemme 22 du

(*) Chez Bachelier, libraire. Prix, 3 fr.

premier livre porte pour énoncé : *Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.* Newton effectue cette mutation, par un procédé synthétique qui revient analytiquement à considérer les deux variables de la courbe comme des fonctions de deux nouvelles coordonnées inclinées sous un nouvel angle, ce qu'on peut faire d'une infinité de manières sans changer le degré de l'équation, genre de transformation dont on a tiré récemment un parti si fécond. Newton ajoute : *inservit autem hoc lemma solutioni difficiliorum problematum, transmutando figuras in simpliciores : nam rectæ quævis convergentes transmutantur in parallelas... Si recta aliqua tangat lineam curvam in figurâ primâ, hæc recta eodem modo cum curva in figuram novam translatam tanget lineam illam curvam in figurâ novâ et contra. Postquam autem problema solvitur in figurâ novâ, si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur solutio quæsita. Utile est etiam hoc lemma in solutione solidorum problematum, etc.*

On voit bien que Newton connaissait toute l'importance de son lemme ; plus tard on a eu l'idée de recourir aux solides et de considérer la courbe transformée comme la perspective de la première courbe ; c'est ainsi qu'un géomètre, a composé en allemand un traité des sections coniques où toutes les propriétés de ces lignes sont déduites à l'aide des projections perspectives, de celles du cercle, et de la droite. En combinant cette méthode intuitive, avec le changement de variable indiqué ci-dessus, M. Dupin (Charles), est parvenu à transporter même les propriétés de courbure d'une surface dans une autre et à découvrir ces belles lois qui régissent les formes intimes des surfaces algébriques en général (*). La facilité, la fécondité de ces procédés, rendent très-désirables leur introduction dans l'enseignement. C'est le but que s'est pro-

(*) Développements de géométrie, in-4. 1813.

posé depuis longtemps l'honorable recteur de l'Académie de Grenoble. En 1812, il a inséré à ce sujet un mémoire dans le tome II des *Annales* de Gergonne. Le présent ouvrage est pour ainsi dire le développement de ce mémoire.

Les propositions préliminaires (9 — 12), contiennent les théorèmes et les problèmes principaux nécessaires à la méthode projective. Il y en a plusieurs que l'auteur considère comme *nouveaux*, entre autres celui-ci : *Trouver un plan sur lequel la somme des projections de tant de droites qu'on voudra situées d'une manière quelconque dans l'espace, est un maximum.*

Théorème nouveau ainsi énoncé : Si par les trois sommets A, B, C d'un triangle quelconque, et par un point pris comme on voudra dans son plan, on mène trois droites qui rencontrent les côtés AB, AC, BC ou leurs prolongements en des points M, N, P ; puis que sur les côtés d'un autre triangle *abc*, on place trois autres points *m*, *n*, *p*, comme les trois premiers sont placés sur les côtés du premier triangle, les droites *an*, *bp*, *cm*, passeront par un seul et même point *k*.

La démonstration est facile, soit par la considération des *segments*, soit par les théorèmes de statique, en regardant le point de rencontre, comme le centre de forces parallèles agissant aux sommets du triangle.

Voici, à cette occasion, un théorème analogue, assez utile à connaître :

Si parmi les six points d'intersection d'une conique avec un triangle, trois sont situés de manière qu'en les joignant par les droites aux sommets du triangle respectivement opposés, les transversales se coupent en un même point, il en sera de même pour les trois autres points et réciproquement, si six points situés deux à deux sur les côtés d'un triangle jouissent de cette propriété, alors les six points sont sur une même conique.

Au milieu de l'océan de propriétés qu'on a accumulées sur les lignes et surfaces du second degré, il est difficile de reconnaître ce qui est *nouveau*. M. Ferriot, démontre d'une manière fort simple ce théorème fondamental : Un triangle quelconque peut toujours être projeté suivant un autre triangle semblable à un triangle donné (*) ; il en déduit avec facilité des conséquences très-importantes et qu'il serait long d'obtenir différemment, entre autres cette proposition : Entre toutes les ellipses inscrites dans un triangle, l'ellipse maxima d'aire est celle qui touche les milieux des côtés, et son centre est le même que le centre de gravité du triangle ; et de toutes les ellipses circonscrites au triangle, la plus petite d'aire est celle qui est concentrique et semblable à l'ellipse maxima inscrite.

D'autres propriétés relatives aux maxima et minima de figures inscrites ou circonscrites sont établies par un genre de raisonnements qui, se gravant aisément dans la mémoire, sont si appropriés à l'enseignement, que par une décision du 17 septembre 1838, le conseil royal de l'instruction puplique a inscrit l'*Application de la méthode des projections*, sur la liste des livres qui peuvent être placés dans les bibliothèques des colléges royaux.   Tm.

—

Théories générales de géométrie analytique appliquées à la discussion des courbes algébriques de degrés supérieurs, à l'usage des candidats à l'École polytechnique; par E. Gouré, docteur ès sciences, professeur de mathématiques spéciales au collége royal de Limoges, 1842, in-8 de 86 pages, 2 planches lithographiées.

En 1838, M. Blanchet fit paraître des *compléments de Mathématiques spéciales ;* ils contiennent la discussion des courbes *algébriques* de degrés supérieurs, mais données par des équations *résolues*. L'auteur fait usage des *infiniment*

(*) Voir ci-dessus, p. 398.

petits, méthode que protégeait passionnément l'illustre Poisson, alors chef très-actif, très-zélé, qualités rares, de l'enseignement mathématique en France; cette méthode a en effet l'avantage incontestable de la rapidité, lorsqu'on adopte franchement, de prime abord, le système hiérarchique de Leibnitz avec ses conséquences abréviatrices; ainsi ont agi Bezout et divers autres du dernier siècle; mais si l'on prétend comme l'ont fait avec beaucoup de talent MM. Finck, Blanchet, rendre *rigoureuse* la logique des infiniment petits, non-seulement on perd l'avantage de la rapidité, mais l'exposition devient plus pénible, plus longue, plus obscure, plus difficile à retenir, que les *limites* de d'Alembert ou les dérivées de Lagrange. Cette rigueur nouvelle dans le champ de l'infiniment petit ne consiste d'ailleurs que dans un retour vers la méthode d'exhaustion d'Archimède; seulement on représente abstractivement par des *lettres*, ce que les anciens figuraient et rendaient intuitif par des *lignes*. M. Gouré, traitant le même sujet que M. Blanchet, suit une méthode mixte; il emploie la *prétendue* limite pour mener les tangentes, et les infiniment petits pour les asymptotes. Nous disons que c'est une limite *prétendue*; en effet, voici ce que dit Lagrange. « On peut observer que c'est » improprement qu'on applique le mot connu de limite, à » ce que devient une expression analytique, lorsqu'on y fait » évanouir certaines quantités, parce que ces quantités après » avoir décru jusqu'à zéro, pourraient encore devenir né» gatives: de même qu'en géométrie, on ne peut pas dire » à la rigueur que la soutangente soit la limite des sousécan» tes; parce que rien n'empêche la sousécante de croître encore » lorsqu'elle est devenue tangente. » (Séance des écoles Normales, t. X, p. 7). Ainsi dans la démontration qu'on donne ordinairement pour trouver la soutangente, le mot *limite* n'a pas la même acception que dans la géométrie, lorsqu'on dit par exemple que la circonférence est la limite des polygones inscrits et circonscrits ; cette différence d'acception est d'une logique vicieuse. M. Gouré s'est aussi privé d'un grand avantage, en ne prenant pas pour point de départ, le théorème de Taylor, base fondamentale de toute l'analyse et de ses applications à la géométrie et à la mécanique ; et ce théorème pour les polynômes algébriques entiers est un corollaire immédiat des règles de la multiplication, ce qui assigne sa place dans les *éléments ;* il doit être donné immédiatement après ces règles ; le même théorème étendu aux fonctions explicites, devra être expliqué après la théorie des équations, où d'ailleurs ce théorème apparaît sans qu'on le dise, dans la méthode d'approximation de Newton. En effet, le binôme de Newton pour l'exposant entier positif n'est qu'une multiplication abrégée, et ce binôme doit s'écrire ainsi

$$y=x^m,\ (x+h)^m=y+y'h+y''\frac{h^2}{1.2}+y'''\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots$$

Car, il est important d'expliquer aux élèves le plus tôt possible, les dérivations et leurs algorithmes ; opérations plus faciles que les extractions de racines. En s'y prenant ainsi, le théorème de Taylor deviendrait aussi familier aux élèves que le binôme qui n'en est qu'un particulier, et on propagerait, on populariserait, pour ainsi dire, une proposition qui renferme toute la philosophie mathématique.

L'ouvrage de M. Gouré est divisé en six chapitres précédés d'une introduction.

On y suit l'ordre tel qu'il a été à peu près tracé par Euler, Cramer ; tangentes, asymptotes, diamètres, centres, points singuliers et enfin discussion des courbes. Ces divers objets sont développés avec méthode, en passant du simple au composé, du facile au difficile ; l'auteur ne faisant pas usage du coefficient différentiel supérieur au premier, ne peut donner la théorie des contacts, susceptible, comme l'a très-bien fait voir M. Collard (p. 288), d'être exposée d'une manière élémentaire. On a omis aussi la théorie des *segments*, conséquence immédiate d'un *changement des coordonnées*. L'ouvrage est terminé par la discussion détaillée de sept courbes, du troisième et du quatrième degré ; mais toujours à équation résoluble.

Je crois qu'on rendrait un grand service à l'enseignement de l'analyse appliquée, en traduisant de nouveau l'*Introductio in analysin infinitorum* ; mais en changeant les notations, dans les deux volumes, et les remplaçant par les notations élégantes de l'école de Lagrange ; changements très-permis qui ajouteraient à l'utilité, sans dénaturer l'esprit de ce chef-d'œuvre. En y ajoutant les contacts, rayons de courbure, points singuliers, et donnant plus de développement à l'appendice du second volume, on aurait la meilleure application d'analyse géométrique, à 2 et 3 dimensions, qu'on puisse mettre entre les mains des jeunes gens. Tm.

Nouvelle cosmologie raisonnée; par M. J. Lavezzari, in-8 de 160 pages, 4 pl.

L'auteur réfute le système attractionnaire de Newton, et ressuscite en les modifiant, les tourbillons de Descartes ; il nie l'existence de la force centrifuge dans le mouvement curviligne, rejette le principe qu'un corps se dirige naturellement en ligne droite et admet au contraire qu'un corps peut naturellement décrire une courbe ; témoin la toupie, dont les orbes diminuent sans cesse jusqu'à se réduire en un point ; par conséquent, elle a une tendance, non vers le mouvement rectiligne, mais bien vers le mouvement de plus en plus curviligne ; car on sait que les petits cercles ont plus de courbure que les grands cercles. La force centrifuge ôtée, le système newtonien est sapé par la base, et cependant, s'écrie M. Lavezzari : « Les contemporains de Newton, éblouis par l'éclat apparent des résultats annoncés par ce géomètre superficiel, s'habituèrent bientôt à considérer ses creuses hypothèses comme d'admirables découvertes dues à la toute-puissance des mathématiques (p. 15). » Ennemi de toutes les hypothèses, l'auteur suppose que le soleil, par son mouvement de rotation, a communiqué le même mouvement à l'éther qui l'entoure et l'a converti en tourbillon ; ceci explique nettement pourquoi les planètes se meuvent toutes dans le même sens que le mouvement de rotation solaire. « Un fait très-ordinaire fit germer dans mon esprit la première idée, qui devint en quelque sorte l'embryon de mon système. Jouant un jour à la toupie avec mon fils, je m'avisai machinalement de suspendre la ficelle au-dessus du jouet, en la laissant tomber le long de ses flancs, mais sans qu'elle touchât ni à la toupie, ni à terre. Tout à coup je vis la corde tourner d'elle-même autour du jouet, dans le sens de sa rotation sur son axe, sans que j'eusse rien fait pour lui communiquer ce mouvement circulaire (p. 23). » Entre la toupie et le soleil, *l'analogie est évidente. Il reste à expliquer pourquoi les planètes* tantôt se rapprochent, tantôt s'éloignent du soleil ; au lieu de recourir au calcul, qui le plus souvent ne mène qu'à l'absurde, prenons plutôt une tasse de thé, c'est plus sûr et moins pénible. « Déjeunant un matin d'une tasse de thé, je vis surnager à la surface du liquide un petit morceau de beurre fondu qui tournait sur lui-même, en se dilatant et se contractant tour à tour, de manière à augmenter et à diminuer successivement le diamètre de son disque, dans une proportion considérable. Par l'effet d'un heureux hasard, une particule de son ou de cendre détachée de ma flûte était tombée sur le bord de cet œil de graisse. Elle était donc entraînée autour du centre de l'œil par son mouvement de rotation, etc. (p. 29). » L'analogie entre ce morceau de beurre fondu et les corps célestes, est évidente. En finissant, nous engageons M. Lavezzari à continuer de prendre son thé, de manger sa flûte et de jouer à la toupie avec son fils ; mais à défendre sévèrement à ce fils la lecture de la nouvelle cosmologie raisonnée.

Tm.

NOTE
SUR LA DIVISION ALGÉBRIQUE,
ET
NOUVEAU THÉORÈME D'ANALYSE,

PAR M. L. A. LE COINTE,
Professeur à Orléans.

I.

Cette note n'est pas autre chose que ce que l'on voit dans la division algébrique, excepté que j'y apporte plus de développement. J'ai cru devoir la mettre ici, parce qu'elle est utile pour le théorème d'analyse dont je m'occuperai tout à l'heure.

Soit un polynôme X de la forme

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+\ldots\ldots+Sx^2+Tx+V:$$

Convenons de représenter toujours par X_n la partie entière du quotient de la division de X par $(x-a)^n$; alors si on divise X par $x-a$, on aura

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l}
x^{m-1}+a & x^{m-2}+a^2 & x^{m-3}+a^3 & x^{m-4}+\ldots+a^{m-1} \\
\quad\;\; +P & \qquad\;\; +Pa & \qquad\;\; +Pa^2 & \qquad\qquad +Pa^{m-2} \\
 & \qquad\;\; +Q & \qquad\;\; +Qa & \qquad\qquad +Qa^{m-3} \\
 & & \qquad\;\; +R & \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\
 & & & \qquad\qquad +T
\end{array}\right\} = X_1.$$

Si on divise X par $(x-a)^2$, ou X_1 par $x-a$, on aura

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l}
x^{m-2}+2a & x^{m-3}+3a^2 & x^{m-4}+4a^3 & x^{m-5}+\ldots+(m-1)a^{m-2} \\
\quad\;\; +P & \qquad\;\; +2Pa & \qquad\;\; +3Pa^2 & \qquad\qquad +(m-2)Pa^{m-3} \\
 & \qquad\;\; +Q & \qquad\;\; +2Qa & \qquad\qquad +(m-3)Qa^{m-4} \\
 & & \qquad\;\; +R & \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & & & \qquad\qquad +S
\end{array}\right\} = X_2,$$

Or, d'après l'inspection des deux polynômes X_1, X_2, on voit immédiatement comment on pourra former les polynômes X_3, X_4,..... X_n, chacun de celui qui le précède et même indépendamment de celui-ci.

Car, par exemple, si on cherche le développement de X_4, qui est la partie entière du quotient de la division de X par $(x-a)^4$, on trouve que

$$X_4 = x^{m-4} \left.\begin{array}{l} +4a \\ +P \end{array}\right| x^{m-5} \left.\begin{array}{l} +10a^2 \\ +4Pa \\ +Q \end{array}\right| x^{m-6} \left.\begin{array}{l} +20a^3 \\ +10Pa^2 \\ +4Qa \\ +R \end{array}\right| x^{m-7} + \ldots\ldots,$$

et on voit que le coefficient de a^3 dans le quatrième terme de ce polynôme est égal à 20, c'est-à-dire le produit du coefficient 10 de a^2 dans le troisième terme, multiplié par 6 (6 étant la quantité que l'on retranche de m pour avoir l'exposant de x dans ce troisième terme), et divisé par le nombre des termes qui précèdent le quatrième, c'est-à-dire par 3.

D'après toutes les remarques que l'on peut faire sur la formation des polynômes X_1, X_2, X_3,... en considérant seulement les polynômes X_1, X_2, on conclut qu'on a

$$X_n = x^{m-n} \left.\begin{array}{l} +na \\ +P \end{array}\right| x^{m-n-1} \left.\begin{array}{l} +\frac{n(n+1)}{2}a^2 \\ +nPa \\ +Q \end{array}\right| x^{m-n-2} \left.\begin{array}{l} +\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}a^3 \\ +\frac{n(n+1)}{2}Pa^2 \\ +nQa \\ +R \end{array}\right|$$

$$x^{m-n-3} + \ldots\ldots + \left.\begin{array}{l} \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(m-1)}{2.3.4\ldots\ldots(m-n)}a^{m-n} \\ +\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(m-2)}{2.3.4\ldots\ldots(m-n-1)}Pa^{m-n-1} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

puis

$$
\begin{aligned}
X_{n+1} = x^{m-n-1} &+ (n+1)a \Big| \; x^{m-n-2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}a^2 \Big| \; x^{m-n-3} \\
&+ P \qquad\qquad\quad + (n+1)Pa \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + Q \\
&+ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3}a^3 \Big| \; x^{m-n-4} + \ldots\ldots \\
&+ \frac{(n+1)(n+2)}{2}Pa^2 \\
&+ (n+1)Qa \\
&+ R \\
&+ \left.\begin{array}{l}
\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(m-1)}{2.3.4\ldots\ldots(m-n-1)}a^{m-n-1} \\
+ \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(m-2)}{2.3.4\ldots\ldots(m-n-2)}Pa^{m-n-2} \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} .
\end{aligned}
$$

II.

Nouveau théorème d'analyse.

Soient, un polynôme X de la forme

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \ldots\ldots + Sx^2 + Tx + V,$$

un binôme quelconque du premier degré de la forme $x - a$, X_n la partie entière du quotient de la division de X par $(x-a)^n$, (n étant un nombre entier quelconque), X_{n+1} celle du quotient de la division de X par $(x-a)^{n+1}$, et X'_n celle du quotient de la division de X' (X' étant le polynôme dérivé de X) par $(x-a)^n$; supposons que dans X_n, X_{n+1}, X'_n, on change a en x, puis qu'on ordonne les nouveaux polynômes qu'on obtient ainsi, par rapport aux puissances décroissantes de x, et soient x_n, x_{n+1}, x'_n, ces polynômes, x_n étant celui qui correspond à X_n, x_{n+1} celui qui correspond à X_{n+1}, et x'_n celui correspond à X'_n;

Je dis qu'on aura

$$1^\circ \qquad (n+1)x_{n+1} = \text{le dérivé de } x_n,$$

et

$$2^\circ \qquad (n+1)x_{n+1} = x'_n.$$

1° Nous avons obtenu le développement de X_n et de X_{n+1}, et par conséquent on en pourra déduire x_n et x_{n+1}.

Si l'on forme le dérivé de x_n qui est de la forme

$$(m-n)\,Ax^{m-n-1}+(m-n-1)\,Bx^{m-n-2}+\ldots\ldots$$

et x_{n+1} étant de la forme

$$A'x^{m-n-1}+B'x^{m-n-2}+\ldots\ldots$$

comme il s'agit de démontrer que $(n+1)\,x_{n+1}=$ dérivé de x_n, si l'on parvient à démontrer que $(n+1)A'=(m-n)A$, on aura aussi démontré, par cela même, que $(n+1)\,B'=(m-n-1)\,B$,....... ce qui est facile à voir à la simple inspection des polynômes X_n et X_{n+1}, et que, par conséquent, on a

$$(n+1)\,x_{n+1} = \text{dérivé de } x_n.$$

Il ne s'agit donc que de démontrer qu'on a la relation suivante :

$$(n+1)\,A' = (m-n)\,A,$$

ou bien

$$(n+1)\left\{1+(n+1)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+\frac{(n+1)(n+2)(n+3\ldots\ldots(m-1)}{2.3.4\ldots\ldots(m-n-1)}\right\}=$$

$$=(m-n)\left\{(1+n)+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3.4}+\ldots+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(m-1)}{2.3.4\ldots(m-n-1)(m-n)}\right\}$$

car

$$A' = 1 + (n+1) + \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(m-1)}{2.3.4\ldots\ldots(m-n-1)},$$

$$A = (1+n) + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3} +$$
$$+ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3.4} + \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(m-1)}{2.3.4\ldots(m-n)}.$$

Or, on a

$$1+(n+1)+\frac{(n+1)(n+2)}{2} = (n+2) + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+2)(n+3)}{2},$$

$$1+(n+1)+\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} =$$
$$= \frac{(n+2)(n+3)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} = \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{2.3},$$

et ainsi de suite.

D'où, par analogie, et en posant $m-1 = n+\omega$,

$$A' = \frac{(n+2)(n+3)(n+4)\ldots(n+\omega+1)}{2.3.4\ldots\ldots(m-n-1)} = \frac{(n+2)(n+3)(n+4)\ldots m}{2.3.4\ldots.(m-n-1)}.$$

De même, on a

$$(1+n)+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

$$(1+n)+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} +$$
$$+ \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3},$$

et ainsi de suite.

D'où, par analogie,

$$A = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)..(n+\omega+1)}{2.3.4\ldots\ldots(m-n)} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)..m}{2.3.4\ldots\ldots(m-n)} \quad (*).$$

D'où

$$(n+1)A' = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ldots\ldots m}{2.3.4\ldots.(m-n-1)},$$

$$(m-n)A = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ldots\ldots m}{2.3.4\ldots\ldots(m-n-1)}.$$

(*) Ces sommations sont connues, on tire celle de A, de A' en remplaçant n par $n-1$. Tm.

Donc

$$(n+1)A' = (m-n)A,$$

donc, enfin,

$$(n+1)x_{n+1} = \text{dérivé de } x_n. \qquad \text{(C.Q.F.D.)}$$

2° Il s'agit maintenant de démontrer qu'on a

$$(n+1)x_{n+1} = x'_n.$$

Or, d'après ce que l'on vient de démontrer, on a, en remarquant que x'_1 est le dérivé de X' ou de x_1,

$$x'_1 = 2x_2, \quad \text{car} \quad 2x_2 = \text{dérivé de } x_1,$$

$2x'_2 =$ dérivé de $x'_1 =$ dérivé de $2x_2 = 6x_3$, car $3x_3$ est le dérivé de x_2, ou

$$x'_2 = 3x_3,$$

de même

$$x'_3 = 4x_4,$$
$$x'_4 = 5x_5,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

et, en général,

$$x'_n = (n+1)x_{n+1}. \qquad \text{(C.Q.F.D.)}$$

Remarque. De ce théorème, il résulte que les dérivés successifs du polynôme X sont :

$$x_1, \quad 2x_2, \quad 2.3.x_3, \quad 2.3.4.x_4, \quad 2.3.4.5.x_5, \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots 2.3\ldots(m-1).x_{m-1}, \quad 2.3\ldots m.x_m.$$

Ils sont ordinairement désignés par

$$(1) \quad X', \quad X'', \quad X''', \quad X^{\text{IV}}, \quad X^{\text{V}}, \ldots\ldots \quad X^{(m-1)}, \quad X^{(m)}.$$

Je propose d'appeler les polynômes de la suite (1), les *dérivés multiples* du polynôme X, et les polynômes

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \ldots\ldots x_{m-1}, \quad x_m,$$

les *dérivés simples* (*).

(*) Ce sont les D d'Arbogast (Calcul des dérivations, p. 33). Tm.

Or, on sait que si dans un polynôme X, on change x en $x+y$, si Y est le résultat de la substitution, on a

$$Y=X+\frac{X'}{1}y+\frac{X''}{1.2}y^2+\frac{X'''}{1.2.3}y^3+\ldots\ldots+y^m,$$

ou bien, d'après ce que nous savons,

$$Y=X+x_1y+x_2y^2+x_3y^3+\ldots\ldots+y^m,$$

c'est-à-dire, d'après les dénominations que je propose, que le resultat Y de la substitution de $x+y$ à la place de x dans le polynôme X est égal au polynôme X, plus au premier dérivé simple multiplié par y, plus au deuxième dérivé simple multiplié par y^2, plus.... etc......, plus enfin y^m.

Nota. On pourrait baser le théorème de M. Budan sur la suite des polynômes *dérivés simples*, au lieu de le baser sur la suite des polynômes *dérivés multiples*.

III.

Nouvelle théorie des racines égales.

Supposons qu'on ait l'équation $X=0$, et qu'elle ait n racines égales à a, ou que le polynôme X soit divisible par $(x-a)^n$.

Soient

$$\left\{\begin{array}{lll} X_1 & \text{la partie entière du quotient de} & \dfrac{X}{x-a}, \\ X_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{X}{(x-a)^2}, \\ \vdots & & \vdots \\ X_n & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{X}{(x-a)^n}, \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 & \text{le résultat de la substitution de } x \text{ au lieu de } a \text{ dans} & X_1, \\ x_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & X_2, \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & X_n, \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{lcr} X'_1 & \text{la partie entière du quotient de} & \dfrac{X'}{x-a}, \\ X'_2 & \dots\dots\dots\dots\dots & \dfrac{X'}{(x-a)^2}, \\ \vdots & & \vdots \\ X'_{n-1} & \dots\dots\dots\dots\dots & \dfrac{X'}{(x-a)^{n-1}}, \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lcr} x'_1 & \text{le résultat de la substitution de } x \text{ au lieu de } a \text{ dans} & X'_1, \\ x'_2 & \dots\dots\dots\dots\dots & X'_2, \\ \vdots & & \vdots \\ x'_{n-1} & \dots\dots\dots\dots\dots & X'_{n-1}. \end{array}\right\}$$

Alors X_1, $X_2 \ldots\ldots X_n$, seront des quotients complets. Si dans X_1 on fait $x = a$, on a un résultat $=$ à zéro ; donc si dans X' on fait $x = a$, on a aussi un résultat nul (puisque la substitution de a à la place de x dans X_1 et X' donne deux résultats identiques), par conséquent X' est divisible par $x-a$, ou bien a est racine de $X'=0$.

Comme
$$\begin{aligned} 2x_2 &= x'_1, \\ 3x_3 &= x'_2, \\ 4x_4 &= x'_3, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ (n-1)x_{n-1} &= x'_{n-2}; \end{aligned}$$

il résulte que si on substitue a au lieu de x dans

$$2X_2, \quad 3X_3, \quad 4X_4, \ \ldots\ldots\ldots\ldots, \ (n-1)X_{n-1},$$

on aura des résultats identiques à ceux qu'on obtiendrait si on faisait la même substitution dans X'_1, X'_2, $X'_3 \ldots\ldots\ldots X'_{n-2}$; donc les polynômes X'_1, X'_2, $\ldots\ldots$, X'_{n-2}, sont divisibles par $x-a$, donc ils sont aussi des quotients complets.

Ainsi X'_{n-2} est divisible par $x-a$, ou, ce qui revient au même, X' est divisible par $(x-a)^{n-1}$.

Nous voyons donc, d'après cela, que quand X est divisible par $(x-a)^n$, X' est divisible par $(x-a)^{n-1}$; et, pour terminer, je vais faire voir que X' ne peut, dans ce cas, être divisible par une puissance plus grande de $x-a$.

En effet, si X' était divisible par $(x-a)^{n+n'}$ (n' étant un nombre entier positif), alors X' serait divisible par $(x-a)^n$, la substitution de a au lieu de x dans le quotient complet X'_{n-1}, donnerait un résultat nul. De sorte que a substitué au lieu de x dans nX_n ou dans X_n donnerait un polynôme nul, car on sait que si on substitue a au lieu de x dans X'_{n-1} et nX_n, on a deux résultats identiques ($nx_n = x'_{n-1}$). Donc X_n serait divisible par $x-a$, ou bien comme $X_n = \frac{X}{(x-a)^n}$, X serait divisible par $(x-a)^{n+1}$, ce qui est contre l'hypothèse. Donc, etc.... Ainsi, si $X=0$ a n racines égales à a, $X'=0$ aura $n-1$ racines égales à a. La réciproque se démontrerait absolument de la même manière.

De là résulte, que pour qu'une équation $X=0$ ait n racines égales, il faut et il suffit que le premier membre et son polynôme dérivé aient un diviseur commun ; et si l'on cherche leur plus grand commun diviseur, on aura le produit des facteurs égaux de X, élevés chacun à une puissance moindre d'une unité.

NOTE SUR LES FOYERS.

PAR M. VACHETTE (*).

—

Il existe, dans le plan d'une courbe du deuxième ordre, deux points (dont l'un peut être à l'infini), tels que leur dis-

(*) Admissible à l'École normale ; premier concours de 1842.

tance à un point quelconque de la courbe, est fonction rationnelle et linéaire des coordonnées de ce point. On peut se proposer de rechercher, s'il existe de semblables points dans l'espace, et d'en trouver le lieu géométrique.

I. *Ellipse et hyperbole.*

Soit une ellipse située dans le plan des xy, rapportée à ses axes et à son centre O, son équation est

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

a étant le demi-grand axe.

Soit F un point dans l'espace ayant pour coordonnées

$$x=\alpha$$
$$y=\beta$$
$$z=\gamma,$$

puis soit M un point de l'ellipse, et posons $FM=\delta$. x, y, o étant les coordonnées de M, on aura

$$\delta^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+\gamma^2=x^2+y^2-2(\alpha x+\beta y)+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2;$$

M étant sur l'ellipse, on a

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

d'où

$$\delta^2=x^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)-2\alpha x\mp 2\beta\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

Mais δ, et à fortiori δ^2, devant être fonction rationnelle de x et y, le radical devra disparaître, ce qui aura lieu pour $\beta=0$; ainsi F est dans le plan des xz: on a alors

$$\delta^2=x^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)-2\alpha x+\alpha^2+\gamma^2=$$
$$=\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2\alpha x+\alpha^2+\gamma^2+b^2.$$

Pour rendre δ rationnel en x, il faut écrire que cette valeur de δ^2, trinôme du deuxième degré en x, est un carré parfait, ce qui donne

$$\alpha^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}(\alpha^2 + \gamma^2 + b^2),$$

et en réduisant

$$(a^2 - b^2)\gamma^2 - b^2\alpha^2 = -(a^2 - b^2)b^2,$$

ou

$$c^2\gamma^2 - b^2\alpha^2 = -b^2c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Le lieu des points F est une hyperbole située dans le plan des xz. Pour $\gamma = 0$, $\alpha = \pm c$ position des foyers dans le plan de l'ellipse (*).

Dans la valeur de δ^2 on eût pu éliminer x, au lieu d'éliminer y, on aurait obtenu un lieu dont l'équation serait, en remplaçant α par β, b par a, et réciproquement,

$$(a^2 - b^2)\gamma^2 + a^2\beta^2 = -(a^2 - b^2)a^2,$$

courbe imaginaire, si l'on a $a^2 > b^2$, c'est-à-dire dans le cas que l'on a traité (**).

Si maintenant on cherche le lieu des foyers de l'hyperbole

$$(a^2 - b^2)\zeta^2 - b^2x^2 = -(a^2 - b^2)b^2,$$

on retrouve la première ellipse. En effet on a

$$\overline{FM}^2 = (x - \alpha)^2 + (z - \gamma)^2 + \beta^2 = x^2 + z^2 - 2(\alpha x + \gamma z) + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

en appelant x, o, z les coordonnées d'un point M de l'hyperbole, α, β, γ celles d'un point F qu'on cherche à déterminer.

Or $z = \pm b\sqrt{\dfrac{x^2 - a^2 + b^2}{a^2 - b^2}}$, donc $\overline{FM}^2$ ou δ^2 sera donné par

$$\delta^2 = x^2 + b^2\frac{x^2 - a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - 2(\alpha x \pm \gamma z b\sqrt{}) + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

(*) La somme des distances d'un point aux deux foyers est $\dfrac{2\alpha c}{c}$, quantité constante pour une même valeur de α. Tm.

(**) MM. Poncelet et Chasles ont tiré parti de ces foyers imaginaires. Tm

Comme précédemment, on fera $\gamma=0$, donc

$$\delta^2=x^2+b^2\,\frac{x^2-a^2+b^2}{a^2-b^2}-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2;$$

exprimant ensuite que δ^2 est un carré parfait en x,

$$\alpha^2(a^2-b^2)=(\alpha^2+\beta^2-b^2)a^2,$$

ou réduisant

$$a^2\beta^2+b^2\alpha^2=a^2b^2.$$

Si on avait éliminé x, on eût obtenu un lieu imaginaire.

Ainsi donc l'ellipe $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$,

l'hyperbole $(a^2-b^2)z^2-b^2x^2=-(a^2-b^2)b^2$

sont le lieu des foyers l'une de l'autre.

II. *Parabole.*

Soit $y^2=2px$, une parabole dans le plan des xy, rapportée à son sommet et à son axe,

F un foyer cherché, $\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\right.$ coordonnées de ce foyer,

on aura, comme précédemment,

$$\delta^2=x^2+y^2-2(\alpha x+\beta y)+\alpha^2+\beta^2+\gamma^3.$$

D'ailleurs $y=\pm\sqrt{2px}$, donc il faudra faire $\beta=0$,

$$\delta^2=x^2+2px-2\alpha x+\alpha^2+\gamma^2,$$

exprimant que δ^2 est carré parfait, on aura

$$(p-\alpha)^2=\alpha^2+\gamma^2,$$

ou bien

$$\gamma^2=p^2-2p\alpha,$$

équation d'une parabole située dans le plan des xz, dirigée dans le sens des x négatifs, coupant l'axe des z à des distances de l'origine $\gamma=\pm p$, et l'axe des x à la distance $\alpha=\frac{p}{2}$.

En cherchant le lieu des foyers de la dernière parabole, on retrouverait la première.

Note historique sur les foyers et les focales.

1. *Foyers.* Avant Apollonius, les sections coniques s'obtenaient en coupant le cône droit par un plan perpendiculaire à une arête; pour obtenir les trois, il fallait par conséquent trois cônes différents; aussi ces courbes portaient le nom de sections du cône acutangle, du cône rectangle et du cône obtusangle. Apollonius a, le premier (247 av. J.-C.), considéré le cône oblique, et des sections perpendiculaires au plan diamétral principal; et il a appelé ces sections, d'après les propriétés de leurs paramètres, ellipse, parabole, hyperbole, noms (*) qu'elles ont conservés. Il connaît les foyers de l'ellipse et de l'hyperbole, et les nomme *puncta ex comparatione facta*, à raison de leur mode de construction; il détermine ces foyers en disant: chacun partage le grand axe de l'ellipse ou l'axe transverse de l'hyperbole en deux segments, dont le produit est égal au carré du demi-axe conjugué; il ne parle pas du foyer de la parabole (**). Depuis, on a étudié et découvert les propriétés de ces points, auxquels les lois de Kepler ont assigné une place importante dans le système du monde. Euler est le premier qui ait établi cette définition analytique du foyer: Le foyer est un point situé dans le plan de la courbe, et tel que sa distance à chaque point de la courbe est une fonction rationnelle de l'abscisse du point de la courbe. M. Bret a complété cette belle définition en l'étendant aux deux coordonnées de ce point; et ainsi complétée, elle sert maintenant de base à la recherche des foyers (V. p. 131). M. Vachette généralise encore davantage, et suppose les foyers situés hors du plan de l'ellipse, et démontre que le lieu des foyers est une hyperbole, et *vice versâ;* à quoi l'on peut ajouter : 1° Que la somme des distances d'un point

(*) Le second déjà employé par Archimède (247 av. J.-C.).

(**) Euclide, dans sa Captoptrique, se sert du mot foyer pour les miroirs sphériques. Il n'est pas question des coniques dans cet ouvrage.

de l'ellipse à deux foyers, situés sur deux branches différentes de l'hyperbole, est constante; 2° que, d'après le beau théorème qu'on doit à M. Demonferrand, les cônes qui ont pour base l'ellipse, et pour sommet les foyers, sont tous des cônes de révolution.

2. *Focales.* Ces courbes du 3ᵉ degré, dont M. Perrey a traité dans le numéro précédent (p. 361), ont été étudiées pour la première fois, et dans le cône droit, par M. Quetelet dans une dissertation *De quibusdam locis geometricis necnon de curva focali*, Gand, 1819. De nouvelles propriétés de ces lignes sont consignées dans un mémoire de M. Dandelin (Acad. de Bruxelles, t. II, p. 169). Enfin M. Rees, professeur à Liége, a généralisé les résultats et les a transportés dans le cône oblique (Correspondance mathém., t. V, p. 361); M. Le François en a fait l'objet de sa thèse, *Dissertatio inauguralis mathematica de quibusdam curvis geometricis*, in-4°, Gand, 1830; mais M. Chasles est le géométre qui a donné la plus grande extension à la doctrine des focales; il en indique cette ingénieuse construction : Si d'un point fixe, on mène des tangentes à deux cercles situés dans un même plan, et assujettis à avoir un axe radical fixe et leurs centres sur une droite fixe, le lieu géométrique des points de contact est une focale. (Corresp, math., t. VI, p. 207.) Tm.

SOLUTION DU PROBLÈME VIII (p. 123).

PAR M. LOUIS ROUX,
Elève du collége de Marseille.

Construire une hyperbole équilatère dont on a quatre tangentes.

Les théorèmes de géométrie qui donnent la solution de ce problème particulier, conduisent facilement à la solution

solution du problème général : Construire une section conique quelconque dont on connaît m tangentes et n points de contact. Pour le cas général $m+n=5$; pour l'hyperbole équilatère et la parabole, $m+n=4$.

1^er^ cas. Cinq tangentes pour la section conique en général.

D'après le théorème de Newton, « Lorsqu'un quadrilatère est circonscrit à une section conique, le centre de la courbe est sur la ligne qui joint les milieux des trois diagonales du quadrilatère. » Or nous avons, dans ce cas, deux quadrilatères circonscrits à la section conique cherchée. L'intersection des deux lieux qui doivent contenir le centre, détermine ce centre; il ne reste qu'à : Construire une section conique, connaissant le centre et cinq tangentes et quatre tangentes pour l'hyperbole équilatère.

Le théorème de Newton donne une droite sur laquelle est situé le centre de la courbe. Il sera complétement déterminé au moyen de cet autre théorème dû à M. Poncelet (*Mémoire sur l'hyperbole équilatère*, Ann. de Gergonne, t. II).

« Si l'on mène quatre tangentes à l'hyperbole équilatère, le centre de la courbe sera situé sur la circonférence qui passe par les trois points d'intersection des diagonales du quadrilatère complet, formé par ces tangentes. » Voici, de ce théorème, une démonstration qui me paraît assez simple.

1° Si deux points sont les milieux de deux cordes d'une hyperbole équilatère, si par chacun d'eux, on mène une parallèle à l'autre corde, les deux points, le point de rencontre des deux parallèles, et le centre de la courbe sont sur une même circonférence.

Soient K, I (*fig.* 84), les milieux respectifs des cordes AB, CD ; H le point de rencontre des parallèles. Pour que le théorème énoncé ait lieu, il faut, et il suffit que $HKO+HIO=2$ droits, O est le centre ou $HPX+KOP+HQO+IOX=2$ droits, ou $HXP+IOX=KOP+HQO$:

ce qui est évident d'après cette propriété de l'hyperbole équilatère, que la somme des angles que font avec l'axe des x, les deux diamètres conjugués d'un même système est égale à un droit (*).

2° Si deux points sont par rapport à une hyperbole équilatère, les pôles respectifs de deux droites quelconques, et que, par chacun d'eux, on mène une parallèle à la polaire qui correspond à l'autre, les deux points, l'intersection des parallèles et le centre de la courbe se trouveront sur une même circonférence.

Car si, par le pôle, on mène une corde parallèle à la polaire, elle est divisée par le pôle en deux parties égales. Ce théorème est donc une conséquence du précédent. Comme conséquence de celui-ci, on a :

3° Lorsque trois points situés sur le plan d'une hyperbole équilatère, sont tels que chacun d'eux est le pôle de la droite qui contient les deux autres, ces trois points et le centre de la courbe sont sur une même circonférence.

4° Enfin, on démontre très-facilement que, dans tout quadrilatère circonscrit à une section conique, les trois points de rencontre des diagonales forment un triangle dans lequel chaque sommet est pôle du côté opposé. Le théorème de M. Poncelet s'en déduit immédiatement.

La construction de l'hyperbole équilatère se trouve donc ramenée, ainsi que le problème précédent, à construire la section conique, dont on connait le centre et quatre tangentes. Or on sait que :

5° Dans tout quadrilatère circonscrit à une section conique, les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés se coupent au point de concours des diagonales.

(*) Dans le cercle et l'hyperbole équilatère, deux systèmes d'axes conjugués forment toujours un quadrilatère convexe ou rentrant, inscriptible. C'est ce que les équations de ces lignes montrent intuitivement. Tm.

6° La droite qui va du centre au point de concours de deux tangentes, partage, en deux parties égales, la corde de contact de ces deux tangentes. Ainsi, menons les diagonales du quadrilatère simple, que nous savons être circonscrit à la courbe cherchée. Joignons le centre avec les points de concours des côtés opposés : ces lignes partageront, en deux parties égales, les cordes de contact des côtés opposés du quadrilatère. Comme elles doivent encore passer par le point de concours des diagonales, rien de plus facile que de les déterminer géométriquement.

Connaissant le centre, deux tangentes et leurs points de contact, on a tout de suite les directions des diamètres conjugués d'un même système, dont les valeurs des sous-tangentes donneront les longueurs. La section conique sera dès lors complétement déterminée.

Remarque. Je viens de construire une section conique, connaissant le centre et quatre tangentes, et cela suffisait au problème proposé ; mais la courbe étant assez déterminée par le centre et trois tangentes, on pourrait demander de la construire avec ces seules données.

Or I, K, H (*fig.* 86) étant les points de contact de la section conique qui a son centre en O avec les tangentes AB, BC, AC, chacune des droites IK, KH, IH devra être respectivement partagée en deux parties égales par les droites BO, CO, AO ; de sorte que connaissant, par l'énoncé du problème, le centre O, les tangentes AB, AC, BC, et par suite les droites AO, BO, CO, il ne reste plus qu'à construire un triangle qui, ayant ses trois sommets sur les trois tangentes, ait chacun de ses côtés partagé respectivement en deux parties égales par l'une des droites AO, BO, CO ; et comme on peut déterminer d'avance les directions de chacun de ces côtés, on n'a plus qu'à résoudre ce problème, dont la solution géométrique est connue : Inscrire à un triangle donné, un triangle dont les côtés soient parallèles à trois droites données.

2e cas : Quatre tangentes pour la parabole. Le foyer étant donné par l'intersection des circonférences circonscrites au triangle dont les trois côtés sont tangents à la courbe, le problème n'offre aucune difficulté.

3e cas : Quatre tangentes et un point de contact, pour la section conique en général.

Le théorème 5° donne tout de suite, le point de contact du côté opposé Dès lors, au moyen du théorème 6°, et du théorème de Newton, on aura tout de suite le centre. On pourra même déterminer directement tous les points de contact, au moyen d'un théorème donné par Brianchon (dans son mémoire sur les lignes du deuxième ordre).

ABCD, étant un quadrilatère circonscrit à une section conique, et z le point de contact du côté AB, joignons z aux points de rencontre des diagonales I, G, H, ces lignes en coupant les autres côtés du quadrilatère, donneront les autres points de contact z', z'', z'''.

4e cas : Trois tangentes et un point de contact pour l'hyperbole équilatère.

Le centre de cette hyperbole est sur une circonférence passant par le point du contact, par le milieu du côté sur lequel est ce point, et par le sommet opposé à ce côté (*).

Du théorème de Newton, M. Gergonne (*Annales*, t. XI, p. 384), a déduit celui-ci :

Le lieu des centres des sections coniques qui, étant inscrites à un triangle, touchent constamment l'un de ses côtés en un même point, est la droite qui passe par le milieu de ce côté, et par le milieu de la droite qui joint le sommet opposé à ce point de contact. On aura donc le centre de l'hyperbole, ce qui suffit.

(*) Nous donnerons prochainement les énoncés par ordre systématique des théorèmes renfermés dans les mémoires cités. *C'est un ensemble instructif*, bon sujet d'exercice. Tm.

5e cas : Trois tangentes et un point de contact pour la parabole.

Ce dernier théorème donne la direction des diamètres, les points de contact se trouvent immédiatement, le problème ne présente pas de difficultés.

6e cas : Trois tangentes et deux points de contact pour une section conique quelconque : ce dernier théorème donne encore ici le centre de la courbe.

7e cas : Deux tangentes et deux points de contact pour l'hyperbole équilatère : comme conséquence du théorème 1°, nous avons :

7° Une hyperbole équilatère devant passer par le point O, et être tangente aux droites AY, AX, menons la droite CD partagée par le point O en deux parties égales ; I, K étant les milieux respectifs de AD et de AC, le centre de l'hyperbole se trouvera sur le cercle qui passe par les points I, K, O.

8° On sait encore que dans tout triangle rectangle inscrit à une hyperbole équilatère, la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse est tangente à la courbe.

Soient CAY, GBX, les deux tangentes à l'hyperbole équilatère aux points A, B, ce théorème nous donne le point D, appartenant encore à la courbe. Le centre de la courbe étant dès lors déterminé par le théorème 5 et le théorème 7, le problème est résolu.

8e cas · Deux tangentes et deux points de contact pour la parabole ; ce qui n'offre aucune difficulté. (Voir le mémoire de MM. Brianchon et Poncelet sur l'hyperbole équilatère, *Annales de Gergonne*, tome XI, p. 205, 1821) (*).

(*) Ce beau mémoire renferme tous les théorèmes ci-dessus démontrés, et aussi le théorème du cercle des neuf points. M. Coste a résolu les mêmes problèmes pour la parabole (Gergonne, t. VIII, p. 261). Ces deux mémoires et celui de M. Brianchon, contiennent toutes les solutions désirables de ce genre de questions. V. aussi p. 68.)

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I (p. 122).

PAR M. LOUIS ROUX,
Élève du Collége de Marseille.

Si deux triangles sont tels que les distances du centre du cercle inscrit aux sommets homologues sont proportionnelles, ces deux triangles sont semblables.

A, B, C étant les trois angles d'un triangle, on obtient, entre les sinus de ces trois angles, la formule

$$2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C-\sin^2\frac{1}{2}A-\sin^2\frac{1}{2}B-\sin^2\frac{1}{2}C-1=0.$$

Soient a, b, c, les distances respectives du centre du cercle inscrit dans ce triangle, aux sommets A, B, C. r étant le rayon de ce cercle, on a :

$$r=a\sin\frac{1}{2}A,\quad r=b\sin\frac{1}{2}B,\quad r=c\sin\frac{1}{2}C.$$

Substituant dans la formule, les valeurs de ces sinus, on a pour déterminer le rayon en fonction des distances données :

$$(1)\qquad 2abcr^3-(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)r^2-a^2b^2c^2=0$$

a', b', c' étant les trois distances homologues d'un autre triangle dont r' est le rayon du cercle inscrit, on aura pareillement.

$$(2)\qquad 2a'b'c'r'^3-(a'^2b'^2+a'^2c'^2+b'^2c'^2)r'^2-a'^2b'^2c'^2=0.$$

Si ces distances sont proportionnelles, on aura par exemple : $a'=am$, $b'=bm$, $c'=cm$. Substituant, l'équation (2) devient $2abcm^3r'^3-(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)m^4r'^2-a^2b^2c^2m^6=0$, ou

$$(3)\qquad 2abc\frac{r'^3}{m^3}-(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\frac{r'^2}{m^2}-a^2b^2c^2=0.$$

Comparant (1) et (3), évidemment $r'=mr$. On décomposera donc les deux triangles en triangles rectangles, semblables deux à deux, et l'on en conclura la similitude de ces triangles.

PROPRIÉTÉ DE L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE.

PAR M. A. J. CHEVILLARD,
Ancien élève de l'École polytechnique, répétiteur de mathématiques au Collége royal de Bourbon.

—

Dans l'hyperbole équilatère, le rayon central de chaque point de la courbe est moyen proportionnel entre les deux rayons vecteurs de ce point.

Soient v, v', r les rayons vecteurs et central d'un point d'une hyperbole équilatère, a le demi-grand axe, c la demi-distance des foyers. r étant une médiane du triangle dont les trois côtés sont v, v', $2c$, on a $v^2+v'^2=2r^2+2c^2$, puis à cause de l'hyperbole $v'-v=2a$, d'où $v^2+v'^2=4a^2+2vv'$, donc $r^2+c^2=2a^2+vv'$, relation vraie pour toute hyperbole. Mais la nôtre étant équilatère, on a $c^2=2a^2$, donc $r^2=vv'$.

C.Q.F.D.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III (p. 57 et 142),

INDÉPENDANTE DE LA THÉORIE DES POLAIRES.

PAR M. VIDAL,
Élève de mathématiques spéciales, à Montpellier.

—

Soit A (*fig.* 95) le point par lequel on mène les perpendiculaires; je désigne les coordonnées de ce point par x', y', l'équation de la tangente en ce point sera $a^2y'y+b^2x'x=a^2b^2$. Il faut prouver que la diagonale AB est normale, cela sera prouvé, si je fais voir que le coefficient de x dans l'équation de cette droite est

$$\frac{a^2y'}{b^2x}$$

Je prolonge la perpendiculaire AP d'une longueur égale, je joins P'Q. Cette ligne sera parallèle à AB, si celle-là est perpendiculaire à la tangente; il s'ensuit que AB le sera à la normale. Nous savons que les équations des deux diamètres conjugués égaux sont

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Par conséquent celles des deux perpendiculaires AP et AQ, seront

$$y - y' = -\frac{a}{b}(x - x'), \quad y - y' = \frac{a}{b}(x - x').$$

Cherchons les coordonnées des points d'intersection de ces deux droites avec les diamètres égaux; on trouvera facilement les résultats suivants.

$$\text{Pour le point P} \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a(by' + ax')}{a^2 + b^2}, \\ y &= \frac{b(by' + ax')}{a^2 + b^2}, \end{aligned} \right.$$

$$\text{Pour le point Q} \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a(ax' - by')}{a^2 + b^2}, \\ y &= \frac{b(by' - ax')}{a^2 + b^2}. \end{aligned} \right.$$

Désignons par (α, β) les coordonnées du point P', en s'appuyant sur ce que le point A est le milieu de PP', on trouve

$$\text{Pour le point P}' \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{a^2x' + 2b^2x' - aby'}{a^2 + b^2}, \\ \beta &= \frac{2a^2y' + b^2y' - abx'}{a^2 + b^2}. \end{aligned} \right.$$

Le coefficient de x dans l'équation de la droite P'Q étant égal à la différence des ordonnées de ces deux points divisés par la différence de leurs abscisses, sera

$$\frac{2a^2y'}{2b^2x'} = \frac{a^2y'}{b^2x'}.$$

Nous voyons donc d'après cela que la droite P'Q est perpendiculaire à la tangente, et par suite AB est normale.

C.Q.F.D.

Le raisonnement que nous venons de faire, étant totalement indépendant de ce que le point A est sur l'ellipse, il s'ensuit que la proposition a encore lieu, pourvu que ce point se trouve sur le plan de la courbe.

Observation. Nous recevons d'un élève du même collége, une solution du problème 3 (p. 122), elle est bien raisonnée; mais répond à une question qui n'est pas celle qu'on a proposée.

ANALYSES D'OUVRAGES.

Éléments de Géométrie, par Eugène Lionnet, agrégé de l'Université, professeur de mathématiques au collége royal de Louis-le-Grand (*).

Nous parlerons d'abord du plan de l'ouvrage, clairement indiqué par ce tableau placé tout au commencement :

DIVISION DE L'OUVRAGE.

Première partie.	**Deuxième partie.**
GÉOMÉTRIE PLANE.	GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE.
Principes.	Principes.
Livre I. *La ligne droite.*	Livre I. *Le plan.*
Livre II. *La ligne brisée et les polygones.*	Livre II. *Les angles solides et les polyèdres.*
Livre III. *La circonférence et le cercle.*	Livre III. *Les trois corps ronds.*
Livre IV. *Les polygones semblables et la mesure des angles.*	Livre IV. *Les polyèdres semblables et la mesure des angles.*
Livre V. *La mesure des polygones.*	Livre V. *La mesure des polyèdres.*
Livre VI. *Les polygones réguliers et la mesure du cercle.*	Livre VI. *Les polyèdres réguliers et la mesure des trois corps ronds.*

L'analogie observée ici, autant qu'il est possible, entre la

(*) Chez *Desobry* et *Madeleine*, libraires, rue des Maçons-Sorbonne, n° 1, Paris. Six livraisons lithographiées avec les figures dans le texte.

géométrie plane et celle de l'espace, par la correspondance des livres et des matières traitées; la subdivision, à la fois naturelle et méthodique, de chacune des deux parties, témoignent du soin que l'auteur a mis à faciliter l'étude de la géométrie, par l'ordre et le rapprochement des idées.

Le premier livre est précédé d'une exposition complète des principes : *définitions, axiomes, demandes:* qui doivent servir de base aux démonstrations. — Distinguer nettement ce que *l'on admet*, de ce qu'on veut établir, est sans doute la première règle à suivre pour la précision et la clarté du raisonnement. Si cette règle, circonscrite dans de justes limites, est incontestable pour tous ceux qui ont une idée exacte de l'objet d'une démonstration, il faut approuver l'auteur de l'avoir strictement observée.

M. *Lionnet* est partisan des démonstrations rigoureuses. C'est un point sur lequel nous sommes entièrement d'accord avec lui.

On a dit qu'une extrême rigueur a de graves inconvénients; qu'elle rend les démonstrations difficiles, retarde les progrès des élèves, s'oppose à l'avancement des sciences : nous croyons précisément le contraire, car il nous semble que le moyen le plus certain d'arriver à l'évidence est d'être complétement rigoureux. En mathématiques, comme dans tout le reste, les raisonnements les plus difficiles à suivre, sont les mauvais raisonnements.

Mais il faut voir la rigueur où elle est réellement; il faut ne pas confondre avec les préceptes d'une logique sévère des règles qui n'ont aucun caractère sérieux. En admettant donc tous les avantages de la rigueur géométrique, il resterait à examiner si elle aurait à perdre dans la suppression de quelques Axiomes (*), Demandes, Démonstra-

(*) L'auteur n'a pas mis au nombre de ses axiomes : *le tout est plus grand que* tions du livre que nous analysons ; mais l'auteur doit, dans une introduction à son ouvrage, développer ses idées à cet égard, et c'est pour nous un motif suffisant de remettre à un autre article l'examen dont il s'agit.

Les définitions, placées au commencement de chaque livre, sont exprimées en termes clairs et parfaitement connus. La ligne droite n'a pas été définie, et c'est ce que nous préférons encore à la définition qu'on en donne ordinairement (**). La propriété caractéristique, essentielle de la ligne droite, est celle que l'auteur énonce dans sa troisième *Demande;* propriété tellement essentielle, que si l'on diffère à la mentionner, on court le danger d'être inintelligible et d'entrer en matières par un cercle vicieux.

Le premier livre contient les propositions relatives à la situation des droites. La théorie des parallèles, présentée avec beaucoup d'ordre, s'appuie sur une *Demande* qui revient à celle-ci : *par un point, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite.* Toutefois, les propositions qui peuvent être établies sans le secours d'une demande, ont d'abord été exposées, et la demande est seulement énoncée lorsqu'elle devient nécessaire à la théorie.

L'auteur a fait, avec raison, disparaître des premiers éléments d'une science où l'on doit rechercher à la fois l'exac-

---

la partie; et certes, nous sommes loin de croire que ses démonstrations s'en soient trouvées affaiblies. Ce singulier Axiome énoncé d'abord par *Euclide*, a été reproduit par *Thomas Simpson* qui l'a accompagné de celui-ci : *le tout est égal à la somme de ses parties;* tous deux, adoptés par *Legendre*, ont facilement passé dans la plupart des traités de géométrie qui, depuis, ont été publiés. M. *Lionnet* n'a pas jugé utile de dire : il est évident que *le plus grand est plus grand que le plus petit.*

(**) Les anciens géomètres n'ont jamais défini la ligne droite : *le plus court chemin d'un point à un autre. Euclide* la définit autrement; *Archimède* n'en donne aucune définition. Dans son livre de la Sphère et du Cylindre, il dit : je prends pour *principe* la proposition suivante : la ligne droite est la plus courte de toutes celles qui ont les mêmes extrémités.

titude et la clarté, cette prétendue démonstration fondée sur la comparaison d'étendues indéfinies, formées d'angles et de zones. En confondant ainsi les notions d'aire et de surfaces non fermées, on établit une fausse synonymie, propre à égarer l'esprit des commençants. Nous n'aurions pas eu à distinguer ici cette démonstration de plusieurs autres relatives au même objet et qui ne valent pas mieux, sans la persévérante assistance que lui donne, encore aujourd'hui, l'enseignement de quelques colléges.

Le second livre a pour objet principal l'égalité des polygones et la détermination de la somme de leurs angles. On y trouve aussi quelques propositions sur l'inégalité des côtés des triangles, conduisant aux premières notions des lieux géométriques. Ces différents théorèmes sont bien énoncés et démontrés d'une manière très-simple. Nous approuverions tout ce qui resterait dans ce livre, si l'on supprimait la Proposition 28, et les trois premières relatives à la convexité des polygones.

Dans le troisième livre, consacré à la circonférence et au cercle, on trouve les premières propositions sur la situation relative d'une circonférence et d'une droite, et de deux circonférences; les relations de grandeur des angles inscrits, ou formés par une tangente et une corde, et de l'angle au centre correspondant au même arc; des théorèmes sur l'égalité et l'inégalité des cordes; et enfin, 28 problèmes qui se rapportent aux trois premiers livres du traité.

La plupart des théorèmes démontrés dans ce livre sont d'une utilité incontestable; quelques-uns, cependant, pourraient être supprimés, et, parmi ces derniers, nous comprendrons le théorème 3 : « *Deux circonférences concentriques, qui ont le même rayon, coïncident dans toute leur étendue et ne forment qu'une seule et même circonférence.* » On ne voit pas pourquoi un semblable théorème serait préféré à une foule d'autres du même genre et dont l'exactitude n'est pas plus évidente.

Le livre IV traite de la similitude des polygones et de la mesure des angles. L'auteur a conservé la définition des polygones semblables, donnée par *Euclide*, et adoptée par *Thomas Simpson* et *Legendre;* il démontre, Proposition XV, que l'on peut construire des polygones semblables à un polygone donné. On a reproché à cette définition de la similitude, de comprendre un trop grand nombre de conditions; l'objection ne nous semble pas prise dans une notion exacte du véritable objet des définitions (*); elle ne peut être fondée pour ceux qui ne reconnaissent dans les définitions données en géométrie, qu'une simple imposition de nom à des choses clairement désignées (**).

Au reste, les partisans absolus du nombre précis des conditions suffisantes ne peuvent être admis à changer une définition seulement : il faut encore qu'ils arrangent selon leur système, qu'ils altèrent d'autres définitions consacrées par l'usage. Pour être conséquents, ils ne peuvent plus dire : *le carré est un quadrilatère qui a ses angles droits et ses côtés égaux;* le même motif doit les conduire à épurer les définitions des polygones équiangles, des polygones réguliers, car elles renferment aussi un trop grand nombre de conditions.

(*) « Les géomètres et tous ceux qui agissent méthodiquement, n'imposent des » noms aux choses que pour abréger le discours, et non pour diminuer ou » changer l'idée des choses dont ils discourent; et ils prétendent que l'esprit » supplée *toujours la définition entière aux termes courts qu'ils n'emploient que* » pour éviter la confusion que la multitude des paroles apporte. » (*Pascal*, Livre des Pensées.)

(**) « Les définitions des mathématiciens, regardées comme définitions de nom, » sont absolument arbitraires, c'est-à-dire qu'on peut donner aux objets des » mathématiques, tel nom, et aux mots tel sens qu'on veut. Cependant il faut, » autant qu'il est possible, se conformer à l'usage de la langue et des savants : il » serait ridicule, par exemple, de définir le triangle une figure ronde, quoiqu'on » pût faire, à la rigueur, des éléments de géométrie exacts (*mais ridicules*), en » appelant triangle ce qu'on appelle ordinairement cercle. » (*D'Alembert*. Encyclopédie méthodique.)

La théorie des lignes proportionnelles précède, dans l'ouvrage, la mesure des surfaces; cette disposition présente un avantage réel.—Les démonstrations relatives à l'égalité des rapports incommensurables, sont exposées avec tous les détails nécessaires à la clarté; des notions plus étendues sur ce sujet n'auraient pas été à leur place dans un traité de Géométrie.— La mesure des angles par des arcs de cercle, est établie avec précision.—Le livre IV est terminé par des problèmes bien choisis.

Les propositions principales des deux derniers livres, concernent la mesure des polygones et du cercle, et les rapports des contours des figures semblables.

L'auteur a placé au nombre des notions primitives, indéfinissables, l'égalité d'étendue des figures de formes quelconques; et, cela admis, il définit la *longueur* d'une ligne, *le rapport de son étendue à celle de l'unité linéaire;* et pareillement l'*aire* d'une surface, *le rapport de son étendue à celle de l'unité superficielle*.

On trouve à la fin de chacun de ces livres, des problèmes qui servent de complément à la théorie. Le dernier problème du sixième livre, a pour objet de déterminer une valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre. La solution adoptée par l'auteur est indépendante de la mesure des surfaces; elle dérive simplement des relations de grandeur précédemment établies entre les périmètres des polygones inscrits, et circonscrits au cercle.

Nous ne donnerons pas une analyse détaillée des six livres de la seconde partie; il serait difficile de le faire, sans reproduire la plupart des observations déjà consignées dans cet article. Car, ce qui distingue surtout le plan de l'ouvrage, c'est l'analogie constamment observée, entre la géométrie plane et celle de l'espace; elle se trouve d'abord indiquée par les titres des livres, et par la disposition des théorèmes qu'ils renferment ; et, autant que possible, elle a été suivie dans les définitions, et dans les démonstrations des théorèmes. L'analogie a conduit l'auteur aux définitions qu'il donne de l'angle dièdre, de l'angle solide, et des polyèdres semblables. Toutes les objections qu'on opposerait à ces définitions, toutes les subtilités que l'on imaginerait à leur égard, ne peuvent rien contre le principe qui les a dictées. Seulement, après avoir défini les polyèdres semblables, *des polyèdres qui ont les angles dièdres égaux chacun à chacun, et situés dans le même ordre, et les faces homologues semblables* ; il eût, peut-être, été convenable d'ajouter que les polyèdres dont les faces sont semblables, ont nécessairement leurs angles solides égaux ou symétriques (*).

L'ordre suivi dans cette seconde partie de l'ouvrage, a plus d'une fois servi à simplifier les raisonnements, et encore à éviter la complication des figures. Nous citerons, comme exemple, la disposition des théorèmes qui se rapportent à la mesure des prismes.—Aucune observation utile n'a été négligée ; pour s'en convaincre il suffit de lire la *remarque* 2 sur la définition 38 du livre intitulé : *Les angles solides et les polyèdres.* L'objet de cette remarque est de prouver que si un angle solide est convexe, il est toujours possible de conduire un plan qui rencontre à la fois toutes les arêtes, sans passer par le sommet.

La théorie des figures symétriques a été présentée d'une manière complète. L'auteur a successivement considéré la symétrie par rapport à un point, à une ligne, et à un plan. Cette théorie est une des plus importantes de la géométrie élémentaire ; les propositions qui la concernent méritent d'être remarquées.

(*) La démonstration de ce théorème a été donnée par M. Cauchy, dans le 16e cahier du *Journal de l'Ecole polytechnique.*

Enfin, les démonstrations indirectes, dont le caractère est de convaincre sans éclairer, ont été évitées lorsqu'il a été possible de déduire de la notion même de l'objet considéré les propriétés qu'il s'agissait d'établir.

En écartant de notre rapport les questions de métaphysique, dont la solution n'est pas encore assez éclaircie pour qu'il ne soit plus permis d'avoir à leur égard des opinions différentes, nous dirons que les éléments de géométrie de M. Lionnet nous ont semblé remplir les conditions les plus utiles des ouvrages de ce genre, en réunissant l'ordre à la rigueur et à la clarté Si quelques améliorations sont encore à désirer, on peut les attendre de l'auteur. G

Études sur les propriétés de quelques fonctions et sur la représentation des racines des équations, par des intersections de courbes; par M. Prouhet (E), licencié ès sciences mathématiques ; 24 pages, lithog., juillet 1842.

Moivre (Abraham) (*), géomètre français, forcé en 1685 par la révocation de l'édit de Nantes, de chercher un refuge en Angleterre, est le premier qui nous ait appris qu'une équation trinôme de la forme $Ax^{2m} + Bx^{m} + C = 0$, est décomposable en m facteurs réels trigonométriques du second degré. C'est une conséquence du théorème qui porte son nom, et qui est une généralisation de celui de Côtes (**),

(1) Moivre (Abraham de), né à Vitry-sur-Marne en 1667; mort en 1754. Son théorème est énoncé sans démonstration dans son ouvrage: *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*. Lond. 1734, in-4.

(2) Côtes (Roger), né en Angleterre en 1682; mort en 1716. Son théorème est énoncé sans démonstration dans l'ouvrage posthume : *Harmonia mensurarum sive Analysis et Synthesis per rationum et angularum mensuras promotæ.* Cambrige. 1722, in-4 (édité par Robert Smith). Cet ouvrage a été paraphrasé en français, par Walmsley (Charles), bénédictin anglais, sous le titre: l'Analyse des mesures, des rapports et des angles, ou réduction des intégrations aux logarithmes et aux arcs de cercle. Paris. in-4. 1747.

relatif aux équations binômes $x^{2m}+a=0$; sa proposition est-elle vraie pour des équations de degré pair d'une forme quelconque ? Les géomètres se sont longtemps occupés de cette question, que l'illustre Gauss est parvenu à résoudre d'une manière satisfaisante. Mais d'Alembert le premier a proposé une solution qui contient la base de tout ce qu'on a fait depuis (voir l'Histoire de l'Académie de Berlin, 1746, p. 182, et aussi le traité de *Calcul intégral* de Bougainville, 1754, tome I, p. 47 ; ouvrage toujours très-recommandable). L'illustre philosophe suppose que le dernier terme de l'équation en x soit une variable y, alors l'équation devient celle d'une courbe ; il remplace x par $p+q\sqrt{-1}$, ce qui donne deux équations en y, p, q ; il en déduit par l'élimination deux autres, l'une en y, p, et l'autre en y, q ; et il cherche à prouver par des considérations géométrico-infinitésimales, que quelle que soit la valeur de y, on trouvera pour p et q des valeurs réelles.

Trois années après, Euler aborda le même sujet (dans les Mémoires de la même Académie, 1749, p. 223, imprimés en 1751). Il propose deux moyens : le premier consiste à prouver que tout polynôme de degré $2m$, m étant une puissance de 2, et dont le second terme est nul, peut se décomposer en deux facteurs réels du degré m ; en effet, soit le polynôme $x^{2m}+A_2x^{2m-2}+\dots A_{2m}=X$, prenant les deux facteurs

$$x^m+\alpha x^{m-1}+\alpha_2 x^{m-2}+\dots \alpha_n,$$
$$x^m-\alpha x^{m-1}+\beta_2 x^{m-2}+\dots \beta_n.$$

Ces deux facteurs contiennent $2m-1$ coefficients ; la comparaison avec le polynôme fournit autant d'équations ; Euler avance que tous les coefficients α_2, α_3,... β_2, β_3, etc., peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de α (*voy.* p. 331). Mais α étant la somme de m racines, l'équation en

α sera du degré $\dfrac{2m.2m-1\ldots m+1}{1.2.3\ldots m}$, nombre essentiellement impairement pair.

Car, m étant une puissance de 2, le dénominateur ne contient que le facteur pair 2^{m-1}, et le numérateur, le facteur pair $2m$; de plus, cette équation n'a pas de termes de degré impair ; car si p est la somme de m racines, $-p$ sera la somme des m autres racines ; donc l'équation en α étant formée par un nombre impair de facteurs de la forme α^2-p^2 le dernier terme est négatif ; α a donc au moins deux valeurs réelles dont l'une positive ; par conséquent les coefficients α_2, α_3,... β_2, β_3,... sont aussi réels ; donc la décomposition en deux facteurs du degré m existe ; or m étant une puissance de 2, peut encore se décomposer en deux facteurs de degré $\frac{m}{2}$ et ainsi de suite ; si le degré du polynôme n'est pas une puissance paire de 2, on le rendra tel, en le multipliant par un polynôme à facteurs premiers rationnels ; soit P ce polynôme et X le polynôme donné ; PX est décomposable en facteurs réels du second degré, donc X est aussi décomposable en facteurs réels de ce degré.

2. Comment démontrer en général la réalité de p? C'est une objection grave que Foncenex (*) a faite contre la démonstration d'Euler. Il en a substitué une autre dans les *Miscellanea phys. mathem.*, Taurin, tome I, 1759; démonstration modifiée par Laplace, et que M. Lacroix a insérée dans son excellent complément d'Algèbre. Lagrange a complété cette théorie d'Euler dans les Mémoires de Berlin de 1772, et dans la Résol. des E. num., note IX, 14.

3. Enfin, en 1799, Charles Frédéric Gauss fit son appari-

(1) Foncenex (François Daviet de), né à Thonon (Savoie) en 1774 ; mort à Casal en 1799. On croit que les principaux travaux mathématiques de cet auteur sont dus en grande partie à l'illustre Lagrange, son compatriote. Voir la biographie universelle, art. Foncenet.

tion par cette dissertation capitale devenue extrêmement rare · *Demonstratio nova Theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse.* Helmstadt, in-4° de 40 pages, une planche. L'auteur fait une revue critique extrêmement lumineuse de toutes les démonstrations qui ont précédé la sienne et en fait ressortir les défauts ; ainsi d'Alembert suppose la possibilité d'un développement en séries, ensuite la convergence de ces séries, deux assertions nullement prouvées ; ensuite la transition de l'infiniment petit au fini, laisse aussi subsister quelques nuages. Euler suppose que le second terme manquant, la somme des $2m$ racines est nulle ; mais quel sens attacher à l'expression *somme des racines*, quand la possibilité de l'existence d'une racine est encore un sujet de doute ; et qui sait s'il y a précisément $2m$ racines? Lagrange ne fait pas disparaître cette difficulté, la méthode est de plus sujette à des embarras d'élimination, qui jettent des doutes sur le résultat final.

4. M. Gauss établit sa propre théorie sur ces deux lemmes.

Lemme 1. m étant un nombre entier positif quelconque, la fonction $\sin\varphi.\, x^m - \sin m\varphi . r^{m-1}x + \sin(m-1)\varphi . r^m$, est toujours divisible par le trinôme $x^2 - 2\cos\varphi . rx + r^2$.

Démonst. Il suffit d'effectuer la division ; les deux premiers termes du quotient mettent en évidence la loi des termes du quotient, la loi des restes et la vérité du lemme. Si $m=1$, la fonction devenant nulle est divisible par un facteur quelconque.

Lemme 2. Si la quantité r et l'angle φ satisfont à ces deux équations :

$$r^m\cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + Br^{m-2}\cos(m-2)\varphi + \ldots Kr^2\cos 2\varphi + \\ + 4r\cos\varphi + M = 0, \qquad (U),$$

$$r^m\sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + Br^{m-2}\sin(m-2)\varphi + \ldots Kr^2\sin 2\varphi + \\ + 4r\sin\varphi = 0. \qquad (T),$$

Alors la fonction

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots Kx^2 + 4x + M,$$

sera divisible par le trinôme $x^2 - 2\cos\varphi . rx + r^2$; pourvu que $r\sin\varphi$ ne soit pas nul.

Démonstration. Chacune des quantités suivantes

$$\begin{array}{lll}
\sin\varphi rx^m & - \sin m\varphi r^m x & + \sin(m-1)\varphi r^{m+1}, \\
A\sin\varphi rx^{m-1} & - A\sin(m-1)\varphi r^{m-1}x & + A\sin(m-2)\varphi r^m, \\
B\sin\varphi rx^{m-2} & - A\sin(m-2)\varphi r^{m-2}x & + A\sin(m-4)\varphi r^{m-1}, \\
\text{etc.} \ldots & & \\
K\sin\varphi rx^2 - & K\sin 2\varphi r^2 x & + K\sin\varphi r^3, \\
L\sin\varphi rx - & L\sin\varphi rx & + 0, \\
M\sin\varphi r - & 0 & + M\sin(-\varphi) r,
\end{array}$$

est divisible, d'après le lemme précédent, par $x^2 - 2\cos.\varphi.rx + r^2$; donc la somme de ces quantités est aussi divisible par ce trinôme ; or, la première colonne verticale est $r\sin\varphi . X$; la seconde colonne est xT, et la troisième colonne $= r(U\sin\varphi - T\cos\varphi)$; donc, etc.

Si $r=0$; alors $M=0$, et X est divisible par x ; si $\sin\varphi=0$, alors $\cos\varphi=\pm 1$; $\cos 2\varphi=+1$; $\cos 3\varphi=\pm 1$, et généralement $\cos n\varphi = \cos^n\varphi$; à cause de l'équation (U), X devient donc nul en fesant $x=\cos\varphi$; X est donc divisible par $x - \cos\varphi$; donc en général X est divisible par $x - r\cos\varphi$ lorsque $r\sin\varphi=0$; il est évident d'ailleurs, en remplaçant les sinus des arcs multiples par des puissances, que T est divisible par $r\sin\varphi$.

5. L'auteur considère ensuite les U et T comme les équations polaires de deux courbes, évidemment algébriques, et si l'on remplace $r\sin\varphi$ par y et r, $\cos\varphi$ par x, on a les équations en coordonnées rectangulaires, chacune du degré n ; mais l'équation T se décompose en une droite $y=0$ axe des x et une ligne du degré $m-1$; posant $\sin m\varphi=0$, on obtient m droites passant par l'origine et rencontrant la ligne T à l'infini ; donc cette ligne est formée de $2m$ branches infinies ;

l'axe polaire est une de ces droites; la seconde droite fait avec cet axe un angle de $\frac{180^\circ}{m}$; la troisième un angle de $2 \cdot \frac{180^\circ}{m}$, la quatrième de $\frac{180^\circ}{m}$ et ainsi de suite.

Posant $\cos m\varphi = 0$, c'est le système de m droites passant par l'origine et faisant successivement avec l'axe des angles de $\frac{90^\circ}{m}$, $\frac{3.90^\circ}{m}$, $\frac{5.90^\circ}{m}$, etc., et rencontrant la courbe U à l'infini; elle est donc aussi composée de $2m$ branches infinies. Ainsi, un cercle de rayon infini, ayant son centre à l'origine, rencontre les deux courbes, chacune en $2m$ points se succédant de telle sorte que chaque point d'intersection d'une courbe se trouve toujours entre deux points d'intersection consécutifs d'une autre courbe.

De cette disposition géométrique, l'on conclut avec évidence que les deux courbes U et T se rencontrent en m points; et par conséquent r et φ sont réels, et la fonction X est décomposable en facteurs trinômes de la forme $x^2 - 2xr\cos\varphi + r^2$, ou en d'autres termes cette fonction a toujours des racines binômes de la forme $a + b\sqrt{-1}$.

6. L'illustre géomètre démontre de plus, par des considérations très-simples, très-ingénieuses, que ces points d'intersection ne surpassent pas le nombre m, et qu'on peut assigner le nombre de points d'intersection qui tombent dans l'intérieur d'un cercle de rayon fini, ayant le pôle pour centre. M. Cauchy a depuis généralisé ce théorème en remplaçant le cercle par une courbe quelconque (*); l'auteur après avoir énoncé seulement d'autres propriétés de ces courbes, par exemple, qu'elles se coupent mutuellement à angles droits, et que si plusieurs branches d'une de ces courbes passent par le même point, il y aura un nombre

(*) Liouville, Journal, t. 3, 1837.

égal de branches de l'autre courbe qui passeront par ces points, et elles se couperont sous des angles égaux, ajoute : *Denique observo, minimè impossibile esse, ut demonstratio præcedens, quàm hìc principiis geometricis superstruxi, etiam in forma mere analytica exhibeatur* (p. 28); c'est cette forme *mere analytica* qui est l'objet des belles études de M. Prouhet, que nous devons faire connaître.

7. Soit $f(z)=0$; et faisant $z=x+y\sqrt{-1}$; on obtient $P+Q\sqrt{-1}=0$; $P=0$, $Q=0$; et P et Q étant des fonctions de x et y, identiques aux fonctions U et T exprimées en coordonnées rectangulaires; les études sont divisées en sept chapitres dont le premier (1 à 2) ne contient que les définitions; l'auteur nomme *points-racines* les intersections des lignes P et Q; le second chapitre (2—6) contient les relations entre les dérivées *partielles* de divers ordres de P et de Q; elles sont de deux genres; celles qui existent entre les dérivées de P et celles de Q, et celles qui existent entre les dérivées de la même fonction. On a

$$\frac{dz}{dx}=1,\ \frac{dz}{dy}=\sqrt{-1},$$

d'où

$$\frac{dfz}{dx}=f'z\frac{dz}{dx}=f'z=\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dx}\sqrt{-1},$$

$$\frac{dfz}{dy}=f'z\frac{dz}{dy}=f'z\sqrt{-1}=\frac{dP}{dy}+\frac{dQ}{dy}\sqrt{-1},$$

d'où

$$\frac{dP}{dx}=\frac{dQ}{dy};\ \frac{dP}{dy}=-\frac{dQ}{dx}.$$

De ces deux équations fondamentales, on déduit facilement

$$\frac{d^nP}{dx^kdy^{n-k}}=-\frac{d^nQ}{dx^{k-1}dy^{n-k+1}};\ \frac{d^nQ}{dx^kdy^{n-k}}=-\frac{d^nP}{dx^{k-1}dy^{n-k+1}};$$

$$\frac{d^nP}{dx^kdy^{n-k}}=-\frac{d^nP}{dx^{k-2}dy^{n-k+2}};\ \frac{d^nQ}{dx^kdy^{n-k}}=-\frac{d^nQ}{dx^{k-2}dy^{n-k+2}}.$$

Ainsi les valeurs absolues des dérivées de même ordre pour la même fonction sont égales.

Le paragraphe III (6 — 8), est consacré aux différences et aux différentielles totales. Supposons que dans fz, on remplace z par $z + \Delta x + \Delta y\sqrt{-1}$, et prenons

$$\Delta x + \Delta y\sqrt{-1} = r(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1}), \quad r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

on trouve facilement par le théorème de Taylor, en égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires,

$$\Delta P = \sum_1^n \frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^nP}{dx^n}\cos n\theta + \frac{d^nP}{dx^{n-1}dy}\sin n\theta\right) + R_1,$$

$$\Delta Q = \sum_1^n \frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^nP}{dx^n}\sin n\theta - \frac{d^nP}{dx^{n-1}dy}\cos n\theta\right) + R_2,$$

R_1 et R_2 désignant les restes de la série ; on a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cot\theta$; passant aux infiniment petits, et désignant par ω la limite de θ, ΔP et ΔQ deviennent les différentielles totales du $n^{ième}$ ordre divisée par le produit $1.2.3\ldots n$, donc

$$\frac{d^nP}{dy^n} = \frac{\frac{d^nP}{dx^n}\cos n\omega + \frac{d^nP}{dx^{n-1}dy}\sin n\omega}{\sin^n\omega}.$$

$$\frac{d^nQ}{dy^n} = \frac{\frac{d^nP}{dx^n}\sin n\omega - \frac{d^nP}{dx^{n-1}dy}\sin n\omega}{\sin^n\omega}.$$

Au moyen de ces expressions analytiques, l'auteur déduit facilement dans le paragraphe IV (8—13), les propriétés des courbes P et Q (U et T de M. Gauss). Il démontre : 1° que lorsque l'équation donnée $f(z) = 0$, a n racines égales, il y a dans chacune de ces courbes un point-racine multiple où passent n branches ayant chacune une tangente distincte, et deux tangentes consécutives comprennent un angle égal à $\frac{\pi}{n}$, et entre deux tangentes consécutives à la courbe P, il y a toujours une tangente à la courbe Q ; et lorsqu'un point-racine est simple, les courbes P et Q se coupent à angles droits, propriétés énoncées aussi ci-dessus; M. Prouhet démontre de plus qu'aucun point-racine ne peut être ni un point d'arrêt, ni un point isolé; ce qui est bien mentionné, mais ne semble pas solidement établi dans la dissertation de l'illustre professeur de Gottingue. Le paragraphe V (13—16), contient les propriétés des courbes données par les équations $P - Q = 0$, $P + Q = 0$; ces propriétés sont identiques aux précédentes. A l'aide de ces courbes, M. Prouhet démontre le beau théorème de M. Cauchy mentionné ci-dessus. Le nombre des points-racines situés dans l'intérieur d'un contour fermé, en supposant qu'il ne s'en trouve aucun sur ce contour même, est égal à la demi-différence entre le nombre des variations descendantes et ascendantes du rapport $\frac{P}{Q}$ pour toute l'étendue du contour supposé parcouru dans le sens direct de rotation. Ce nombre est aussi égal à la demi-différence, entre les variations ascendantes et descendantes du rapport inverse $\frac{Q}{P}$; lorsqu'une quantité passe du négatif au positif, la variation est ascendante.

Les asymptotes des courbes P et Q sont déterminées dans le paragraphe VII (18—22); l'auteur parvient aux mêmes résultats que M. Gauss dont il avertit, dans une note au bas de la page 18, n'avoir point connu la dissertation; et ayant recours, comme M. Gauss encore, à un cercle infini, l'auteur en conclut qu'une équation algébrique du degré m, a autant de racines de la forme $a + b\sqrt{-1}$.

Le paragraphe VIII (22—23), traite des propriétés des surfaces données par les équations à trois variables $t = P$, $t = Q$; M. Gauss mentionne ces surfaces, mais transitoirement (*). Enfin le dernier paragraphe (23—24) indique com-

(*) La dissertation de M. Gauss se termine ainsi: *Hoc vero et reliqua, quæ in hac demonstratione addigitare tantum modo potui, alia occasione fusius exsequi mihi reservo.*

ment, au moyen des formules rapportées ci-dessus, on peut quelquefois parvenir à séparer les quantités réelles et les imaginaires dans une fonction donnée, telle que $\log(x+y\sqrt{-1})$ qui est égal à $\log\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{-1}$ arc tangent $\frac{y}{x}$.

Puissions-nous souvent être gratifiés d'études aussi intéressantes, et si instructives (*).

EXTRAITS DE JOURNAUX.

Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.
N° 1—3 *janvier* 1842.

M. *Vincent.* — Sur un certain emploi que faisaient les Romains, dès le 2e ou 3e siècle de notre ère, des valeurs de position pour l'expression des nombres (p. 43).

En 1693, on a publié, à l'imprimerie royale, la collection suivante: *Veterum mathematicorum Athenæi*, *Bitonis*, *Apollodori*, *Heronis, Philonis et aliorum opera*, *græce et latine*, *nunc primum edita*, 1 *in-fol.* Héron traite des machines à air et à eau, mais les autres ne s'occupent que de machines de guerre et de poliorcétique. Parmi les *aliorum* se trouve Sexte-Jules Africain, auteur qui a vécu en Orient, sous Héliogabale, au 3e siècle de l'ère vulgaire; il a écrit sur la théologie et a composé aussi un ouvrage intitulé *Cestes*, qui veut dire broderies ou bigarrures, composition qui renferme des observations tantôt raisonnables, le plus souvent extravagantes, sur la physique, la médecine et l'art de la guerre. La bibliothèque royale en possède deux manuscrits. Le style de l'auteur est tellement obscur, et les manuscrits tellement défectueux, que D. Thevenot (Melchisedec), traducteur en latin des pre-

(*) Rectification, p. 396. Le théorème 41 doit s'énoncer ainsi : Toute équation du 5e degré dépend de la résolution d'une équation de la forme $x^5+x+a=0$.

miers auteurs ci-dessus désignés, s'est contenté de donner le texte grec, accompagné de quelques annotations et gloses. L'ouvrage est divisé en 77 chapitres ; l'avant-dernier parle de l'emploi des *fanaux* comme signaux de guerre. Après avoir donné quelques préceptes sur la manière de faire ces signaux, l'auteur exprime son admiration de l'usage que font les Romains de ces signaux pour faire connaître au loin la force d'une troupe. A cet effet, dit-il, ils préparent trois espaces, à droite, au milieu, et à gauche ; dans chacun, ils allument depuis un jusqu'à neuf feux ; mais ceux qui sont dans l'espace à gauche désignent des unités ; dans l'espace du milieu, des dizaines ; et dans l'espace à droite, des centaines ; par ce moyen, ils peuvent annoncer des nombres depuis 1 jusqu'à 999 ; et en continuant, ils pouvaient annoncer les mille et dix mille. Cette indication intéressante enfouie dans un ouvrage, rarement consulté, n'a pas échappé à M. Vincent, d'une perspicacité si érudite. Dans la *Biographie universelle,* on lit à l'article de Africain (Sexte-Jules), que Guichard a traduit cet auteur dans son ouvrage intitulé *Mémoires militaires sur les Grecs et les Romains* ; c'est une erreur provenant d'une méprise ; Guichard n'a traduit que l'analyse de la campagne de Jules César en Afrique, par Hirtius (*).

On aurait tort de conclure de l'observation de M. Vincent, que les Romains, dès le second siècle, faisaient usage dans leur calcul de la numération de position ; car, souvent entre la découverte d'un principe et sa conséquence la plus facile, s'écoulent des milliers d'années. Diophante représente par des lettres les quantités inconnues ; il fallut au moins dix siècles avant que Viète ne s'avisât de représenter aussi par des lettres les quantités connues, et c'est là toute l'algèbre.

(*) Cet auteur a en effet donné un extrait des *Cestes*, dans un autre ouvrage. Memoires critiques et historiques sur plusieurs points d'antiquité militaire. Tom. 3, p. 273. Je dois ce renseignement à l'obligeance de M. le professeur Vincent.

DES POINTS DE CONCOURS

des sécantes qui coupent deux transversales en parties porportionnelles ;

PAR M. A. J. CHEVILLARD,
Ancien élève de l'Ecole polytechnique, répétiteur au Collége royal de Bourbon.

—

1. La proposition 16 du livre III de la Géométrie de Legendre est réciproque de la proposition 15. Le corollaire 2 de cette dernière proposition aurait pour réciproque : Si deux droites sont coupées en parties proportionnelles par une suite de sécantes, ces sécantes sont parallèles. Cette réciproque n'est pas vraie, comme on le voit aisément ; mais on ne vérifie par là qu'une circonstance de cette proposition plus générale :

Si deux droites sont coupées en parties proportionnelles par une suite de sécantes, toutes les sécantes sont parallèles ou bien chacune rencontre toutes les autres. Dans ce dernier cas, il arrive que les points de rencontre diffèrent successivement ou se confondent en un seul, selon que les deux droites coupées concourent ou sont parallèles.

Soit deux droites AG, BH (*fig.* 89), coupées par des sécantes, de sorte que l'on ait

$$AC : BD :: CE : DF :: GE : FH :: \text{etc.}$$

Pour établir cette hypothèse, on aura pu tirer arbitrairement les deux premières sécantes AB, CD, puis porter à partir des points C, D sur AG des multiples ou sous-multiples de AC, et sur BH les mêmes multiples ou sous-multiples de BD. AB et CD ne peuvent être que parallèles ou concourantes. Si elles sont parallèles, il en est de même de toutes les sécantes, car en prolongeant AG, BH jusqu'à leur rencontre en O, on a OC:OD::AC:BD, donc, à cause de l'hypothèse, OC:OD::CE:DF, donc CD, EF sont parallèles. De même pour les autres sécantes. Si AG, BH étaient parallèles, alors ABDC serait un parallélogramme, d'où AC = BD, et à cause de l'hypothèse, CE = DF, d'où CDFE parallélogramme, EF parallèle à CD, et ainsi de suite.

Supposons maintenant que AB, CD (*fig.* 90) concourent; ce qui est facile à réaliser en tirant d'un point M deux sécantes à travers deux droites AG, BH, et portant à partir des points C, D des parties proportionnelles, comme on a dit plus haut. AB n'est parallèle ni à CD ni à aucune des lignes suivantes; car si elle l'était à EF, en prolongeant AG, BH jusqu'à leur rencontre O, on aurait OA:OB::AE:BF, et, à cause de l'hypothèse, AE:BF::AC:BD, donc OA:OB::AC:BD, d'où AB, CD parallèles; ce qui n'est pas. On verrait de même qu'aucune sécante n'est parallèle à une autre. Même conclusion si AG, BH étaient parallèles, car si AB était parallèle à EF, on aurait ABFE parallélogramme, d'où AE=BF, et, par suite de l'hypothèse, AC=BD; ce qui ne se peut. La première partie de la proposition est donc démontrée.

2. Considérons les points de rencontre des sécantes. Si les deux droites données concourent, ces points diffèrent successivement. En effet, supposons, s'il est possible (*fig.* 91), que les trois sécantes AB, CD, EF concourent en M, point de rencontre des deux premières. Par B menons Bdf parallèle à AG, on aura (prop. 22, liv. III), AC:Bd::CE:df, donc, à cause de l'hypothèse, BD:Bd::DF:df, et dD serait parallèle à fF, ce qui n'est pas. Ainsi les points de rencontre se détachent successivement M, N, P, etc. On voit bien que quand les parties proportionnelles sont très-petites, ces points tendent par leur réunion à tracer une

courbe. J'en donne l'équation plus loin (4). Si les droites coupées AG, BH sont parallèles, les points de concours des sécantes successives se confondent en un seul. En effet, soit (*fig.* 92), M la rencontre des sécantes AB, CD, et le point où la droite ME couperait BH, on aurait (prop. 22) AC:BD::CE:Df, donc, à cause de l'hypothèse, Df=DF, donc, etc.

3 Une suite de rapports égaux $a:b::c:d::e:f::g:h::$etc., peut être placée sur deux droites concourantes ou parallèles par une suite de sécantes concourantes ou parallèles. Il suffira de la connaissance d'un rapport et de tous les antécédents ou de tous les conséquents. Ainsi pour placer cette suite (*fig.* 93), à partir des points A et B sur les deux concourantes AG, BH, on mènera Bh parallèle à AG, on prendra AC$=a$, B$d=b$, CE$=c$, EG$=e$, GI$=g$, etc. On tirera AB, CD qui concourent en m, puis mE, mG, mI, etc., qui donnent $d\alpha=d$, $ah=f$,... avec des cercles du centre B on rabattra d en D, f en F, h en H, etc.

PROBLÈME.

4. *Quelle est la courbe que tendent à décrire les intersections consécutives d'une infinité de sécantes interceptant sur deux droites fixes données des parties proportionnelles, lorsque ces parties sont très-petites?* (fig. 94). Je prends les deux droites fixes pour axes coordonnés, et je désigne par A le rapport connu qui existe constamment entre les portions qu'interceptent sur les axes deux sécantes quelconques. Il est évident qu'il faut encore connaître la première sécante AB à partir de laquelle on porte les parties très-petites AC, BD, .. dont le rapport est A; car si l'on change la position de cette sécante, tout le système des points consécutifs d'intersection change de position. Je désignerai cette sécante primitive par l'équation $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$. Faisant croître α

d'une quantité très-petite h, β sera accru d'une autre quantité très-petite k telle que $\frac{k}{h}=A$, de sorte qu'on aura pour la seconde sécante CD, $\frac{x}{\alpha+h}+\frac{y}{\beta+Ah}=1$. Pour trouver commodément le point de rencontre M de ces deux sécantes, on retranche leurs équations après en avoir fait disparaître les dénominateurs, et l'on arrive à $Ahx+hy=Ah\alpha+h\beta+Ah^2$, ou en simplifiant $Ax+y=A\alpha+\beta+Ah$. Entre cette équation et l'équation de la première sécante, on élimine y et l'on trouve $x=\frac{A\alpha(h+\alpha)}{A\alpha-\beta}$. Mais comme h doit être une quantité infiniment petite pour qu'il y ait lieu à une courbe, on supposera $h=0$, d'où pour le point M,

$$x=\frac{A\alpha^2}{A\alpha-\beta}, \quad \text{puis} \quad y=\frac{-\beta^2}{A\alpha-\beta},$$

obtenu en substituant la valeur de x dans l'équation de la première sécante. Telles sont les coordonnées du point de rencontre de la première sécante AB, avec la sécante infiniment voisine. Si l'on veut considérer maintenant l'intersection d'une sécante quelconque de la suite de AB, par exemple GH... $\frac{x}{\alpha+h}+\frac{y}{\beta+Ah}=0$ (h étant un accroissement fini AG), avec sa sécante infiniment voisine, on conçoit qu'on y parviendra en remplaçant dans les calculs la première sécante AB par la sécante GH, et la sécante infiniment voisine de AB, par la sécante infiniment voisine de GH, savoir $\frac{x}{\alpha+h+h'}+\frac{y}{\beta+Ah+Ah'}=1$, h' devenant une quantité infiniment petite. Il suffira donc pour avoir le point de rencontre de GH avec la sécante voisine, de remplacer dans les valeurs ci-dessus, α par $\alpha+h$ et β par $\beta+Ah$, d'où

$$x=\frac{A(\alpha+h)^2}{A\alpha-\beta}, \quad y=\frac{-(\beta+Ah)^2}{A\alpha-\beta}.$$

Maintenant, comme on a l'intersection de deux sécantes infiniment voisines quelconques de la suite de AB, il est évident qu'en éliminant la quantité finie h de signe quelconque entre les deux équations précédentes, il s'agira des intersections consécutives de toutes les sécantes infiniment voisines à droite et à gauche de AB, c'est-à-dire qu'on aura l'équation du lieu cherché. Les deux équations précédentes peuvent s'écrire

$$Ax(A\alpha-\beta)=A^2(\alpha+h)^2,\qquad y(A\alpha-\beta)=-(\beta+Ah)^2.$$

En les ajoutant ensemble, on a

$$(A\alpha-\beta)(Ax+y)=A^2\alpha^2-\beta^2+2Ah(A\alpha-\beta);$$

ôtant le facteur commun $A\alpha-\beta$, et tirant la valeur de Ah, on a

$$Ah=\frac{Ax+y-A\alpha-\beta}{2};$$

enfin, remplaçant cette valeur de Ah dans l'équation en y, on trouve, après réduction,

$$(1)\quad y^2+2Axy+A^2x^2+2y(A\alpha-\beta)-2Ax(A\alpha-\beta)+(A\alpha-\beta)^2=0,$$

pour l'équation du lieu cherché, lequel est comme on voit une parabole tangente à l'axe des x et à l'axe des y, car les coordonnées à l'origine sont fournies par les équations $(Ax-A\alpha+\beta)^2=0$, $(y+A\alpha-\beta)^2=0$. La droite $y=-Ax$ est un diamètre qui rencontre la parabole en un point dont les coordonnées sont les quarts des coordonnées des contacts avec les axes. Si l'on suppose $A=\frac{\beta}{\alpha}$, c'est-à-dire toutes les sécantes parallèles à la première, l'équation de la parabole devient $(y+Ax)^2=0$, diamètre de l'origine. Cela n'a pas besoin d'interprétation.

5. On prévoit que toute droite obtenue en portant à partir de AB sur les axes, deux longueurs dans le rapport A, sera aussi bien que les axes et la sécante AB, tangente à

la parabole. Pour le vérifier par le calcul, j'observe que l'équation de la parabole trouvée est de la forme

$$(2)\qquad y^2+2Axy+A^2x^2+2my-2Amx+m^2=0\,;$$

et même c'est là la forme de l'équation de toute parabole rapportée à deux tangentes comme axes coordonnés, car toute parabole ainsi rapportée aura pour équation

$$y^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0,$$

avec les relations $b^2-4c=0$, $d^2-4f=0$, $e^2-4cf=0$, de sorte qu'en éliminant les coefficients c, d, e, l'équation sera $y^2+bxy+\frac{b^2}{4}x^2\pm2y\sqrt{f}\mp bx\sqrt{f}+f=0$. Les coefficients d'$y$ et d'x peuvent être pris avec l'un ou l'autre de leurs signes, parce qu'en effet rien n'oblige à porter les x et les y positifs d'un côté plutôt que d'un autre de l'origine des axes-tangentes ; mais il faut les prendre ensemble en signe contraire... $\pm 2y\sqrt{f}\mp bx\sqrt{f}$... attendu qu'en prenant ensemble les deux $+$ ou les deux $-$, l'équation serait $\left(y+\frac{b}{2}x\pm\sqrt{f}\right)^2=0$, et ne représenterait plus une parabole. L'équation (2) convient donc bien à toute parabole rapportée à deux axes-tangentes, m et A étant des nombres de signes quelconques. Pour trouver les conditions auxquelles on reconnaît qu'une droite $y=ax+b$ est tangente à une parabole ainsi représentée, on remplacera y par $ax+b$ dans l'équation (2), ce qui donnera

$$x^2(A+a)^2+2x(Ab+ab-Am+am)+(b+m)^2=0.$$

Établissant que les racines de cette équation sont égales, on aura $a(b+m)+A(b-m)=\pm(a+A)(b+m)$. Le signe $+$ conduit à une absurdité et le signe $-$ à la relation

$$ab+am+Ab=0,$$

pour la condition de tangence cherchée. Or la sécante AB et toute autre de sa suite, étant représentée par $\frac{x}{\alpha+h}+\frac{y}{\beta+\mathrm{A}h}=1$, satisfait à cette relation, car alors $a=-\frac{\beta+\mathrm{A}h}{\alpha+h}$, $b=\beta+\mathrm{A}h$, de sorte que par la substitution de ces valeurs, la relation de tangence acquiert le facteur commun $\beta+\mathrm{A}h$, se simplifie et devient une identité, ce qui démontre la propriété énoncée des sécantes aux axes. On voit donc qu'on peut mener des tangentes à la parabole trouvée (4) en employant le procédé cité n° 3. Cette propriété, que *les sécantes interceptant sur deux droites qui concourent des parties proportionnelles, sont toutes tangentes à une même parabole*, explique de nouveau pourquoi chacune des sécantes n'est parallèle à aucune autre (2), car on sait qu'à la parabole, il ne peut y avoir deux tangentes parallèles.

6. Lorsque deux droites qui concourent, sont fixées, ainsi que la position d'une première sécante, la parabole, lieu des concours des sécantes, est déterminée (4). Mais si, au contraire, on donne d'abord une parabole quelconque, on pourra toujours la rapporter à deux tangentes, puisqu'il n'y a pas de parallèles entre elles ; alors son équation sera de la forme (2) n° 5, comme je l'ai démontré. En identifiant les équations (1) et (2), on a seulement $m=\mathrm{A}\alpha-\beta$. Une des coordonnées α, β reste donc arbitraire pour que la première sécante $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ soit tangente à la courbe, ce qui montre qu'on peut choisir, pour fixer le départ des parties proportionnelles sur les deux axes, telle tangente qu'on voudra. Ensuite, quel que soit h, la droite $\frac{x}{\alpha+h}+\frac{y}{\beta+\mathrm{A}h}=1$, est toujours tangente à la parabole ; cela suit des équations identiques (1) et (2). J'ajouterai seulement que le rapport A des parties proportionnelles, varie évidemment avec les deux

premières tangentes qu'on prend pour axes coordonnés ; car ce rapport est égal au rapport des sinus des angles de ces deux tangentes, avec le grand axe de la parabole. Il est donc démontré que *si l'on mène deux tangentes quelconques à une parabole, toutes les tangentes qu'on lui mènera ensuite, intercepteront sur ces deux tangentes à partir d'une troisième fixée à volonté des parties constamment proportionnelles.*

Observation. Si les deux droites du problème (4) sont situées dans l'espace, alors il est facile de démontrer que la sécante décrit un paraboloïde hyperbolique, engendré par le mouvement d'une droite qui s'appuie toujours sur les deux droites données, et sur une troisième droite facile à déterminer.

Il suffit de prendre pour plan des xy, un plan parallèle aux droites et pour axe des z, la direction de la plus courte distance. Alors les équations des deux droites sont de la forme

$$\begin{cases} z = m, \\ y = ax, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = n, \\ y = bx. \end{cases}$$

Prenant sur la première droite un point dont les coordonnées sont $x = \alpha + kt$, $y = ax$, $z = m$, et sur la seconde un autre point ayant pour coordonnées $x = \beta + lt$, $y = bx$, $z = n$, (α, β, k, l, étant des constantes, et t une variable) ; éliminant t entre les équations de deux projections de la droite qui passe par ces deux points, on parvient à l'équation cherchée :

$$(z-m)^2(a-b)(\alpha l-\beta k)+(z-m)(m-n)\left[(k-l)y+(bl-ak)x+\right.$$
$$\left.+(a-b)(\alpha l-\beta k)\right]+(m-n)^2 k(y-ax)=0.$$

Faisant $z=0$, on trouve l'équation d'une troisième directrice.

La surface est aussi engendrée par le mouvement d'une droite constamment parallèle au plan xy, et s'appuyant sur deux directrices. Tm.

SUR LES

FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES;

PAR M. CATALAN (E).

—

La note suivante ne contient rien de neuf: si je me décide à la publier, c'est parce que la manière dont on présente ordinairement la théorie des fractions périodiques n'est, si je ne me trompe, ni très-logique, ni très-rigoureuse. En outre, cette théorie s'appuie assez naturellement sur le théorème de Fermat, et sur d'autres propriétés intéressantes, qu'il serait peut-être convenable de faire entrer dans les éléments (*).

Dans tout ce qui va suivre, on supposera que la fraction ordinaire donnée est réduite à sa plus simple expression, et que son numérateur n'est pas terminé par zéro.

I. *Lorsque le dénominateur ne renferme que les facteurs premiers 2 ou 5, la fraction est exactement réductible en décimales, le nombre des chiffres décimaux est égal au plus grand des exposants de 2 et 5 dans le dénominateur.*

Soit la fraction $\frac{13}{8000} = \frac{13}{2^6 \times 5^3}$. En multipliant haut et bas par 5^3, elle devient $\frac{13 \times 5^3}{2^6 \times 5^6} = \frac{13 \times 5^3}{10^6}$. Donc la fraction proposée est équivalente à une fraction décimale contenant six chiffres décimaux. On voit de plus, que l'on peut obtenir le nouveau numérateur sans effectuer de division.

(*) En 1835, M. Midy, alors professeur au collége de Nantes, a publié un petit mémoire que ma note reproduit en grande partie : d'après ce que j'ai dit ci-dessus, cette conformité était inévitable.

II. *Dans tous les autres cas, la fraction donnée n'est pas exactement réductible en décimales, et elle conduit à une fraction périodique.*

Soit, s'il est possible $\frac{23}{30} = \frac{763}{1000}$. La première fraction étant irréductible, les deux termes de la seconde doivent être des multiples de ceux de la première ; donc 1000 serait divisible par 30 ; ce qui est absurde, puisque 30 contient le facteur 3, qui n'entre pas dans 1000.

Si donc, on procède à la réduction de $\frac{23}{30}$ en décimales, aucune division ne se fera exactement ; et comme chaque reste est moindre que 30, il arrivera qu'à la 30^e division au plus, on retombera sur un reste déjà obtenu. Ce reste étant suivi d'un zéro, donnera un dividende partiel, un quotient et un reste déjà obtenus, etc. Donc les quotients et les restes formeront deux suites périodiques : *le nombre des termes de chaque période sera moindre que le dénominateur.*

III. *Si le dénominateur est premier avec 10, la période décimale commence dès la virgule.*

Soit la fraction $\frac{4024}{21}$. Pour la réduire en décimales, on divise 4024 par 21, *ce qui donne la partie entière de la fraction périodique;* puis on écrit 0 à la droite du reste, on divise par 21 ; il résulte de là, que pour opérer cette réduction, on divise par 21 les quantités suivantes :

$$4024,\quad 4024\times 10,\quad 4024\times 10^2,\quad 4024\times 10^3,\ldots \qquad (A)$$

La fraction $\frac{4024}{21}$ donne lieu à une période, donc les restes fournis par les dividendes de la suite (A) doivent pareillement former une période. Supposons que 4024×10^4 et 4024×10^n soient deux dividendes donnant des restes égaux leur différence devra être divisible par 21, donc

$$\frac{4024 \times 10^{11} - 4024 \times 10^4}{21} = \text{entier, ou } \frac{10^4(4024 \times 10^7 - 4024)}{21} = \text{entier.}$$

Et comme 21 est premier avec 10, il résulte d'un principe connu, que $\dfrac{4024 \times 10^7 - 4024}{21} =$ entier. C'est-à-dire que le terme 4024×10^7, de la suite (A), étant divisé par 21, donne le même reste que 4024, divisé par 21. Autrement dit, la période des restes commence au premier dividende 4024, et la période décimale commence immédiatement après la virgule.

On pourrait se demander si cette dernière période ne peut pas commencer avant la virgule, c'est-à-dire si le chiffre des unités peut-être égal au dernier chiffre de la première période qui suit la virgule. Par exemple, peut-on avoir

$$\frac{4024}{21} = 19\dot{1},61904\dot{1}61904\dot{1}\ldots ?$$

D'après ce qui précède, il est évident que non.

Effectivement, soient Q et Q' les quotients de 4024 et de 4024×10^7, R étant le reste. On a

$$4024 = Q \times 21 + R,$$
$$4024 \times 10^7 = Q' \times 21 + R;$$

d'où

$$4024 \times (10^7 - 1) = (Q' - Q) \times 21, \text{ ou } 4024 \times 999999 = (Q' - Q) \times 21.$$

Le premier membre n'est pas divisible par 10, donc le second ne l'est pas non plus; donc $Q' - Q$ n'est pas terminé par zéro; ou, ce qui est la même chose, Q' et Q ne sont pas terminés par le même chiffre.

IV. *Lorsque le dénominateur n'est pas premier avec 10, la période est précédée d'une partie décimale non périodique, renfermant autant de chiffres que l'indique le plus grand des exposants de 2 et 5 dans le dénominateur.*

Soit la fraction $\frac{17}{10500} = \frac{17}{21 \times 2 \times 5^3}$. En multipliant les deux termes par 2^2, elle devient $\frac{17 \times 2^2}{21 \times 2^3 \times 5^3} = \frac{17 \times 2^2}{21 \times 10^3} =$ $= \frac{17 \times 2^2}{21} \times \frac{1}{10^3}$. Si l'on réduit en décimales la fraction $\frac{17 \times 2^2}{21} = \frac{68}{21}$, on aura une période commençant dès la virgule, *et non avant*. Ensuite, pour multiplier cette quantité décimale par $\frac{1}{10^3}$, il faudra reculer la virgule de trois rangs vers la gauche.

V. Lemme. 1° *Si* N *et* A *sont deux nombres premiers entre eux, les restes que l'on obtiendra en divisant par* N *les* N—1 *premiers multiples de* A, *seront tous différents ;*

2° *Si parmi ces multiples, on ne prend que ceux qui sont premiers avec* N, *les restes seront tous les nombres moindres que* N *et premiers avec* N.

Soient les nombres 8 et 15, premiers entre eux. Prenons les sept premiers multiples de 15 ; savoir

15×1, 15×2, 15×3, 15×4, 15×5, 15×6, 15×7.

Aucune division par 8, ne se fera exactement. Car soit, s'il est possible, $\frac{15 \times 4}{8} =$ entier ; le diviseur 8 premier avec 15, devrait diviser 4 qui est moindre que 8.

En second lieu, si deux de ces dividendes donnaient le même reste, leur différence devrait être divisible par 8. Or cette différence est un de nos multiples.

Il résulte de cette observation, que ces restes dont il s'agit seront les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 dans un certain ordre. Et, en général, les restes seront les entiers 1, 2, 3,... N — 1, dans un certain ordre.

Quant à la seconde partie du lemme, elle est évidente ;

car si un dividende et un diviseur sont premiers entre eux, le reste est premier avec le diviseur.

Dans l'exemple que nous avons choisi, les dividendes sont :

15, 30, 45, 60, 75, 90, 105,

et les restes correspondants :

7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Si, parmi ces multiples de 15, on ne prend que ceux qui sont premiers avec 8 ; savoir :

15, 45, 75, 105,

les restes seront :

7, 5, 3, 1,

et ces restes sont, comme nous l'avons énoncé, les nombres inférieurs et premiers à 8.

Soient encore les nombres 14 et 33 premiers entre eux. Nous aurons :

dividendes : 33×1, 33×2, 33×3, 33×4, 33×5, 33×6,
restes : 5, 10, 1, 6, 11, 2,
33×7, 33×8, 33×9, 33×10, 33×11, 33×12, 33×13,
7, 12, 3, 8, 13, 4, 9.

Observons en passant que, d'après un principe connu, les termes de la seconde ligne se forment par voie d'addition et de soustraction. Ainsi le 1er reste étant 5, on a

$$2^e \text{ reste} = 5+5=10, \quad 2^e \text{ reste} = 10+5-14=1,$$
$$4^e \text{ reste} = 1+5=6, \quad \text{etc.}$$

Si, dans la première ligne, nous prenons ces dividendes premiers avec 14 ; savoir :

33×1, 33×3, 33×5, 33×9, 33×11, 33×13,

les restes seront

5, 1, 11, 3, 13, 9.

Ces restes sont inférieurs et premiers à 14.

VI. *Si le dénominateur est premier, la période a un nombre de chiffres qui divise le dénominateur moins un.*

Soit le dénominateur 17, et supposons pour plus de simplicité, que le numérateur soit 1. Les quantités

$$10\times1,\quad 10\times2,\quad 10\times3,\ldots\quad 10\times16,$$

donneront, étant divisées par 17, des restes qui seront les nombres

$$1,\quad 2,\quad 3,\ldots\ldots\quad 16,$$

dans un certain ordre.

Multiplions entre eux, tous les termes de la première ligne, et tous ceux de la seconde : les produits, divisés par 17, doivent donner des restes égaux ; donc leur différence est divisible par 17. Ainsi,

$$\frac{10^{16}.1.2.3\ldots16-1.2.3\ldots16}{17}=\text{entier, ou }\frac{1.2.3\ldots16(10^{16}-1)}{17}=\text{entier.}$$

17 étant un nombre premier, doit diviser un des facteurs du numérateur. Les facteurs 1, 2, 3,... 16 sont moindres que 17; donc $\frac{10^{16}-1}{17}=$ entier.

Si donc on divise par 17 les nombres

$$1,\quad 10,\quad 10^2,\ldots\quad 10^{16},\ \ldots\ ;$$

le reste 1, provenant de la première division, se reproduira à la 17^e. Autrement dit, quand on réduira $\frac{1}{17}$ en décimales, la période sera telle, que le premier chiffre décimal sera égal au 17^e, le deuxième égal au 18^e, etc. Ceci exige évidemment que le nombre des chiffres de la période soit un diviseur de 16.

En réduisant $\frac{1}{17}$ en décimales, on trouve

$$0,05882352941176470 58\ldots\ ;$$

la période a 16 chiffres. $\frac{1}{13}$ donne 0,076923076 .. : la période a 6 chiffres, etc.

VII. *Théorème de Fermat. Si* P *est un nombre premier qui ne divise pas* N, *la puissance* P — 1 *de* N, *étant diminuée de l'unité, donne un reste divisible par* P; ou

$$\frac{N^{P-1}-1}{P}=\text{entier}.$$

La démonstration employée dans le paragraphe précédent est évidemment indépendante des nombres 17 et 10 que nous avons considérés; elle suppose seulement le nombre 17 premier et non diviseur de 10. Remplaçant donc 10 par N et 17 par P, on tombe sur le théorème de Fermat.

VIII. *Si le dénominateur de la fraction, au lieu d'être premier absolu, est seulement premier relativement à* 10, *la période a un nombre de chiffres qui divise le nombre des entiers moindres que le dénominateur, et premiers avec lui.*

Soit le dénominateur 33 : divisons par ce nombre les multiples de 10, premiers avec 33, jusqu'à l'ordre 33 — 1; savoir :

$$10\times1,\ 10\times2,\ 10\times4,\ 10\times5,\ 10\times7,\ 10\times8,\ 10\times10,\ 10\times13,\dots\ 10\times32.$$

D'après le paragraphe V, les restes seront, dans un certain ordre, les nombres

$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 5,\quad 7,\quad 8,\quad 10,\quad 13,\quad 32,$$

inférieurs et premiers à 33.

Donc, par le même raisonnement que ci-dessus, on aura, k désignant combien il y a de ces derniers nombres

$$\frac{1\times2\times4\times5\times7\times8\times10\times13\times\dots\times32\,(10^k-1)}{33}=\text{entier}.$$

33 est premier avec tous les facteurs, sauf le dernier; donc

$$\frac{10^k-1}{33}=\text{entier}.$$

Ainsi, dans la réduction de $\frac{1}{33}$ en décimales, le reste 1, qui se présente à la première division, se représentera à la $(k+1)^e$. On conclut de là que le nombre des chiffres de la période décimale doit diviser k.

Il sera démontré (XI) que $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ désignant les facteurs premiers inégaux du dénominateur, on a

$$k = \mathrm{D} \cdot \frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot \frac{\beta - 1}{\beta} \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma}.$$

On pourra donc facilement, dans chaque cas particulier, avoir une limite du nombre des chiffres de la période.

Par exemple, pour la fraction $\frac{7}{33}$, comme $33 = 3 \times 11$, $k = 33 \times \frac{2}{3} \times \frac{10}{11} = 20$. Le nombre des chiffres sera 20, ou un diviseur de 20. Effectivement $\frac{7}{33}$ donne la fraction 0,2121...

IX. *Généralisation du théorème de Fermat. Si* D *est un nombre premier par rapport à* N, *et si* k *indique le nombre des entiers inférieurs et premiers à* D, *on a*

$$\frac{\mathrm{N}^k - 1}{\mathrm{D}} = \text{entier}.$$

Ce théorème, qui donne celui de Fermat, quand $\mathrm{D} = \mathrm{P}$, se démontre de la même manière.

X. Problème. *Revenir d'une fraction décimale périodique à sa génératrice.*

1° Une fraction périodique simple est équivalente à une fraction ordinaire, qui a pour numérateur la période, et pour dénominateur un nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période;

2° Une fraction périodique mixte est équivalente à une fraction ordinaire, qui a pour numérateur l'ensemble de la partie non périodique et de la période, moins la partie non périodique, et dont le dénominateur est un nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période, suivis d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans la partie non périodique.

Soit la fraction périodique 0,619047619047... Cherchons la fraction ordinaire qui, réduite en décimales conduirait à cette période.

Observons que les fractions $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$,..... réduites en décimales, conduiraient aux fractions périodiques 0,111... 0,010101... 0,001001001... ; donc la fraction $\frac{1}{999999}$ donnerait 0,000001000001..... Par suite, une fraction double, triple, de $\frac{1}{999999}$, produirait une période double, triple,... de (000001); et enfin $\frac{619047}{999999}$, réduite en décimales, donnerait la fraction périodique proposée.

Nous dirons alors que la fraction ordinaire $\frac{619047}{999999}$ est la *génératrice* de 0,619047619,... et nous regarderons ces deux quantités comme étant *équivalentes* (*).

Soit maintenant la fraction périodique mixte 0,45652652... On peut la mettre sous la forme

$$0{,}45+0{,}00652652...=\frac{45}{100}+\frac{1}{100}\times 0{,}652652....$$

Cette dernière fraction périodique simple équivaut à $\frac{652}{999}$.

Donc la proposée $=\frac{45}{100}+\frac{652}{99900}=\frac{45\times999+652}{99900}=$

$$=\frac{45000-45+652}{99900}=\frac{45652-45}{99900}.$$

(*) Dans un cours d'arithmétique, c'est seulement à l'article des Progressions par quotient, que l'on peut démontrer ce que nous admettons ici.

XI. **Problème.** ***Trouver combien il y a, pour un nombre donné, d'entiers moindres que ce nombre, et premiers avec lui.***

Soit le nombre $360 = 2^3.3^2.5$.

Supposons que l'on écrive la suite des nombres naturels, de 1 à 360. Si, dans cette suite de termes, on efface tous ceux qui ont des facteurs communs avec 360, les nombres restant, seront premiers à 360. Soit donc la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ldots\ 360. \qquad (A)$$

Commençant par la gauche, je marque d'un trait tous les multiples de 2; savoir

$$2\times 1,\quad 2\times 2,\quad 2\times 3,\ldots\ 2\times\frac{360}{2}.$$

La suite (A) devient ainsi

$$1,\ \cancel{2},\ 3,\ \cancel{4},\ 5,\ \cancel{6},\ 7,\ \cancel{8},\ 9,\ \cancel{10},\ 11,\ldots\ 3\cancel{6}0. \qquad (B)$$

Il est clair que les termes restant sont premiers avec 2: leur nombre est $360 - \frac{360}{2} = 360\left(1-\frac{1}{2}\right)$. Actuellement j'efface de même les multiples de 3: 3×1, 3×2, 3×3, $3\times 4,\ldots\ 3\times\frac{360}{3}$. Mais parmi ces multiples, ceux qui contiennent le facteur 2, ont déjà été retranchés. Je ne dois donc faire attention qu'à ceux dans lesquels le multiplicateur de 3 est premier avec 2. Ces multiplicateurs forment la suite

$$1,\quad 2,\quad 3,\ldots\ \frac{360}{3}, \qquad (C)$$

donc, d'après ce qui vient d'être dit, le nombre de ceux qui sont premiers avec 2, est $\frac{360}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)$. Ce nombre indique celui des termes à effacer dans la suite (B); en sorte que le nombre des termes non effacés sera

$$360\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{360}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right) = 360\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right).$$

La suite (B) devient alors

$$1,\ \cancel{2},\ \cancel{3},\ \cancel{4},\ 5,\ \cancel{6},\ 7,\ \cancel{8},\ \cancel{9},\ \cancel{10}\ 11,\ \cancel{12},\ 13, \ldots\ 360. \quad \text{(D)}$$

Effaçons enfin les multiples de 5 : il y en a en tout $\frac{360}{5}$, parmi lesquels on ne doit compter que ceux qui sont premiers avec 2 et 3. Or, d'après ce que nous venons de voir dans la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ \frac{360}{5},$$

le nombre des termes premiers avec 2 et 3 est $\frac{360}{5}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$. C'est là aussi le nombre des termes qui restent à effacer dans la suite (D). Les termes restant définitivement seront donc en nombre

$$360\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)-\frac{360}{5}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=360\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right).$$

Cette dernière quantité indique donc le nombre des entiers inférieurs et premiers à 360. La démonstration est évidemment générale, et si N est un nombre entier, dont les facteurs premiers *inégaux* soient α, β, γ,... on a

$$k=\mathrm{N}\frac{\alpha-1}{\alpha}\ \frac{\beta-1}{\beta}\ \frac{\gamma-1}{\gamma}\ldots.$$

XII. *Soit la fraction* $\frac{13}{49}$, *qui conduit à cette période de restes*:

13, 32, 26, 15, 3, 30, 6, 11, 2, 22, 24, 44, 48, 39, 47, 29, 45, 9, 41, 18, 33, 36, 17, 23, 34, 46, 19, 43, 38, 37, 27, 25, 5, 1, 10, 2, 20, 4, 40, 8, 31, 16.

Prenons dans cette suite un certain nombre de termes, dont la somme soit un multiple de 49; par exemple 13, 11, 25. Je dis que les trois termes qui suivent respectivement ceux-ci, ont pour somme un multiple de 49.

En effet, les trois restes 13, 11, 25 donnent les dividendes 130, 110, 250, lesquels étant divisés par 49 conduisent à des quotients q, q', q'' et à des restes r, r', r''. Par suite,

$$\begin{aligned} 130 &= 49.q + r, \\ 110 &= 49.q' + r', \\ 250 &= 49.q'' + r''. \end{aligned}$$

Donc en ajoutant : $49 \times 10 = 49(q + q' + q'') + r + r' + r''$, ou $10 = q + q' + q'' + \frac{r + r' + r''}{49}$: ce qui démontre la proposition énoncée.

XIII. *Ne considérons dans la période précédente, que deux restes dont la somme soit 49: par exemple 13 et 36. D'après ce qui vient d'être démontré, la somme des deux restes suivants doit être un multiple de 49, et comme ils sont chacun moindre que ce diviseur, leur somme sera précisément 49. On observe en effet, dans les deux lignes ci-dessus, que tous les termes qui se correspondent verticalement ont 49 pour somme.*

En général, s'il existe deux termes dont la somme soit égale au diviseur, la période entière aura un nombre pair de termes: chaque terme de la première demi-période, ajouté au terme du même rang dans l'autre demi-période, donnera une somme égale au diviseur.

Cette circonstance se présentera toutes les fois que la période, provenant d'un dénominateur D, aura k termes (IX) : car alors, comme on doit trouver pour restes tous les nombres premiers avec D, il y en aura au moins deux, qui ajoutés, donneront D.

XIV. *Réduisons en décimales la fraction* $\frac{1}{13}$, *dont le dénominateur est premier: la période des restes est* 1, 10, 9, 12, 3, 4.

Écrivons cette période assez de fois pour obtenir $13 - 1$ termes, nous aurons

1, 10, 9, 12, 3, 4, 1, 10, 9, 12, 3, 4.

Actuellement, décomposons 13 — 1 ou 12, en deux facteurs, par exemple en 3.4 : je dis que si l'on prend dans la suite ci-dessus, 4 termes de 3 en 3, ou 3 termes de 4 en 4, on obtiendra pour somme, un multiple de 13.

Pour démontrer cette propriété, prenons les termes 10, 4, 12; et nommons R le reste de la division de 10^4 par 13, nous aurons évidemment

$$10.R = M.13 + 4,$$
$$4.R = M.13 + 12,$$
$$12.R = M.13 + 10,$$

en désignant par M.13 un multiple de 13, et en observant qu'après le reste 12, on doit nécessairement retomber sur le premier terme 10.

On déduit de ces équations

$$(10+4+12)\,R = M.13 + (10+4+12),$$

ou

$$(10+4+12)\,(R-1) = M.13.$$

Mais R — 1 est moindre que 13 qui est premier; donc

$$\frac{10+4+12}{13} = \text{entier.}$$

En général, si la fraction est $\frac{N}{D}$, si D est premier, et si $D-1=mn$; la somme de n termes pris de m en m, est multiple de D.

Observation. I.— 10 est une *racine primitive* à l'égard de 7, c'est-à-dire que les 6 premières puissances de 10 divisées successivement par 7, donnent pour restes les 6 nombres qui précèdent 7. Le théorème de Fermat donne $10^6 = \dot{7}+1$. Nous désignons par un point placé sur le nombre, un multiple quelconque de ce nombre. On a donc aussi $10^{6.7} = \dot{7}+1$: or 6.7 est le double d'un nombre triangulaire. Ainsi $6.7 = 2(1+2+3+4+5+6)$, donc

$$(10.10^2.10^3.10^4.10^5.10^6)^2 = \dot{7}+1.$$

Otant les multiples de 7 qui se trouvent dans le premier membre, on obtient évidemment

$$(1.2.3.4.5.6)^2 = \dot{7} + 1,$$

d'où

$$(1.2.3.4.5.6)^2 - 1 = \dot{7},$$

$$(1.2.3.4.5.6+1)\,(1.2.3.4.5.6-1) = \dot{7}.$$

Or au nombre 7, on peut substituer un nombre premier quelconque, et au nombre 10, une racine primitive de ce nombre. On a donc en général, P désignant un nombre premier absolu

$$(1.2.3 \ldots (P-1))^2 = \dot{P} + 1.$$

Le théorème de Wilson (voir p. 178), consiste en ce que

$$1.2.3 \ldots (P-1) = \dot{P} - 1.$$

Si on pouvait donc directement démontrer que le produit $1.2.3 \ldots (P-1)$, n'est jamais de la forme $\dot{P}+1$, alors le théorème de Wilson serait une conséquence immédiate de celui de Fermat (*).

II.— Le mémoire de M. Midy cité dans le travail de M. Catalan porte pour titre: *De quelques propriétés des nombres et des fractions périodiques*; par M. E. Midy, Paris 1835, in-4° de 21 pages, chez Bachelier. Tm.

SOLUTION DU PROBLÈME III (page 122);

PAR M. BERTOT (H),

Elève du collége de Louis-le-Grand.

—

Fig. 100. Supposons le problème résolu, et que la bille aille de O en F sur AC, de F en E sur BC, de E en D sur AB et revienne enfin de D en F, et prenons G symétrique du point donné O par rapport à AC, puis H symétrique de

(*) Nous donnerons dans le prochain numéro, d'après M. Gauss, une démonstration très-simple du théorème de Wilson et d'autres propriétés des nombres. Tm.

G par rapport à BC, et enfin I, symétrique de H par rapport à AB. Dans le triangle GFI on connaît le côté GI; donc si on connaissait l'angle GFI, pour avoir le point F, il suffirait de décrire sur GI un segment capable de GFI, on a

$$GFI = GFA + AFD,$$

ou bien

$$GFI = CFE + AFD;$$

Car GFA est égale à son opposé GFE. On a

$$CFE + CEF = A + B, \ldots \quad (1)$$

et

$$AFD + ADF = B + C \ldots \quad (2)$$

D'un autre côté EDB (ou son égal ADF) + DEB (ou son égal CEF) = A + C (3); si on ajoute (1) et (2) et qu'on retranche (3), on a

$$CFE + AFD = GFI = 2B.$$

C'est-à-dire que l'angle GFI est le double de l'angle opposé au côté AC dans le triangle ABC (*).

SOLUTION DU PROBLÈME 24 (p. 246);

PAR M. MERLIEUX (ÉDOUARD).

—

Quelle est la somme des angles solides dans chacun des corps réguliers?

La note IX des *Éléments de Géométrie* de Legendre, apprend à trouver, et nous donnons dans le tableau ci-joint les inclinaisons des faces adjacentes dans chacun des cinq polyèdres réguliers, soit en appliquant la formule

$$\cos a = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

(*) Même genre de solution pour un billard polygonal. Tm.

α, β, γ étant les angles plans d'un trièdre (*) auquel appartient l'angle dièdre considéré a), soit, plus généralement, en employant $\sin\frac{1}{2}a = \frac{\cos\frac{\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{n}}$, m étant le nombre d'angles plans qui se réunissent pour former chacun des angles solides, et n le nombre de côtés de chaque face (**).

Or ces inclinaisons ne sont autre chose que les angles des polygones équiangles interceptés sur la sphère décrite du sommet comme centre, et conséquemment la mesure de ces polygones $M = \frac{ma - (m-2)\,180^\circ}{90^\circ}$, en prenant pour unité le triangle tri-rectangle. Tous les angles solides étant égaux dans chaque corps régulier, on a leur somme Σ, égale à l'un d'eux multiplié par leur nombre, p; ou $\Sigma = pM$. Il suffit donc d'appliquer ces formules.

C'est ici l'occasion de rappeler les valeurs des autres parties des cinq corps réguliers, que donne M. Terquem dans son *Manuel de Géométrie* (note 19). Désignant le tétraèdre par l'initiale T, l'héxaèdre par H, l'octaèdre par O, le dodécaèdre par D, l'icosaèdre par I, et posant le rayon de la sphère circonscrite R=1 ; a étant toujours un angle dièdre; M la mesure de l'angle solide; C le côté d'un quelconque des corps réguliers ; A l'aire d'une face ; r le rayon du cercle circonscrit à cette face ; S la solidité du corps ; on peut former le tableau suivant à double entrée :

(*) Dans le tétraèdre, l'hexaèdre et le dodécaèdre, c'est l'angle solide même du polyèdre. Alors $\alpha = \beta = \gamma$, et $\cos a = \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$. Dans l'octaèdre et l'icosaèdre, l'angle solide est formé par deux faces de ces corps et un plan diagonal dont on calcule l'angle α.

(**) Dans le tétraèdre, $m=n=3$; $\sin\frac{1}{2}a = \cot\frac{\pi}{3}$.

	a	M	C	A	r	S
T	70°.31'.44''	0,350963	$2\sqrt{\frac{2}{3}} = 1{,}632993$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}154701$	$\frac{2\sqrt{2}}{3} = 0{,}942809$	$\frac{8}{3\sqrt{3}} = 0{,}513200$
H	90° » » »	1,000000	$\frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}154701$	$\frac{4}{3} = 1{,}333333$	$\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}816496$	$\frac{8}{\sqrt{3}} = 1{,}539600$
O	109°.28'.16''	0,863539	$\sqrt{2} = 1{,}414214$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866025$	$\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}816496$	$\frac{4}{3} = 1{,}333333$
D	116°.33.54''	1,885500	$\frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = 0{,}713644$	$\frac{\sqrt{5}}{6}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 0{,}876218$	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}} = 0{,}607062$	$\frac{2(5+\sqrt{5})}{3\sqrt{3}} = 2{,}785164$
I	138°.11 . 23''	1,677207	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = 1{,}051462$	$\frac{3(5-\sqrt{5})}{10\sqrt{3}}$ 0,478727	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}} = 0{,}607062$	$\frac{2}{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 2{,}536150$

SOLUTION DU PROBLÈME 31 (page 394).

Surfaces algébriques sur lesquelles l'on ne peut tracer qu'une seule ligne droite.

PAR M. ROCHE,
Professeur de l'artillerie navale.

1. Les équations de ces surfaces doivent être évidemment, d'un degré supérieur au second, puisque les surface réglées de ce degré jouissent de la propriété que, par chacun de leurs points, on peut mener deux lignes droites.

La forme la plus simple de l'équation d'une surface du troisième degré qui puisse satisfaire à cette condition est celle-ci :

$$(A) \qquad a^2y^2+b^2x^2=x(nz^2-my^2),$$

dans laquelle n et m sont des quantités linéaires positives, *ainsi que a et b; il est facile de prouver que cette surface ne* contient qu'une seule ligne droite qui est l'axe des z dont les équations sont $x=0$, $y=0$; en effet supposons qu'elle contienne une seconde ligne droite dont l'équation de la projection sur le plan des yz soit $rz=py+q$. Substituant pour z sa valeur tirée de cette équation, on aura

$$(B) \quad y^2[a^2r^2+(mr^2-np^2)x]-2pqnxy+b^2r^2x^2-nq^2x=0.$$

Cette équation, si elle renferme des droites, ne peut représenter que le système de deux lignes droites ou celui d'une ligne droite et d'une courbe. Dans tous les cas le coefficient de y^2 doit diviser exactement celui de xy et les termes indépendants de y, $b^2r^2x^2-nq^2x$; pour que cela puisse avoir lieu, il faudrait que l'on eût $p=0$ ou $q=0$, et $mr^2=np^2$; dans le premier cas, il faudrait que $b^2r^2x^2-nqzx$ fût divisible par

$a^2r^2+mr^2x$, ce qui ne peut être, puisque ces deux binômes ont des signes contraires dans leurs seconds termes.

Dans le second cas, le coefficient de y^2 devient constant, et l'on a $\frac{p}{r}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; mais pour que l'équation puisse être le produit de deux facteurs égaux de la forme $y+cx$, il faut nécessairement que l'on ait $q=0$, et l'équation (B) se réduit à la forme

$$a^2y^2+b^2x^2=0.$$

Les coefficients des deux termes étant de même signe, cette équation ne peut représenter ni une droite ni deux droites, mais un point; car pour être satisfaite il faut que l'on ait $y=0$, $x=0$. Ainsi les plans verticaux dont les équations sont $z\sqrt{n}=\pm y\sqrt{m}$, coupent la surface suivant un point qui est l'origine des coordonnées.

2. L'équation (A) satisfait donc pleinement à la question; il en sera de même de l'équation $a^2y^2+b^2x^2=x(my^2-nz^2)$, qui rentre dans la première en changeant le signe de x.

Il reste à faire voir que l'axe des z est bien une ligne qui fait partie de la surface et non une ligne conjuguée qui serait comprise dans son équation.

Pour cela il faut discuter la surface, et faire voir d'abord que toutes les projections sur le plan xy des sections parallèles au plan des xy, donnent une ligne courbe passant par l'origine. En effet, si l'on fait $z=q$, ce qui est l'équation d'un plan parallèle à celui des xy, on aura pour l'équation de la projection de la section sur xy,

$$(1)\qquad y^2=\frac{x(nq^2-b^2x)}{a^2+mx}.$$

Cette équation nous fait voir que lorsque $x=0$, on a en même temps $y=0$; on voit de plus que pour que y soit réel, les coordonnées positives x doivent être plus petites que $\frac{nq^2}{b^2}$, et que x aura toutes les valeurs de 0 à $\frac{nq^2}{b^2}$, auxquelles correspondront des valeurs de y égales et de signe contraire; la section correspondante aux x positives, sera donc une courbe fermée.

Si x est négatif en changeant son signe, l'équation deviendra

$$(2) \qquad y^2 = \frac{x(nq^2 + b^2x)}{mx - a^2}.$$

Pour que y ait des valeurs réelles, il faudra que l'abscisse négative x soit plus grande que $\frac{a^2}{m}$; lorsque $x = \frac{a^2}{m}$, les deux valeurs de y deviennent infinies, ce qui indique que la parallèle à l'axe des y correspondant à $x = + \frac{a^2}{m}$ est une double asymptote de la courbe ; à mesure que x augmente, y diminue d'abord, et augmente ensuite, puisque x devenant très-grand, les ordonnées de la courbe tendent à se confondre avec celles de la parabole dont l'équation est $y^2 = \frac{b^2x}{m}$, qui en est l'asymptote. La section correspondante aux x négatives est donc composée de deux parties infinies séparées dont l'une correspond aux y positives, et l'autre aux y négatives, et il y a deux valeurs minima égales et de signe contraire, comme il y a deux valeurs maxima dans la section positive qui est une courbe fermée : les unes et les autres se trouvent en résolvant l'équation générale (1) par rapport à x; elle donne

$$x = \frac{nq^2 - my^2 \pm \sqrt{(nq^2 - my^2)^2 - 4a^2b^2y^2}}{2bq}.$$

Pour le maximum ou le minimum de y le radical s'évanouit, et l'on a $nq^2 - my^2 = \pm 2aby$. Le signe $\pm$ est relatif aux deux sections, et donne les deux valeurs

$$y = \pm \frac{\sqrt{a^2b^2 + mnq^2} \mp ab}{m},$$

auxquelles correspondent les valeurs $x = \frac{by}{a}$. Les doubles signes de cette formule donnent le maximum de y de la section positive, et l'on a pour cette section

$$y = \mp \frac{(\sqrt{a^2b^2 + mnq^2} - ab)}{m}, \quad x = \frac{b}{am}(\sqrt{a^2b^2 + mnq^2} - ab);$$

et pour la section négative l'on a

$$y = \mp \frac{(\sqrt{a^2b^2 + mnq^2} + ab)}{m}, \quad x = -\frac{b}{am}(\sqrt{a^2b^2 + mnq^2} + ab).$$

Ces expressions suffisent pour faire voir que la surface se compose de trois parties séparées: l'une à droite du plan yz, dont l'axe z fait partie, est un double entonnoir terminé en pointe à l'origine, et les deux autres sont deux surfaces à gauche du plan yz et separées l'une de l'autre par le plan xz, et dont la plus courte distance correspond à $q=0$ ou $z=0$, $2y = \frac{4ab}{m}$, $x = -\frac{2b^2}{m}$. Lorsque $z = 0$, la section positive se réduit à un point, car l'équation (1) devient $y^2 = -\frac{b^2x^2}{a^2 + mx}$, et ne peut être satisfaite que par $y = 0$, $x = 0$.

3. Les sections parallèles au plan des yz répondant à $x=p$, donneront pour équation

$$(3) \qquad (a^2 + mp)y^2 - npz^2 = -b^2p^2,$$

p étant positif. Elle représente des hyperboles dont l'axe réel est dirigé dans le sens de l'axe des z, et égal à $\frac{2b\sqrt{p}}{\sqrt{n}}$. Cette section appartient à la nappe positive.

Si p est négatif en changeant son signe, l'équation devient

$$(4) \qquad (mp-a^2)y^2-npz^2=b^2p^2.$$

Elle représente des hyperboles dont l'axe réel dirigé dans le sens de l'axe des y est égal à $\frac{2bp}{\sqrt{mp-a^2}}$, p étant plus grand que $\frac{a^2}{m}$. Lorsque p sera égal à $\frac{a^2}{m}$, on aura $y^2=\frac{npz^2+b^2p^2}{o}$; ce qui indique que le plan $x=-p$ est asymptote de la surface dont il ne rencontrera les nappes négatives qu'à des distances infinies $y=+\infty$, $y=-\infty$. Si $p=0$, on a $x=0$, $y=0$, et la section se réduit à l'axe des z.

4 Les sections parallèles au plan des xz correspondant à $y=r$, donnent pour équation générale

$$(5) \qquad z^2=-\frac{b^2x^2+mr^2x+a^2r^2}{nx}.$$

L'équation de cette courbe tient tout à la fois de la parabole et de l'hyperbole ; car elle a pour asymptote une parallèle à l'axe des z, puisque lorsque $x=0$, on a $z=\pm\infty$, ce qui indique une double asymptote correspondant aux z positives et négatives.

A mesure que x augmente, z diminue puis augmente ensuite, car lorsque x devient très-grand, les ordonnées de la courbe tendent à se confondre avec celles de la parabole dont l'équation est $y^2=\frac{b^2x}{n}+\frac{mr^2}{n}$, qui en est l'asymptote.

La section correspondant aux x positives est donc composée de deux parties séparées composées de deux branches, une partie supérieure correspondant aux z positives et l'autre inférieure aux z négatives.

Si x est négatif en changeant son signe, l'équation deviendra

$$(6) \qquad z^2 = -\frac{(b^2x^2 - mr^2x + a^2r^2)}{nx};$$

pour que z soit réel il faut que l'on ait $b^2x^2 - mr^2x + a^2r^2 < 0$, c'est-à dire en complétant le quarré de cette inéquation, et extrayant la racine, il faut que l'on ait

$$x < \frac{mr^2 + \sqrt{m^2r^4 - 4a^2b^2}}{2b^2}.$$

Cette condition ne pourra être remplie que lorsque la quantité sous le radical sera positive, c'est-à-dire lorsqu'on aura $r > \frac{2ab}{m}$, et lorsqu'on aura $y = r = \pm\frac{2ab}{m}$, on aura $x = \frac{mr^2}{2b^2}$, et $z = 0$; ce qui indique que toutes les sections parallèles, comprises entre les plans dont les équations sont $y = \frac{2ab}{m}$, $y = -\frac{2ab}{m}$, ne rencontreront pas les nappes négatives, et que ces plans les toucheront suivant des points situés du côté des x négatives à une distance égale à $\frac{mr^2}{2b^2}$ sur une parallèle à l'axe des y. Ce qui donnera comme on l'a vu pour la plus courte distance des deux nappes $\frac{4ab}{m}$.

Les sections des nappes négatives seront des courbes fermées, de sorte que z aura deux maximums dans la section négative, et deux minimums dans la section positive; on les trouvera en résolvant l'équation générale (5) par rapport à x, et l'on aura

$$x = \frac{nz^2 - mr^2 \pm \sqrt{(nz^2 - mr^2)^2 - 4a^2b^2r^2}}{2b^2}.$$

Les valeurs de z maximum et minimum étant celles qui font évanouir le radical, seront

$$z = \pm\sqrt{\frac{mr^2 + 2ab}{n}}, \qquad z = \pm\sqrt{\frac{mr^2 - 2ab}{n}};$$

les premières seront relatives à la section de la nappe positive, et répondront à $x=\frac{ar}{b}$; les secondes se rapporteront à la section des nappes négatives, et répondront à $x=-\frac{ar}{b}$; elles ne seront réelles que lorsqu'on aura $r>\frac{2ab}{m}$, et lorsqu'on aura $r=\frac{2ab}{m}$, elles donneront $x=-\frac{a^2}{m}$, comme on l'a déjà vu.

Dans le cas où $r=0$, la section a lieu seulement dans la nappe positive qui contient l'axe des z, et son équation devient en divisant par x,

$$z^2=\frac{b^2x}{n};$$

c'est celle d'une parabole qui est la coupe diamétrale de la surface conjointement avec l'axe des z qui répond à $x=0$, facteur supprimé.

Observation. Faisant $m=0$, les nappes dites négatives disparaissent et la discussion devient plus simple. Il serait peut-être utile de s'occuper de la classification des surfaces du troisième degré, à l'aide des cônes asymptotes. Tm.

Note sur l'aire de l'ellipsoïde de révolution.

S = aire de l'ellipse ; $\cos\alpha$ = petit axe divisé par le grand axe ;

$$\text{aire de l'ellipsoïde allongé} = 2S\left(\cos\alpha+\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right),$$

$$\textit{Id.}\qquad \text{aplati} = 2S\left(\text{séc}\,\alpha+\frac{\alpha}{\text{tang}\,\alpha}\right).$$

Peut-on parvenir à ces résultats sans employer le calcul intégral ? Laquelle de ces expressions est la plus grande ? Tm.

QUESTION D'EXAMEN.

PAR M. MIDY,
Ancien professeur dans les Colléges royaux (*).

I. *Problème.* Trouver le lieu des points milieux de toutes les sécantes que l'on peut mener, dans un plan, d'un même point à une courbe, ou ligne donnée du second degré.

Solution. Supposons d'abord que la courbe soit une ellipse. Rapportons-la à ses axes et soit son équation

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0. \qquad (1)$$

Appellons (x', y'), les coordonnées du point; l'équation de la sécante sera

$$y-y'=m(x-x'). \qquad (2)$$

On en tire

$$y=y'+m(x-x').$$

Et cette valeur de y étant mise dans (1) il viendra, en ordonnant par rapport à x,

$$(a^2m^2+b^2)x^2-2a^2(m^2x'-my')x+a^2[(y'-mx')^2-b^2]=0. \quad (3)$$

L'abscisse du point milieu de la sécante considérée étant la demi-somme des racines de cette équation, en désignant cette abscisse par x, l'on aura

$$x=\frac{a^2(m^2x'-my')}{a^2m^2+b^2};$$

d'où

$$x(a^2m^2+b^2)-a^2(m^2x'-my')=0.$$

En ordonnant par rapport à m, il vient

$$a^2(x-x')m^2+a^2y'.m+b^2x=0.$$

Et en mettant dans cette équation la valeur de m, tirée de

(*) Actuellement professeur au collége de Sorèze.

(2), on trouve, réduction faite, l'équation

$$a^2y(y-y')+b^2x(x-x')=0,$$

qu'on peut écrire ainsi

$$a^2y^2-a^2yy'+b^2x^2-b^2xx'=0. \qquad (4)$$

C'est celle d'une ellipse, semblable et parallèle à l'ellipse donnée, et qui est le lieu demandé.

II. Cette équation s'obtiendrait plus promptement en retranchant de l'équation (1), l'équation

$$a^2yy'+b^2xx'-a^2b^2=0, \qquad (5)$$

qui est celle de la polaire du point donné (x', y'); d'où il faut conclure qu'en supposant ce point, que nous nommerons M, extérieur à l'ellipse BDCE (*fig.* 96), l'ellipse (4) passera par les points de contact T_1, T_2, des deux tangentes qu'on peut mener du point à la courbe Il est facile de vérifier qu'elle passe de plus par l'origine, par le point donné et par le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe des x. Cette équation (4) équivaut à celle-ci :

$$a^2\left(y-\frac{y'}{2}\right)^2+b^2\left(x-\frac{x'}{2}\right)^2=\frac{a^2y'^2+b^2x'^2}{4}. \qquad (6)$$

Sous cette forme on voit de suite que le centre est au milieu de la droite MA.

De plus, en désignant les demi-axes par A et B, l'on aura

$$\left.\begin{aligned} A^2&=\frac{a^2y'^2+b^2x'^2}{4b^2} \\ B^2&=\frac{a^2y'^2+b^2x'^2}{4a^2} \end{aligned}\right\} \text{ d'où il suit que } \frac{A^2}{B^2}=\frac{a^2}{b^2};$$

ou que les deux ellipses ont leurs axes proportionnels. De plus ces axes sont parallèles. Il suit de là que la droite MA passant par les deux centres, coupera les deux ellipses en des points homologues M et K. Il sera donc facile de construire la courbe demandée.

III. Quand le point M est extérieur à l'ellipse donnée BDCE, tous les points de l'arc intérieur T_1 et T_2 de la nouvelle ellipse conviennent évidemment à la question. Il s'agit d'expliquer comment les points de l'arc extérieur T_1AT_2 y conviennent aussi.

Supposons d'abord que $a = b$, ou que l'ellipse (1) soit un cercle; faisons de plus $y' = 0$; hypothèse qui, dans le cas actuel, n'altère pas la généralité de la question.

Alors l'équation (4) devient

$$y^2 + x^2 - xx' = 0.$$

Elle représente un cercle dont le diamètre est AM (*fig.* 97), et qui est le lieu des sommets de tous les angles droits qui s'appuient sur cette droite. D'ailleurs le résultat est indépendant de a, ou du rayon du cercle. La circonférence AM est donc, ce qui est évident d'ailleurs, le lieu des points milieux de toutes les cordes ou sécantes passant par le point M de toutes les circonférences qui ont pour centre commun le point A.

Revenons maintenant à l'ellipse primitive. Remarquons que les valeurs trouvées pour A^2 et B^2 ne changent pas, lorsqu'on suppose que x' et y' étant invariables, a et b varient proportionnellement. L'ellipse (4) reste donc la même pour toutes les ellipses semblables à l'ellipse (1), et semblablement placées, qui ont pour centre commun le point A; et c'est ce qui explique pourquoi l'analyse a donné pour réponse à la question, l'ellipse entière MT_1AT_2.

IV. Quand on suppose x' et y' infinies, l'équation (4) se réduit à

$$a^2yy' + b^2xx' = 0,$$

d'où l'on tire

$$y = -\frac{b^2x'}{a^2y'}\,x,$$

équation du diamètre conjugué de celui dont la direction passe par le point M. Mais alors les sécantes sont parallèles; de là cette propriété connue que, dans l'ellipse, les points milieux des cordes parallèles sont sur le diamètre conjugué de celui qui est parallèle à ces cordes.

V. En changeant b^2 en $-b^2$, tout ce qui vient d'être dit pour l'ellipse, s'appliquerait à l'hyperbole. Le lieu cherché serait donc encore une seconde hyperbole dont les axes seraient proportionnels et parallèles à ceux de la première; donc une des branches passerait par le point donné, et l'autre par le centre de la courbe (*). Cette hyperbole resterait la même pour toutes les hyperboles semblables parallèles et concentriques à la première, ou qui auraient les mêmes asymptotes qu'elle. Elle ne changerait donc pas pour l'hyperbole, limite de toutes celles que nous venons d'indiquer; c'est-à-dire, pour celle qui se confond avec les deux asymptotes elles-mêmes. On voit donc que le cas de deux droites qui se coupent est compris implicitement dans celui-ci.

VI. Pour le montrer directement. Soient ABC (*fig.* 98) l'angle, et M le point donné; BC l'une des cordes et I son point milieu. Prenons les côtés AB, AC, pour axes des x et des y. Appellons toujours x', y', les coordonnées du point M, et soient de plus $AB=\alpha$, $AC=\beta$.

L'équation de BC sera

$$\frac{x-x'}{\alpha}+\frac{y-y'}{\beta}=0, \qquad (1)$$

le point I sera sur les droites

$$x=\frac{\alpha}{2}, \quad (2) \qquad y=\frac{\beta}{2}. \quad (3)$$

L'élimination de α et β entre les équations (1), (2) et (3) donne en réduisant

$$2xy-x'y-y'x=0, \qquad (4)$$

pour l'équation du lieu demandé. C'est celle d'une hyperbole

(*) Cette hyperbole n'est semblable à l'hyperbole donnée, que lorsque le point st situé dans l'angle des asymptotes. M.

passant par le point M et par l'origine, et dont les asymptotes ont pour équations

$$x = \frac{x'}{2}, \quad y = \frac{y'}{2},$$

représentant deux droites parallèles aux deux côtés de l'angle. Cette hyperbole est donc semblable à toutes celles qui auraient pour asymptotes les deux droites données AB, AC, puisque le rapport des axes serait le même. Ce qu'il fallait démontrer.

VII. On trouvera aisément que si la courbe donnée était la parabole représentée par

$$y^2 - 2px = 0, \tag{1}$$

le lieu cherché aurait pour équation

$$y(y - y') - p(x - x') = 0, \tag{2}$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\left(y - \frac{y'}{2}\right)^2 - p\left[x - \left(x' - \frac{y'^2}{4p}\right)\right] = 0, \tag{3}$$

ou, en déplaçant l'origine sous celle-ci :

$$y^2 - px = 0. \tag{4}$$

Ainsi ce lieu est une parabole parallèle à la parabole donnée et d'un paramètre deux fois moindre ; donc le sommet est distant de l'axe de la première d'une quantité égale à $\frac{y'}{2}$ et de la tangente au sommet d'une quantité égale à $x' - \frac{y'^2}{4p}$.

La quantité $\frac{y'^2}{4p}$, est facile à construire, car soient VAU (*fig.* 99) la parabole et M le point donnés. Menons MR parallèle à AX et rencontrant la courbe en R. Abaissons de ce point la perpendiculaire RQ sur l'axe, nous aurons par cette construction $AQ = \frac{y'^2}{2p}$; donc en prenant $PG = \frac{1}{2}AQ$, le point S déterminé par l'intersection de SG, parallèle à MP et de SZ parallèle à AX et distante de cette droite d'une quantité égale à $\frac{1}{2}$ MP, sera le sommet. La parabole (3), T_1MSPT_2, dont le paramètre est connu, est donc complétement déterminée.

Si l'on imagine que la parabole donnée VAU glisse sur son axe de manière que son sommet A prenne une position arbitraire A′, la quantité AQ restera invariable de grandeur, puisque l'ordonnée y' du point M, et la quantité $2p$ ne varieront pas. PG sera donc constant, et par conséquent la parabole (3) sera invariable pour toutes les paraboles considérées.

VIII. On sait que l'équation

$$y^2 - a^2 = 0, \tag{1}$$

qui représente l'ensemble de deux droites parallèles à l'axe des x et de plus également distantes de cet axe, n'est qu'un cas particulier de la parabole.

Alors, en prenant pour axe des y une perpendiculaire à celui des x passant par le point M, l'équation de la sécante sera

$$y - y' = mx. \tag{2}$$

La substitution dans (1) de la valeur de y prise dans (2), donne

$$m^2x^2 + 2my'x + y'^2 - a^2 = 0. \tag{3}$$

L'abscisse du point milieu sera donc déterminée par la relation

$$x = -\frac{y'}{m}. \tag{4}$$

Faisant le produit des équations (2) et (4), on trouve

$$y = 0,$$

ou l'axe des x pour le lieu cherché.

Le problème est donc complétement résolu (*).

(*) Pour une ligne ou une surface du degré m, le lieu cherché est du degré $m^2\frac{(m-1)}{2}$ et s'obtient par le même genre de calcul, qui consiste à chercher une équation à la somme des racines prises 2 à 2. Tm.

LETTRE DE M. GUILMIN,

Professeur.

J'ai vu, dans votre numéro d'août (p. 359), une lettre de M. Pury, dans laquelle il montre l'intention de compléter ma note sur les approximations (p. 249).

M. Pury dit que je ne semble pas considérer les racines des nombres incommensurables. C'est que pour ce qui concerne ces racines, je m'en rapporte aux règles connues. Or voici la règle générale : pour extraire la racine de l'indice m d'un nombre *quelconque* N, à moins de $\frac{1}{\delta}$, multipliez ce nombre par δ^m, extrayez à moins d'une unité, la racine du produit, puis enfin divisez la racine obtenue par δ. Cette règle s'applique évidemment à l'extraction des racines des quantités incommensurables. Pour cette application, il suffit de savoir calculer le plus grand nombre entier contenu dans le produit $N \times \delta^m$, ce que l'on sait faire par la règle de la multiplication complétée par la méthode indiquée (p. 261). Je dis même, en terminant l'exposé de cette méthode, qu'elle est importante dans le calcul de l'extraction des racines ; cette remarque ne peut s'appliquer qu'aux racines des quantités incommensurables auxquelles j'ai donc eu égard.

Je n'eusse pas répondu à M. Pury, si l'emploi de la formule qu'il indique dispensait généralement de l'application de la règle générale. Mais après qu'on aura remplacé la quantité incommensurable A existant sous le radical $\sqrt[n]{A}$, par une quantité incommensurable qui en diffère, d'après sa formule, de moins de $\frac{nA'^{n-1}}{\delta}$, le radical substitué au premier, n'en sera pas moins très-souvent incommensurable, et il faudra appliquer la règle générale pour l'avoir à moins de $\frac{1}{\delta}$. Il vaut mieux, il me semble, appliquer celle-ci tout d'abord. Exemple : soit à calculer $\sqrt{\pi}$ à $\frac{1}{7}$ près, on pourra prendre pour limite $\frac{2 \times 1}{7}$, ou en décimales 0,1 ; on remplacera donc $\sqrt{\pi}$ par $\sqrt{3,1}$, qu'il n'en faudra pas moins calculer à $\frac{1}{7}$ près au moins.

J'ai lu aussi une remarque qui termine une lettre de M. Fink, insérée dans le même numéro.

Je n'ai rien à y répondre, sinon que je n'avais pas eu l'occasion de lire son ouvrage, et que son travail sur les approximations, comme je l'ai vu depuis, diffère complétement du mien pour les opérations principales.

Puisque je me trouve amené à vous entretenir de ma note sur les approximations, je la compléterai par deux remarques.

1. J'ai indiqué généralement pour chaque opération un moyen d'avoir le résultat approché par défaut à $\frac{1}{\delta}$ près. Si on veut avoir ce résultat par excès à $\frac{1}{\delta}$, on suivra exactement dans chaque cas, la méthode indiquée pour l'avoir par défaut; ce résultat une fois obtenu, on l'augmente de $\frac{1}{\delta}$, et on l'a ainsi par excès avec l'approximation demandée.

2. Parmi les questions d'approximation on peut faire celle-ci. En remplaçant dans un calcul une ou plusieurs quantités incommensurables par leurs valeurs approchées à moins d'une quantité e, par exemple, quelle est l'approximation avec laquelle le résultat final est obtenu?

Il est évident que cette limite e, connue dans cette question, est celle que l'on cherche dans les questions traitées dans ma note, tandis que $\frac{1}{\delta}$ est actuellement le nombre à trouver. Par suite en dégageant $\frac{1}{\delta}$ dans chaque inégalité, on en déduit facilement une limite supérieure de l'erreur $\frac{1}{\delta}$ commise sur le résultat final de l'opération que l'on considère.

Exemple : Pour la multiplication, on trouve la formule $eS_{m-1} < \frac{1}{\delta}$. Dans la question actuelle e est connu, on sait ce qu'il faut mettre pour S_{m-1}; à cause de l'inégalité $\frac{1}{\delta} > eS_{m-1}$, on voit que eS_{m-1} est une limite supérieure de l'erreur commise sur le produit, lorsqu'on emploie pour chaque facteur une valeur approchée à e près. Application numérique : supposons que chaque facteur soit pris à 0,01 près, dans le produit $\pi.\sqrt{3}.\sqrt[3]{12}$. L'erreur commise sur le produit, sera moindre que $\frac{1}{100} \times (4.2 + 4.3 + 2.3)$ ou $\frac{26}{100}$.

RELATIONS D'IDENTITÉ

Et équations fondamentales relatives aux lignes du second degré.

—

I. Les lignes et surfaces de tout ordre présentent certaines relations d'identité entre les coefficients de leurs équations, qui servent à faciliter et à abréger singulièrement les calculs les plus compliqués. Nous allons indiquer ces relations pour les lignes du second degré; elles permettent de résoudre des problèmes difficiles en laissant aux données la plus grande généralité; ce qui est toujours avantageux. Nous donnerons les applications aux théorèmes les plus importants de cette partie de la science, et ensuite nous suivrons la même marche pour les surfaces du second degré; lorsque les élèves auront vérifié ces relations, ils pourront les admettre de confiance, et les employer à tout instant sans hésitation. Cet emploi, extrêmement fréquent, fait ressortir l'utilité de ces formules. Nous transcrivons les expressions vulgairement connues, pour mémoire.

II. *Notation.*

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0, \qquad (1)$$

équation générale des lignes du second degré; $A>0$; angle des axes $=\gamma$.

$$B^2-4AC=m; \quad 2AE-BD=k; \quad 2CD-BE=k';$$
$$D^2-4AF=l; \quad E^2-4CF=l';$$
$$DE-2BF=n; \quad 2AE-BDE+CD^2+F(B^2-4AC)=L;$$
$$A+C-B\cos\gamma=N; \quad Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+Dy'+Ex'+F=F',$$

(x', y', coordonnées d'un point quelconque pris sur le plan de la courbe).

Observation. m et L ne varient pas avec l'origine.

III. *Identités.*

$$k^2 - lm = 4AL;\qquad 2kk' + 2mn = -4BL;\qquad k'^2 - l'm = 4CL;$$
$$k'l + kn = 2DL;\quad kl' + k'n = 2EL;\quad n^2 - ll' = 4FL;$$
$$Cl - Al' + Ek + mF = L;\qquad Al' - Cl + Dk' + mF = L;$$
$$2Ck + Bk' + Em = 0;\qquad 2Ak' + Bk + Dm = 0;$$
$$Ak'^2 + Bk'k + Ck^2 + mDk' + mEk + m^2F = mL;$$
$$(A-C)^2 + [B - 2A\cos\gamma]\,[B - 2C\cos\gamma] = N^2 +$$
$$+ m\sin^2\gamma = (A-C)^2\sin^2\gamma + [B - (A+C)\cos\gamma]^2;$$
$$(2Ay + Bx + D)^2 - (2Cx + By + E)^2 = (mx^2 - 2kx + l) -$$
$$-(my^2 - 2ky + l'),$$
$$mx^2 - 2kx + l = m\left[\left(x - \frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4AL}{m^2}\right],$$
$$my^2 - 2k'y + l' = m\left[\left(y - \frac{k'}{m}\right)^2 - \frac{4CL}{m^2}\right].$$

IV. *Coordonnées du centre; diamètre passant par l'origine.*

$x = \frac{k}{m}$, $y = \frac{k'}{m}$, coordonnées du centre ; $ky - k'x = 0$, équation du diamètre passant par l'origine, pour les trois coniques.

V. *Caractères analytiques des coniques et de leurs variétés.*

$m < 0$; $L > 0$, ellipse ; $L = 0$, point ; $L < 0$, ellipse imaginaire ;

$m = 0$; $L > 0$, parabole ; $L = 0$; deux droites parallèles pouvant se confondre ; $L < 0$, ou $l < 0$, parabole imaginaire ;

$m > 0$; $L > 0$, hyperbole ; $L = 0$, deux droites convergentes ; $L < 0$, hyperbole, un des deux diamètres conjugués aux axes où aucun des deux ne rencontre la courbe ;

$m = \pm\infty$, une droite.

Observation. Si on fait varier un des trois premiers coefficients A, B, C de l'équation (1), et regardant comme constants les cinq autres coefficients; il est évident que m passe par tous les états de grandeurs, et la courbe par toutes les formes possibles ; et lorsque m devient infini positif ou négatif, l'hyperbole limite est une droite, ainsi que l'ellipse limite. En effet, les extrémités d'une droite peuvent être considérées comme des foyers, et tous les points situés sur la droite entre ces extrémités appartiennent à une ellipse, et ceux qui sont sur les prolongements, à une hyperbole ; cette dernière courbe est encore représentée par une droite élevée perpendiculairement sur le milieu d'une autre. La discussion qu'on rencontre dans les auteurs ne donne pas les cas où ces deux courbes se réduisent à une droite unique, parce qu'on omet de parler des valeurs infinies de m.

Laplace trouve les lois du mouvement rectiligne d'un point, attiré vers un centre fixe, en raison inverse des carrés des distances, en considérant la droite, comme une ellipse infiment aplatie. (*Méc. cél*, t. I, p. 197.)

			m	
		p	0	n
	p	H	P	E
L	0	×	=	.
	n	H	I	I

Ce tableau à double entrée contient tous les cas possibles ; les lettres p,0,n signifient positif, zéro, négatif. H,P,E sont les lettres initiales des noms des trois coniques ; I veut dire imaginaire.

VI. *Équation générale rapportée au centre.*

Remplaçant dans l'équation (1), x et y par $x+\frac{k}{m}$, et $y+\frac{k'}{m}$, et faisant attention aux identités 9me, 10me et 11me, on obtient de suite, pour l'équation au centre :

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+\frac{L}{m}=0. \tag{2}$$

Scholie. Soit C positif et m négatif ; la courbe est une ellipse et restera toujours telle, lorsque C augmentera indéfiniment ; pour $C=\infty$, $\frac{L}{m}$ devient $-\frac{l}{4AC}$; et l'équation se réduit à $x^2=0$; l'ellipse devient une droite ; il en est de même pour l'hyperbole en supposant C négatif.

VII. *Systèmes de diamètres conjugués aux axes coordonnés ; angles de ces systèmes et valeurs des demi-diamètres.*

L'équation générale étant rapportée au centre (2), on a, par la résolution de l'équation $2Cx+By=0$; $y=\frac{k'}{m}$; système de diamètres conjugués, dont le second est parallèle à l'axe des x.

Carré du sinus de l'angle de ces diamètres $=\frac{4C^2\sin^2\gamma}{m+4CN}=\sin^2\varphi$

Carré du $\frac{1}{2}$ diamètre parallèle à l'axe $x=-\frac{L}{Cm}$.

Carré du $\frac{1}{2}$ diamètre conjugué $=\frac{L}{Cm^2}[m+4CN]$.

Changeant A en C, et *vice-versâ*, on obtient les expressions analogues, relatives au diamètre conjugué à l'axe des y.

Scholie. Ce système de diamètres conjugués étant ainsi connu de position et de grandeur, on peut construire la courbe.

VIII. *Équation aux valeurs des diamètres principaux.*

Les carrés des demi-axes principaux sont donc les racines de l'équation

$$m^3z^2 - 4mLNz - 4L^2\sin^2\gamma = 0. \quad (3) \qquad (\text{v. p.}386)$$

Cette équation est une conséquence immédiate des valeurs trouvées (VII), et des propriétés connues des diamètres conjugués (p. 245).

Résolvant l'équation, il vient

$$z = \frac{2L}{m^2}\left[N \pm \sqrt{N^2 + m\sin^2\gamma}\right].$$

Or, d'après l'identité 12^{me}, la quantité sous le radical est la somme des deux carrés, donc les deux valeurs de z sont toujours réelles et toutes les deux positives, lorsque m est négatif (ellipse); et l'une positive et l'autre négative, lorsque m est positif (hyperbole).

L'équation fondamentale (3), si facile à trouver, manque, à ce que je sache, dans les éléments. On y parvient directement par la théorie des maxima, appliquée aux diamètres.

Coroll. 1. Deux coniques, douées de centre, données par leurs équations générales, sont égales lorsqu'on a les deux relations

$$LNm'^2 = L'N'm^2, \qquad L^2m'^3\sin^2\gamma = L'^2m^3\sin^2\gamma'.$$

Les lettres accentuées sont relatives à la seconde courbe.

Coroll. 2. Éliminant m et m', il vient

$$N^3L'\sin^4\gamma' = N'^3L\sin^4\gamma$$

relation qui convient et suffit à la parabole; cette relation unique suffit aussi aux autres coniques lorsque $m = m'$.

Coroll. 3. Pour que la conique devienne un cercle, il faut que les deux racines de l'équation (3) deviennent égales; le radical dans la valeur de z doit s'anéantir, et ayant égard à l'identité 12^{me}, on a $A = C$ et $B = 2A\cos\gamma$.

Coroll. 4. Pour que la conique devienne une hyperbole équilatère, la partie rationnelle de z doit s'évanouir, l'on a donc $N=0$, condition unique.

Coroll. 5. Éliminant L et L' on obtient $\frac{N^2}{m\sin^2\gamma} = \frac{N'^2}{m'\sin^2\gamma'}$.

IX. *Équation aux paramètres des deux diamètres principaux.*

z' et z'' étant les racines de l'équation (3) ; $\frac{z'^2}{z''}$ et $\frac{z''^2}{z'}$, sont deux racines de l'équation suivante en u, dont le calcul n'offre aucune difficulté, car le dernier terme est $z'z''$, et le coefficient du second terme est $\frac{z'^3+z''^3}{z'z''} = \frac{(z'+z'')^3}{z'z''} - 3(z'+z'')$,

$$m^3\sin^2\gamma u^2 - 4LN[3\,m\sin^2\gamma - 4N^2]u - 4L^2\sin^2\gamma = 0. \qquad (4)$$

Les deux racines de cette équation sont les carrés des demi-paramètres des axes principaux ; lorsque $m=0$, un de ces paramètres devient infini et l'autre a la valeur finie $u = \frac{L\sin^4\gamma}{4N^3}$; on voit donc que la relation du coroll. 2 exprime que les deux paramètres sont égaux.

Observation. Les équations (3) et (4), calculées pour les diamètres principaux, s'adaptent à des diamètres conjugués quelconques. Il suffit de diviser le dernier terme par le carré du sinus des diamètres conjugués que l'on considère ; les racines de l'équation (3) expriment alors les carrés des demi-diamètres conjugués qui répondent à cet angle ; et l'équation (4) fait connaître les paramètres de ce système. Ce sont des conséquences immédiates des raisonnements employés pour parvenir à ces équations ; il s'ensuit que dans la parabole, tout système d'axes conjugués a deux paramètres, l'un de grandeur finie et l'autre infini : proposition qu'on ne démontre ordinairement que pour les diamètres principaux.

X. *Equation aux rapports des diamètres principaux.*

Calculant l'équation qui a pour racines $\frac{z'}{z''}$ et $\frac{z''}{z'}$, on trouve

$$v^2+2v\left[\frac{2N^2}{m\sin^2\gamma}+1\right]+1=0\text{ ; en effet }\frac{z'^2+z''^2}{z'z''}=\frac{(z'+z'')^2}{z'z''}-2.$$

Coroll. 1. Il suffit donc, pour que deux coniques soient semblables que l'on ait $\frac{N^2}{m\sin^2\gamma}=\frac{N'^2}{m'\sin^2\gamma'}$; mais cette relation jointe à celle-ci $\frac{LN}{m^2}=\frac{L'N'}{m'^2}$, établit l'égalité des deux coniques.

Coroll. 2. De quelque manière qu'on change le système de coordonnées rectilignes d'une conique douée de centre, les quantités $\frac{LN}{m^2}$ et $\frac{N^2}{m\sin^2\gamma}$ restent invariables; donc aussi $\frac{L}{N^3\sin^4\gamma}$, qui convient aussi à la parabole.

Coroll. 3. Lorsque $m=0$, on a $v=0$ et $v=\infty$, ainsi que cela do t être dans la parabole.

XI. *Équation appartenant à un système de diamètres conjugués.*

Soit l'équation (2) de la courbe rapportée au centre; et $y=px$, $y=qx$, le système de deux diamètres conjugués, on a la relation

$$2Apq+B(p+q)+2C=0. \tag{5}$$

On parvient à cette relation, en cherchant le lieu géométrique des milieux des cordes menées parallèlement à l'un quelconque des diamètres ; le système des deux diamètres est représenté par l'équation $(y-px)(y-qx)=0$; éliminant q, il vient

$$y^2(2Ap+B)+2xy(C-Ap^2)-px^2(2C+Bp)=0, \tag{6}$$

Observation. La relation (5) convient aussi à la parabole, comme il est facile de s'en assurer en cherchant le lieu géométrique des milieux d'un système de cordes parallèles.

Apollonius définit le diamètre, une droite qui divise en parties égales un système de cordes parallèles (déf. 10). Cette définition est plutôt l'objet d'un théorème. Apollonius lui-même démontre ce théorème, à diverses reprises. Le milieu d'une corde est le point de moyenne distance de ses points d'intersection avec la courbe; sous ce point de vue, le théorème est général et s'applique à une courbe algébrique quelconque; il est dû à Newton. Le moyen de démonstration est le même que pour les coniques.

XII. *Équation appartenant au système d'axes principaux.*

Pour les axes principaux, il faut joindre à la relation (5), la suivante, qui exprime que l'angle des diamètres est droit :

$$1+pq+(p+q)\cos\gamma=0. \tag{7}$$

Éliminant p et q entre les trois équations 5, 6, 7, il vient

$$y^2[2A\cos\gamma-B]+2xy(A-C)+x^2[B-2C\cos\gamma]=0 \tag{8}$$

équation qui donne les directions des axes principaux, dans les trois coniques. Résolvant cette équation, on trouve

$$y(2A\cos\gamma-B)+x(A-C)=\pm x\sqrt{N^2+m\sin^2\gamma}.$$

Remarque. Une conique étant donnée par son équation, on peut donc la construire de suite sans résoudre l'équation. On détermine les coordonnées du centre par les formules IV; l'équation (8) donne les directions des axes; l'équation (3), les valeurs des axes principaux; mais il reste à savoir comment on doit porter les axes principaux. Nous montrerons dans l'article suivant comment on fait disparaître cette ambiguïté; de même comment on détermine le sommet de la parabole, nécessaire pour construire cette courbe.

(*La suite prochainement.*)

RECHERCHES

Des principales propriétés des diamètres conjugués dans les surfaces du second degré;

Déduites des relations de Lagrange. (Suite, *voyez* p. 387).

—

1. L'expression désignée par λ est, comme on sait, le dénominateur commun aux trois inconnues u,v,t des trois équations suivantes du premier degré:

$$x'u+x''v+x'''t=k'\,;\quad y'u+y''v+y'''t=k''\,;$$
$$z'u+z''v+z'''t=k'', \qquad (1)$$

k',k'',k''' étant des constantes arbitraires.

Eu égard aux relations (I), ces équations se transforment en celles-ci

$$\begin{aligned}\alpha'u+\beta'''v+\beta''t&=k'x'+k''y'+k'''z'=l',\\ \beta'''u+\alpha''v+\beta't&=k'x''+k''y''+k'''z''=l'', \qquad (2)\\ \beta''u+\beta'v+\alpha'''t&=k'x'''+k''y'''+k'''z'''=l'''.\end{aligned}$$

résolvant, on trouve (XI) et (VII)

$$\lambda^2u=l'a'+l''b'''+l'''b''\,;\qquad \lambda^2v=l'b'''+l''a''+l'''b'\,;$$
$$\lambda^2t=l'b''+l''b'+l'''a''. \qquad (3)$$

Élevant au carré chaque membre des équations (1), et les ajoutant, il vient

$$\alpha'u^2+\alpha''v^2+\alpha'''t^2+2(\beta'''uv+\beta''ut+\beta'vt)=k'^2+k''^2+k'''^2, \quad (4)$$

remplaçant u,v,t par leurs valeurs, tirées des équations (3), on obtient une équation qui doit être identique relativement aux constantes arbitraires k',k'',k''', ce qui fournit six relations entre les quantités $\lambda,a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$.

2. Considérons le cas particulier, le seul dont nous aurons besoin, où l'on a

$$\alpha'=\alpha''=\alpha''', \quad \text{et} \quad \beta'=\beta''=\beta'''=0;$$

de là,

$$a'=a''=a'''=\alpha'^2, \quad b=b'=b''=0, \quad A'=A''=A'''=\alpha'^4, \quad B'=B''=B'''=0;$$

$$\lambda^2=\alpha'^3 (XI); \quad u=\frac{l'}{\alpha'}; \; v=\frac{l''}{\alpha'}; \; t=\frac{l'''}{\alpha'};$$

donc l'équation (4) donne

$$l'^2+l''^2+l'''^2=\alpha(k'^2+k''^2+k'''^2);$$

comparant les termes semblables, il vient

$$x'^2+x''^2+x'''^2=y'^2+y''^2+y'''^2=z'^2+z''^2+z'''^2=\alpha',$$

relation qu'on peut déduire facilement de (XVI)

$$x'y'+x''y''+x'''y'''=x'z'+x''z''+x'''z'''=y'z'+y''z''+y'''z'''=0;$$

nouvelle relation que nous désignons par (XX).

Ce procédé ingénieux, qui peut s'étendre à un nombre quelconque d'équations de la forme (I), a été employé par Lagrange et par Poisson (Corresp. sur l'École polyt., tome I, p. 237, édit. de 1808).

3. Soit maintenant $q^2r^2x^2+p^2r^2y^2+p^2q^2z^2=p^2q^2r^2$, l'équation d'un ellipsoïde rapportée à trois diamètres conjugués quelconques; soient p', q', r' les longueurs de trois autres demi-diamètres conjugués, dont les extrémités ont pour coordonnées respectives x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; substituant les valeurs de ces coordonnées dans l'équation de l'ellipsoïde, on obtient trois équations de la forme (I), mais où x' est remplacé par qrx'; y' par pry'; z' par pqz'; x'' par qrx'', etc. $\alpha'=\alpha''=\alpha'''=p^2q^2r^2$; les demi-diamètres p', q', r' étant conjugués, après avoir remplacé x', x'', x''', etc. Ainsi qu'il a été dit, l'on a $\beta'=\beta''=\beta'''=0$; donc, on a le cas particulier du paragraphe précédent; ainsi $\xi'=pq^2r^2x'$; $\xi''=qp^2r^2x''$; $\xi'''=rp^2q^2x''x'''$, etc.; $\lambda=p^3q^3r^3$ (XI et XVIII).

4. *Théorème* I. Si on projette un système de trois diamètres conjugués sur un quatrième diamètre parallèlement au plan conjugué à ce diamètre, la somme des carrés des projections est égale au carré de ce quatrième diamètre. (Chasles, *Aperçu historique*, p. 824. 1837.)

Car la relation $x'^2+x''^2+x'''^2=\alpha'$, trouvée ci-dessus, donne, après avoir remplacé x', x'', x''', par les valeurs indiquées,

$$x'^2+x''^2+x'''^2=p^2; \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

5. *Théorème* II. La somme des carrés de trois diamètres conjugués est constante. Supposons les axes rectangulaires, on aura

$$x'^2+y'^2+z'^2=p'^2;\ x''^2+y''^2+z''^2=q'^2;\ x'''^2+y'''^2+z'''^2=r'^2;$$

ajoutant ces équations membre à membre, et ayant égard au théorème précédent, on a

$$p'^2+q'^2+r'^2=p^2+q^2+r^2;$$

donc, etc.

6. *Théorème* III. La somme des carrés des projections orthogonales d'un système de trois diamètres conjugués sur une droite fixe quelconque est constante. (Chasles, *Aperçu historique*, p. 824.)

Désignons la droite fixe par s, les axes étant rectangulaires, on a les formules connues

$$p'\cos(p',s) = x'\cos(s,p)+y\cos(s,q)+z'\cos(s,r);$$

car $\dfrac{x'}{p'}=\cos(p',p)$; $\dfrac{y'}{p'}=\cos(p',q)$; $\dfrac{z'}{p'}=\cos(p',r)$;

où $\cos(p',s)$ désigne, d'après une notation adoptée, le cosinus de l'angle des droites p' et s, et ainsi des autres. Le premier membre est la valeur de la projection du demi-diamètre p' sur la droite s. On a deux équations semblables pour les projections de q', r' sur la même droite s. Élevant chaque membre au carré, les ajoutant, en ayant égard à la relation (XX), il vient

$$p'^2\cos^2(p',s)+q'^2\cos^2(q',s)+r'^2\cos^2(r',s)=p^2\cos^2(s,p)+$$
$$+q^2\cos^2(s,q)+r^2\cos^2(s,r),$$

le second membre est une quantité constante, donc, etc.

Ce théorème III peut encore s'énoncer ainsi : la somme des carrés des distances orthogonales des extrémités de trois demi-diamètres, conjugués à un plan diamétral fixe, est constante.

7. *Théorème* IV. La somme des carrés des distances des extrémités de trois diamètres conjugués à un diamètre fixe, est constante.

Cette somme est évidemment égale à la somme des carrés des trois demi-diamètres conjugués, quantité constante, moins la somme des carrés des projections de ces demi-diamètres sur le diamètre fixe, quantité également constante (théorème III); donc ce théorème peut s'énoncer ainsi : la somme des carrés des projections de trois diamètres conjugués sur un plan fixe, est constante.

8. *Théoreme* V. Étant donnés deux ellipsoïdes quelconques, la somme des carrés de trois diamètres conjugués du premier ellipsoïde, divisés respectivement par les carrés des diamètres qui leur sont parallèles dans le second ellipsoïde, est une quantité constante. (*Aperçu historique*, pag 824.) Soit $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}+\frac{z^2}{r^2}=1$, l'équation d'un ellipsoïde rapportée aux axes principaux ;

$$A'x^2+A''y^2+A'''z^2+B'yz+B''xz+B'''xy-1=0,$$

l'équation d'un second ellipsoïde, concentrique au premier ; p',q',r' demi-diamètres conjugués dans le premier ellipsoïde ; x',y',z' les coordonnées de l'extrémité de p' ; x'',y'',z'', etc. ; d, e, f, parties des demi-diamètres p', q', r', interceptées par le second ellipsoïde, et z_1 coordonnée de l'extrémité de d, on a donc

$$\frac{p'^2}{d^2}=\frac{z'^2}{z_1^2}=+A'x'^2+A''y'^2+A'''z'^2+B'y'z'+B''x'z'+B'''x'y',$$

car le diamètre p' a pour équations $y=\frac{y'}{z'}z$, $x=\frac{x'}{z'}z$, d'où en faisant attention à la relation (XX), l'on tire

$$\frac{p'^2}{d^2}+\frac{q'^2}{e^2}+\frac{r'^2}{f^2}=+A'p^2+A''q^2+A'''r^2;$$

le second membre est constant, donc etc.

9. *Théorème* VI. La somme des valeurs inverses des carrés de trois diamètres rectangulaires d'un ellipsoïde est constante.

Il suffit de supposer que le premier ellipsoïde est une sphère; si le second ellipsoïde est une sphère, on retombe sur le théorème II.

10. Les équations VII sont similaires aux équations I et II, les projections des arêtes x', y', z'; x'', y'', z'', etc., sont remplacés par ξ', ξ'', ξ''', projections des aires des faces du parallélipipède construit sur les trois arêtes p', q', r'; on a donc pour ces faces des théorèmes analogues à ceux qu'on vient de démontrer pour les arêtes, et, sans nouveau calcul, on conclut.

Théorème VII. Un parallélipipède étant construit sur trois demi-diamètres conjugués d'un ellipsoïde, si l'on projette ses faces sur un plan fixe, parallèlement au diamètre conjugué à ce plan, la somme des carrés de ces projections est constante (correspond au théorème I).

Théorème VIII. La somme des carrés des aires de ces faces, est constante (correspond au théorème II).

Théorème IX. La somme des carrés des projections orthogonales de ces faces sur un plan fixe est constante (Théorème III).

11. *Théorème* X. Le volume du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués est constant.

Les axes étant rectangulaires et mettant dans l'expression λ, qrx', pry', pqz', etc., pour x', y', z', etc., on a $x'y''z'''+$ etc. $=pqr$; car $\lambda=p^2q^2r^2$; or le premier membre est le volume du parallélipipède et le second membre est constant, donc.

12. *Théorème* XI. Étant donnés dans l'ellipsoïde deux systèmes de diamètres conjugués, si l'on construit un parallélipipède avec trois quelconques de ces diamètres, il est équivalent au parallélipipède construit sur les trois diamètres constants.

Si l'on prend trois diamètres appartenant au même système, on revient au théorème précédent. Il faut donc prendre deux diamètres dans le premier système, et le combiner avec un autre du second système; nous conservons pour le premier système, la même notation qu'au paragraphe 3, et nous prenons les mêmes lettres pour le second système, mais l'accent étant placé en bas. On a

$$\frac{\lambda}{\alpha'}=\frac{p^2(y''z'''-z''y''')}{x'}=\frac{p^2(y_1''z_1'''-z_1''y_1''')}{x_1'}\ \text{(XIX)},$$

d'où $x_1'(y''z'''-z''y''')=x'(y_1''z_1'''-z_1''y_1''')$; on a encore deux équations semblables pour x_1'' et x_1'''; réunissant ces équations en une seule, le premier membre exprime le volume du parallélipipède contruit sur les diamètres p, q, p_1; et le second, le volume du parallélipipède construit sur p_1, q_1, p. C.Q.F.D.

13. Ces théorèmes convenablement modifiés, ont lieu aussi dans les hyperboloïdes, il suffit de rendre négatif le carré d'un des diamètres conjugués dans l'hyperboloïde à une nappe, et les carrés de deux de ces diamètres, pour l'hyperboloïde à deux nappes.

14. Si, à l'aide du parallélipipède fait sur trois diamètres

conjugués, on imagine un second parallélipipède ayant son sommet au centre, et les trois arêtes proportionnelles aux faces du premier parallélipipède, et faisant respectivement les mêmes angles avec les axes, ce second parallélipipède jouit des mêmes propriétés que le premier; c'est une conséquence de la similitude des équations VIII et I. Les angles dièdres de ce second parallélipipède sont les suppléments des angles plans du premier, et *vice versâ*. Pour obtenir ce second parallélipipède, il suffit d'élever par le centre des droites respectivement perpendiculaires aux faces du premier parallélipipède. Avec les quinze quantités X', X'', X''', Y'... A'...B'... on peut former de nouvelles équations semblables aux équations I, II, III; on en déduirait de nouvelles relations et de nouveaux parallélipipèdes et ainsi indéfiniment; mais les arêtes des parallélipipèdes n'ont que deux directions différentes. (Binet, *Journ. de l'Éc. polytechn.*, cah. XVI, p. 313).

15. Les théorèmes II, X et VIII, ont été démontrés pour la première fois par M. Livet (*Journal de l'École polytechnique*, cahier XIII, p. 281, 1806); le théorème VII est dû à M. Binet, qui l'a inséré dans un très-beau mémoire, riche en résultats analytiques et géométrique (*Journal de l'École polytechnique*, cahier XVI, p. 280, 1813). Ces théorèmes sont fondamentaux. Les autres sont de M. Chasles, qui les a établis facilement ainsi que les quatre précédents, à l'aide d'un certain mode de transformation de surface, moyen *euristique* que le célèbre géomètre désigne sous le nom de méthode *homographique*, et dont nous parlerons à une autre occasion; ces propositions sont toutes renfermées dans les relations de Lagrange et dans les propriétés de la formule *cramérienne*, formule connue aussi sous le nom de *résultante*, qui a été étudiée par les analystes les plus éminents, dans cet ordre des temps: Vandermonde, Laplace, Lagrange, Monge, Binet, Jacobi, Cauchy. Nous tâcherons de donner

une idée de ces importants travaux, dans l'article sur l'élimination (v. 125).

16. Il est presque inutile de remarquer que la plupart de ces théorèmes existent aussi pour les courbes du second degré et qu'on les obtient, en rendant nulle une des trois coordonnées; mais nous croyons pour compléter, devoir consigner ici les belles relations que Monge a énoncées, sans démonstration, dans les Mémoires de l'Académie de 1784. (p. 85); Encke, le célèbre astronome, en a donné une démonstration assez longue et fondée sur la trigonométrie sphérique (Berlinisches Jahrbuch, 1832, et Correspondance mathématique, tome VII, p. 273, 1832). Il serait à désirer qu'on pût retrouver les considérations, sans doute plus simples, employées par Monge.

Dans les équations I (p. 388), faisons

$$\alpha=\alpha'=\alpha''=1, \qquad \beta=\beta'=\beta''=0;$$

posons ensuite

$$\begin{aligned} 1+x'+y''+z'''&=2\mathrm{M},\\ 1+x'-y''-z'''&=2\mathrm{N},\\ 1-x'+y''-z'''&=2\mathrm{P},\\ 1-x'-y''+z'''&=2\mathrm{Q}; \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} y' &=\sqrt{\mathrm{NP}}+\sqrt{\mathrm{MQ}},\\ x'' &=\sqrt{\mathrm{NP}}-\sqrt{\mathrm{MQ}},\\ x''' &=\sqrt{\mathrm{NQ}}+\sqrt{\mathrm{MP}},\\ z' &=\sqrt{\mathrm{NQ}}-\sqrt{\mathrm{MP}},\\ z'' &=\sqrt{\mathrm{PQ}}+\sqrt{\mathrm{MN}},\\ y''' &=\sqrt{\mathrm{PQ}}-\sqrt{\mathrm{MN}}. \end{aligned}$$

D'ailleurs, la vérification est très-facile; car on a

$$x'=\mathrm{M}+\mathrm{N}-1,\ y''=\mathrm{M}+\mathrm{P}-1,\ z'''=\mathrm{M}+\mathrm{Q}-1,$$

et

$$\mathrm{M}+\mathrm{N}+\mathrm{P}+\mathrm{Q}=2.$$

17. Voici quelques conjectures sur la manière dont Monge est parvenu à ces expressions ; on a

$$x'^2+y'^2+z'^2=x'^2+x''^2+x'''^2=1, \qquad (a)$$

d'où l'on tire $(y'+x'')(y'-x'')=(x'''+z')(x'''-z')$; pour satisfaire à cette équation, posons, selon la méthode d'Euler,

$$y'+x''=np,\ y'-x''=mq,\ x'''+z'=nq,\ x'''-z'=mp;$$

de là on déduit

$$2y'=np+mq,\ 2x''=np-mq,\ 2x'''=nq+mp,\ 2z'=nq-mp;$$

mais l'on a aussi

$$x'''^2+y'''^2+z'''^2=z'^2+z''^2+z'''^2=1;\ \text{d'où}\ x'''^2-z'^2=z''^2-y'''^2;$$

et en opérant comme ci-dessus, on aura

$$2z''=pq+mn, \qquad 2y'''=pq-mn;$$

substituant les valeurs de y' et z' dans l'équation (a), on aura

$$(m^2+n^2)(p^2+q^2)=4-4x'^2.$$

Posons

$$2x'+2=m^2+n^2,$$
$$-2x'+2=p^2+q^2;$$

il vient

$$2x'=m^2+n^2-2 \qquad \text{et} \qquad m^2+n^2+p^2+q^2=4.$$

En cherchant à satisfaire aux équations $x''^2+y''^2+z''^2=1$, $x'''^2+y'''^2+z'''^2=1$, on trouve de même $2y''=m^2+p^2-2$, $2z'''=m^2+q^2-2$; on voit facilement que ces valeurs de x', y', z', etc., sont celles de Monge.

(*La suite prochainement.*)

QUESTION D'EXAMEN.

PAR M. VACHETTE.

On a n prismes de même hauteur circonscrits à un tétraèdre régulier dont l'arête est a, et superposés : on demande de trouver leur somme. En faisant $n=\infty$, on trouve la mesure du tétraèdre (*fig.* 95 bis).

Le premier prisme a pour base le triangle équilatéral ABC, et pour hauteur $x=\frac{h}{n}$: le côté de ABC est a.

Le deuxième a pour base A'B'C', et la même hauteur ; le côté de A'B'C' est $a'=a\frac{n-1}{n}$.

Le troisième. . . . . $a''=a\frac{n-2}{n}$.

Ainsi de suite.

La surface de ABC est $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$; le volume du premier prisme sera $\frac{a^2h\sqrt{3}}{4n}$, mais $h=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{1}{3}a\sqrt{6}$; donc

1^er^ prisme. . . . . $V=\frac{a^3\sqrt{18}}{12n}=\frac{a^3\sqrt{2}}{4n}$,

2e prisme, a remplacé par $a\frac{n-1}{n}$, n du div^r^. par $(n-1)$, $\frac{a^3\sqrt{2}}{4(n-1)}\cdot\frac{(n-1)^3}{n^3}$

3^e^. . . . . $a\frac{n-2}{n}$ . . . . . . $(n-2)$, $\frac{a^3\sqrt{2}}{4(n-2)}\cdot\frac{(n-2)^3}{n^3}$

4^e^. . . . . $\frac{a^3\sqrt{2}}{4(n-3)}\cdot\frac{(n-3)^3}{n^3}$

. . . .

la somme

$$\Sigma = \frac{a^3\sqrt{2}}{4n} + \frac{a^3\sqrt{2}}{4n^3}\left\{(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots\ldots\ldots+2^2+1\right\};$$

or la somme des carrés des n 1ers nombres $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

donc on aura, en remplaçant n par $(n-1)$, la quantité entre parenthèses égale à $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$, et

$$\Sigma = \frac{a^3\sqrt{2}}{4n} + \frac{a^3\sqrt{2}}{4n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4n} + \frac{a^3\sqrt{2}}{24n^2}(2n^2-3n+1)$$

$$= \frac{a^3\sqrt{2}}{4n} + \frac{a^3\sqrt{2}}{12} - \frac{a^3\sqrt{2}}{8n} + \frac{a^3\sqrt{2}}{24n^2}.$$

Quand on fait $n=\infty$, on a le volume du tétraèdre $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$: en effet $V = \text{ABC}.\frac{h}{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.\ \frac{a\sqrt{6}}{} =$
$= \frac{a^3\sqrt{18}}{4.9} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$

DÉMONSTRATION DU THEORÈME 36 (p. 395).

PAR M. A. VACHETTE.

—

Ellipse et hyperbole (*fig*. 101). — On doit avoir $NT = \frac{MF.MF'}{MP}$.

La tangente MT a pour équation

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2;$$

donc on aura $\qquad OT = \frac{a^2}{x'}.$

La normale MN a pour équation

$$y + y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x');\ \text{donc}\ ON = -\frac{b^2x'}{a^2} + x' = \frac{c^2x'}{a^2}.$$

Donc $\quad \mathrm{NT} = \mathrm{OT} - \mathrm{ON} = \dfrac{a^4 - c^2x'^2}{a^2x'} = \dfrac{\left(a + \dfrac{c}{a}x'\right)\left(a - \dfrac{c}{a}x'\right)}{x'}$

$$= \frac{\mathrm{MF.MF'}}{\mathrm{MP}}. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Parabole (*fig.* 102). — On doit avoir $\quad \mathrm{NT} = 2\mathrm{MF}$.
La tangente MT a pour équation $\quad yy' = p(x + x')$,
donc $\quad \mathrm{AT} = -x'$.

La normale MN a pour équation $\quad y - y' = -\dfrac{y'}{p}(x - x')$;

donc $\quad \mathrm{AN} = p + x'$.

Or $\mathrm{NT} = \mathrm{AN} - \mathrm{AT}$, car AT est négatif. Donc

$$\mathrm{NT} = p + 2x' = 2\left(\frac{1}{2}p + x'\right) = 2\mathrm{MF}.$$

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

PAR M. L. A. LE COINTE,
Professeur de mathématiques.

—

Si on divise une demi-circonférence ABCDEFGH (*fig.* 105), en un nombre impair de parties égales, par exemple en 7, et si B,C,D,E,F,G, étant les points de division, on mène les cordes BG, CF, DE, qui sont toutes parallèles au diamètre AH, puis si l'on mène les deux rayons OD, OE, qui aboutissent aux extrémités de la corde DE, qui est, parmi toutes les cordes qu'on vient de mener, celle qui est la plus éloignée du centre, je dis qu'on aura

$$\mathrm{DE} + \mathrm{KL} + \mathrm{MN} = \mathrm{R},$$

en représentant le rayon OA par R, et KL,MN étant les parties des cordes CF,BG, interceptées entre les deux rayons OD,OE.

Démonstration. Soient B′,C′,D′,E′ les points symétriques des points B,C,D,E par rapport au diamètre AH. Alors, le rayon OD prolongé passera par le point E′, et de même les deux points E,D′ seront sur un même diamètre. Menons les deux cordes DC′,CD′ qui se coupent en un point P, et joignons le point D au point D′, et le point C au point C′. Les deux triangles DPD′, CPC′ sont semblables et de plus isocèles; donc si du point P on abaisse une perpendiculaire sur DD′, cette perpendiculaire passant par le point milieu de DD′, passera par le centre du cercle; et de plus, comme elle divise l'angle DPD′ en deux parties égales, elle sera aussi bissectrice de l'angle DOD′, puisque CD′ est parallèle à OD et DC′ à OE. Donc la perpendiculaire abaissée du point P sur DD′ n'est autre que le diamètre AH; donc le point P de rencontre des deux cordes CD′, DC′ est sur AH. De même, si l'on mène les deux cordes BC′, CB′, leur point de rencontre Q sera situé sur AH. Enfin menons la corde AB, qui est parallèle à OE.

Les triangles ODP, PCQ, QBA, sont tous semblables au triangle ODE, de plus le triangle ODP est égal au triangle ODE, le triangle PCQ est égal au triangle OLK, et enfin le triangle QBA est égal au triangle ONM; d'où

$$DE=OP, \qquad KL=PQ, \qquad MN=QA.$$

D'où enfin $\qquad DE+KL+MN=OA=R. \qquad$ C.Q.F.D.

On voit clairement que le mode de démonstration que nous venons d'employer est applicable au cas où la demi-circonférence serait partagée en un nombre impair quelconque, de parties égales.

Corollaire. On a

$$\frac{1}{2}MN=\sin\frac{\pi}{7}.\tang\frac{\pi}{14},$$

$$\frac{1}{2}KL=\sin 2.\frac{\pi}{7}.\tang\frac{\pi}{14},$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{DE} = \sin 3.\frac{\pi}{7}.\ \mathrm{tang}\,\frac{\pi}{14};$$

d'où

$$\sin\frac{\pi}{7} + \sin 2.\frac{\pi}{7} + \sin 3.\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{14}},$$

en faisant le rayon égal à l'unité.

Comme le théorème ci-dessus est vrai, quand même on partagerait la demi-circonférence en un nombre impair quelconque, $2n+1$, de parties égales, il en résulte qu'on a la série connue :

$$\sin\frac{\pi}{2n+1} + \sin 2.\frac{\pi}{2n+1} + \sin 3.\frac{\pi}{2n+1} + \sin 4.\frac{\pi}{2n+1} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \sin n.\frac{\pi}{2n+1} = \frac{1}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{2(2n+1)}}.$$

En effet, elle est une conséquence de cette autre série qui a été donnée par Euler (*Introductio in analysin infinitorum*, tome Ier, page 218),

$$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \sin(a+3b) + \ldots\ldots.$$

$$\ldots\ldots + \sin(a+nb) = \frac{\sin\left(a+\frac{1}{2}nb\right)\sin\frac{1}{2}(n+1)b.}{\sin\frac{1}{2}\,b}$$

Si, dans cette série, nous faisons $b = a$, il viendra

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \ldots\ldots. + \sin(n+1)a$$

$$= \frac{\sin\frac{a}{2}(n+2)\sin\frac{a}{2}(n+1)}{\sin\frac{a}{2}};$$

par conséquent on aura

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \ldots\ldots\ldots + \sin na$$

$$= \frac{\sin\frac{a}{2}(n+1)\sin\frac{a}{2}.n}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Or, on sait qu'on a la formule

$$\sin p.\ \sin q = \frac{1}{2}\cos(p-q) - \frac{1}{2}\cos(p+q),$$

d'où

$$\sin\frac{a}{2}(n+1).\sin\frac{a}{2}n = \frac{1}{2}\cos\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{a}{2}(2n+1),$$

et, par conséquent,

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \ldots\ldots\ldots + \sin na$$

$$= \frac{1}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{a}{2}} - \frac{\cos\frac{a}{2}(2n+1)}{2\sin\frac{a}{2}};$$

d'où

$$\sin\frac{\pi}{2n+1} + \sin 2.\frac{\pi}{2n+1} + \sin 3\frac{\pi}{2n+1} + \sin 4\frac{\pi}{2n+1} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \sin n\frac{\pi}{2n+1} = \frac{1}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{2(2n+1)}};$$

car, $\cos\frac{a}{2}(2n+1)$ devient égal à $\cos\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire devient nul quand $a = \frac{\pi}{2n+1}$, tandis que $\sin\frac{a}{2}$ ne devient pas nul.

CONDITION DE RÉALITÉ

Des racines de l'équation du troisième degré.

PAR M. ROCHE,
de Montpellier.

Soit $$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Cette équation a trois racines, dont une nécessairement réelle. Soit α cette racine supposée connue. En divisant le premier membre de l'équation par $x - \alpha$, on obtiendrait une équation du second degré, qui donnerait les deux autres racines par une formule de la forme

$$x = A \pm \sqrt{R},$$

et suivant la valeur de R, ces racines seront réelles, égales ou imaginaires.

Or, si l'on désigne par $Q = 0$, la condition pour que la proposée ait deux racines égales, R sera nécessairement égal à BQ, et

$$x = A \pm \sqrt{BQ}, \qquad (1)$$

B étant une quantité de signe constant. Car si B devenait infini pour certaines valeurs des coefficients, la proposée aurait alors des racines infinies, ce qui ne peut être puisque le coefficient de x^3 est l'unité. B ne peut pas non plus passer pour zéro, car si cela était, B entrerait comme facteur dans la condition d'égalité de deux racines. Donc B a toujours le même signe.

Quant à la condition d'égalité $Q=0$, elle est facile à calculer par la méthode suivante. Désignant par β la racine double, le théorème sur la composition des équations donne :

$$\alpha + 2\beta = -a, \qquad 2\alpha\beta + \beta^2 = b, \qquad \alpha\beta^2 = -c,$$

et l'élimination de α et β entre ces trois relations conduit à la condition cherchée qui est

$$3(9c-ab)^2 + 2a(9c-ab)(2a^2-6b) + b(2a^2-6b)^2 = 0.$$

Reste à déterminer le signe de B, et puisqu'il est toujours le même, il suffit de prendre un cas particulier, par exemple celui où $a = 0$ et $c = 0$; on trouve alors pour les racines $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{-b}$; et comme alors $Q = 36b^3$, on en conclut $B = -\frac{1}{36b^2}$, *B est donc négatif. Donc pour que les racines* (1) soient réelles, il faut que Q soit négatif. Ainsi la condition de réalité des racines de l'équation proposée est

$$3(9c-ab)^2+2a(9c-ab)(2a^2-6b)+b(2a^2-6b)^2<0.$$

Prenons, comme vérification, l'équation $x^3+px+q=0$, en faisant $a=0$, $b=p$, $c=q$, nous trouvons la condition connue $4p^3+27q^2<0$.

Observation. Dans une équation de degré m, il faut $m-1$ conditions pour que toutes les racines soient égales (v.p. 90); et d'après le théorème de Sturm, il faut généralement autant de conditions pour que toutes les racines soient réelles. Tm.

EXTRAITS DE JOURNAUX.

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE, 1842.

Perturbation d'Uranus.

MM. Delaunay (Ch.) et Le Verrier. Polémique.

Séance du 7 mars, M. Hansen de Gotha, ayant découvert dans la longitude d'Uranus deux nouveaux termes de l'ordre du carré de la force perturbatrice, M. Delaunay a vérifié ces termes et en a constaté l'existence; l'un d'une période de 1608 ans, et l'autre de 88 ans et demi; et a de plus signalé un troisième terme d'une période de 80 ans.

14 mars. M. Delaunay signale deux nouveaux termes; mais, cette fois, du premier ordre, l'un de 73ans,2 et l'autre de 98,6, et d'après cela, croit nécessaire de soumettre à une révision complète les tables d'Uranus.

28 mars. M. Le Verrier essaye de démontrer que de deux nouveaux termes signalés par M. Delaunay, le premier est effectivement nouveau, mais n'existe pas; le second existe, mais n'est pas nouveau, vu qu'on en a tenu compte dans les calculs de la *Mécanique céleste*.

18 avril. M. Delaunay essaye de réfuter les raisonnements de M. Le Verrier et soutient que ses deux inégalités *existent*, et sont *nouvelles*, vu qu'elles ne sont pas données *explicitement*, dans la *Mécanique céleste;* mais il reconnaît qu'elles y sont *implicitement* et qu'on en a tenu compte dans la construction des tables.

3 mai (p. 660). M. Le Verrier prend acte de l'aveu de son adversaire, relativement à la méthode de calcul de la *Mécanique céleste*, et il repousse les attaques dirigées contre la construction des tables d'Uranus. Il y a deux moyens de calculer la longitude d'une planète; le premier, en partant du mouvement moyen considéré comme uniforme, on a égard aux inégalités elliptiques de la planète, et ensuite aux perturbations dues à l'action des autres planètes; ce moyen n'est pas celui qu'on a suivi dans la construction des tables, et c'est celui dont M. Delaunay s'est servi; le second moyen recommandé spécialement par Laplace pour le calcul d'Uranus, prend pour point de départ, le mouvement moyen, mouvement perturbé; c'est celui qu'on a suivi dans la construction des tables d'Uranus, et dont M. Delaunay ne s'est pas servi; il n'est donc pas surprenant qu'il soit parvenu à des résultats différents; M. Le Verrier fait observer encore que la longitude perturbée n'est autre chose que la quantité angulaire dont la planète s'écarte de sa position elliptique; ne pouvant calculer cet écart par un seul terme, on le décompose en plusieurs; que cette décomposition est un problème indéterminé; pourvu que la somme des parties représente l'écart, le reste est arbitraire; chacun peut trouver *ad libitum* d'autres termes composants, c'est le terme résultant qu'on juge. Dire donc avec M. Delaunay qu'un tel terme composant existe, mais que les astronomes ne s'en servent pas, ce n'est rien dire: *sub judice lis est.*

Arénaire d'Archimède; M. Chasles.

11 avril. Personne ne peut mieux connaître le but que se propose Archimède, dans cet ouvrage, qu'Archimède lui même. Il débute ainsi: « Plusieurs pensent, ô roi Gélon, que le nombre des *grains* de sable est infini : non pas de celui seulement qu'on trouve aux environs de Syracuse et dans toute la Sicile, mais de celui qui est répandu dans toutes les parties de la terre habitée et non habitée. D'autres bien qu'ils ne regardent pas ce nombre comme infini, pensent qu'il n'existe pas de grandeur, qu'on ne peut dire le *nom* d'une grandeur surpassant la multiplicité de ces grains. Par là il est évident que les personnes de cette opinion, si elles imaginaient un tas de sable capable de remplir et de niveler toutes les profondeurs de la mer, toutes les cavités de la terre, jusqu'aux sommets des plus hautes montagnes, soutiendraient encore bien plus, qu'il est impossible d'assigner un nombre supérieur aux grains d'un tel tas. Mais moi, je vais essayer de faire voir le contraire par des démonstrations irrécusables, au moyen desquelles tu pourras reconnaître que quelques-uns des nombres, *dénommés* dans mes livres adressés à Zeuxippe (*), surpassent non-seulement le nombre des grains de sable qui puissent remplir toute la terre, mais encore la masse de sable, égal en volume à tout l'univers (**). »

Ce mot *univers* désigne chez Archimède la sphère des planètes, celle qui a pour diamètre, celui de l'orbite solaire, ou du zodiaque. D'après des observations qui portent l'empreinte de son génie, Archimède conclut que le diamètre de l'univers est moindre que dix millions de Stades (180000 myriamètres), et d'après des mesures comparées, il trouve qu'un grain de pavot a un diamètre moindre qu'un $\frac{1}{40}$ de

(*) Ces livres sont malheureusement perdus.

(**) *Sicuti enumerari non possunt stellæ cœli et metiri arena maris.* Jer. 33, 22.

doigt ($0^m,000468$), et que ce même grain de pavot, équivaut à dix mille grains de sable. Maintenant, il a tous les éléments de la question. Il s'agit seulement de trouver une *dénomination courte* pour exprimer le nombre de fois qu'une sphère ayant pour diamètre 486.10^{-7}, est contenu dans une sphère d'un diamètre égal à 18.10^4 mètres. Or les Grecs comme tous les peuples anciens se servaient d'une numération parlée, décuple, et employaient cinq mots, savoir : unité, dizaine, centaine, mille, myriade; ensuite dix myriades, cent myriades, mille myriades, et myriades de myriades, et ainsi de suite, en répétant sans cesse les mêmes mots. Pour éviter ces fastidieuses répétitions, Archimède a recours à un expédient qui, moins la notation, a tous les avantages de nos exposants. Il établit une progression géométrique ayant l'unité pour premier terme et un myriade (10^4) pour raison, et partage cette progression en groupes de huit termes, en octades. Ce moyen permet déjà d'exprimer des nombres très-considérables; Archimède n'en reste pas là; de cent millions d'octades, il compose une première période; de cent millions de ces périodes, une seconde période; de sorte que pour exprimer le nombre énorme de l'unité suivie de huit cent millions de zéros, il lui suffit de dire que c'est le premier terme ou l'unité de la deuxième période. A cette occasion, il fait la remarque, devenue si célèbre, que dans une telle progression, le produit des termes peut s'obtenir par l'addition, premier germe de la théorie logarithmique. Enfin, après diverses évaluations, il conclut que le nombre de grains de sable que peut contenir l'Univers, est moindre que le huitième terme de la huitième octade, c'est-à-dire moindre que l'unité suivie de soixante-trois zéros ou que 10^{63}.

« Je sais bien, ô roi Gélon, dit-il en terminant, que cela paraîtra incroyable au vulgaire, à ceux qui sont inexpérimentés dans les sciences mathématiques; mais que cela paraîtra suffisamment croyable, vu les preuves, à ceux qui s'y sont essayés et qui ont fait des recherches sur les distances des corps célestes, sur la grandeur de la Terre, du Soleil, de la Lune et de l'Univers entier, c'est pour cela que je n'ai pas jugé inconvenant de consacrer à cet objet quelques méditations. »

En faisant une excellente et lumineuse analyse de l'Arénaire, M. Chasles a eu pour but de montrer, que cet ouvrage ne pouvait jeter aucun jour sur la question de savoir si les anciens faisaient aussi usage dans les calculs d'une numération *écrite*, décuple; en d'autres termes, les anciens se servaient-ils d'un caractère analogue à notre zéro, en remplissant les fonctions? toute la question est là. Car M. Chasles a parfaitement établi que les *abaques* servaient à traiter les unités décuples, comme des unités complexes; mais l'existence même de ces abaques semble prouver l'absence du zéro, et quand le zéro a paru avec la numération indoue-arabe, les abaques ont disparu.

25 avril. Rapport sur un compas propre à tracer toutes sortes d'ellipses, par M. Puissant. Les inventeurs de compas, MM. Hamann et Hempel ont pris pour base de leur construction ce théorème: soient OA, OB, le demi-grand axe et le demi-petit axe d'une ellipse; du point O comme centre, soient décrites successivement, avec les rayons OA, OB deux circonférences. Menons un rayon quelconque ON à la grande circonférence, coupant la petite au point M. Sur MN comme diamètre décrivant une circonférence, elle coupe l'ellipse en un point P tel que la corde MP sera parallèle au grand axe, et l'arc MP soutendu par cette corde est le double de l'arc MB, de la circonférence inscrite. Par là, on comprend facilement, que si un point décrit une circonférence et qu'un second point tourne autour du premier et dans le même plan, avec une vitesse angulaire double et dirigée dans le sens opposé, ce second point décrira une ellipse. Par exemple, si la

Terre décrivait une circonférence autour du Soleil, d'un mouvement uniforme d'occident en orient, en 360 jours sidéraux, et si la Lune décrivait autour de la Terre une circonférence dans le même plan, d'un mouvement uniforme, d'orient en occident, en 180 jours sidéraux; alors la Lune décrirait, dans l'espace absolu, une ellipse.

Le compas ellipsographe se compose : 1° d'une roue dentée, horizontale fixe, surmontée à son centre d'un manche vertical; 2° ce manche est traversé perpendiculairement d'une verge portant à son extrémité un pignon horizontal mobile, dans le plan de la roue et ayant un rayon moitié moindre, et ce pignon a une tige horizontale, dans le prolongement de la verge; cette tige porte verticalement un crayon ou un tire-ligne; 3° la roue et le pignon engrènent avec une crémaillère horizontale, posée dans les gorges de deux roulettes à ressort, qui tiennent toujours la crémaillère appliquée contre la roue et le pignon. Faisant tourner le manche autour de son axe, il communique un mouvement de rotation à la roue fixe, de rotation et de translation à la crémaillère; le centre du pignon aura même vitesse angulaire que la roue fixe et les points de sa circonférence auront une vitesse angulaire double en sens opposé; ainsi, en vertu de ce double mouvement, le crayon tracera une ellipse dont les dimensions dépendent des distances du crayon aux centres du pignon et de la roue, distances que l'instrument permet de faire varier.

On a omis de mentionner une donnée décisive, le prix de l'instrument (*).

3 mai (p. 654). J. Binet. Note sur l'usage du calcul des variations pour l'intégration des équations à dérivées partielles du premier ordre, renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes.

Le mémoire du profond géomètre a pour but de simplifier,

(*) En 1839, M. Michel Léninn, ingénieur russe, a inventé un ellipsographe fondé sur le même principe.

à l'aide de la méthode des variations, les résultats obtenus par l'illustre M. Jacobi. Un cas particulier avait déjà été traité par M. Binet dans le *Journal de l'École Polytechnique* (t. XVIII La même analyse est généralisée, dans cette note, qui sera développée dans un mémoire spécial.

3 mai (p. 634). Blanchet (P.-H.). Sur les ondes successives. Note.

THEORÈMES ET PROBLÈMES.

—

42. Lieu des foyers des paraboles qui ont une tangente commune et une corde commune, parallèle à cette tangente.

43. Lieu du sommet d'un angle droit, dont les côtés sont normaux à une ellipse donnée.

44. Par le foyer d'une parabole, on mène un rayon vecteur quelconque et une perpendiculaire à ce rayon; puis, sur ces deux droites comme côtés, et avec la normale au point pris sur la parabole, comme diagonale, on construit un rectangle. Quel est le lieu du sommet opposé au foyer?

45. Trouver le lieu des intersections successives de toutes les ellipses ayant un diamètre donné de grandeur et de position, et son conjugué, donné de grandeur seulement.

46. *Théorème.* De toutes les pyramides ayant même angle polyèdre au sommet, et même hauteur, la plus petite en volume a pour centre de gravité de sa base, le pied de sa hauteur. (Catalan.)

47. Par un point O, donné dans un angle droit BAC, on mène une droite quelconque NP, terminée aux côtés de l'angle. On construit sur NP un triangle MNP semblable à un triangle donné. Quel est le lieu du sommet M?

48. *Théorème.* **Deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 et 9, ne peuvent être des puissances exactes.** (Catalan.)

49. Combien l'équation transcendante $2(1-\cos x)=x\sin x$, admet-elle de racines réelles positives?

50. Une corde étant inscrite dans une parabole, le produit des distances des extrémités de cette corde, à un diamètre quelconque est égal à la partie de ce diamètre interceptée entre la courbe et la corde, multipliée par le paramètre de l'axe principal.

51. Soit un carré divisé par des lignes horizontales et verticales en n^2 petits carrés, ayant chacun 2 unités de longueur pour côté. Prenons deux côtés adjacents du grand carré pour axes coordonnés. Les coordonnées du centre d'un petit carré sont exprimées par des nombres entiers impairs; et les coordonnées des sommets par des nombres pairs, désignons par (h, v) le centre d'un petit carré ayant h pour abscisse horizontale et v pour ordonnée verticale; faisant passer une droite par (h, v) et (h', v'), quels sont les carrés que cette droite traversera, et quels sont les centres et les sommets des carrés situés sur cette droite? Étant données les équations de deux droites passant chacune par deux centres, quelles relations doivent exister entre les coordonnées des quatre centres; 1° pour que les deux droites soient parallèles; 2° pour qu'elles se coupent à angles droits; 3° pour que le point d'intersection soit le centre d'un cinquième carré? (Analyse indéterminée).

52. a, b, c étant les trois côtés d'un triangle sphérique, et e l'excès sphérique, l'on a

$$1+2\left[\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c\cos^2\frac{1}{2}e\right]$$
$$=\cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)+\cos(a+c-b)+\cos(b+c-a).$$

53. *Théorème.* Soit un faisceau de n droites convergentes

au point O, et $n-1$ points X_1, X_2, X_3,... X_{n-1}, en ligne droite, le tout dans un même plan; prenez sur OA_1, la première du faisceau, arbitrairement les points A_1, B_1, C_1, etc., en nombre quelconque; du point X_1 comme centre, projetez ces points sur la seconde droite du faisceau en A_2, B_2, C_2, etc.; du point X_2 comme centre, projetez ces dernières sur la troisième ligne du faisceau en A_3, B_3, C_3, etc.; du point X_3 comme centre, projetez ces dernières sur la quatrième ligne, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les points X_1, X_2,... X_{n-1} aient été employés. Soient A_n, B_n, C_n, etc., les dernières projections obtenues du point X_{n-1} comme centre; les droites A_1A_n, B_1B_n, C_1C_n, etc., concourent en un même point situé sur la droite X_1X_{n-1} (*fig.* 103).

Si $n=3$ et X_1 restant fixe, on suppose que X_2 décrive une conique, quel sera le lieu décrit par le point de concours des droites A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3, etc.? (Finck).

54. Trouver une surface algébrique sur laquelle on ne puisse tracer qu'une seule et unique circonférence.

55. L'exposant du binôme de Newton étant de la forme a^p-1, où a est un nombre premier et p un nombre entier positif quelconque, aucun coefficient du binôme n'est divisible par a; si l'exposant est a^p, tous les coefficients (les deux extrêmes exceptés), sont divisibles par a.

56. *Théorème.* Étant donné un système de lignes droites, situées dans l'espace d'une manière quelconque, on peut mener une infinité de plans dont chacun coupe toutes les droites.

57. Étant données sur un plan, les projections cylindriques ou coniques ABC, A'B'C', des intersections d'un cône quelconque par deux plans, et la projection O du sommet du cône, menez un rayon vecteur quelconque OBB', et les tangentes en B, B'; ce rayon tournant autour de O, quel sera le lieu du point X, intersection des tangentes (*fig.* 104)? (Finck.)

FORMULE GÉNÉRALE

Pour la conversion des fractions périodiques simples ou mixtes en fractions ordinaires ou à deux termes.

PAR M. TREMBLOY,
Répétiteur au Collége de Henri IV.

—

Soit dans un système de numération dont la base est B, une suite de chiffres $abc...g$ en nombre h, après lesquels d'autres chiffres $pqrs...v$, en nombre h', se reproduisent indéfiniment dans un ordre constant.

On sait qu'une telle suite, appelée fraction périodique, est le résultat de la division d'un nombre n multiplié par une certaine puissance de B, par un nombre m qui a des facteurs premiers à la fois avec n et avec B. On propose de retrouver la fraction à deux termes $\frac{n}{m}$, qui a fourni la suite périodique, ou autrement de convertir la fraction périodique en fraction ordinaire.

On distingue généralement deux espèces de fractions périodiques, les unes appelées *simples*, dans lesquelles la virgule, indiquant le rang de l'unité principale, est immédiatement à la gauche du premier chiffre périodique p, les autres appelées *mixtes* dans lesquelles il y a entre la virgule et le chiffre p, un nombre h de chiffres non périodiques.

Je me propose de donner une formule générale convenant également aux deux cas.

Pour plus de simplicité, je supposerai, comme on le fait toujours, qu'il n'y ait pas de partie entière. Soit donc la suite

$$0,\ abc...gpqrs...vpqrs...vpqrs...v...,\ \text{etc.}$$

Quel que soit le rang du chiffre auquel on s'arrête dans ce quotient, on a toujours un reste, dont il est facile d'avoir une expression. Supposons qu'on s'arrête après un nombre α de périodes complètes (condition qui n'est pas indispensable), le reste sera égal à celui qui, divisé par m, a donné le premier chiffre p de la première période. Or le nombre des chiffres non périodiques étant h et ces chiffres étant $abc...g$, le reste est évidemment $n \times B^h - m \times abc....g$; par conséquent après un nombre complet de périodes, on doit toujours ajouter au quotient un terme complémentaire de la forme fractionnaire $\frac{n \times B^h - m \times abc...g}{m}$; et comme le nombre des périodes est α, celui des chiffres périodiques étant h', le nombre total des chiffres est $h + \alpha h'$; l'ordre d'unité du terme complémentaire est donc $\frac{1}{B^{h+\alpha h'}}$.

Par conséquent on a l'égalité

$$\frac{n}{m} = 0,\ abc...gpqrs...vpqrs...vp... + \frac{n \times B^h - m \times abc...g}{m \times B^{h+\alpha h'}}.$$

Multipliant tout par $m \times B^{h+\alpha h'}$

$$n \times B^{h+\alpha h'} = m \times abc...gpqrs...vp... + n \times B^h - m \times abc...g.$$

Retranchons de part et d'autre $n \times B^h$

$$n \times (B^{h+\alpha h'} - B^h) = m \times abc...gpqrs...vpqrs...vp... - abc...g,$$

Divisons les deux membres par m et par $B^{h+\alpha h'} - B^h$

$$\frac{n}{m} = \frac{abc...gpqrs...vpqrs...vp... - abc...g}{B^{h+\alpha h'} - B^h}.$$

La partie non périodique $abc...g$ ayant à sa droite un nombre $\alpha h'$ de chiffres, de même la première période étant suivie de $(\alpha-1)h'$ chiffres, la seconde de $(\alpha-2)h'$ chiffres.... etc...., le numérateur peut s'écrire

$$abc...g \times B^{\alpha h'} + pqrs...v \times (B^{(\alpha-1)h'} + B^{(\alpha-2)h'} + ... + 1) - abc...g.$$

ou bien

$$abc\ldots g \times (B^{\alpha h'} - 1) + pqrs\ldots v\left(\frac{B^{\alpha h'} - 1}{B^{h'} - 1}\right),$$

et le dénominateur peut se mettre sous la forme $B^h(B^{\alpha h'} - 1)$.

Nous pouvons alors diviser le tout par $B^{\alpha h'} - 1$, et multiplier et diviser la partie non périodique par $B^{h'} - 1$, nous aurons alors

$$\frac{n}{m} = \frac{abc\ldots g(B^{h'} - 1) + pqrs\ldots v}{B^h(B^{h'} - 1)} = \frac{abcg\ldots pqrs\ldots v - abc\ldots g}{B^h(B^{h'} - 1)}.$$

Nota. Cette formule est indépendante de α, par conséquent la valeur $\frac{n}{m}$ est indépendante du nombre de périodes. Traduite en langage ordinaire, elle donne la règle connue pour les fractions périodiques mixtes.

Si l'on a une fraction périodique simple, la partie $abc\ldots g$ n'existe pas et il faut faire $h=0$, d'où $B^h = 1$, et l'on a

$$\frac{n}{m} = \frac{pqrs\ldots v}{B^{h'} - 1},$$

qui donne encore la rgle connue.

On peut même, si l'on veut, se servir de cette formule pour une fraction finie ; car on peut surpposer que la fraction est suivie d'un nombre indéfini de 0, auquel cas la partie périodique se compose d'un seul chiffre qui se répète, et ce chiffre est 0. En appliquant la formule on tombe sur une fraction qui simplifiée (et elle peut toujours se simplifier) donne la même fraction que la règle ordinaire.

Rectification (p. 480).—Aire de l'ellipsoïde aplati

$$2S\left(\text{séc.}\,\alpha + \cot.\alpha \log.\text{tang}.45° + \frac{1}{2}\alpha\right).$$

Pour l'elllipsoïde terrestre, on a à peu près

$$\alpha = 5°14'40''\text{; aplatissement} = \frac{1}{289}.$$

(*Voir* Legendre, *F. ellipt.*, t. I, p. 357.)

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS (*).

(*) Nous devons ces tables à l'obligeance de MM. Anne, professeur, et Merlieux (E.), élève.

TABLE

PAR ORDRE DE MATIÈRES.

I. Arithmétique.

II. Géométrie élémentaire.

III. Algèbre élémentaire.

IV. Trigonométrie rectiligne.

V. Trigonométrie sphérique.

VI. Statique.

VII. Algèbre supérieure.

VIII. Géométrie analytique à deux dimensions.

IX. Géométrie analytique à trois dimensions.

X. Questions d'examen et problèmes divers.

1. Géométrie élémentaire.

2. Algèbre élémentaire.

3. Algèbre supérieure.

4. Application de l'algèbre à la géométrie.

XI. Solutions de problèmes, démonstrations de théorèmes proposés dans le journal.

1. Géométrie élémentaire.

XIV. Matières diverses.

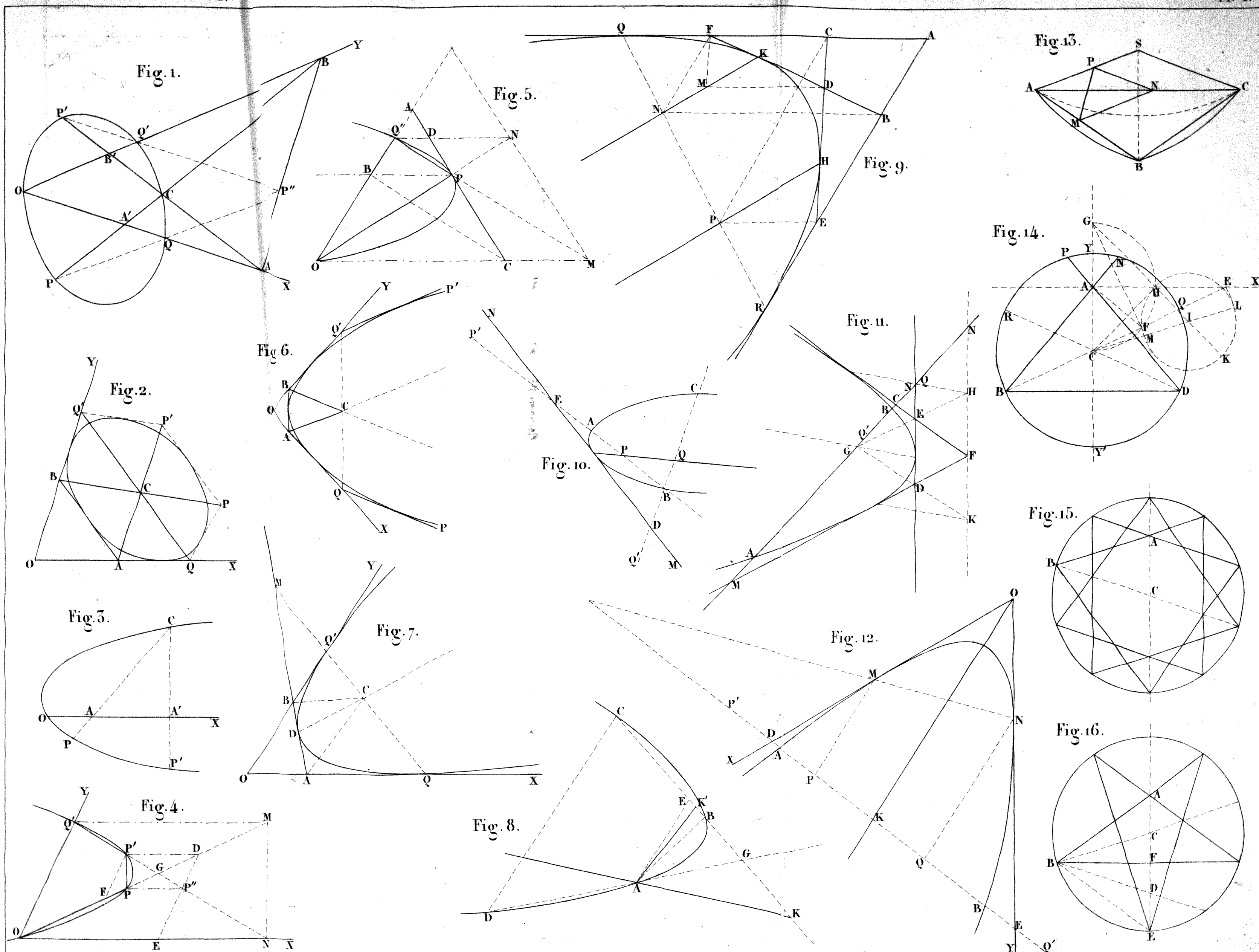
XV. Renseignements biographiques et bibliographiques.

FIN DE LA TABLE PAR ORDRE DE MATIÈRES

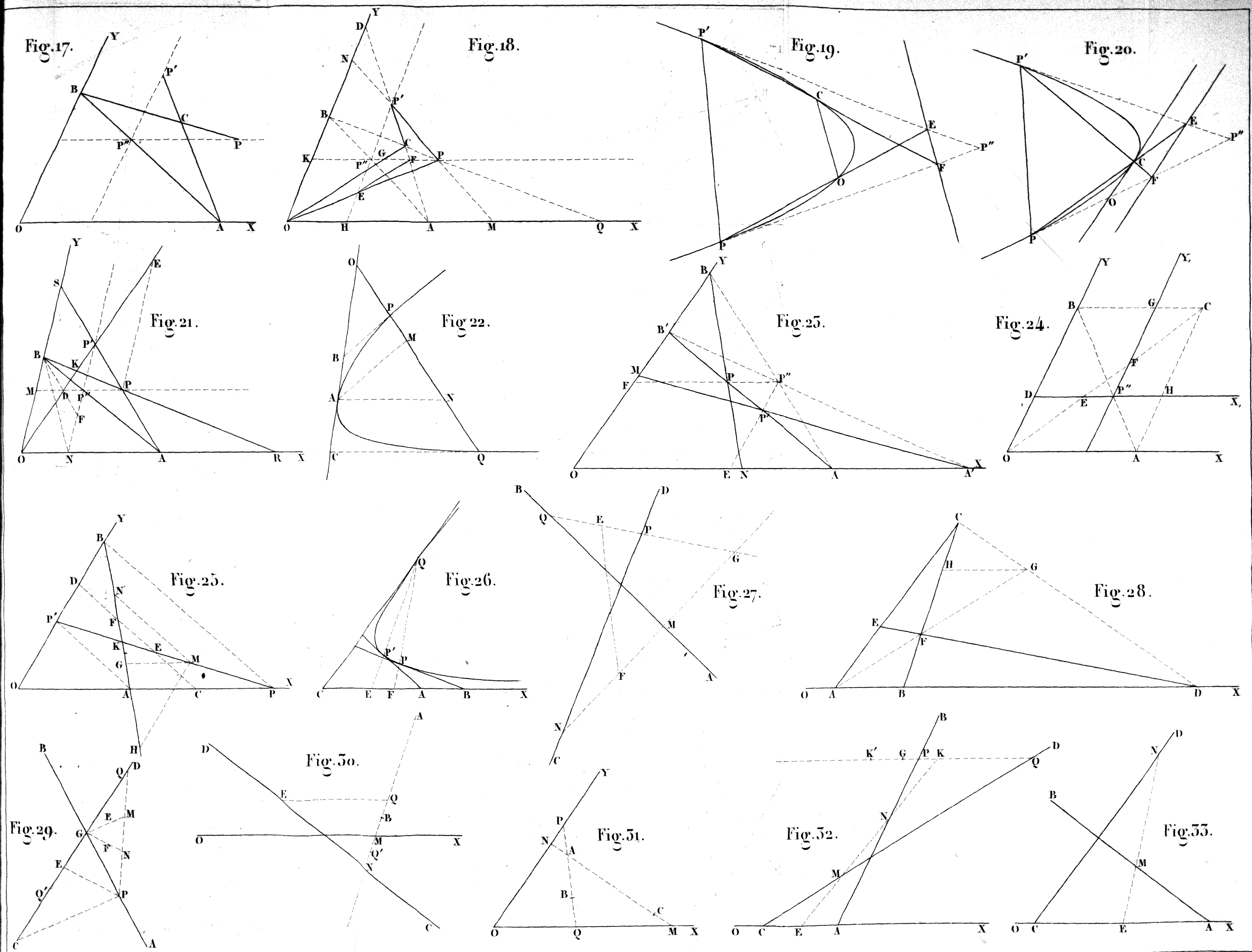
ERRATA.

Page 84, ligne 7, en remontant, p^2, *lisez :* ρ^2.
Page 144, ligne 5, en remontant, DC, *lisez :* D'C.
Page 165, ligne 5, en descendant, $-\nu p$, *lisez :* $-\gamma p$.
Page 170, ligne 9, en ramontant, Kx^{-1}, *lisez :* Kx^{m-1}
Page 180, ligne 4, en remontant, $\frac{m+1}{2}$, *lisez :* $\frac{m+1}{3}$.
Page 194, ligne 4, en remontant, séc. $\frac{\pi}{10}$, *lisez :* séc. $\frac{\pi}{16}$.
Page 198, ligne 6, en remontant, centre du; *effacez*.
Page 205, ligne 11, en descendant, et à, *lisez :* de.
Page 207, ligne 5, en remontant, situés trois, *lisez :* situés sur trois.
Page 236, ligne 14, page 56, *lisez :* page 59.
Page 263, ligne dernière, *ajoutez :* fig. 59.
Page 267, ligne 16, en descendant, $l\sqrt[3]{^2}$, *lisez :* $\sqrt[3]{l^2}$.
Page 270, ligne 12, en remontant, composons, *lisez :* comparons.
Page 271, ligne 5, en remontant, explication, *lisez :* application.
Page 272, ligne 5, en descendant, pourrait, *lisez :* pouvait.
Page 304, ligne 2, en descendant, $b^2\cos^2\alpha''$, *lisez :* $b^2\cos^2\alpha'$.
Page 311, ligne 2, en descendant, théorème 2, *lisez :* théorème 1.
Page 316, ligne 10, en remontant, faisceaux, *lisez :* axes.
Page 331, ligne 12, en descendant, $\frac{x^2-qx}{\gamma}$, *lisez :* $\frac{x^2-qx}{r}$.
Page 333, ligne 10, en descendant, $\gamma\epsilon\beta\delta$, *lisez :* $\epsilon\delta\gamma\beta$.
Page 347, ligne 11, en descendant, 1720, *lisez :* 1701.
Page 381, ligne dernière, qualités, *lisez :* quantités.
Page 391, ligne 2, en descendant, $z'\eta'$, *lisez :* $z'\zeta'$.
Page 391, ligne 15, en descendant, $\beta''\xi''$, *lisez :* $\beta'''\xi''$,
Page 392, ligne 3, en descendant, SM'M''M''', *lisez :* OM'M''M'''.
Page 392, ligne 14, en descendant, $\frac{n}{\text{q}}$, *lisez :* $\frac{n}{q}$.
Page 392, ligne 3, en remontant *e*, *lisez : c*.
Page 405, ligne 4, en remont., démontration, *lisez :* démonstration.
Page 409, ligne 8, en descendant, pas, *effacez*.
Page 441, ligne 3, en remontant 4, *lisez :* L.
Page 441, ligne 1, en remontant, 4, *lisez :* L.
Page 442, ligne 2, en descendant, 4, *lisez :* L.
Page 443, ligne 3, en descendant, $\frac{180^\circ}{m}$, *lisez :* $3.\frac{180^\circ}{m}$.
Page 443, note, t. 3, 1837, *lisez :* t. 1, p. 278, 1836.
Page 448, ligne 8, en remontant, d'annés, *lisez :* d'années.
Page 449, ligne 3, en descendant, porportionnelles, *lisez :* proportionnelles.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
IMPRIMEURS DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.



Gravé par Adam et Lemaître.



Gravé par Adam et Lemaître.

Fig. 34.

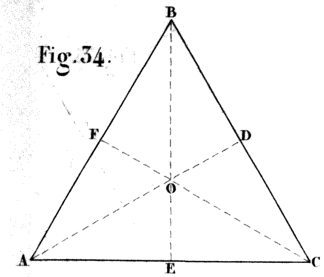


Fig. 35.

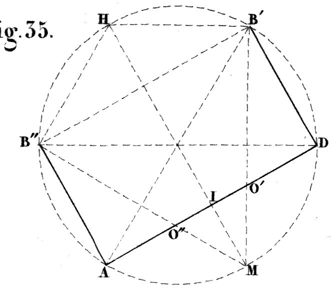


Fig. 36.

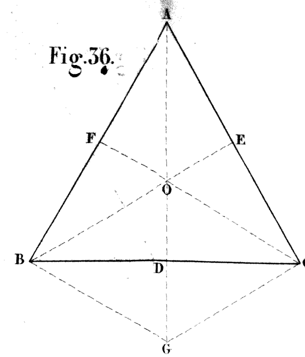


Fig. 37.

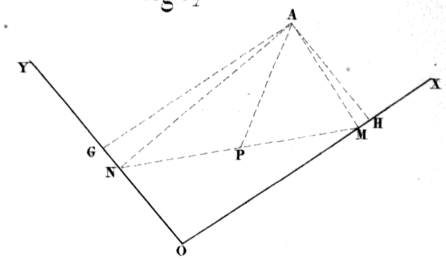


Fig. 38.

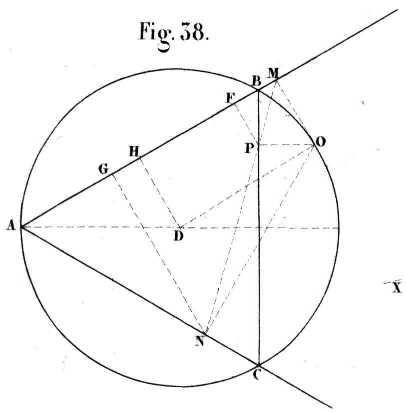


Fig. 39.

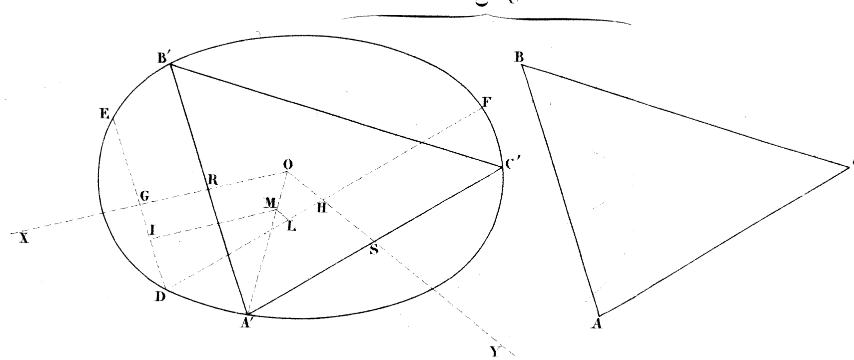


Fig. 40.

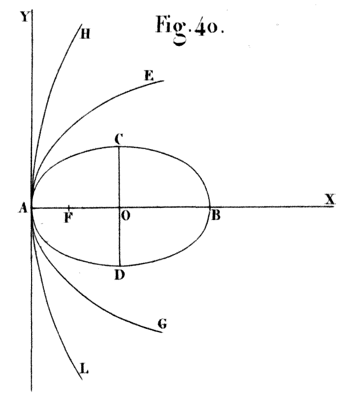


Fig. 41.

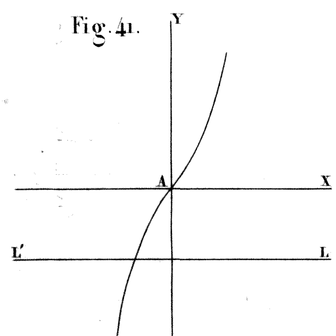


Fig. 42.

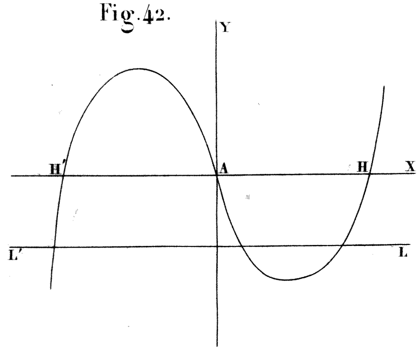


Fig. 43.

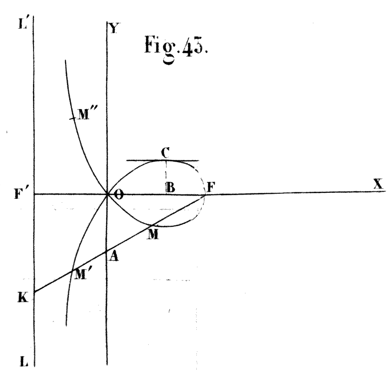
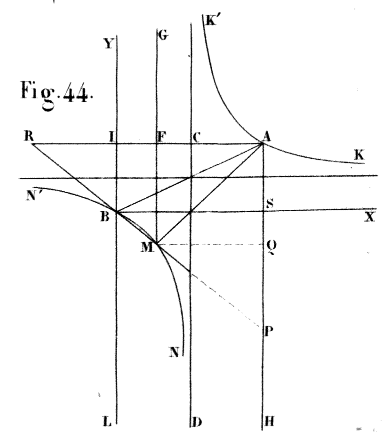


Fig. 44.



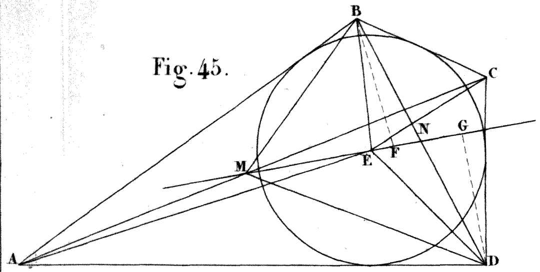


Fig. 45.

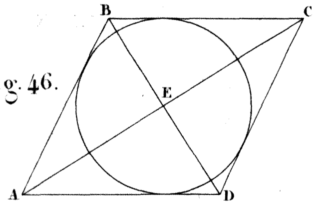


Fig. 46.

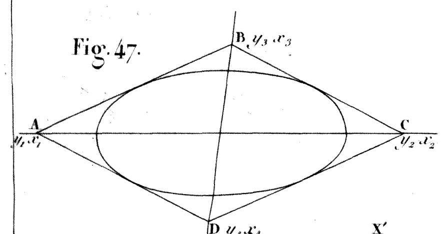


Fig. 47.

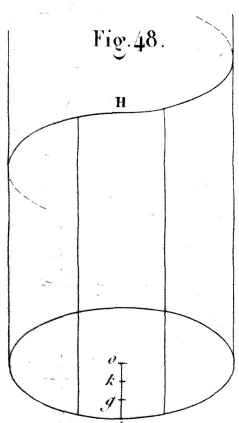


Fig. 48.

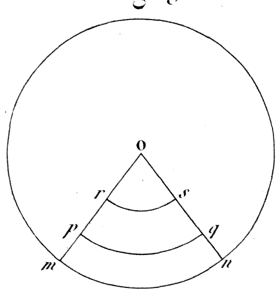


Fig. 49.

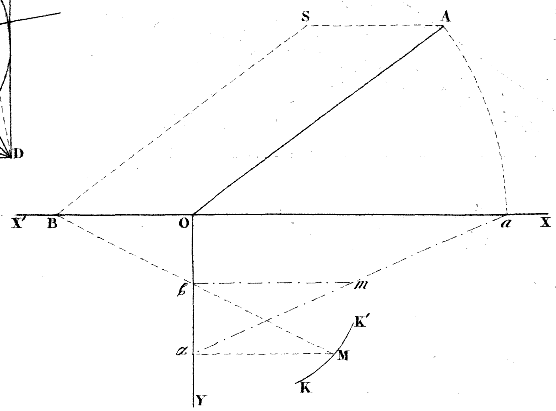


Fig. 50.

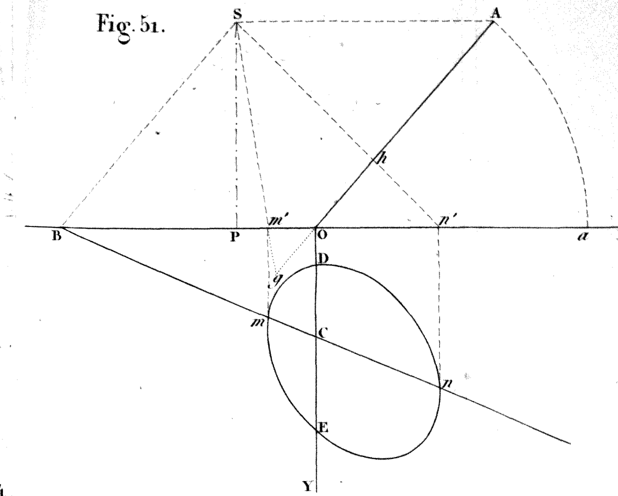


Fig. 51.

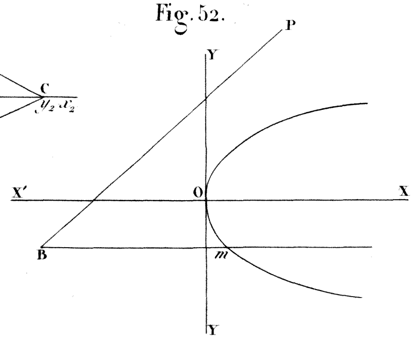


Fig. 52.

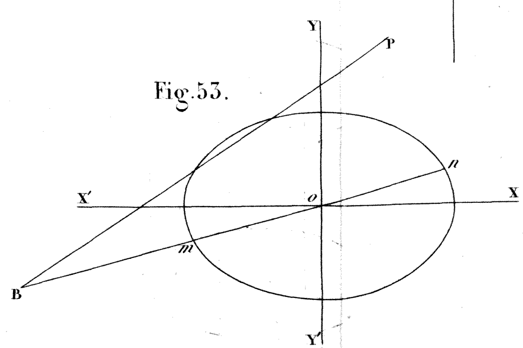


Fig. 53.

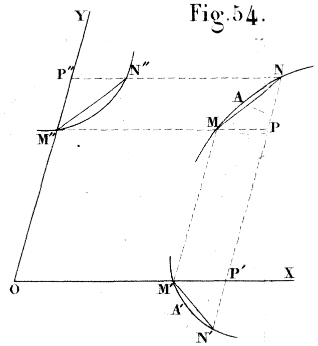


Fig. 54.

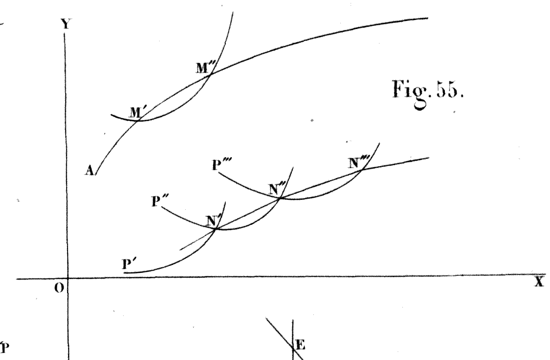


Fig. 55.

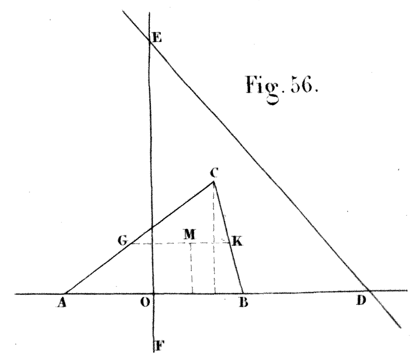
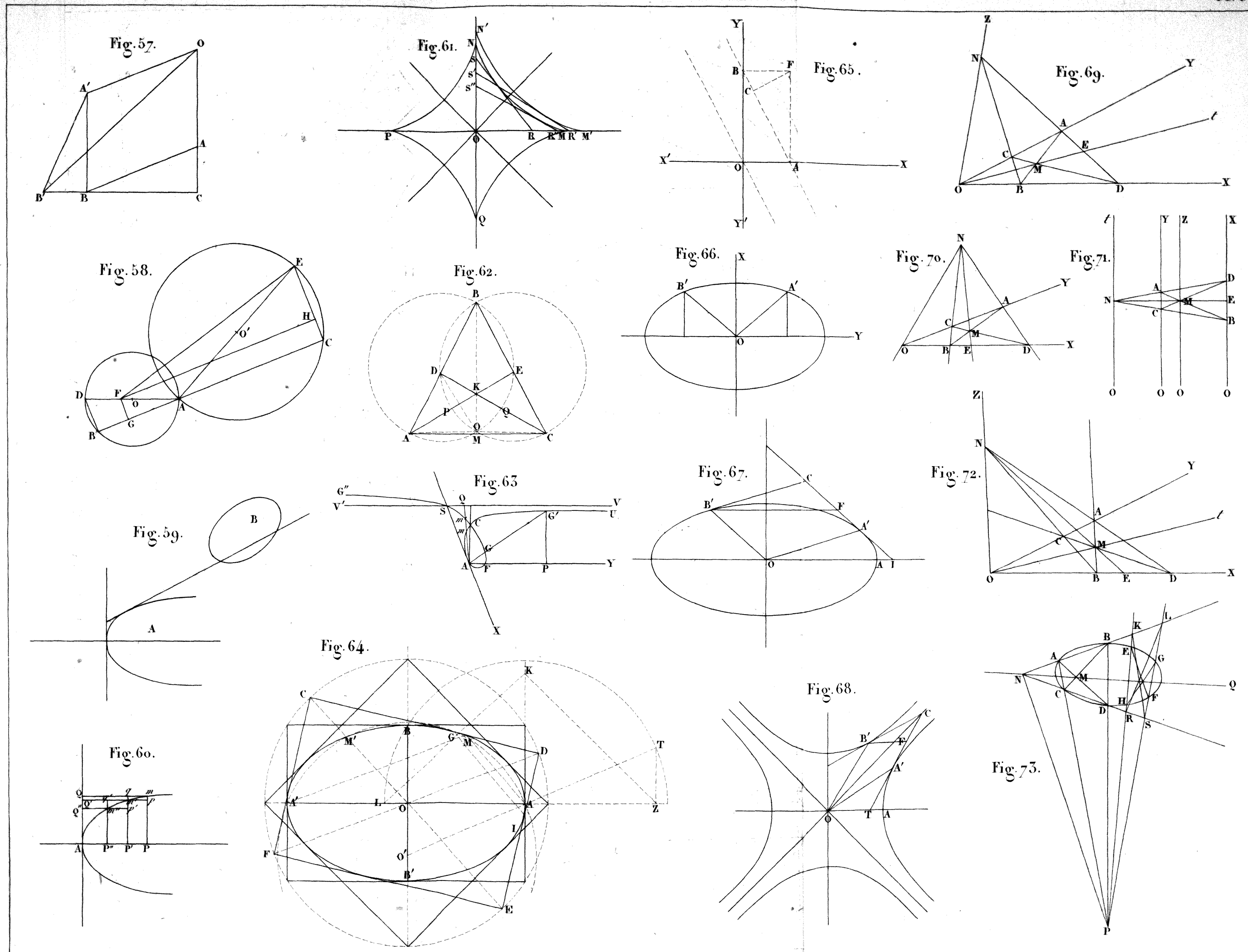


Fig. 56.

Gravé par Adam et Lemaitre.



Gravé par Adam et Lemaitre.

Fig. 74.

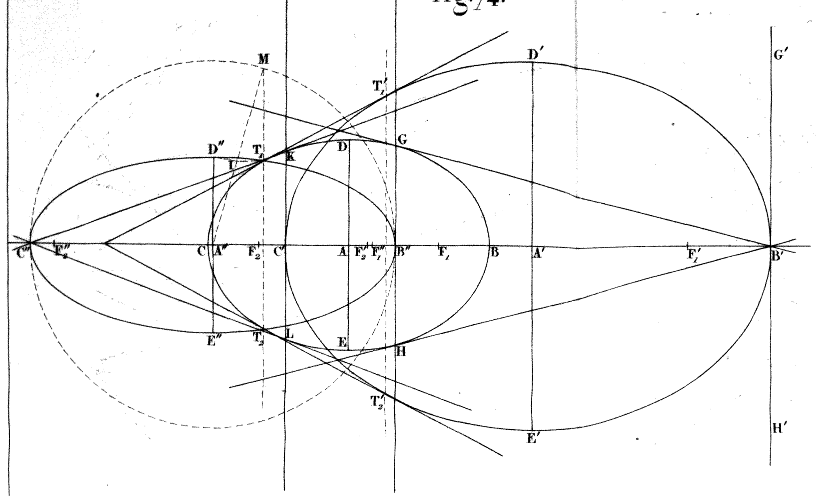


Fig. 76.

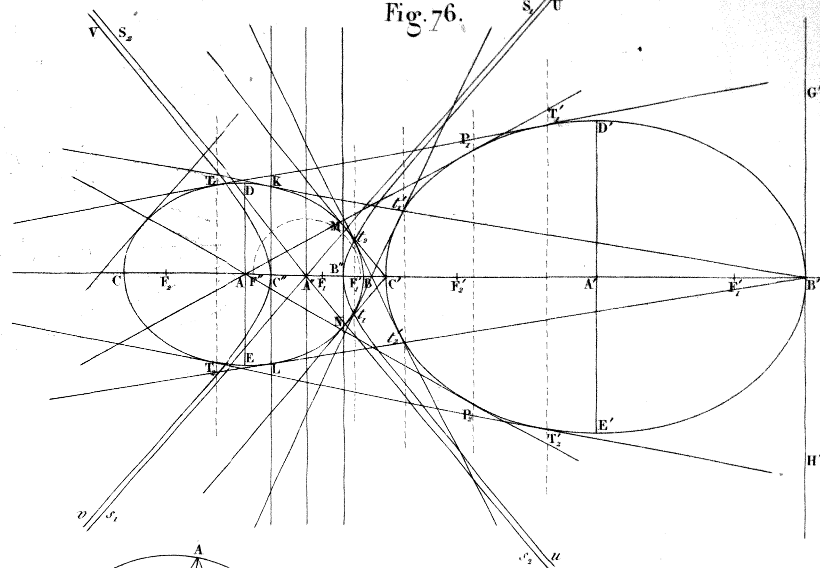


Fig. 75.

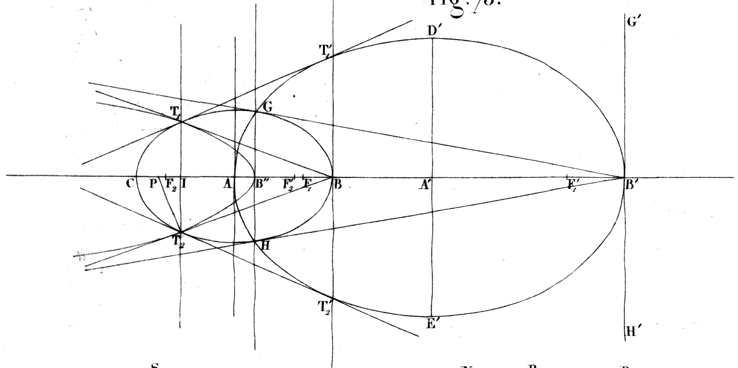


Fig. 79.

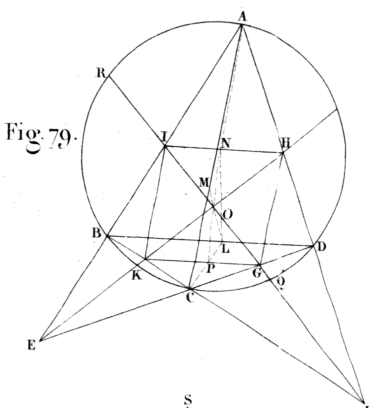


Fig. 80.

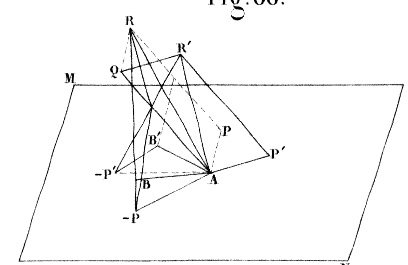


Fig. 77.

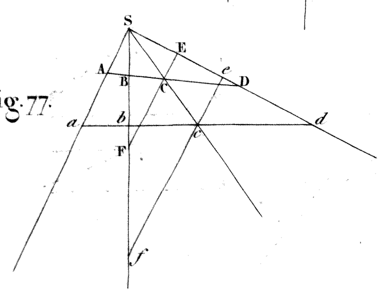


Fig. 78.

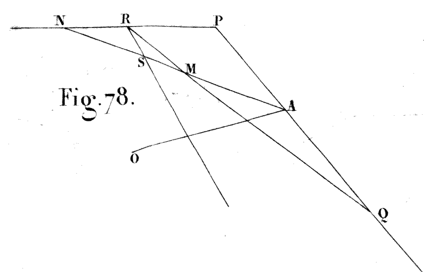


Fig. 81.

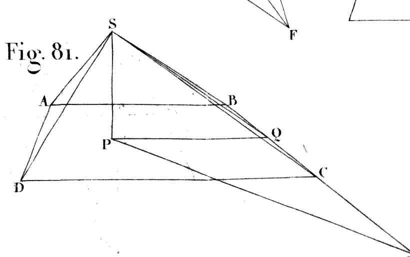
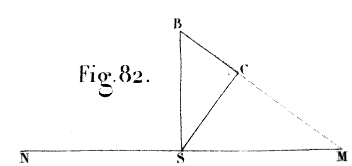
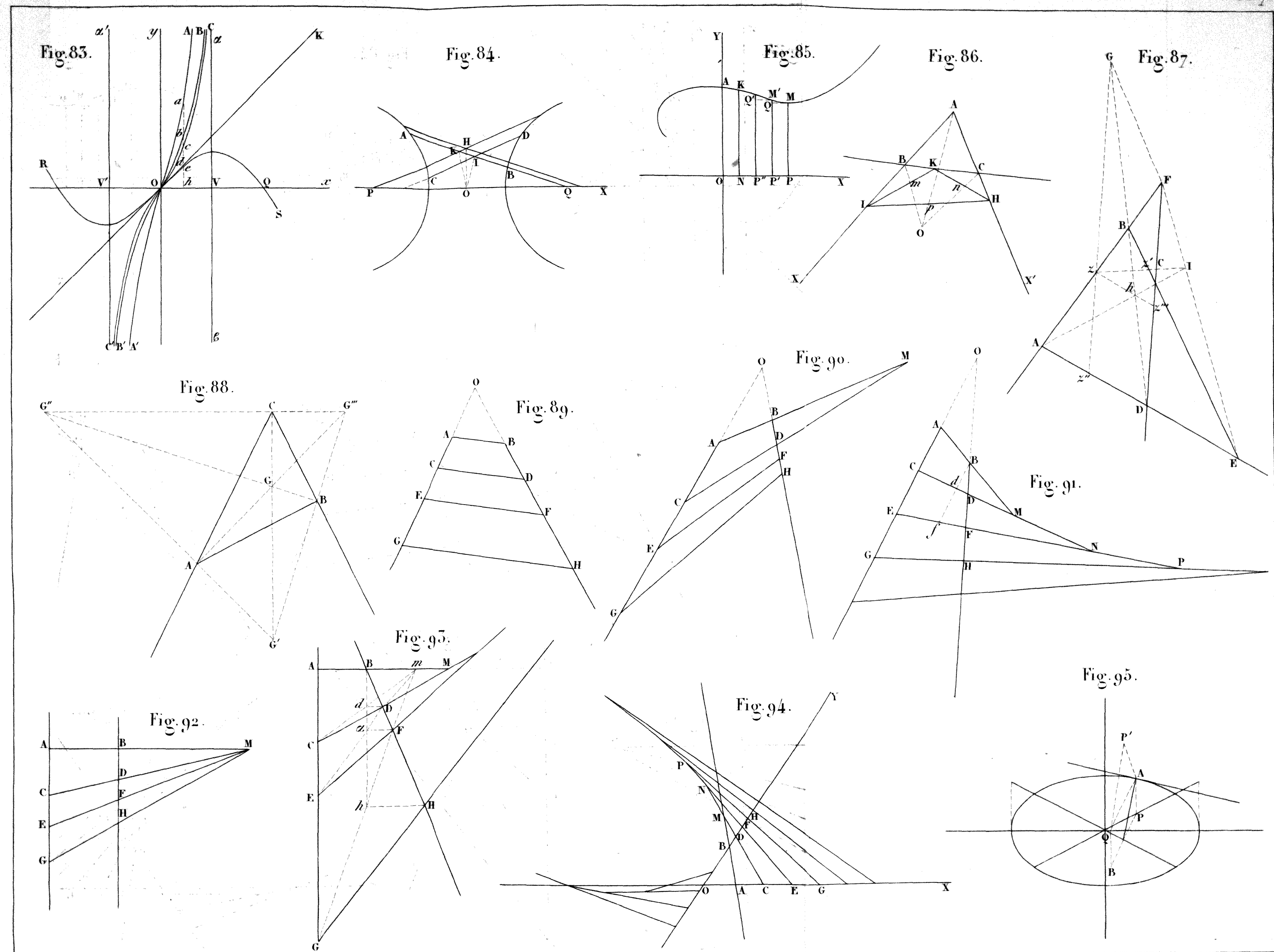


Fig. 82.



Gravé par Adam et Lemaitre.



Gravé par Adam et Lemaitre.

Fig. 95 bis.

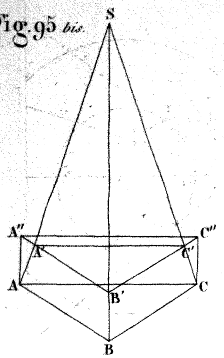


Fig. 96.

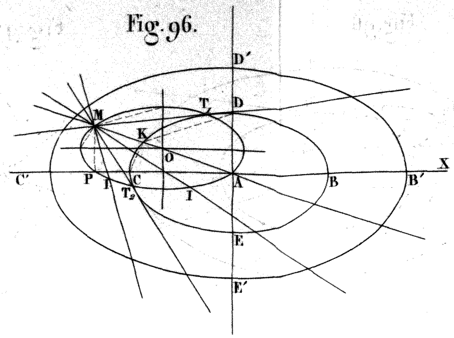


Fig. 97.

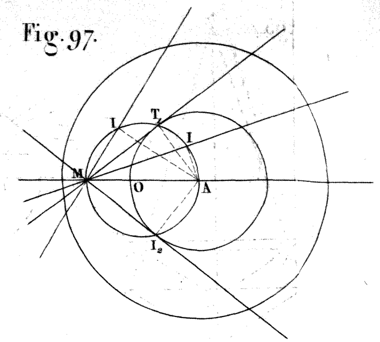


Fig. 98

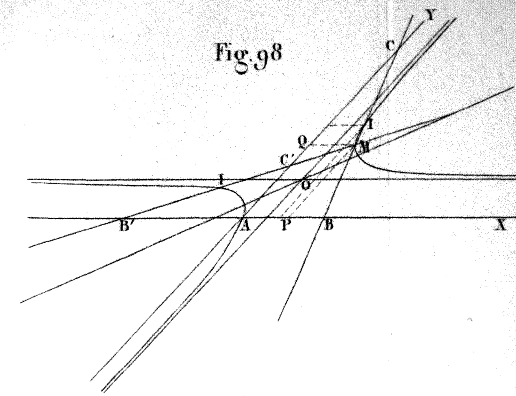


Fig. 99.

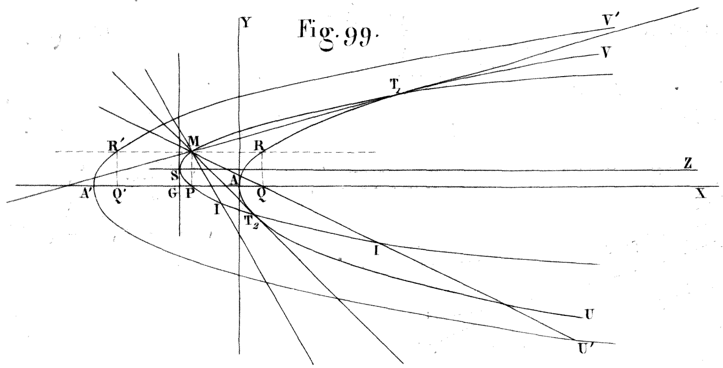


Fig. 100.

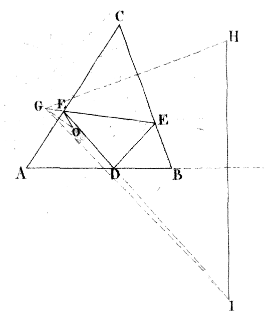


Fig. 101.

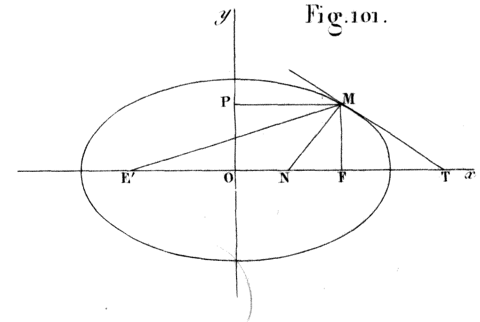


Fig. 102.

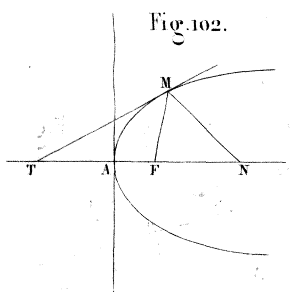


Fig. 103.

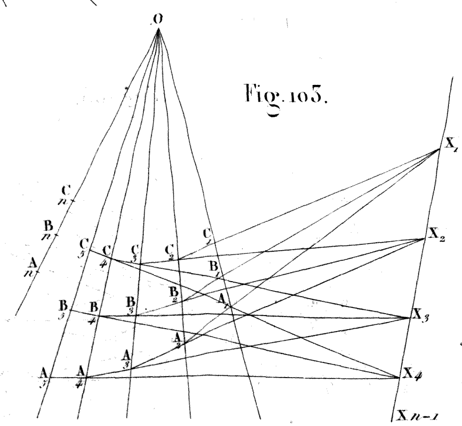


Fig. 104.

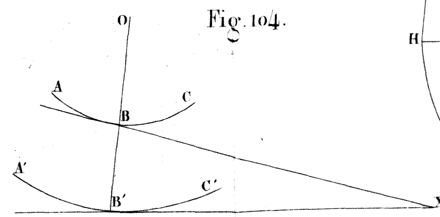


Fig. 105.