Mémorial des sciences mathématiques

Serge Colombo
Jean Lavoine

Transformations de Laplace et de Mellin. Formulaires. Mode d'utilisation

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 169 (1972)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1972__169__1_0>

© Gauthier-Villars, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ ORSAY
BCg 11 (169)

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT, Membre de l'Institut

FASCICULE CLXIX

magasin

TRANSFORMATIONS DE LAPLACE ET DE MELLIN

FORMULAIRES. MODE D'UTILISATION

Serge COLOMBO **Jean LAVOINE**

EXCLU DU PRET

426709 410066 426709 410066 426709 410066 42

CLA
U517.45
(083)
COLtra

014 211464 4

GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
55, quai des Grands-Augustins, Paris 6e
1972

13591

Dewey

515.72 COL tra

517.45 (083) COL tra

27260

© Gauthier-Villars, 1972

La Loi du 11 Mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droit ou ayants-cause, est illicite » (alinéa 1er de l'Article 40).
Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code Pénal.

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS XI ORSAY

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

Rappels théoriques destinés à faciliter l'utilisation du formulaire

DEUXIÈME PARTIE

Formulaires et tables de transformées (directes et inverses)

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS XI ORSAY

AVANT-PROPOS

Lors des nombreuses applications auxquelles donnent lieu les précieuses propriétés des diverses transformées intégrales, la tâche de l'utilisateur se trouve largement facilitée s'il dispose de tables de transformées. La transformation de Laplace et celle de Mellin étant fréquemment rencontrées dans plusieurs domaines de la mathématique appliquée, plus particulièrement dans les techniques mathématiques utilisées par les électriciens, les mécaniciens des fluides, les probabilistes, il nous a semblé opportun d'établir un formulaire se situant à égale distance des simples listes de correspondances figurant dans les ouvrages de base et les tables exhaustives, précieuses pour les spécialistes, mais assez peu maniables.

Nous présentons ici un formulaire qu'une expérience déjà ancienne nous laisse espérer apte à éviter perte de temps et recoupements fastidieux. Deux points nous sont apparus essentiels : d'abord faire précéder nos tables de brefs rappels théoriques. Ensuite dresser simultanément les listes de correspondances directes et inverses, en incorporant chaque fois distributions et parties finies d'intégrales.

Nous remercions vivement la Maison Gauthier-Villars pour tous les soins si attentifs déployés par elle dans l'accomplissement d'une entreprise ingrate et techniquement ardue.

L'un des auteurs appartient au corps des chercheurs du C. N. R. S. et tient à manifester sa gratitude envers cet organisme pour l'aide et les facilités qu'il a bien voulu lui accorder.

TABLEAU DES NOTATIONS

Lettres :

$t,\ x,\ y,\ \xi,$	variables réelles
$p,\ z,\ \zeta,$	variables complexes, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\lvert z \rvert$, $\arg z$, désignent respectivement la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de z
$a,\ b,$	paramètres complexes
$\alpha,\ \beta,$	paramètres réels
$j,\ k,\ m,\ n,$	entiers ou 0
C,	constante d'Euler-Mascheroni, $\log C = 0{,}577\,215\,664\,901\ldots = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)+\log\frac{1}{n}\right]$
$e,$	base des logarithmes népériens
$i,$	« unité imaginaire », $i^2 = -1$
$\mathbf{N},$	ensemble des entiers ≥ 0
$\mathbf{N}^+,$	ensemble des entiers > 0
r	$= (p^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}$, $\quad \mathrm{R} = p + r$
s	$= (p^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}$, $\quad \mathrm{S} = p + s$
$\binom{n}{j}$	$= \dfrac{n!}{j!\,(n-j)!}$, coefficient binomial

$\binom{\nu}{\lambda} = \dfrac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(\nu-\lambda+1)}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$ ou $\lambda \in \mathbf{C}$)

$(\nu)_\lambda = \dfrac{\Gamma(\nu+\lambda)}{\Gamma(\nu)}$ (idem)

$(\nu)_j = \nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+j-1), \qquad (\nu)_0 = 1$

$B_{2n} = \dfrac{2\,(2n)\,!}{(2\pi)^n}\zeta(2n)$, $n \geq 1$, $B_0 = 1$, nombres de Bernoulli définis aussi par le développement ($|z| < 2\pi$)

$$z\,(e^z - 1)^{-1} = 1 - \frac{1}{2}z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)\,!} B_{2n}\, z^{2n}$$

Fonctions :

arc cos x = arc dont le cosinus est égal à x : cos (arc cos x) = x; on note de même : arc sin x, arc tg x, arc cotg x (il s'agit d'une relation, non pas d'une application)

arg ch z = argument dont le ch est égal à z : ch (arg ch z) = z; on note de même : arg sh z, arg th z, arg coth z (même remarque que précédemment)

$\mathrm{bei}_\nu(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \sin\left(\frac{3}{2}\nu - j\right)\frac{\pi}{2}}{\Gamma(\nu+1+j)\,j\,!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2j}$, fonction de Kelvin; on en déduit $\mathrm{ber}_\nu(z)$ en changeant sin en cos;

$$\mathrm{ber}_\nu(z) \pm i\,\mathrm{bei}_\nu(z) = J_\nu\left(e^{\pm i\frac{3\pi}{4}} z\right)$$

$C(x) = \displaystyle\int_0^x \cos\frac{\pi}{2}u^2\,du$, fonction de Fresnel [*voir* ei (x)]

ch z $= \dfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, cosinus hyperbolique

$\mathrm{chi}(z) = \log C z + \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{2j}}{2j\,(2j)\,!}$, $|\arg z| < \pi$, cosinus hyperbolique intégral

$\mathrm{Ci}(z) = \log C z + \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{2j\,(2j)\,!}$, cosinus intégral :

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_0^{\infty} \frac{\cos u}{u}\,du, \qquad x > 0$$

$D_\nu(z)$ $= 2^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right)$, fonction du cylindre parabolique (ou de Weber-Hermite)

$E(z)$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - z^2 \sin^2 u)^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z^2\right)$, intégrale elliptique complète du deuxième genre

$\mathrm{ei}(z)$ $= \log Cz + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-z)^j}{j\,(j\,!)}$, $|\arg z| < \pi$, exponentielle intégrale :

$$\mathrm{ei}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^u}{u}\, du \quad \text{si } x > 0;$$

$$\mathrm{ei}(ix) = \mathrm{Ci}(|x|) - i\left[\mathrm{Si}(x) - \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\, x\right]$$

$\mathrm{ei}^*(z)$ $= \log Cz + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j\,(j\,!)}$, $|\arg z| < 0$;

$$\mathrm{ei}^*(x) = \mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{x} \frac{e^u}{u}\, du \qquad \text{si} \quad x > 0;$$

$$\mathrm{ei}^*(ix) = \mathrm{Ci}(|x|) + i\left[\mathrm{Si}(x) + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\, x\right]$$

$\mathrm{erf}(z)$ $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)\,j\,!} z^{2j+1}$, fonction d'erreur :

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\, du;$$

$$\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} x\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} [C(x) - i\, S(x)]$$

$\mathrm{erfc}(z)$ $= 1 - \mathrm{erf}(z)$, fonction d'erreur complémentaire :

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2}\, du$$

$\mathrm{erg}(z)$ $= -i\,\mathrm{erf}(iz)$, fonction d'erreur associée :

$$\mathrm{erg}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{u^2}\, du$$

$f(z, m, n) \quad = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(nj - m + 1)} z^{nj-m}$, sinus d'ordre supérieur (ou sinus d'ordre n) ($m = 1, 2, \ldots, n$) :

$$f(z, 1, 2) = \sin z, \qquad f(z, 2, 2) = \cos z$$

${}_1F_1(\nu; \lambda; z) \quad = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu)_j}{(\lambda)_j} \frac{z^j}{j!}$, fonction de Kummer (hypergéométrique confluente)

${}_2F_1(\mu, \nu; \lambda; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mu)_j (\nu)_j}{(\lambda)_j} \frac{z^j}{j!}$, fonction hypergéométrique de Gauss

${}_mF_n(\nu_1, \ldots, \nu_m; \lambda_1, \ldots, \lambda_n; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\nu_1)_j \ldots (\nu_m)_j}{(\lambda_1)_j \ldots (\lambda_n)_j} \frac{z^j}{j!}$, fonction hypergéométrique généralisée

$G_\nu(z) \quad = \int_0^\infty \frac{u^{\nu-1}}{1+u^2} e^{-zu}\, du$, intégrale de Gilbert

$h(z, m, n) \quad = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{nj-m}}{\Gamma(nj - m + 1)}$, sinus hyperboliques d'ordre supérieur (ou sinus hyperboliques d'ordre n) ($m = 1, 2, \ldots, n$) :

$$h(z, 1, 2) = \operatorname{sh} z, \qquad h(z, 2, 2) = \operatorname{ch} z$$

$H_\nu^{\mp}(z) \quad = J_\nu(z) \pm i\, N_\nu(z) = \frac{2}{\pi} e^{\mp i(\nu+1)\frac{\pi}{2}} K_\nu\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2}} z\right)$, fonction de Hankel,

$\mathbf{H}_\nu(z) \quad = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1+2j}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+j\right)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}+j\right)} = \frac{s_{\nu,\nu}(z)}{2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$, fonction de Struve

$He_n(z) \quad = (-1)^n e^{\frac{z^2}{2}} \frac{d^n}{dz^n} e^{\frac{z^2}{2}} = e^{\frac{z^2}{4}} D_n(z) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ polynôme d'Hermite

$I_\nu(z) \quad = i^{-\nu} J_\nu(iz)$, fonction de Bessel modifiée

$\mathrm{Ii}_0(z)$ $= \mathrm{Ji}_0(iz) - i\frac{\pi}{2}$, fonction de Bessel modifiée intégrale

$\mathrm{J}_\nu(z)$ $= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2j}}{\Gamma(\nu+1+j)\, j!}$, fonction de Bessel

$\mathrm{Ji}_0(z)$ $= \log\frac{C}{2}z + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{z}{2}\right)^{2j}}{(2j)\, j!\, j!}$, fonction de Bessel intégrale:

$$\mathrm{Ji}_0(x) = -\int_x^\infty \frac{\mathrm{J}_0(u)}{u}\, du$$

$\mathrm{K}(z)$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - z^2 \sin^2 u)^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{\pi}{2}\, {}_2\mathrm{F}_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z^2\right)$, intégrale elliptique complète du premier genre

$\mathrm{K}_\nu(z)$ $= \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi}[\mathrm{I}_\nu(z) - \mathrm{I}_{-\nu}(z)] = \pm i\frac{\pi}{2} e^{\pm i\nu\frac{\pi}{2}} \mathrm{H}_\nu^{\pm}\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2}} z\right)$, fonction de Hankel modifiée

$\left.\begin{matrix}\mathrm{kei}_\nu(z)\\ \mathrm{ker}_\nu(z)\end{matrix}\right\}$ $\mathrm{ker}_\nu(z) \pm i\, \mathrm{kei}_\nu(z) = \mathrm{K}_\nu\left(e^{\pm i\frac{\pi}{4}} z\right)$, fonctions de Kelvin

$\mathrm{L}_n(z)$ $= \frac{e^z}{n!} \frac{d^n}{dz^n} z^n e^{-z}$, polynôme de Laguerre

$\mathrm{L}_n^a(z)$ $= z^{-a} \frac{e^z}{n!} \frac{d^n}{dz^n} z^{a+n} e^{-z} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+a}{n-k} \frac{(-z)^k}{k!}$, polynôme de Laguerre généralisé

$\mathcal{L}_\nu(z)$ $= i^{-(\nu+1)} \mathbf{H}_\nu(iz)$, fonction de Struve modifiée

$\mathrm{M}_{\lambda,\nu}(z)$ $= z^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}}\, {}_1\mathrm{F}_1\left(\nu - \lambda + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; z\right)$, fonction hypergéométrique confluente

$\mathrm{N}_\nu(z)$ $= \frac{\mathrm{J}_\nu(z) \cos \nu\pi - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi}$, fonction de Bessel de deuxième espèce (fonction cylindrique de Weber-Neumann)

$O_n(z)$ $= \frac{n}{4} \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{2}{z}\right)^{n-2k+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$O_0(z) = z^{-1}$, polynôme de Neumann

$P_n(z)$ $= \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dz^n}(z^2 - 1)^n = \frac{(2n)!}{2^n\, n!\, n!} z^n$

$\times {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}; \frac{1}{2} - n; z^{-2}\right) = P_n^0(z)$, polynôme de Legendre

$P_\nu^\lambda(z)$ $= \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\lambda}{2}} {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1-\lambda; \frac{1-z}{2}\right)$,

$\arg \frac{z+1}{z-1} = 0$ si $z = x > 1$, fonction de Legendre de première espèce

$Q_\nu^\lambda(z)$ $= \frac{e^{i\lambda\pi}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+\nu+1)}{2^{\nu+1}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} (z^2-1)^{\frac{\lambda}{2}} z^{-\lambda-\nu-1}$

$\times {}_2F_1\left(\frac{\lambda+\nu+1}{2}, \frac{\lambda+\nu+2}{2}; \nu+\frac{3}{2}; z^{-2}\right)$,

$\arg(z^2-1) = 0$ si $z = x > 1$, $\arg z = 0$ si $z = x > 0$; fonction de Legendre de deuxième espèce,

$S(x)$ $= \int_0^x \sin\frac{\pi}{2} u^2\, du$, fonction de Fresnel

$S_n(z)$ $= \sum_{0 \leq k < \frac{n}{2}} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{2}{z}\right)^{n-2k}$, $n = 1, 2, 3, \ldots, S_0(z) = 0,$

polynôme de Schläfli :

$$n\, S_n(z) = 2z\, O_n(z) - 2\cos^2 n\frac{\pi}{2}$$

$s_{\lambda,\nu}(z)$ $= \frac{z^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^2 - \nu^2}\, {}_1F_2\left(1; \frac{\lambda-\nu+3}{2}, \frac{\lambda+\nu+3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right)$,

fonction de Lommel

$\mathrm{S}_{\lambda,\nu}(z)$ $= s_{\lambda,\nu}(z) + \dfrac{2^{\lambda-1}}{\sin \nu\pi}\Gamma\left(\dfrac{\lambda-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\lambda+\nu+1}{2}\right)$
$\times\left[\mathrm{J}_{-\nu}(z)\cos\dfrac{\lambda-\nu}{2}\pi - \mathrm{J}_{\nu}(z)\cos\dfrac{\lambda+\nu}{2}\pi\right],$
fonction de Lommel

$\operatorname{sgn} x$ $= \left\{\begin{matrix} -1 & \text{si} & x<0 \\ +1 & \text{si} & x>0 \end{matrix}\right\}$ signe de x

$\operatorname{sh} z$ $= \dfrac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, sinus hyperbolique

$\operatorname{shi}(z)$ $= \displaystyle\sum_{=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)(2j+1)!}$, sinus hyperbolique intégral

$\operatorname{Si}(z)$ $= \dfrac{1}{i}\operatorname{shi}(iz)$, sinus intégral :

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u}\,du \quad [\textit{voir}\ \operatorname{ei}(z)]$$

$\operatorname{si}(z)$ $= \operatorname{Si}(z) - \dfrac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{si}(x) = -\displaystyle\int_x^{\infty}\frac{\sin u}{u}\,du, \qquad x > 0$

$\operatorname{tg} x$ $= \dfrac{\sin x}{\cos x}$, tangente

$\operatorname{th} z$ $= \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$, tangente hyperbolique

$\mathrm{U}(x)$ $= \left\{\begin{matrix} 0 & \text{si} & x<0 \\ 1 & \text{si} & x>0 \end{matrix}\right\}$ fonction de Heaviside (échelon unité) :

$$f(x)\,\mathrm{U}(x-\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<\alpha \\ f(x) & \text{si } x>\alpha \end{cases} \quad (^1)$$

$\mathrm{W}_{\lambda,\nu}(z)$ $= \dfrac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)}\mathrm{M}_{\lambda,\nu}(z) + \dfrac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda+\nu\right)}\mathrm{M}_{\lambda,-\nu}(z),$
fonction hypergéométrique confluente de Whittaker

---

(1) Ne pas considérer cette notation comme un produit de fonctions.

$\mathrm{V}_n^{(b)}(z)$ $\displaystyle = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+2j)\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+4j-2}}{j!\,(n+j)!\,(n+2j-1)!} = \mathrm{bei}_n'^2(z) + \mathrm{ber}_n'^2(z),$

fonctions de J. C. Costello

$\mathrm{W}_n^{(b)}(z)$ $\displaystyle = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+4j+1}}{j!\,(n+j)!\,(n+2j+1)!}$

$= \mathrm{ber}_n(z)\,\mathrm{bei}_n'(z) - \mathrm{bei}_n(z)\,\mathrm{ber}_n'(z)$

$\mathrm{X}_n^{(b)}(z)$ $\displaystyle = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+4j}}{j!\,(n+j)!\,(n+2j)!} = \mathrm{ber}_n^2(z) + \mathrm{bei}_n^2(z)$

$\mathrm{Z}_n^{(b)}(z)$ $\displaystyle = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+4j-1}}{j!\,(n+j)!\,(n+2j-1)!}$

$= \mathrm{ber}_n(z)\,\mathrm{bei}_n'(z) + \mathrm{bei}_n(z)\,\mathrm{ber}_n'(z)$

***

$\mathrm{B}(z, \zeta)$ $\displaystyle = \mathrm{Pf}\int_0^1 u^{z-1}(1-u)^{\zeta-1}\,du$

$\displaystyle = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)},\ z, \zeta \neq 0, -1, -2, \ldots,$

fonction eulérienne de première espèce (fonction Bêta)

$\Gamma(z)$ $\displaystyle = \mathrm{Pf}\int_0^{\infty} e^{-u}\,u^{z-1}\,du,\ \nu \neq 0, -1, -2, -3, -\ldots,$

fonction eulérienne de seconde espèce (fonction Gamma)

$\gamma(z, \zeta)$ $= z^{-1}\,\zeta^z\,{}_1\mathrm{F}_1(z; z+1; \zeta),$ $z \neq 0, -1, -2, \ldots$

$\Gamma(z, \zeta)$ $= \Gamma(z) - \gamma(z, \zeta)$

fonctions de Prym (ou fonctions Gamma incomplètes)

$\gamma(z, \alpha)$	$= \mathrm{Pf}\int_0^\alpha e^{-u}\, u^{z-1}\, du,\ \Gamma(z, \alpha) = \int_\alpha^\infty e^{-u}\, u^{z-1}\, du,\ \alpha > 0$
$\delta(x)$,	distribution de Dirac
$\zeta(z)$	$= \zeta(z, 0)$, fonction Zêta de Riemann
$\zeta(z, \alpha)$	$= \sum_{j=1}^{\infty}(j + \alpha)^{-z}$, fonction Zêta généralisée
$\theta_1(z \mid a)$	$= 2\, q^{\frac{1}{4}} \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\, q^{j(j+1)} \sin(2j + 1)\pi z$
$\theta_2(z \mid a)$	$= 2\, q^{\frac{1}{4}} \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j+1)} \cos(2j + 1)\pi z, \qquad q = e^{i\pi a},\ \mathrm{Im}\, a > 0$
$\theta_3(z \mid a)$	$= 1 + 2\sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2} \cos 2j\pi z$
$\theta_4(z \mid a)$	$= 1 + 2\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j q^{j^2} \cos 2j\pi z$, fonctions Thêta de Jacobi
$\mu(z; \beta, \alpha)$	$= \int_0^\infty \frac{z^{u+\alpha}}{\Gamma(u + \alpha + 1)} \frac{u^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} du$, fonction Mu ($\alpha > -1$, $\beta > -1$)
$\mu(z)$	$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(z + n + \frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{z + n}{z + n + 1}\right) - 1\right]$, fonction de Binet,
$\nu(z, \alpha)$	$= \int_0^\infty \frac{z^{u+\alpha}}{\Gamma(u + \alpha + 1)} du = \int_\alpha^\infty \frac{z^u}{\Gamma(u + 1)} du$, ($\alpha > -1$), fonction Nu,

$\psi(z) \qquad = \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \dfrac{d}{dz}\log\Gamma(z)$, dérivée logarithmique de Gamma :

$$\psi(1) = -\log C;$$

$$\psi(n+1) = -\log C + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, \quad n \geqq 1;$$

$$\psi^{(n)}(z) = (-1)^{n+1}\, n!\, \zeta(n+1, z), \quad n \geqq 1.$$

Notations de Bachmann-Landau :

$f(z) = O(\varphi(z)),\ z \to a$
signifie que $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$ est borné quand $z \to a$;

$f(z) = o(\varphi(z)),\ z \to a$
signifie que $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)} \to 0$ quand $z \to a$;

$f(z) \sim \varphi(z)$ signifie que $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)} \to 1$ quand $z \to a$.

PREMIÈRE PARTIE

RAPPELS THÉORIQUES DESTINÉS A FACILITER L'UTILISATION DU FORMULAIRE

1

TRANSFORMATIONS FONCTIONNELLES INTÉGRALES

1.1.

L'équation

$$g(s) = \int_{(C)} K(s, t) f(t)\, dt \tag{1,1}$$

définit une *transformation fonctionnelle intégrale*. Un *noyau* $K(s, t)$ et un contour (C) étant choisis, on fait correspondre ainsi à chaque fonction $f(t)$ d'un certain ensemble $\mathcal{F}$, sa *transformée* $g(s)$.

$f(t)$ est dite *fonction originale*, ou encore, la *transformée inverse* de $g(s)$.

Plus généralement, soient deux points $P(x_1, \ldots, x_m)$, $Q(t_1, \ldots, t_n)$; l'équation

$$g(P) = \int_{(D)} K(P, Q) f(Q)\, dr \tag{1,1'}$$

où $dr = dt_1 \ldots dt_n$ et (D) désigne un certain domaine d'intégration, définit la transformée $g(P)$ de $f(Q)$.

Une transformation fonctionnelle intégrale correspond à un opérateur linéaire. La notation $\mathcal{T}\{f(t)\}$ peut désigner indifféremment cet opérateur ou la transformée $g(s)$. D'autre part, lorsque la transformation est bien précisée, il y a souvent avantage à désigner par $\bar{f}(s)$, $\bar{\varphi}(s)$, ..., les transformées de $f(t)$, $\varphi(t)$, ... $\mathfrak{T}^{-1}$ désignera l'opérateur inverse de Z,

$$\mathfrak{T}^{-1}\{g(s)\} = f(t).$$

A certaines opérations effectuées sur l'original correspondront des opérations effectuées sur la transformée. L'ensemble de ces correspondances, ou *règles opérationnelles*, constituera le *calcul opérationnel* particulier relatif à la transformation fonctionnelle intégrale envisagée. On conçoit, dès lors, que les propriétés de certaines fonctions puissent, à l'aide de telles règles, se déduire des propriétés, souvent plus immédiates de leurs transformées.

Enfin, ces calculs opérationnels sont quelquefois efficaces pour la résolution d'équations différentielles, intégrales, intégro-différentielles du seul fait que la transformée de l'inconnue se trouve ainsi astreinte à satisfaire à une équation plus facilement résoluble que celle proposée. Une fois connue la transformée de la solution recherchée, il ne restera plus ensuite qu'à déterminer l'original. Le procédé s'applique aussi aux équations aux dérivées partielles et permet d'atteindre plus aisément les solutions devant satisfaire à des conditions aux frontières imposées.

1.2.

Les transformations fonctionnelles intégrales le plus fréquemment envisagées dans les applications sont les suivantes :

1.21. La transformation de Laplace, définie par le noyau $K(s, t) = e^{-st}$,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_C e^{-st} f(t)\, dt = \bar{f}(s), \tag{1,2}$$

et C désignant un contour du plan de la variable complexe t.

Un cas particulier de cette transformation et qui a donné lieu à de nombreux développements est celui dans lequel le contour d'intégration (C) se confond avec le demi-axe réel positif. La variable t est réelle et positive et la transformation est dite parfois *transformation de Laplace « unilatérale »*, ou encore *transformation de Laplace-Abel* (le mathématicien norvégien Abel l'ayant systématiquement utilisée dans certaines de ses recherches).

Lorsque le contour C se confond avec l'axe réel tout entier la transformation est dite *bilatérale*; on écrit quelquefois

$$(1,2') \qquad \mathcal{L}_{\mathrm{I}}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$(1,2'') \qquad \mathcal{L}_{\mathrm{II}}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

On démontre que la transformée de Laplace-Abel unilatérale $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}\{f(t)\}$ est une fonction holomorphe de s dans un certain demi-plan $\mathrm{R}(s) > \alpha$ (*voir* § 2.13). Il résulte que les transformées de Laplace-Abel constituent une classe de fonctions beaucoup plus restreinte que celle des fonctions originales (fonctions $\mathcal{L}$-transformables).

1.22. La transformée de Fourier

$$(1,3) \qquad \mathcal{F}\{\mathrm{F}(t)\} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\, \mathrm{F}(t)\, dt = \overline{\mathrm{F}}(\omega)$$

n'est pas distincte de la transformation de Laplace-Abel bilatérale et s'y ramène par un simple changement de variables :

$$i\omega = s, \qquad \mathrm{F}(t) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} f(t).$$

1.23. La transformation de Mellin

$$(1,4) \qquad \overline{\varphi}(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} \varphi(t)\, dt = \mathfrak{M}\{\varphi(t)\}$$

est, elle aussi, rattachée à la transformation de Laplace bilatérale; il suffit de poser dans (2'') $e^{-t} = x$, $f\left(\log \frac{1}{x}\right) = \varphi(x)$.

1.24. La transformation de Hankel (d'ordre n).

$$(1,5) \qquad \bar{f}(s) = \int_0^{+\infty} J_n(2\sqrt{st})\, f(t)\, dt = \mathcal{H}_n\{f(t)\}$$

est définie par le noyau $J_n(2\sqrt{st})$. $J_n(z)$ désigne la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n

$$J_n(z) = \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2K}}{K!\,\Gamma(n+K+1)}.$$

Dans la transformation de Hankel on suppose $n \geqq -\frac{1}{2}$.

1.3.

La transformation de Mellin mise à part, toutes celles qui viennent d'être citées sont à *noyaux symétriques* : $K(s, t) = K(t, s)$. En fait, les noyaux sont de la forme $K(u)$ avec $u = st$. Un noyau réel $K(st)$ est appelé *noyau de Fourier* lorsque

$$\mathfrak{T}\{f(t)\} = \int_a^b K(st)\, f(t)\, dt = \bar{f}(s)$$

entraîne

$$\mathfrak{T}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = \int_a^b K(st)\, \bar{f}(s)\, ds = f(t)$$

(La détermination de tels noyaux est facilitée par l'utilisation de la transformation de Mellin (*voir* § 3)).

1.4.

Les transformations fonctionnelles intégrales à noyaux symétriques donnent lieu à une formule générale connue sous le nom de *formule de Parseval.*

Soit $K(x, \xi) \equiv K(\xi, x)$ un noyau symétrique. Si l'on écrit le produit intégral

$$\int_a^b \bar{f}_1(t) f_2(t)\, dt$$

dans lequel le segment a, b se confond avec celui adopté dans la définition de la transformation, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b f_1(t)\bar{f}_2(t)\, dt &= \int_a^b f_1(t)\, dt \int_a^b K(t, \xi) f_2(\xi)\, d\xi \\ &= \int_a^b f_2(\xi)\, d\xi \int_a^b K(\xi, t) f_1(t)\, dt\end{aligned}$$

d'où

$$\int_a^b f_1(t)\bar{f}_2(t)\, dt = \int_a^b \bar{f}_1(t) f_2(t)\, dt \tag{1,6}$$

Cette dernière relation n'est valable que si l'on sait justifier l'interversion des intégrations qui permet de l'écrire. Une vérification est donc nécessaire lorsque l'intervalle d'intégration $[a, b]$ est infini, ou bien si l'une des fonctions envisagées devient infinie dans le domaine d'intégration.

On notera enfin qu'une transformation à noyau symétrique définit un opérateur linéaire auto-adjoint.

2

TRANSFORMÉES DE LAPLACE UNILATÉRALES

2.1.

On a défini plus haut la transformée de Laplace *unilatérale* (*transformée de Laplace-Abel*)

$$\varphi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = \mathcal{L}\{ f(t) \} \tag{2.1}$$

Elle n'est définie que pour les valeurs de p rendant convergente l'intégrale du second membre (*intégrale de Laplace*). $f(t)$ est dite « $\mathcal{L}$-transformable » quand il existe un ensemble non-vide de valeurs de p pour lesquelles l'intégrale de Laplace converge.

La seule hypothèse de $\mathcal{L}$-transformabilité étant trop générale pour les applications, on se trouve amené à imposer des conditions supplémentaires à $f(t)$. Lors d'une première étude des propriétés essentielles des transformées de Laplace, les deux conditions suivantes sont souvent adoptées simultanément.

a. $f(t)$ est absolument intégrable au voisinage de l'origine. $\forall\, a > 0$, $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^a | f(t) |\, dt$ existe.

b. $f(t)$ et $f'(t)$ sont continues par morceaux pour $t \in]0, +\infty[$. (En d'autres termes, $f(t)$ est de la classe C_1). Il résulte que $f(t)$ est à variation bornée dans tout intervalle fini inclus dans $]0, +\infty[$.

2.12. Théorème 1. — *La convergence de l'intégrale de Laplace pour $p = p_0 = u_0 + iv_0$ entraîne la convergence uniforme dans tout domaine* (S) *borné pour lequel* $|\arg(p - p_0)| \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$. (C'est-à-dire dans tout domaine intérieur à l'angle de sommet p_0 et d'ouverture inférieure à π, ayant pour bissectrice la demi-droite issue de p_0 et parallèle à la direction positive de l'axe réel dans le plan de la variable complexe p.)

Corollaire. — *La $\mathcal{L}$-transformabilité de $f(t)$ pour $p = p_0$ entraîne la $\mathcal{L}$-transformabilité pour* $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$.

Le nombre réel $\alpha = \inf \{ \operatorname{Re} \xi \}$, où ξ désigne toute valeur de p pour laquelle l'intégrale de Laplace converge, *est l'abscisse de convergence simple.*

2.13. Théorème 2. — $\varphi(p)$ *est holomorphe dans le demi-plan* $\operatorname{Re} p > \alpha$.

On a $\varphi'(p) = \mathcal{L}\{ -tf(t) \}$, $\varphi^{(n)}(p) = \mathcal{L}\{ (-t)^n f(t) \}$.

On ne peut rien affirmer, *a priori*, quant à l'existence de l'intégrale de Laplace sur la droite $\operatorname{Re} p = \alpha$. D'autre part, le théorème énoncé implique la possibilité de prolonger analytiquement $f(p)$.

2.14. Théorème 3. — *Si l'intégrale de Laplace converge absolument pour $p = p_0$, elle converge absolument pour* $\operatorname{Re} p \geqq \operatorname{Re} p_0$.

On peut ainsi définir une *abscisse de convergence absolue* $\beta \geqq \alpha$. Sur la droite $\operatorname{Re} p = \beta$, l'intégrale de Laplace est soit convergente en tout point de cette droite, ou bien ne converge en aucun point de celle-ci.

2.2. Règles opérationnelles

Parmi les règles opérationnelles les plus immédiates il convient de signaler d'abord les suivantes, car elles sont systématiquement utilisées :

(2,2) $$\varphi(p - a) = \mathcal{L}\{ e^{at} f(t) \},$$

$$(2,3) \qquad e^{-ap}\,\varphi(p) = \mathcal{L}\{\,f(t-a)\,\mathrm{U}(t-a)\,\} \qquad (a > 0),$$

$$(2,4) \qquad \varphi\left(\frac{p}{a}\right) = a\,\mathcal{L}\{\,f(at)\,\} \qquad (a > 0).$$

On note ensuite la règle

$$(2,5) \qquad \varphi^{(n)}(p) = \mathcal{L}\{\,(-t)^n f(t)\,\}$$

envisagée précédemment. Enfin deux autres règles jouent des rôles fort importants : celle concernant la transformée de la dérivée $f'(t)$; celle concernant le transformée du produit de convolution $f \star g$. Il convient de les énoncer de façon très précise.

2.21. La règle relative à la dérivée $f'(t)$ conduit à imposer à la fonction originale $f(t)$ les trois conditions suivantes :

(a) $f(t)$ est continue pour $t \geq 0$, dérivable pour $t > 0$;

(b) $f'(t)$ est continue par morceaux pour $t \geq 0$;

(c) $f(t)$ est d'ordre exponentiel *un*. [Autrement dit, il existe des constantes $a > 0$, $\mathrm{A} > 0$, $t_0 \geq 0$, telles que $|f(t)| < \mathrm{A}\,e^{at}$ pour $t > t_0 \geq 0$.]

On a alors

$$(2,6) \qquad \mathcal{L}\{\,f'(t)\,\} = p\,\varphi(p) - f(+0).$$

Les conditions énoncées sont suffisantes, mais nullement nécessaires, ainsi qu'on le constate en prenant $f(t) = t^{\frac{1}{2}}$ $\left(\text{la dérivée } -\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \text{ étant continue par morceaux seulement pour } t > 0, \text{ et point pour } t \in [0, +\infty[\right)$.

Un autre énoncé de la règle consisterait à substituer aux trois conditions précédentes les suivantes :

(a') $f(t)$ continue pour $t > 0$;

(b') $f'(t)$ continue par morceaux pour $t > 0$;

(c') $f(t)$, $f'(t)$ sont L-transformables.

Elles entraînent que $f(t)$ est d'ordre exponentiel *un* et que la limite $(f+0) = \lim\limits_{t \to +0} f(t)$ existe, finie.

2.211. On a aussi

$$(2,6')\quad \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n \varphi(p) - [p^{n-1} f(+0) + p^{n-2} f'(+0) + \ldots + f^{n-1}(+0)]$$

lorsque $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n-1)}(t)$ sont continues pour $t \geqq 0$, $f^{(n)}(t)$ continue par morceaux pour $t > 0$ et d'ordre exponentiel *un.*

2.212. Lorsque $f(t)$ est continue par morceaux pour $t \geqq 0$, d'ordre exponentiel un, et possède partout une dérivée (finie) à droite et une dérivée (finie) à gauche, on démontre que

$$(2,6'')\quad \mathcal{L}\{f'(t)\} = p\varphi(p) - \sum_k e^{-px_k}[f(x_k+) - f(x_k-)],$$

x_1, x_2. ... désignant les points de discontinuité de première espèce de $f(t)$. La sommation au second membre peut s'envisager comme la transformée d'une suite de « distributions de Dirac » (*voir* § 6).

2.22. Le produit de convolution $f \star g$ de $f(t)$ et $g(t)$ est, par définition,

$$h(t) = \int_0^t f(t-x)\, g(x)\, dx.$$

Il est commutatif, associatif, distributif par rapport à l'addition. On suppose ici que f et g sont continues par morceaux pour $t > 0$ et que les trois limites

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^\varepsilon |f(t)|\, dt, \quad \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^\varepsilon |g(t)|\, dt, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\varepsilon |f(t)|\, dt,$$

existent (finies). Dans ces conditions, et dans tout domaine du plan complexe p où les intégrales définissent $\mathcal{L}\{f(t)\}$, $\mathcal{L}\{g(t)\}$ sont absolument convergentes, on a

$$(2,7)\qquad \mathcal{L}\{f(t) \star g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} . \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Cette règle opérationnelle reste valable sous des conditions moins strictes.

2. 23. Une correspondance du type

$$\mathcal{L}\{g(t, u)\} = \omega(p)\, e^{-u\varphi(p)},$$

où $u \in [0, +\infty[$ peut engendrer une règle opérationnelle

$$\omega(p)\bar{f}[\varphi(p)] = \mathcal{L}\left\{\int_0^{+\infty} g(t, u) f(u)\, du\right\},$$

en posant $\bar{f}(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Ainsi

$$\frac{1}{p}\bar{f}(\log p) = \mathcal{L}\left\{\int_0^{+\infty} \frac{t^u}{\Gamma(u+1)} f(u)\, du\right\}, \tag{2,8}$$

$$p^{-\frac{1}{2}}\bar{f}\left(p^{\frac{1}{2}}\right) = \mathcal{L}\left\{(\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{4t}} f(u)\, du\right\}, \tag{2,9}$$

$$p^{-n-1}\bar{f}(p^{-1}) = \mathcal{L}\left\{\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{u}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{J}_n(2\sqrt{ut}) f(u)\, du\right\}. \tag{2,10}$$

2. 3. Formule d'inversion

Étant donnée une fonction $\varphi(p)$ qui satisfait aux conditions nécessaires pour être une transformée de Laplace [conditions qui ne seront pas rappelées ici car l'introduction de la notion de distribution, envisagée plus loin, va considérablement généraliser celle de correspondance entre $f(t)$ et sa transformée $\varphi(p)$], la détermination de la fonction originale $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\varphi(p)\}$ peut s'effectuer de diverses manières. La plus systématique repose sur le théorème de Riemann-Mellin. On peut l'énoncer sous la forme suivante (due à Pincherle).

Soit $\varphi(p)$ *holomorphe dans un demi-plan* $\mathrm{Re}\, p > \alpha \geq 0$ *et de la forme*

$$\varphi(p) = \frac{A}{p} + \frac{B(p)}{p^{1+\beta}} \qquad (\beta > 0),$$

$|\,B(p)\,|$ *restant borné et* A *désignant une constante. On a*

$$\varphi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt, \qquad \operatorname{Re} p > c > \alpha \geqq 0,$$

avec

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c-i\infty} e^{tp} \varphi(p)\, dp, \tag{2,11}$$

cette dernière intégrale étant éventuellement prise au sens de *la valeur principale d'après Cauchy,* c'est-à-dire

$$f(t) = \lim_{\lambda \to +\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\lambda}^{c+i\lambda} e^{tp} \varphi(p)\, dp \right\}.$$

On appelle *contour de Bromwich* tout contour équivalent à celui $\operatorname{Re} p = c > 0$.

2.31. Un autre procédé d'inversion repose sur les développements en série. Si

$$\varphi(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(p),$$

avec

$$\varphi_n(p) = \mathcal{L}\{ f_n(t) \}.$$

on a, sous certaines conditions,

$$\varphi(p) = \mathcal{L}\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right\}.$$

2.311. Des conditions *suffisantes* de validité sont, entre autres, les suivantes :

1° La série de terme général $e^{-at} f_n(t)$ $(a \in \mathbf{R})$ converge uniformément sur tout segment $[0, t_1]$ quel que soit $t_1 > 0$, et de plus la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} |\, e^{-at} f_n(t)\,|\, dt$$

converge.

La correspondance $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(p) = \mathcal{L}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right\}$ est alors valable avec $\operatorname{Re} p > a$.

2° La série de terme général $e^{-at} f_n(t)$ ($a \in \mathbf{R}$) converge uniformément sur tout segment $[0, t_1]$ quel que soit $t_1 > 0$, et de plus l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |e^{-at} f_n(t)| \, dt$$

est convergente.

La correspondance est ici encore valable pour $\operatorname{Re} p > a$.

3

TRANSFORMÉES DE LAPLACE BILATÉRALES

3.1.

La transformée de Laplace bilatérale

$$\varphi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = \mathcal{L}_{\text{II}} \{ f(t) \} \tag{3,1}$$

est une généralisation immédiate de la transformée de Laplace-Abel à laquelle elle se ramène en remplaçant $f(t)$ par $f(t)\,\mathrm{U}(t)$. Elle correspond ainsi à la transformée de Fourier

$$\mathrm{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} g(x)\, dx = \mathcal{F} \{ g(x) \}, \tag{3,2}$$

à laquelle elle se ramène en posant $i\omega = -p$, $g(x) = \sqrt{2\pi}\, f(x)$. Enfin, l'étude de ses propriétés constitue une introduction à la transformation de Mellin envisagée plus loin.

3.11. On a

$$(3,3) \qquad \mathcal{L}_{\mathrm{II}}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{0} e^{-pt} f(t)\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{pt} f(-t)\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt.$$

A la première des intégrales figurant au dernier membre il correspond un demi-plan de convergence défini par $\mathrm{Re}(-p) > -\alpha_2$ tandis qu'à la seconde intégrale figurant dans ce dernier membre il correspond un demi-plan de convergence $\mathrm{Re}(p) > \alpha_1$ (- 2. 12). La transformée bilatérale définit une fonction holomorphe dans la bande

$$\alpha_1 < \mathrm{Re}(p) < \alpha_2 \qquad \text{si} \quad \alpha_1 < \alpha_2.$$

3.12. Les règles opératoires relatives à la transformation de Laplace bilatérales se ramenant immédiatement à celles relatives à la transformation de Fourier, il apparaît inutile de procéder à un rappel de la théorie de la seconde.

3.121. Une première règle est

$$(3,4) \qquad \mathcal{L}_{\mathrm{II}}\{f'(t)\} = p\, \mathcal{L}_{\mathrm{II}}\{f(t)\},$$

valable si

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-pt} f(t) - \lim_{t \to -\infty} e^{-pt} f(t) = 0.$$

La bande de convergence relative à $f'(t)$ ne coïncide pas nécessairement avec celle relative à $f(t)$.

3.122. A l'intérieur de la bande de convergence,

$$(3,5) \qquad \varphi^{(n)}(p) = \mathcal{L}_{\mathrm{II}}\{(-t)^n f(t)\}.$$

3.123. Il est facile de préciser des domaines de validité pour les deux règles élémentaires et immédiates :

$$(3,6) \qquad \mathcal{L}_{\text{II}}\{e^{\alpha t} f(t)\} = \varphi(p-a),$$

$$(3,7) \qquad \mathcal{L}_{\text{II}}\{f(t-a)\} = e^{-ap}\varphi(p),$$

$$(3,8) \qquad \mathcal{L}_{\text{II}}\{f(at)\} = a^{-1}\varphi\left(\frac{p}{a}\right) \qquad (a > 0).$$

3.124. Le produit des transformées bilatérales est la transformée d'un produit de convolution défini de façon différente de celle adoptée pour la transformation unilatérale. On a

$$(3,9) \qquad \mathcal{L}_{\text{II}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)\,g(u)\,du\right\} = \mathcal{L}_{\text{II}}\{f(t)\}\,\mathcal{L}_{\text{II}}\{g(t)\}.$$

[D'ailleurs, chaque fois que $f(t) \equiv 0$, $g(t) \equiv 0$ pour $t < 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)\,g(u)\,du = \int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du.\Big]$$

3.2.

La formule d'inversion

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tp}\varphi(p)\,dp$$

est encore valable pour la transformée bilatérale, le chemin d'intégration restant situé dans la bande de convergence. Il convient toutefois de souligner qu'à une transformée $\varphi(p)$ il peut cette fois correspondre deux fonctions originales différentes si les chemins d'intégration sont situés dans deux bandes de convergence différentes.

Ainsi, par exemple, $\varphi(p) = \Gamma(p)\,\zeta(p)$ [où $\zeta(p)$ désigne la fonction dzéta de Riemann définie par

$$\zeta(p) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^p}$$

et qui est prolongeable analytiquement pour $\mathrm{Re}\,(p) \leq 1$] est la transformée bilatérale de fonctions originales différentes. On a, plus précisément,

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\,\zeta(p) &= \mathcal{L}_{\mathrm{II}}\{(e^{e^{-t}} - 1)^{-1}\} && \text{pour} \quad 1 < \mathrm{Re}(p) < +\infty, \\
&= \mathcal{L}_{\mathrm{II}}\{(e^{e^{-t}} - 1)^{-1} - e^{t}\} && \text{pour} \quad 0 < \mathrm{Re}(p) < 1, \\
&= \mathcal{L}_{\mathrm{II}}\left\{(e^{e^{-t}} - 1)^{-1} - e^{t} + \frac{1}{2}\right\} && \text{pour} \quad -1 < \mathrm{Re}\,p < 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \mathcal{L}_{\mathrm{II}}\left\{(e^{e^{-t}} - 1)^{-1} - e^{t} + \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{2\mathrm{N}} \frac{\mathrm{B}^n}{n\,!}\, e^{-(n-1)t}\right\} \\
&\quad \text{pour} \quad -2\,\mathrm{N} - 1 < \mathrm{Re}\,(p) < -2\,\mathrm{N} + 1.
\end{aligned}$$

[Il faut, en effet, tenir compte des pôles de $\varphi(p)$ qui sont ici $p = 1, 0, -1, -3, -5, \ldots$ et des résidus correspondants à ces pôles qui sont $1, -\frac{1}{2}, \frac{\mathrm{B}_2}{2\,!}, \frac{\mathrm{B}_4}{4\,!}, \ldots, \frac{\mathrm{B}_{2n}}{(2\,n)\,!}, \ldots$].

4

TRANSFORMATION DE MELLIN

4.1.

Si, dans l'intégrale définissant la transformée de Laplace bilatérale (§ 3.1) on effectue le changement de variable $e^{-t} = x$ et si l'on pose $f\left(\log \frac{1}{x}\right) = h(x)$, on obtient

$$\varphi(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\, h(x)\, dx \tag{4,1}$$

et $\varphi(s)$ est la transformée de Mellin de $h(x)$. Il résulte de ce qui a été exposé plus haut que l'intégrale ci-dessus définit $\varphi(s)$ dans une certaine *bande de convergence*

$$\sigma_1 < \operatorname{Re}(s) < \sigma_2$$

et qu'à une même transformée il peut, dans deux bandes différentes, correspondre des originaux $h_1(x)$, $h_2(x)$ différents.

4.2.

On se reportera aux ouvrages cités dans la bibliographie pour tout ce qui concerne les propriétés de la transformation de Mellin et les conditions de validité des règles opératoires figurant page 139. On se limitera ici à deux propriétés importantes de cette transformation

4.21. La formule d'inversion

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}\,\varphi(s)\,ds \tag{4,2}$$

se déduit immédiatement de celle relative à la transformée de Laplace bilatérale. Le contour d'intégration est, évidemment, situé dans la bande de convergence.

4.22. Une propriété intéressante de la transformation de Mellin réside dans sa possibilité de déterminer des *noyaux de Fourier*.

Dans une transformation fonctionnelle intégrale

$$\varphi(z) = \int_0^{+\infty} K(x, z)\, f(x)\, dx,$$

$K(x, z)$ est dit *noyau de Fourier* si l'on a

$$f(x) = \int_0^{+\infty} K(x, z)\,\varphi(z)\, dz.$$

[En pratique, on envisage surtout les noyaux symétriques du type $K(xz)$.] Ainsi

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin zx, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos zx, \quad J_\nu\left(2\sqrt{xz}\right), \quad \sqrt{xz}\,J_\nu(xz)$$

sont des noyaux de Fourier.

Or, on démontre que $K(xz)$ est un noyau de Fourier lorsque la transformée de Mellin $\omega(s)$ de $K(x)$ satisfait à la condition

$$\omega(s)\,\omega(1-s) = 1. \tag{4,3}$$

5

LES DISTRIBUTIONS ET LEURS TRANSFORMÉES DE LAPLACE

Les *distributions* sont des opérateurs opérant sur certains espaces (ensembles) de fonctions et doués de propriétés généralisant celles des fonctions, ce qui leur vaut aussi l'appellation de *fonctions généralisées*. (Cependant, certains auteurs établissent une distinction entre distributions et fonctions généralisées.)

5.1. Espace de base

5.11.

Le *support* d'une fonction est la fermeture de l'ensemble des points où elle n'est pas nulle.

D désignera dans tout ce qui suivra l'espace vectoriel topologique défini de la façon suivante. C'est l'espace vectoriel défini sur le corps **C** des nombres complexe et à partir de l'addition ordinaire des fonctions $\Phi(t)$ (réelles ou complexes) de la variable réelle t, qui sont indéfiniment dérivables et dont les supports sont compacts. La suite $\{\Phi_j(t)\}$ est dite tendre vers zéro si, et seulement si, tous les supports des Φ_j sont contenus dans un compact fixe (c'est-à-dire indépendant de l'indice j), toutes les suites $\{\Phi_j^{(s)}(t)\}$ tendant uniformément vers zéro ($s = 1, 2, 3, \ldots$) quand $j \to \infty$.

S est l'espace vectoriel topologique des fonctions, réelles ou complexes, $\Psi(t)$, indéfiniment dérivables et telles que $t^m \Psi(t)$ et $t^m \Psi^{(n)}(t) \to 0$ quand $|t| \to \infty$, quels que soient m et $n \in \mathbf{N}$ avec la topologie définie par la convergence suivante :

j étant pris dans une suite infinie d'indices, on dira que la suite $\Psi_j(t)$ tend vers zéro dans **S** quand $j \to \infty$, si, quels que soient m et $n \in \mathbf{N}$, $t^m \Psi_j^{(n)}(t) \to 0$ uniformément sur la droite parcourue par t.

$\Phi(t)$ et $\Psi(t)$ sont appelées *fonctions de base* (ou encore *fonctions-test*).

5. 12. Distributions

Soit V une fonctionnelle qui à une fonction $\Phi(t)$ de **D** fait correspondre un nombre complexe noté par $\langle V, \Phi(t) \rangle$.

On impose à V :

1° d'être *linéaire*, c'est-à-dire

$$\langle V, A\,\Phi_1(t) + B\,\Phi_2(t) \rangle = A \langle V, \Phi_1(t) \rangle + B \langle V, \Phi_2(t) \rangle$$

si $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathbf{D}$, A et B complexes;

2° d'être *continue* pour la topologie adoptée dans **D**, c'est-à-dire

$$\langle V, \Phi_j(t) \rangle \to 0 \quad \text{quand des } \Phi_j \to 0 \text{ dans } \mathbf{D}.$$

L'ensemble de ces fonctionnelles V forme un espace vectoriel **D'**, qui est le *dual topologique de* **D**.

Une *distribution* est un élément de **D'**.

On définit de semblable façon **S'** dual topologique de **S**. $\mathbf{S'} \subset \mathbf{D'}$.

Les éléments de **S'** sont les *distributions tempérées* (on peut en voir une caractérisation au paragraphe 5. 26).

Le *support* d'une distribution V est le plus petit ensemble fermé tel que $\langle V, \Phi(t) \rangle = 0$, le support de Φ étant entièrement contenu dans le complémentaire de cet ensemble.

Une distribution V est à *support limité à gauche* s'il existe un nombre réel α tel que $\langle V, \Phi(t) \rangle = 0$ pour toute Φ à support contenu dans $(-\infty, \alpha[$.

De même pour les distributions tempérées.

5.13. Exemples de distributions

5.131. La *distribution de Dirac* (1) $\delta(t-\alpha)$ qui est l'opérateur défini par

$$\langle \delta(t-\alpha), \Psi(t) \rangle = (-1)^n \Psi(\alpha) \tag{5,1}$$

est une distribution tempérée, dont le support est le point α, de même que les $\delta^{(n)}(t-\alpha)$ (n entier > 0), définis par

$$\langle \delta^{(n)}(t-\alpha), \Psi(t) \rangle = (-1)^n \Psi^{(n)}(\alpha) \tag{5,2}$$

(*voir* § 5.25).

5.132. Soit $h(t)$ une fonction localement sommable (2). L'application $\mathbf{h}$ définie par

$$\langle \mathbf{h}, \Phi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, \Phi(t)\, dt, \qquad \Phi \in \mathbf{D}, \tag{5,3}$$

est une distribution [dont le support est celui de $h(t)$].

Si $h(t)$, localement sommable, est telle qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $t^{-n} h(t) \to 0$ lorsque $|t| \to \infty$, l'application $\mathbf{h}$ définie par

$$\langle \mathbf{h}, \Psi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, \Psi(t)\, dt, \qquad \Psi \in \mathbf{S},$$

est une distribution tempérée [à support limité à gauche si le support de $h(t)$ est limité à gauche].

Il est assez habituel de noter la distribution $\mathbf{h}$ par le même symbole $h(t)$ que la fonction à laquelle elle est associée (3). Cette identification a des avantages et des dangers. Dans nos Tables nous

---

(1) Souvent désignée par abus de langage comme étant la « fonction de Dirac ».
(2) $|h(t)|$ intégrable (au sens de Lebesgue) sur tout intervalle borné.
(3) $\mathbf{h}$ est associée à toute la classe des fonctions égales presque partout.

emploierons indifféremment la même notation pour les fonctions et pour les distributions qui leur sont associées respectivement.

Cas particulier. — Soit U $(t - \alpha)$ la fonction égale à 0 si $t < \alpha$ et à 1 si $t > \alpha$; c'est l'*échelon unité* translaté en α. La distribution associée $\mathbf{U}(t - \alpha)$ est tempérée, à support limité à gauche.

5.133. *Pseudo-fonctions*

Rappelons d'abord un mode de généralisation pour l'intégrale. Soit $g(t)$ une fonction ayant les propriétés suivantes :

— sur l'intervalle $]\alpha, \alpha + \varepsilon]$:

$$(5,4) \qquad g(t) = \sum_{j=0}^{J} \sum_{k=0}^{K} A_{jk} (t - \alpha)^{-\nu_j} \log^k (t - \alpha) + b(t),$$

$b(t)$ étant borné et sommable sur cet intervalle, les entiers J et K finis, A_{jk} et ν_j réels ou complexes;

— sur l'intervalle $[\alpha + \varepsilon, \beta[$, $g(t)$ est sommable.

Désignons par ν' celui des ν_j dont la partie réelle est la plus grande Alors

$$G(\nu) = \int_\alpha^\beta t^{\nu' + \nu} g(t)\, dt \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Re} \nu > -1$$

est une fonction analytique de ν prolongeable en une fonction méromorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} \nu > -\operatorname{Re} \nu' - 1$ [4]. On pose

$$(5,5) \quad \operatorname{Pf} \int_\alpha^\beta g(t)\, dt = \begin{cases} G(-\nu') \text{ si } -\nu' \text{ est un point régulier,} \\ \quad \text{au terme constant du développement de} \\ \quad \text{Laurent [5] de } G(\nu) \text{ autour de } -\nu' \\ \quad \text{si } -\nu' \text{ est un pôle.} \end{cases}$$

---

[4] Si aucun ν_j n'égale 1, $G(\nu)$ est holomorphe dans ce demi-plan; si le développement (5,4) contient des termes en $(t - \alpha)^{-1} \log^{k'} (t - \alpha)$, $0 \leqq k' \leqq K'$, $G(\nu)$ a un pôle d'ordre $K' + 1$ en $-\nu'$.

[5] Si $-\nu'$ est pôle d'ordre P, on a, dans son voisinage, le développement $G(\nu) = \sum_{n=-P}^{\infty} c_n (\nu + \nu')^n$; c_0 est le terme constant.

C'est la *partie finie de l'intégrale* (6). C'est bien une généralisation de l'intégrale, car si $g(t)$ est intégrable sur $]\alpha, \beta[$,

$$\mathrm{Pf} \int_\alpha^\beta g(t)\, dt = \int_\alpha^\beta g(t)\, dt.$$

Prenons par exemple $\alpha = 0$, $g(t) = t^{-a}$, $\mathrm{Re}\ a \geq 1$. Alors $\nu' = a$ et $G(\nu) = \int_0^\beta t^\nu\, dt = \frac{\beta^{\nu+1}}{\nu + 1}$, donc

$$\mathrm{Pf} \int_0^\beta t^{-a}\, dt = \frac{\beta^{1-a}}{1-a} \qquad \text{si} \quad a \neq 1$$

et

$$\mathrm{Pf} \int_0^\beta t^{-1}\, dt = \log \beta$$

car

$$\beta^{\nu+1} = e^{(\nu+1)\log \beta} = 1 + (\nu + 1) \log \beta + \frac{1}{2!} (\nu + 1)^2 \log^2 \beta + \dots .$$

On définit de façon semblable :

$$\mathrm{Pf} \int_\gamma^\alpha g(t)\, dt$$

lorsque $g(t)$ est sommable sur $]\gamma, \alpha - \varepsilon]$ et admet sur $[\alpha - \varepsilon, \alpha[$ une représentation du type [analogue à (5, 4)]

$$\sum \sum_k A_{jk}^- (\alpha - t)^{-\nu_j} \log^k (\alpha - t) + b^-(t),$$

$b^-(t)$ borné et sommable.

(6) Nous ne donnons pas ici la définition originale de Hadamard, moins artificielle, mais plus longue à exposer (*voir* l'ouvrage d'HADAMARD cité dans la bibliographie, ou celui de LAVOINE : *Calcul symbolique*).

Enfin, si $\gamma < \alpha < \beta$ et si au voisinage de α,

$$g(t) = \sum_{j=1}^{J} A_j (t - \alpha)^{-j} + b(t)$$

et que $(t - \alpha)^J g(t)$ est intégrable sur $]\gamma, \beta[$,

$$\text{Pf} \int_\gamma^\beta g(t)\, dt = \text{Pf} \int_\gamma^\alpha g(t)\, dt + \text{Pf} \int_\alpha^\beta g(t)\, dt. \tag{5,6}$$

Ainsi, par exemple,

$$\text{Pf} \int_\gamma^\beta (t - \alpha)^{-j}\, dt = - \frac{(\beta - \alpha)^{-j+1} - (\gamma - \alpha)^{-j+1}}{j - 1} \qquad (j \text{ entier} \geq 2)$$

et

$$\text{Pf} \int_\gamma^\beta (t - \alpha)^{-1}\, dt = \log \frac{\beta}{\gamma}.$$

Dans ce cas au lieu de Pf on met habituellement vp, signifiant « valeur principale de Cauchy » (voir une terminologie analogue au § 2.3).

Si la fonction $g(t)$ est telle que $\text{Pf} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\Phi(t)\, dt$ existe pour toute Φ de **D**, la *distribution* $\text{Pf}\, g(t)$ définie par

$$\langle \text{Pf}\, g(t), \Phi(t) \rangle = \text{Pf} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\Phi(t)\, dt \tag{5,7}$$

est appelée pseudo-fonction (7) :

Si $\text{Pf} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\Psi(t)\, dt$ existe pour toute Ψ de **S**, la pseudo-fonction $\text{Pf}\, g(t)$ est *tempérée*.

$\text{Pf}\,(t - \alpha)^{-a}\, U(t - \alpha)$, $\text{Pf}\, t^{-1}\, U(t - \alpha)$, $\text{Pf}\, t^{-a} \log^k t\, U(t)$ sont des pseudo-fonctions tempérées, à support limité à gauche.

---

(7) D'après L. SCHWARTZ : *voir* les ouvrages de SCHWARTZ et de GUELFAND-CHILOV cités dans la bibliographie.

5.2. Opérations sur les distributions

5.21. Limite, convergence

On dit qu'une suite de distributions $V_j \in \mathbf{D}'$ converge vers $V \in \mathbf{D}'$ lorsque $j \to \infty$, si, pour chaque Φ de $\mathbf{D}$,

$$\langle V_j - V, \Phi(t) \rangle \to 0 \quad \text{lorsque } j \to \infty.$$

L'espace $\mathbf{D}'$ est *complet* : pour qu'une suite de distributions $V_j \in \mathbf{D}'$ ait une limite dans $\mathbf{D}'$, il faut et il suffit que, pour chaque $\Phi \in \mathbf{D}$, la suite des nombres $\langle V_j, \Phi(t) \rangle$ ait une limite, lorsque $j \to \infty$.

Soit $V(\nu)$ une distribution de $\mathbf{D}'$ dépendant d'un paramètre variant continûment ν. $V(\nu)$ converge vers $V(\nu_0)$, si, pour chaque $\Phi \in \mathbf{D}$, $\langle V(\nu), \Phi(t) \rangle \to \langle V(\nu_0), \Phi(t) \rangle$ lorsque $\nu \to \nu_0$.

5.211. On notera que la continuité en ν_0 de la fonction $g(\nu; t)$ n'entraîne pas la convergence de $\text{Pf}\, g(\nu; t)$ vers $\text{Pf}\, g(\nu_0; t)$ lorsque $\nu \to \nu_0$; ainsi $\text{Pf}\, t^{-n}\, U(t)$, $(-1)^n\, \text{Pf}\, J_n(t)\, U(t)$ ne sont pas les limites de $\text{Pf}\, t^{\nu}\, U(t)$, $\text{Pf}\, J_{\nu}(t)\, U(t)$, bien que, pour $t > 0$, t^{ν} et $J_{\nu}(t)$ tendent vers t^{-n} et $(-1)^n J_n(t)$ lorsque $\nu \to -n$.

5.22. Produit

Le produit d'une distribution V par une fonction $\alpha(t)$, *indéfiniment dérivable*, est la distribution désignée par $\alpha(t)\, V$, définie par

$$\langle \alpha(t)\, V, \Phi(t) \rangle = \langle V, \alpha(t)\, \Phi(t) \rangle \tag{5,8}$$

pour toute Φ de $\mathbf{D}$.

5.23. Convolution

La convolution de deux distributions V_1 et V_2, l'une étant à support borné ou toutes deux à support limité à gauche, est la distribution désignée par $V_1 \star V_2$ ou $V_2 \star V_1$, définie par

$$\langle V_1 \star V_2, \Phi(t) \rangle = \langle V_1, \Phi_2(t) \rangle = \langle V_2, \Phi_1(t) \rangle, \tag{5,9}$$

où

$$\Phi_2(u) = \langle V_2, \Phi(t+u) \rangle,$$
$$\Phi_1(u) = \langle V_1, \Phi(t+u) \rangle$$

pour toute Φ de $\mathbf{D}$.

Si $\mathbf{h}_1$ et $\mathbf{h}_2$ sont associées aux fonctions $h_1(t)$ et $h_2(t)$, nulles pour $t < 0$ et sommables, on a $\mathbf{h}_1 \star \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_3$, la fonction $h_3(t)$ étant nulle pour $t < 0$ et valant

$$\int_0^t h_1(u)\, h_2(t-u)\, du \qquad \text{pour} \quad t > 0$$

(*cf.* § 2.22).

On montre que $\delta(t) \star V = V$ et que l'ensemble des distributions à support limité à gauche est une *algèbre* où la convolution tient le rôle de la multiplication et $\delta(t)$ celui de l'unité.

5.24. Translation et homothétie

$V_{t-\alpha}$ (α réel) désignera la distribution définie par

(5,10) $$\langle V_{t-\alpha}, \Phi(t) \rangle = \langle V, \Phi(t+\alpha) \rangle$$

pour toute Φ de $\mathbf{D}$. En particulier, si $V = \mathbf{h}(t)$, $V_{t-\alpha} = \mathbf{h}(t-\alpha)$.

On montre que

(5,11) $$V_{t-\alpha} = \delta(t-\alpha) \star V.$$

Par définition :

$$\langle V_{\alpha t}, \Phi(t) \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \left\langle V, \Phi\left(\frac{t}{\alpha}\right) \right\rangle.$$

5.25. Dérivation

La $n^{\text{ième}}$ dérivée de V est la distribution désignée par $D_t^n V$ et définie par

(5,12) $$\langle D_t^n V, \Phi(t) \rangle = (-1)^n \left\langle V, \frac{d^n}{dt^n} \Phi(t) \right\rangle$$

pour toute Φ de $\mathbf{D}$, n entier $\geqq 1$.

On a

$$(5,13)\qquad \begin{cases} D_t D_t^n V = D_t^{n+1} V, \\ D_t^n V = \delta^{(n)}(t) \star V, \\ D_t \mathbf{U}(t-\alpha) = \delta(t-\alpha); \end{cases}$$

$$(5,14)\qquad \begin{cases} D_t^n \delta(t-\alpha) = \delta^{(n)}(t-\alpha), \\ D_t \mathbf{h} = \mathbf{h}' + h(\alpha)\,\delta(t-\alpha) \end{cases}$$

si $h(t)$ est nulle pour $t < \alpha$, continue pour $t > \alpha$, localement sommable, douée pour $t \neq \alpha$ d'une dérivée $h'(t)$ localement sommable.

On a aussi

$$D_t \log(t-\alpha)\, U(t-\alpha) = \mathrm{Pf}\,(t-\alpha)^{-1}\, U(t-\alpha),$$

$$D_t\, \mathrm{Pf}\,(t-\alpha)^{-n}\, U(t-\alpha)$$
$$= -n\,\mathrm{Pf}\,(t-\alpha)^{-n-1}\, U(t-\alpha) + \frac{(-1)^n}{n!}\,\delta^{(n)}(t-\alpha) \qquad (n \text{ entier} \geq 0),$$

$$D_t\, \mathrm{Pf}\,(t-\alpha)^{-\nu}\, U(t-\alpha)$$
$$= -\nu\, \mathrm{Pf}\,(t-\alpha)^{-\nu-1}\, U(t-\alpha) \qquad (\nu \neq \text{entier} \geq 0),$$

formules à partir desquelles on peut établir beaucoup d'autres similaires.

Un résultat important est le suivant : si la suite de distributions V_j converge vers la distribution V, la suite $D_t V_j$ converge vers $D_t V$. Il s'ensuit que si la série $\sum V_j$ est convergente, $\sum D_t V_j$ est aussi convergente.

Les résultats de ce paragraphe s'étendent aux distributions tempérées moyennant quelques modifications évidentes.

5.26. Expression des distributions tempérées

La dérivation permet une caractérisation claire et utile des distributions tempérées. On a en effet le théorème suivant [8].

Pour qu'une distribution T appartenant à $\mathbf{D}'$ soit tempérée, il faut et il suffit que

$$T = D_t^n\, \mathbf{h}(t),$$

---

[8] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, chap. VII.

$h(t)$ étant une fonction continue à croissance lente au sens usuel $\left[\right.$c'est-à-dire $h(t) = (1+t^2)^{\frac{k}{2}} b(t)$, où $b(t)$ est une fonction continue bornée sur $\mathbf{R}\left.\right]$. Tel est le cas, par exemple, pour la distribution $\delta(t)$.

5.3. Transformation de Laplace et distributions

Dans la suite T désigne une distribution à support limité à gauche telle qu'il existe un nombre réel β pour lequel le produit $e^{-\beta t}\,\mathrm{T}$ est une distribution *tempérée*, donc appartenant à $\mathbf{S}'$.

Si $\operatorname{Re} p > \beta$, $\langle e^{-\beta t}\,\mathrm{T},\ e^{-(p-\beta)t}\rangle$ existe. car $e^{-(p-\beta)t}$ coïncide sur le support de T, avec des fonctions appartenant à $\mathbf{S}$.

D'après (5, 8) cette existence entraîne celle de

$$\mathcal{L}\,\mathrm{T} = \mathrm{T}(p) = \langle \mathrm{T}, e^{-pt}\rangle \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Re} p > \beta. \tag{5,15}$$

On montre que $\mathrm{T}(p)$ est une fonction de p holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} p > \beta_0$, β_0 étant le plus petit des β ([9]).

$\mathcal{L}\,\mathrm{T}$ ou $\mathrm{T}(p)$ est la *transformée de Laplace* de T, β_0 l'abscisse de convergence.

Il est facile de voir que c'est bien une généralisation de la transformation de Laplace-Abel des fonctions, étudiée précédemment. En effet, si $h(t)$ est nulle pour $t < \alpha$, localement sommable et d'ordre exponentiel un [*voir* 2. 21 (*c*)] lorsque $t \to \infty$, on a

$$\mathcal{L}\,\mathbf{h} = \langle \mathbf{h}, e^{-pt}\rangle = \int_{\alpha}^{\infty} h(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$= \text{Transformée de Laplace-Abel de la fonction } h(t).$$

En particulier, pour les opérateurs de Dirac :

$$\left\{\begin{aligned} &\mathcal{L}\,\delta(t) &&= 1,\\ &\mathcal{L}\,\delta(t-\alpha) &&= e^{-\alpha p},\\ &\mathcal{L}\,\delta^{(n)}(t-\alpha) &&= p^n e^{-\alpha p}. \end{aligned}\right. \tag{5,16}$$

([9]) $\mathrm{T}(p)$ est holomorphe dans tout le plan si β_0 est rejeté à $-\infty$, par exemple si $\mathrm{T} = \delta(t)$ ou si est associée à $\exp - t^2$.

De même qu'avec les transformées de fonctions ordinaires, on a les formules opératoires

$$\mathcal{L}\, t^n \mathrm{T} = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \mathrm{T}(p) \qquad (n \text{ entier} > 0),$$

$$\mathcal{L}\, e^{-at} \mathrm{T} = \mathrm{T}(p + a) \qquad (a \text{ complexe}),$$

et, en particulier :

$$\mathcal{L}(\mathrm{T}_1 \star \mathrm{T}_2) = \mathrm{T}_1(p)\, \mathrm{T}_2(p). \tag{5,17}$$

D'où on déduit (*voir* § 5.2) :

$$\mathcal{L}\, \mathrm{T}_{t-\alpha} = e^{-\alpha p}\, \mathrm{T}(p), \tag{5,18}$$

$$\mathcal{L}\, \mathrm{D}_t^n \mathrm{T} = p^n \mathrm{T}(p). \tag{5,19}$$

Soit $h(t)$ une fonction nulle pour $t < \alpha$, ayant $t \neq \alpha$ une dérivée $h'(t)$; on suppose $h(t)$ et $h'(t)$ localement sommables et d'ordre exponentiel un. D'après (5. 19) et (5. 14),

$$\mathcal{L}\, \mathrm{D}_t \mathbf{h} = \mathcal{L}[\mathbf{h}' + h(\alpha)\, \delta(t - \alpha)] = p\, \mathrm{H}(p),$$

en posant $\mathcal{L}\, \mathbf{h} = \mathrm{H}(p)$; d'où, d'après (5,16),

$$\mathcal{L}\, \mathbf{h}' = p\, \mathrm{H}(p) - h(\alpha)\, e^{-\alpha p}, \tag{5,20}$$

en accord avec la formule donnée au paragraphe 2.21.

5.31. Cas des pseudo-fonctions

Si $g(t)$ est à support dans $[\alpha, \infty[$ et si $e^{-\beta_0 t} g(t)$ est sommable pour $t > t_0$,

$$\mathcal{L}\, \mathrm{Pf}\, g(t) = \mathrm{Pf} \int_\alpha^\infty g(t)\, e^{-pt}\, dt = \mathrm{G}(p), \qquad \mathrm{Re}\, p > \beta_0.$$

D'après le paragraphe 5. 25,

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Pf}\, g'(t) = p\,G(p) \qquad \text{si} \quad g(t) = \log(t-\alpha)\,U(t-\alpha),$$

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Pf}\, g'(t) = p\,G(p) - \frac{(-1)^n}{n\,!}\,p^n\,e^{-\alpha p} \qquad \text{si} \quad g(t) = (t-\alpha)^{-n}\,U(t-\alpha)$$
$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Pf}\, g'(t) = p\,G(p) \qquad \text{si} \quad g(t) = (t-\alpha)^{-\nu}\,U(t-\alpha) \qquad (\nu \neq n).$$

Ces formules, jointes à (5,20), permettent d'obtenir, pour de nombreuses fonctions $g(t)$, la transformée de Pf $g'(t)$ à partir de celle de Pf $g(t)$.

Ainsi, si $g(t)$, nulle pour $t < \alpha$, admet la représentation (5,4) on a

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Pf}\, g'(t) = p\,\mathcal{L}\,\mathrm{Pf}\, g(t) - \left[b(\alpha) + \sum_{j'} \frac{(-1)^{j'}\,A_{j'0}}{j'\,!}\,p^{j'} \right] e^{-\alpha p},$$

les $j' \geqq 1$ étant tels que $\nu_{j'} = j'$.

Une autre méthode fructueuse pour obtenir la transformée de certaines pseudo-fonctions est la suivante basée sur le prolongement analytique :

Soit $g(a; t)$ une fonction de la variable réelle t et de la variable complexe a définie dans un domaine Ω dans lequel :

1° $g(a; t)$ est nulle si $t < 0$;

2° pour $t \geqq \varepsilon$, $g(a; t)$ et $\frac{\partial}{\partial a} g(a; t)$ sont continues par rapport à l'ensemble des variables t, a, et ont leur module majoré par $e^{\beta t}\,t^{N}$, où β et N sont fixes;

3° pour $0 < t \leqq \varepsilon$ on a

$$g(a; t) = t^{\nu(a)} \sum_j A_j(a)\,t^j + b(a; t);$$

où les $A_j(a)$ et $\nu(a)$ désignent des fonctions holomorphes $\nu(a)$ *ne prenant jamais des valeurs entières négatives* et $b(a;\, t)$ et $\frac{\partial}{\partial a} b(a;\, t)$

sont continues par rapport à l'ensemble des variables t, a et ont leur module majoré par une fonction sommable de t seul, sur $(0, \varepsilon)$.

Dans ces conditions, on peut affirmer que :

a. pour $\operatorname{Re} \nu(a) > -1$, $g(a; t)$ a une transformée de Laplace-Abel au sens ordinaire, soit $G(a; p)$;

b. $G(a; p)$ est holomorphe par rapport à a dans Ω;

c. au sens de la transformation de Laplace des distributions, on a

$$\mathcal{L}\, \operatorname{Pf} g(a; t) = G(a; p) \quad \text{pour tout } a \in \Omega$$

[Pf devenant inutile si $\operatorname{Re} \nu(a) > -j_0$, j_0 étant le plus petit entier $\geqq 1$ tel que A_{j_0} ne soit pas identique à zéro].

Exemple [ici $\nu(a) = a - 1$]. De

$$\mathcal{L}\, \frac{1}{t} J_a(t)\, U(t) = \frac{1}{a}\left(p + \sqrt{p^2 + 1}\right)^{-a}, \qquad \operatorname{Re} a > 0,$$

on déduit

$$\mathcal{L}\, \operatorname{Pf} \frac{1}{t} J_{-a}(t)\, U(t) = -\frac{1}{a}\left(p + \sqrt{p^2 + 1}\right)^{a} \qquad (a \neq 0, 1, 2, \ldots).$$

5.32. Changement de t en βt

D'après ce qui a été vu au paragraphe 5.24 et β étant positif, on a

$$\mathcal{L}\, T_{\beta t} = \frac{1}{\beta} T\left(\frac{p}{\beta}\right) \qquad \text{si} \quad \mathcal{L}\, T = T(p).$$

Par exemple,

$$\mathcal{L}\, \delta^{(n)}(\beta t) = \frac{p^n}{\beta^{n+1}} \qquad (n \text{ entier} \geqq 0).$$

Avec les pseudo-fonctions, le passage de $\mathcal{L}\, \operatorname{Pf} g(t)$ à $\mathcal{L}\, \operatorname{Pf} g(\beta t)$ est souvent compliqué. En particulier, lorsque a appartient à un domaine *complexe* Ω incluant le point $a = 1$ et si pour un tel domaine on a :

1° $g(at)$ nulle pour $t < 0$;

2° $g(at)$ est (par rapport à t) localement sommable d'ordre exponentiel un pour $t \geqq \varepsilon$;

3° $g(t)$ admet pour $0 < t \leqq \varepsilon$ la représentation

$$g(t) = \sum_{j' \neq 1}^{J'} \sum_{k=0}^{K} A_{j'k}\, t^{-j'} \log^k t + \sum_j \sum_k B_{jk}\, t^{-\lambda_j} \log^k t + s(t),$$

avec λ_j non entier $\geqq 1$, $s(at)$ sommable par rapport à t sur $(0, \varepsilon)$; alors $\mathcal{L}\,\mathrm{Pf}\, g(t) = G(p)$ entraînera, pour $a \in \Omega$,

$$(5,21) \quad \mathcal{L}\,\mathrm{Pf}\, g(at) = \frac{1}{a} G\left(\frac{p}{a}\right) - \frac{1}{a} \sum_{j'=1}^{J'} \sum_{k=0}^{K} \frac{A_{j'k} \log^{k+1} a}{(j'-1)!\,(k+1)} \left(-\frac{p}{a}\right)^{j'-1}.$$

Le plus souvent, $K = 0$ (*cf.* § 2.2).

5.321. *Exemple*

De $\mathcal{L}\,\mathrm{Pf}\,\dfrac{\mathrm{ch}\, t}{t} U(t) = -\dfrac{1}{2}\log(p^2 - 1) - \log C$, on déduit par (5. 21),

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Pf}\,\frac{\mathrm{ch}\, at}{at} U(at) = -\frac{1}{2a}\log\left(\frac{p^2}{a^2} - 1\right) - \frac{1}{a}\log C - \frac{1}{a}\log a,$$

d'où, pour tout a complexe,

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Pf}\,\frac{\mathrm{ch}\, at}{t} U(t) = -\log C\sqrt{p^2 - a^2}$$

et en prenant $a = i\alpha$, α réel :

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Pf}\,\frac{\cos \alpha t}{t} U(t) = -\log C\sqrt{p^2 + \alpha}.$$

5.4. Inversion

Soit $T(p)$ une fonction de la variable complexe p. S'il existe un nombre réel α, un entier positif (ou nul) N et un demi-plan $\mathrm{Re}\, p > \beta_1$, tels que dans ce demi-plan $p^{-N} e^{-\alpha p}\, T(p)$ soit holomorphe et $|p^{-N} e^{-\alpha p}\, T(p)| < A\,|p|^{-2}$ lorsque $|p| \to \infty$, alors il existe une distribution T dont la transformée de Laplace est $T(p)$:

$$T = \mathcal{L}^{-1}\, T(p), \qquad \mathcal{L}\, T = T(p).$$

T est l'inverse (ou l'antitransformée de Laplace) de $T(p)$.

D'après le paragraphe 2.3, $p^{-N} e^{-\alpha p}$ T (p) a pour inverse une fonction continue $h(t)$, d'ordre exponentiel *un* (10), donnée par

$$h(t) = \frac{1}{2 i \pi} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} p^{-N} e^{-\alpha p} \mathrm{T}(p) e^{tp} \, dp \qquad (\beta > \beta_1).$$

D'après le paragraphe 5.3, $\mathbf{h}$ désignant toujours la distribution associée à $h(t)$,

$$\mathcal{L} \mathbf{h} = p^{-N} e^{-\alpha p} \mathrm{T}(p)$$

et en vertu de (5.18) et (5.19),

$$\mathcal{L} \mathrm{D}_t^{\mathrm{N}} \mathbf{h}(t + \alpha) = \mathrm{T}(p),$$

d'où (11)

$$\mathcal{L}^{-1} \mathrm{T}(p) = \mathrm{T} = \mathrm{D}_t^{\mathrm{N}} \mathbf{h}(t + \alpha).$$

On voit que des fonctions T (p) qui n'ont pas d'inverse de Laplace au sens des fonctions peuvent en avoir un au sens des distributions. C'est ainsi, par exemple, qu'on a

$$\mathcal{L}^{-1} e^{4p} \sqrt{\pi p} = -\frac{1}{2} \mathrm{Pf}\,(t + 4)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{U}(t + 4),$$

$$\mathcal{L}^{-1} p \log p = \mathrm{Pf}\, t^{-2} \mathrm{U}(t) + (1 - \log \mathrm{C}) \, \delta'(t)$$

[log C = constante d'Euler (0,577...)].

(10) Il s'ensuit que, pour γ réel convenable, la distribution $e^{-\gamma t} \mathbf{h}$ est tempérée.

(11) La distribution nulle est la seule qui ait sa transformée de Laplace partout nulle.

6

TRANSFORMATION DE MELLIN DES DISTRIBUTIONS

Dans *Generalized integral transformations*, A. H. ZEMANIAN a montré, d'une façon magistrale, que les distributions Mellin-transformables forment un sous-espace de $\mathbf{D}'$. La construction précise de ce sous-espace sortirait du cadre de cet ouvrage; aussi préférons-nous en donner une description abrégée basée sur la transformation de Laplace.

On garde pour les espaces fonctionnels les notations antérieures.

6.1. Transformation de Laplace bilatérale

La transformée de Fourier d'une fonction $\varphi(y)$ appartenant à $\mathbf{S}_y$ est la fonction de η,

$$\mathbf{F}_\eta \varphi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, e^{-i\eta y}\, dy \qquad (\eta \text{ réel}),$$

qui appartient à $\mathbf{S}_\eta$.

La transformée de Fourier d'une distribution $T_y \in \mathbf{S}'_y$ est la distribution $\mathbf{F}_\eta T_y$ appartenant à $\mathbf{S}'_\eta$ et définie par

$$\langle \mathbf{F}_\eta T_y, \varphi(\eta) \rangle = \langle T_y, \mathbf{F}_y \varphi(\eta) \rangle, \qquad \varphi \in \mathbf{S}_\eta$$

(*voir* L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, chap. VII; J. LAVOINE, *Transformation de Fourier*).

Soit $U_y \in \mathbf{D}'_y$ telle que $e^{-\xi y}\, U_y \in \mathbf{S}'_y$ pour $\alpha < \xi < \beta$ (α pouvant être $-\infty$ et β $+\infty$). On pose $p = \xi + i\,\eta$. La *transformée de Laplace* de U_y est

$$(6,1) \qquad \mathcal{L}_p\,(U_y) = \mathbf{F}_\eta\,(e^{-\xi y}\, U_y), \qquad \alpha < \operatorname{Re} p < \beta.$$

On montre (*voir* L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, chap. VIII) que $\mathcal{L}_p\,(U_y)$ est une *fonction* de la variable complexe p, *holomorphe* dans la bande (ou le demi-plan, ou le plan), $\alpha < \operatorname{Re} p < \beta$.

Si U_y est associée à une fonction $h\,(y)$ telle que $e^{-\xi y}\, h\,(y)$ est sommable par rapport à y pour $\alpha < \xi < \beta$, on a

$$(6,2) \qquad \mathcal{L}_p\,(U_y) = \int_{-\infty}^{\infty} h\,(y)\, e^{-py}\, dy, \qquad \alpha < \operatorname{Re} p < \beta.$$

De sorte que (6,1) généralise la transformation de Laplace bilatérale des fonctions.

Et si U_y est à support limité à gauche, on retombe sur le paragraphe 5.3.

6.2. Transformation de Mellin

A toute $\Phi\,(y) \in \mathbf{D}_y$ faisons correspondre la fonction $\varphi\,(x) = \frac{1}{x}\,\Phi\,(-\log x)$, définie sur $]0; \infty[$. Les $\varphi\,(x)$ sont à support borné $\subset\,]0, \infty[$, indéfiniment dérivables sur $]0, \infty[$, et forment un espace $\mathbf{D}^+_x$ muni d'une topologie analogue à celle de $\mathbf{D}_x$, et isomorphe à $\mathbf{D}_y$.

On remarque qu'il existe dans $\mathbf{D}^+_x$ des fonctions coïncidant avec x^{s-1} sur tout compact $\subset\,]0, \infty[$ et que $x^{s-1}\, \varphi\,(x)$ appartient à $\mathbf{D}^+_x$ si $\varphi\,(x)$ y appartient.

Soit $\mathbf{D}^{+\prime}_x$ l'espace des distributions (fonctionnelles linéaires continues) sur $\mathbf{D}^+_x$.

On remarquera que cet espace ne contient ni $\delta\,(x)$, ni $\delta^{(k)}\,(x)$, ni Pf à l'origine, car $\varphi\,(x)$ n'est pas définie en $x = 0$. Mais si $V_x \in \mathbf{D}^{+\prime}_x$, $x^{s-1}\, V_x$, défini par

$$\langle x^{s-1}\, V_x, \varphi\,(x) \rangle = \langle V_x, x^{s-1}\, \varphi\,(x) \rangle \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathbf{D}^+_x,$$

appartient aussi à $\mathbf{D}^{+\prime}_x$.

A $V_x \in \mathbf{D}_x^{+\prime}$ correspond dans $\mathbf{D}'_y$ la distribution $R_y(V_x)$ telle que

(6,3) $\langle R_y(V_x), e^{-y}\varphi(e^{-y})\rangle = \langle V_x, \varphi(x)\rangle$ pour toute $\varphi \in \mathbf{D}_x^+$.

Exemples : si V_x est associée à la fonction $h(x)$ sommable sur $]0, \infty[$, $R_y(V_x)$ est associée à la fonction $h(e^{-y})$. De plus a étant > 0, $R_y(\delta(x-a)) = \frac{1}{a}\delta(y + \log a)$.

$V_x \in \mathbf{D}_x^+$ est *Mellin-transformable* si $R_y(x^{s-1}V_x)$ appartient à $\mathbf{S}'_y$ pour $\alpha < \operatorname{Re} s < \beta$ (α pouvant être $-\infty$ et β $+\infty$) et sa *transformée de Mellin* est

$$\mathcal{M}\, V_x = \mathcal{L}_s\, R_y(V_x), \qquad \alpha < \operatorname{Re} s < \beta, \tag{6,4}$$

avec la définition (6,1).

$\mathcal{M}\, V_x$ est une fonction de la variable complexe s, *holomorphe* dans la bande $\alpha < \operatorname{Re} s < \beta$ (qui peut être un demi-plan ou le plan entier).

Sous la forme (6,4) la transformation de Mellin semble obscure; mais si V_x est à support borné $\subset]0, \infty[$, on a simplement

$$\mathcal{M}\, V_x = \langle V_x, x^{s-1}\rangle, \qquad \alpha < \operatorname{Re} s < \beta. \tag{6,5}$$

Ainsi [12] :

$$\mathcal{M}\, \delta(x-a) = a^{s-1}, \quad \text{tout } s \text{ complexe},$$

$$\mathcal{M}\, \delta^{(k)}(x-a) = (-1)^k (s-k)_k\, a^{s-k-1}, \quad \text{tout } s \text{ complexe}.$$

Si V_x est associée à une fonction $h(x)$ telle que $h(x)\,x^{s-1}$ est sommable sur $]0, \infty[$ pour s dans la bande $\alpha < \operatorname{Re} s < \beta$,

$$\mathcal{M}\, V_x = \int_0^\infty h(x)\, x^{s-1}\, dx, \qquad \alpha < \operatorname{Re} s < \beta. \tag{6,6}$$

Ainsi

$$\mathcal{M}\, \mathbf{U}(x-a) = \int_a^\infty x^{s-1}\, dx = \frac{a^s}{s}, \qquad \operatorname{Re} s < 0.$$

---

[12] $(s-k)_k = (s-k)(s-k+1)\ldots(s-1)$ si $k \geq 1$; $(s)_0 = 1$.

En combinant (6,5) et (6,6), on obtient par exemple ([13]) :

$$\mathfrak{M}\,(\mathrm{Pf}\,(1-x)^{-1}\,[\mathrm{U}\,(x)-\mathrm{U}\,(x-1)] = \mathrm{Pf}\int_0^1 \frac{x^{s-1}}{1-x}\,dx$$
$$= -\psi\,(s) - \log \mathrm{C}, \qquad \mathrm{Re}\, s > 0.$$

(6,6) montre que $\mathfrak{M}\,\mathrm{V}_x = \mathfrak{M}\,h\,(x)$ quand celle-ci existe et que (6,4) généralise la transformation de Mellin des fonctions, exposée au paragraphe 4.1.

6.3. Quelques règles

Si $\mathfrak{M}\,\mathrm{V}_x = v\,(s)$ pour $\alpha < \mathrm{Re}\, s < \beta$ et si $\mathfrak{M}\,\mathrm{W}_x = w\,(s)$ pour $\alpha' < \mathrm{Re}\, s < \beta'$, on a

(6,7) $\quad \mathfrak{M}\,(\mathrm{V}_x + \mathrm{W}_x) = v\,(s) + w\,(s), \qquad \mathrm{Re}\, s \in]\alpha, \beta[\cap]\alpha', \beta'[.$

D_x désignant, comme dans les chapitres antérieurs, la dérivation au sens des distributions,

(6,8) $\quad \mathfrak{M}\,\mathrm{D}_x\,\mathrm{V}_x = -(s-1)\,v\,(s),$

(6,9) $\quad \mathfrak{M}\,\mathrm{D}_x^k\,\mathrm{V}_x = (-1)^k\,(s-k)_k\,v\,(s-k),$

(6,10) $\quad \mathfrak{M}\,x^\nu\,\mathrm{V}_x = v\,(s+\nu), \qquad \mathrm{Re}\,(s+\nu) \in]\alpha, \beta[,$

(6,11) $\quad \mathfrak{M}\,x\,\mathrm{D}_x\,\mathrm{V}_x = -s\,v\,(s),$

(6,12) $\quad \mathfrak{M}\,(\log x)^k\,\mathrm{V}_x = v^{(k)}\,(s).$

Si $\mathrm{V}_x = \mathbf{h}\,(x)$ est Mellin-transformable et si la fonction $h\,(x)$ est localement sommable et bornée dans $]0, \infty[$ avec, pour $x \neq a$, $a > 0$, une dérivée $h'\,(x)$ localement sommable :

$$\mathrm{D}_x\,\mathrm{V}_x = \mathbf{h}'\,(x) + [h\,(a^+) - h\,(a^-)]\,\delta\,(x-a)$$

([13]) Rappelons que $\mathrm{Pf}\int_0^1 (1-x)^{-1}\,x^{s-1}\,dx = \int_0^1 \log\,(1-x)\,\frac{d}{dx}\,x^{s-1}\,dx.$

et (6,8) donne

$$\mathcal{M}\,\mathbf{h}'(x) = -(s-1)\,v(s-1) - [h(a^+) - h(a^-)]\,a^{s-1}$$

(*cf.* p. 139).

6.4. Inversion

Soit $v(s) = \mathcal{M}\,V_x$, s complexe convenablement choisie. La distribution V_x est appelée la *transformée de Mellin inverse* de la fonction $v(s)$, ce qu'on écrit

$$(6,13) \qquad V_x = \mathcal{M}^{-1}\,v(s).$$

Étant données à la fois une fonction $v(s)$ de la variable complexe s et une bande B parallèle à l'axe imaginaire dans laquelle $v(s)$ est holomorphe, cette fonction (considérée sur B) a un inverse $\mathcal{M}^{-1}\,v(s)$, s'il existe $k \in \mathbf{N}$ et une sous-bande $\alpha_1 < \operatorname{Re} s < \beta_2$ de B tels :

— que $s^{-k}\,v(s)$ soit holomorphe dans cette sous-bande;

— et que $|s^{-k}\,v(s)| = 0(s^{-1-\eta})$, $\eta > 0$, lorsque $|s| \to \infty$ dans cette sous-bande.

Ces conditions étant remplies, la théorie de la transformation de Mellin des fonctions assure que la fonction

$$(6,14) \qquad h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{-k}\,v(s)\,x^{-s}\,dx, \qquad \alpha_1 < c < \beta_1$$

est telle que

$$\mathcal{M}^{-1}\,s^{-k}\,v(s) = h(x),$$

donc, d'après (6,6) :

$$\mathcal{M}^{-1}\,s^{-k}\,v(s) = \mathbf{h}(x),$$

puis, d'après (6,11),

$$(6,15) \qquad \mathcal{M}^{-1}\,v(s) = (-1)^k\,(D_x\,x)^k\,\mathbf{h}(x)$$

au sens des distributions.

Le procédé suivant, basé sur (6,9), est souvent plus avantageux : si

$$\mathfrak{M}^{-1}\frac{v(s+k)}{(s)_k} = h_1(x) \quad \text{au sens des fonctions,}$$

on a

$$(6,16) \quad \mathfrak{M}^{-1}\, v(s) = (-1)^k\, D_x^k\, \mathbf{h}_1(x) \quad \text{au sens des distributions.}$$

Exemple. — Prenons $v(s) = a^{s-1}$, $a < 0$. Alors $k = 2$. Comme

$$\mathfrak{M}^{-1}\frac{v(s+2)}{(s)_2} = \mathfrak{M}^{-1}\frac{a^{s+1}}{s(s+1)} = (x-a)\,U(x-a),$$

on a, par (6 ,16) et (5 ,13) :

$$\mathfrak{M}^{-1}\, a^{s-1} = \delta(x-a).$$

L'inverse est *unique* pour une même bande B d'holomorphie de $v(s)$. Mais l'inverse peut être différent suivant la bande d'holomorphie considérée. Ainsi, a et b étant positifs,

$$\text{si } \operatorname{Re} s > -b, \quad \mathfrak{M}^{-1}\frac{a^{s+b}}{s+b} = x^b\,[U(x) - U(x-a)],$$

$$\text{si } \operatorname{Re} s < -b, \quad \mathfrak{M}^{-1}\frac{a^{s+b}}{s+b} = x^b\, U(x-a).$$

6.5. La Mellin-convolution

Elle est motivée par le désir d'avoir pour la transformation de Mellin une formule du même genre que (5 ,17) pour la transformation de Laplace.

La Mellin-convolution de deux distributions V_x et $W_x \in D_x^{+\prime}$ est la distribution notée $V_x \underset{M}{\bigstar} W_x$ définie par

$$\left\langle V_x \underset{M}{\bigstar} W_x, \varphi(x) \right\rangle = \langle V_x, \langle W_\xi, \varphi(\xi x) \rangle \rangle$$

pour toute $\varphi(x)$ de D_x^+.

Si

$$\mathfrak{M}\,V = v(s), \qquad s \in B_V$$

et

$$\mathfrak{M}\,W = w(s), \qquad s \in B_W,$$

alors

$$\mathfrak{M}\left(V \underset{M}{\star} W\right) = v(s)\,w(s), \qquad s \in B_V \cap B_W. \tag{6,17}$$

QUELQUES PROPRIÉTÉS :

1° Si $h_1(x)$ et $h_2(x)$ sont des fonctions sommables sur $]0, \infty[$,

$$\mathbf{h}_1 \underset{M}{\star} \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_3,$$

avec

$$h_3(x) = \int_0^\infty \frac{1}{u} h_1(u)\, h_2\left(\frac{x}{u}\right) du.$$

2° L'opération R_y définie en (6.3) donne la relation simple

$$R_y\left(V_x \underset{M}{\star} W_x\right) = (R_y V_x) \star (R_y W_x)$$

entre la Mellin-convolution et la convolution exposée au chapitre 5.

On trouvera dans le livre de Zemanian déjà cité un exposé complet et rigoureux de la Mellin-convolution.

DEUXIÈME PARTIE

FORMULAIRES
ET TABLES DE TRANSFORMÉES
(DIRECTES ET INVERSES)

TABLES DE TRANSFORMÉES DE LAPLACE UNILATÉRALES

RÈGLES OPÉRATOIRES (1)

1	$f(t-\alpha)\,\mathrm{U}(t-\alpha)$	$e^{-\alpha p}\,\varphi(p)$
2	$e^{at} f(t)$	$\varphi(p-a)$
3	$f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \qquad (\alpha > 0)$	$\alpha\,\varphi(\alpha p)$
4	$t^n f(t)$	$(-1)^n\,\varphi^{(n)}(p)$
5	$f'(t)$	$p\,\varphi(p) - f(+0)$
6	$\int_0^t f(s)\,ds$	$p^{-1}\,\varphi(p)$
7	$\int_0^t f_1(t-u)\,f_2(u)\,du$	$\varphi_1(p)\,\varphi_2(p)$
8	$(\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} f(s)\,ds$	$p^{-\frac{1}{2}}\,\varphi\left(p^{\frac{1}{2}}\right)$
9	$t^{\frac{\nu}{2}} \int_0^{-\infty} \mathrm{J}_\nu(2\sqrt{st})\, s^{-\frac{\nu}{2}} f(u)\,du$	$p^{-\nu-1}\,\varphi\left(\frac{1}{p}\right)$

10	$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)} f(s)\, ds$	$\varphi(\log p)$
11	$t^{-1} f(t)$	$\displaystyle\int_p^{+\infty} f(s)\, ds$
12*	$t^n \mathrm{T}$	$(-1)^n \dfrac{d^n}{dp^n} \mathrm{T}(p) \quad (n = 1, 2, \ldots)$
13*	$e^{-at} \mathrm{T}$	$\mathrm{T}(p + a)$
14*	$\mathrm{T}_{t-\alpha}$	$e^{-\alpha p} \mathrm{T}(p)$
15*	$\mathrm{T}_{\beta t}$	$\beta^{-1} \mathrm{T}\left(\dfrac{p}{\beta}\right)$
16*	$\mathrm{D}_t \mathrm{T}$	$p\,\mathrm{T}(p)$

([1]) On retrouve certaines de ces formules au début des tables des transformées inverses, mais classées différemment.

Les règles opératoires marquées * concernent des distributions (*voir* § 5.3 et suivants).

TABLES DE TRANSFORMÉES

(α_0 désigne l'abscisse de convergence)

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
1	t^{ν}	$p^{-\nu-1}\,\Gamma(\nu+1)$	$\mathrm{Re}(\nu) > -1$
2	$\mathrm{Pf}\, t^{\nu}$	$p^{-\nu-1}\,\Gamma(\nu+1)$	$\mathrm{Re}(\nu) < -1, \quad -\nu \notin \mathrm{N}$

1. Fonctions algébriques

3	$t^{-\frac{1}{2}}$	$p^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}$	
4	$t^{\frac{1}{2}}$	$p^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}$	
5	$\mathrm{Pf}\, t^{-\frac{3}{2}}$	$-2\,p^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}$	
6	$\mathrm{Pf}\, t^{-1}$	$-\log \mathrm{C}\, p$	
7	$\mathrm{Pf}\, t^{-2}$	$p\,(\log \mathrm{C}\, p - 1)$	

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
8	$\mathrm{Pf}\, t^{-3}$	$-\frac{1}{2}p^2\left(\log \mathrm{C}\, p - \frac{3}{2}\right)$	
9	$\mathrm{Pf}\, t^{-n-1}$	$(-1)^{n+1}\frac{p^n}{n!}\left(\log \mathrm{C}\, p - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$	$n \in \mathrm{N}$
10	$(1+t)^{-1}$	$-e^p \operatorname{ei}(p)$	S'obtient en posant $(t+1)\,p = -x$ dans l'intégrale de Laplace
11	$t^{\frac{1}{2}}(1+t)^{-1}$	$p^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi} - \pi \operatorname{erfc}\left(p^{\frac{1}{2}}\right) e^p$	
12	$(1+t)^{\frac{1}{2}}$	$p^{-1} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}p^{-\frac{3}{2}} e^p \operatorname{erfc}\left(p^{\frac{1}{2}}\right)$	
13	$(1+t)^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\pi}\, p^{-\frac{1}{2}} e^p \operatorname{erfc}\left(p^{\frac{1}{2}}\right)$	
14	$(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{\pi}{2}[\mathbf{H}_0(p) - \mathrm{N}_0(p)]$	
15	$t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{\pi}{2}[\mathbf{H}_1(p) - \mathrm{N}_1(p) - 1]$	

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
16	$t^{\nu-1}(1+t^2)^{-1}$	$G_\nu(p)$	$\mathrm{Re}(\nu) > 0$ Conséquence immédiate de la définition de $G_\nu(p)$
17	$\mathrm{Pf}[U(t) - U(t-b)] \times \frac{1}{t}$	$\mathrm{ei}(bp) - \log Cp$	$b > 0$

2. Exponentielles et logarithmes

18	e^{at}	$(p-a)^{-1}$	$\alpha_0 = \mathrm{Re}(a)$
19	α^t	$(p - \log\alpha)^{-1}$	$\alpha > 0$
20	$t^\nu e^{at}$	$\Gamma(\nu+1)(p-a)^{\nu+1}$	$\alpha_0 = \mathrm{Re}(a)$, $\mathrm{Re}(\nu) > -1$ Pour $\mathrm{Re}(\nu) \leqq -1$ et $\nu \neq -1, -2, \ldots,$ remplacer $t^\nu e^{at}$ par $\mathrm{Pf}\, t^\nu e^{at}$
21	$(1-e^{-t})^n$	$\dfrac{n!}{p(p+1)\ldots(p+n)}$	$n \in N$ S'obtient en intégrant par parties l'intégrale de Laplace

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
22	$(b-a)^{-1} \times (e^{bt} - e^{at})$	$[(p-a)(p-b)]^{-1}$	$\alpha_0 = \max\{\mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b)\}$
23	$t^{-1}(e^{bt} - e^{at})$	$\log \frac{p-a}{p-b}$	$\alpha_0 = \max\{\mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b)\}$
24	$t^{-\frac{1}{2}} e^{t}$	$\sqrt{\pi}\,(p-1)^{-\frac{1}{2}}$	
25	$t^{-\frac{3}{2}} e^{-t}$	$\sqrt{\pi}\,(p+1)^{\frac{1}{2}}$	
26	$(1+e^{-t})^{-1}$	$\frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{p+1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{p}{2}\right)\right]$	
27	$\frac{1-e^{-at}}{1-e^{-t}}$	$\Psi(p+a) - \Psi(p)$	$a > 0$
28	$t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$	$2\sqrt{\pi}\,\alpha^{-1} e^{-\alpha\sqrt{p}}$	$\alpha_0 = 0$. S'obtient en posant $(\alpha > 0)$ $u = \alpha\left(v - \frac{1}{v}\right)$ dans $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
29	$t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\alpha\sqrt{p}}$	$\alpha_0 = 0$. Conséquence immédiate de (28)
30	$e^{-\alpha^2 t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{\frac{p}{4\alpha^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{p}{2\alpha}\right)$	$\alpha_0 = -\infty$. S'obtient en posant $x = \alpha t + \frac{p}{2\alpha}$ dans l'intégrale de Laplace
31	$\log t$	$-\frac{1}{p}(\log C + \log p)$	$e^C = \lim\limits_{n \to \infty} \left\{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \log n\right\} = \gamma$ *(Constante d'Euler)*
32	$(\log t)^2$	$\frac{1}{p}\left[(\log C p)^2 + \frac{\pi^2}{6}\right]$	Les correspondances (31)-(37) résultent de dérivations successives effectuées sur l'intégrale de Laplace relative à $f(t) = t^{\nu}$
33	$(\log t)^3$	$-\frac{1}{p}\left[(\log C p)^3 + \frac{\pi^2}{2} \log C p + \Psi^{11}(1)\right]$	
34	$t^{\nu} \log t$	$p^{-\nu-1}\left[\Gamma(\nu+1) \log \frac{1}{p} + \Gamma'(\nu+1)\right]$	$\mathrm{Re}(\nu) > -1$ [*Voir* observation de (20)]

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
35	$t^{\nu}(\log t)^2$	$p^{-\nu-1}\left[\left(\log\frac{1}{p}\right)^2\Gamma(\nu+1) + 2\left(\log\frac{1}{p}\right)\Gamma'(\nu+1) + \Gamma''(\nu+1)\right]$	$\mathrm{Re}(\nu) > -1$ [*Voir* observation de (20)]
36	$t^{\nu}(\log t)^3$	$p^{-\nu+1}\left[\left(\log\frac{1}{p}\right)^3\Gamma(\nu+1) + 3\left(\log\frac{1}{p}\right)^2\Gamma'(\nu+1) + 3\left(\log\frac{1}{p}\right)\Gamma''(\nu+1) + \Gamma'''(\nu+1)\right]$	$\mathrm{Re}(\nu) > -1$ [*Voir* observation de (20)]
37	$t^{\nu}(\log t)^m$	$p^{-\nu-1}\left[\left(\log\frac{1}{p}\right)^m\Gamma(\nu+1) + \binom{m}{1}\left(\log\frac{1}{p}\right)^{m-1}\Gamma'(\nu+1) + \dots + \binom{m}{r}\left(\log\frac{1}{p}\right)^{m-r}\Gamma^{(r)}(\nu+1) + \dots + \Gamma^{(m)}(\nu+1)\right]$	$\mathrm{Re}(\nu) > -1$ [*Voir* observation de (20)]
38	$t^{\nu-1}(1-e^{-t})^{-1}$	$\Gamma(\nu)\,\zeta(n, p)$	$\mathrm{Re}(\nu) > 1$

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
39	$\log(e^t - 1)$	$-p^{-1}[\gamma + \psi(p)]$	$\mathrm{Re}(\nu) > 1$
40	$\log(1 - e^{-t})$	$p^{-1}[p^{-1} + \psi(p) + \gamma]$	
41	$t^{-1}\left[\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right]$	$\mu(p)$	
42	$\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}$	$-\mu'(p)$	
43	$t^{-1}[\pi^2 + (\log t)^2]^{-1}$	$e^p - \nu(p)$	S'obtient à partir de la formule d'inversion avec $\varphi(p) = (p \log p)^{-1}$
44	$[\pi^2 + (\log t)^2]^{-1}$	$\nu(p-1) - e^p$	
45	$\mathrm{Pf}\,\frac{\log t}{t}$	$\frac{1}{2}\left[(\log C p)^2 + \frac{\pi^2}{6}\right]$	

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
46	$\mathrm{Pf}\,\dfrac{\log t}{t^{n+1}}$	$\dfrac{(-1)^n}{2}\dfrac{p^n}{n!}\left[(\log p - \psi(n+1))^2 + \dfrac{\pi^2}{3} - \psi'(n+1)\right]$	$n \in \mathrm{N}$
47	$\mathrm{Pf}\,t^{-1}(\log t)^2$	$-\dfrac{1}{3}(\log \mathrm{C}\,p)^3 - \dfrac{\pi^2}{6}\log \mathrm{C}\,p + \dfrac{1}{3}\psi''(1)$	
48	$\mathrm{Pf}\,t^{-n}(\log t)^2$	$\dfrac{(-1)^{n-1}}{3}\dfrac{p^{n-1}}{(n-1)!} \times \{\psi(n) - \log p)^3 + 3[2\psi'(1) - \psi'(n)] (\psi(n) - \log p) + \psi''(n)\}$	$n \in \mathrm{N}$
49	$\mathrm{Pf}\,t^{-\nu}\log t$	$\Gamma(1-\nu)\,p^{\nu-1}[\psi(1-\nu) - \log p]$	$\nu \geqq 1, \quad \nu \notin \mathrm{N}$
50	$\mathrm{Pf}\,t^{-\nu}(\log t)^2$	$\Gamma(1-\nu)\,p^{\nu-1}\{[\psi(1-\nu) - \log p]^2 + \psi'(1-\nu)\}$	$\nu \geqq 1, \quad \nu \notin \mathrm{N}$
51	$\mathrm{Pf}\,t^{-\nu}e^t$	$\Gamma(1-\nu)(p-1)^{\nu-1}$	$\nu > 1, \quad \nu \notin \mathrm{N}$
52	$\mathrm{Pf}\,t^{-n-1}e^t$	$(-1)^n\dfrac{(p-1)^n}{n!}[\log(p-1) - \psi(n+1)]$	$n \in \mathrm{N}$

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
53	$\mathrm{Pf}\,(e^t - 1)^{-1}$	$-\psi(p) - \dfrac{1}{p} - \log C$	
54	$\mathrm{Pf}\,(e^t - 1)^{-2}$	$(p+1)\,[\psi(p+1) + \log C - 1] + \dfrac{1}{2}$	$\alpha_0 = -2$
55	$\mathrm{Pf}\,t\,(e^t - 1)^{-2}$	$-\{(p+1)\,\psi'(p+1)$ $+ \psi(p+1) + \log C - 1\}$	$\alpha_0 = -2$
56	$t^n\,(e^t - 1)^{-1}$	$(-1)^{n+1}\,\psi^{(n)}(p+1)$	$n \in N, \quad \alpha_0 = -1$
57	$\mathrm{Pf}[t(e^t - 1)]^{-1}$	$\log\Gamma(p+1) + (p+1)\log C - \log\sqrt{2\pi C}$	
58	$t^{n+1}\,(e^t - 1)^{-2}$	$(-1)^{n+1}\,[(p+1)\,\psi^{(n+1)}(p+1)$ $+ (n+1)\,\psi^{(n)}(p+1)]$	
59	$t^{-\frac{1}{2}}\,e^{-t^2}$	$\dfrac{p^{\frac{1}{2}}}{2}\,e^{\frac{p^2}{8}}\,K_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{p^2}{8}\right)$	$\alpha_0 = 0$
60	$t^{\nu-1}\,e^{-t^2}$ $(\nu > 0)$	$2^{-\frac{\nu}{2}}\,\Gamma(\nu)\,e^{\frac{p^2}{8}}\,D_{-\nu}\left(\dfrac{p}{\sqrt{2}}\right)$	

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
61	$\mathrm{Pf}\, t^{-\nu-1} e^{-t^2}$ $(\nu < 0;\ \nu \neq -1, -2, \ldots)$	$2^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu)\, e^{\frac{p^2}{8}} D_{-\nu}\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$	
62	$t^{-\frac{1}{2}} e^{-t^{\frac{1}{2}}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{\frac{1}{4p}} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{p}}\right)$	
63	$\mathrm{Pf}\, t^{-\frac{3}{2}} e^{-t^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, {}_2F_2\left(1, \frac{1}{2}; 2, \frac{3}{2}; \frac{1}{4p}\right) - \frac{1}{6p}\, {}_2F_2\left(1, 1; 2, \frac{5}{2}; \frac{1}{4p}\right) + \log C p - 2\sqrt{\pi p}$	

3. Fonctions trigonométriques

64	$\sin \alpha t$	$a(p^2 + \alpha^2)^{-1}$	
65	$\cos \alpha t$	$p(p^2 + \alpha^2)^{-1}$	
66	$e^{at} \sin \beta t$	$b[(p - a)^2 + \beta^2]^{-1}$	$\alpha_0 = \mathrm{Re}(\alpha)$
67	$e^{at} \cos \beta t$	$(p - a)[(p - a)^2 + \beta^2]^{-1}$	

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
68	$\sin^2 t$	$2[p(p^2+4)]^{-1}$	
69	$\cos^2 t$	$(p+2)(p^2+4)^{-1}$	
70	$\frac{1}{(2n)!}\sin^{2n} t$	$p^{-1}\prod_{k=1}^{n}[p^2+(2k)^2]^{-1}$	
71	$\frac{1}{(2n+1)!}$ $\times \sin^{2n+1} t$	$\prod_{k=0}^{n}[p^2+(2k+1)^2]^{-1}$	
72	$t \sin \alpha t$	$2ap(p^2+\alpha^2)^{-1}$	
73	$t \cos \alpha t$	$(p^2-\alpha^2)(p^2+\alpha^2)^{-2}$	
74	$t^n \sin \alpha t$	$\frac{n!}{(p^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\left[(n+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{p}\right]$	
75	$t^n \cos \alpha t$	$\frac{n!}{(p^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\left[(n+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{p}\right]$	

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
76	$t^{-1}\sin t$	$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{p}$	
77	$\mathrm{Pf}\, t^{-n-1}\sin t$	$\frac{(-1)^n}{(n)!}(p^2+1)^{\frac{n}{2}} \times \left\{\theta\cos n\theta + \left(\frac{1}{2}\log(p^2+1) - \psi(n+1)\right)\sin n\theta\right\}$	$n \in \mathrm{N}$, $\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{p}$
78	$\mathrm{Pf}\, t^{-\nu-1}\sin t$	$-\Gamma(1-\nu)(p^2+1)^{\frac{\nu}{2}}\sin(\nu-1)\theta$	$\nu \geqq 1$, $\nu \notin \mathrm{N}$, $\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{p}$
79	$\mathrm{Pf}\,\frac{\cos t}{t}$	$-\log \mathrm{C}\sqrt{p^2+1}$	
80	$\sin\alpha t\sin\beta t$	$\frac{2\alpha\beta p}{\mathrm{D}}$	Dans (80) — (82) on a posé $\mathrm{D} = [p^2+(\alpha-\beta)^2][p^2+(\alpha+\beta)^2]$
81	$\sin\alpha t\cos\beta t$	$\frac{\alpha(p^2+\alpha^2-\beta^2)}{\mathrm{D}}$	

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
82	$\cos \alpha t \cos \beta t$	$\dfrac{p(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)}{D}$	
83	$t^{-\frac{1}{2}} \sin t$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(p^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(p^2 + \sqrt{p^2 + 1})^{-\frac{1}{2}}$	
84	$t^{-\frac{1}{2}} \cos t$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(p^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(p^2 + \sqrt{p^2 + 1})^{\frac{1}{2}}$	
85	$e^{at} t^{-1} \sin \beta t$	$\operatorname{arc\,tg} \dfrac{\beta}{p - a}$	$\alpha_0 = \operatorname{Re}(a)$
86	$\sin t^{\frac{1}{2}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} p^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4p}}$	
87	$t^{-1} \sin t^{\frac{1}{2}}$	$\pi \operatorname{erf}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{p}}\right)$	S'obtient en transformant terme à terme le développement en série de puissances de $\sqrt{t}$
88	$\operatorname{arc\,tg} t$	$-\dfrac{1}{p}[\sin p \operatorname{ci}(p) + \cos p \operatorname{si}(p)]$	

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
89	$\operatorname{arc\,tg} \sqrt{t}$	$\frac{\pi}{2p} e^p \operatorname{erfc}(\sqrt{p})$	
90	$t^{-1} \sin t^{-1}$	$-2 \operatorname{kei}(2\sqrt{p})$	
91	$t^{-1} \cos t^{-1}$	$2 \operatorname{ker}(2\sqrt{p})$	
92	$f(t; m, n)$	$p^{m-1}(p^n + 1)^{-1}$	*Voir* page 4.

4. Fonctions hyperboliques

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
93	$\operatorname{ch} at$	$p(p^2 - a^2)^{-1}$	$\alpha_0 = \operatorname{Re}(a)$
94	$\operatorname{sh} at$	$a(p^2 - a^2)^{-1}$	$\alpha_0 = \operatorname{Re}(a)$
95	$\operatorname{th} t$	$\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \psi\left(\frac{p}{4}\right) - \log 2 - \frac{1}{p}$	
96	$e^{-bt} \operatorname{ch} at$	$(p + b)(p + b)^2 - a^2]^{-1}$	$\alpha_0 = \operatorname{Re}(a - b)$

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
97	$e^{-bt}\,\mathrm{sh}\,at$	$a\,[(p+b)^2 - a^2]^{-1}$	$\alpha_0 = \mathrm{Re}\,(a-b)$
98	$t^{-1}\,\mathrm{sh}\,at$	$\frac{1}{2}\log\frac{p+a}{p-a} = \arg\coth\frac{p}{a}$	
99	$t^{-1}(1-\mathrm{ch}\,t)$	$-\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$	
100	$\mathrm{Pf}\,t^{-\nu-1}\,\mathrm{sh}\,t$	$\frac{1}{2}[(p-a)^\nu - (p+a)^\nu]\,\Gamma(-\nu)$	$\nu \geqq 0, \quad \nu \notin \mathrm{N}, \quad \alpha_0 = \lvert \mathrm{Re}\,(a) \rvert$
101	$\mathrm{Pf}\,t^{-n-1}\,\mathrm{sh}\,t$	$\frac{(-1)^n}{n\,!}(p^2-1)^{\frac{n}{2}}$ $\times\{\varphi\,\mathrm{ch}\,n\varphi + [\log\sqrt{p^2-1} - \psi(n+1)]\,\mathrm{sh}\,n\varphi\}$	$\varphi = \frac{1}{2}\log\frac{p-1}{p+1} = \arg\mathrm{th}\,\frac{1}{p}$ $n \in \mathrm{N}$
102	$\mathrm{Pf}\,t^{-1}\,\mathrm{ch}\,at$	$-\log\sqrt{p^2-a^2} - \gamma$	
103	$\mathrm{Pf}\,t^{-\nu-1}\,\mathrm{ch}\,t$	$\frac{1}{2}[(p-a)^\nu + (p+a)^\nu]\,\Gamma(-\nu)$	$\nu \geqq 0, \quad \nu \notin \mathrm{N}$

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
104	$\mathrm{Pf}\, t^{-n-1} \operatorname{ch} t$	$\frac{(-1)^{n+1}}{n!}(p^2-1)^{\frac{n}{2}} \times \{\varphi \operatorname{sh} n\varphi + [\log\sqrt{p^2-1} - \psi(n+1)] \operatorname{ch} n\varphi\}$	$n \in \mathrm{N}$ $\varphi = \arg \operatorname{th} \frac{1}{p}$
105	$\operatorname{sh} t^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} p^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{4p}}$	S'obtiennent à partir des développements de $\operatorname{sh} t^{\frac{1}{2}}$, $\operatorname{ch} t^{\frac{1}{2}}$ en séries de puissances entières du $u = t^{\frac{1}{2}}$
106	$t^{-\frac{1}{2}} \operatorname{ch} t^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\pi}\, p^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4p}}$	
107	$\operatorname{sh} t \sin t$	$2p(p^4+4)^{-1}$	
108	$\operatorname{ch} t \cos t$	$p^3(p^4+4)^{-1}$	
109	$\operatorname{sh} t^{\frac{1}{2}} - \sin t^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\pi}\, p^{-\frac{3}{2}} \operatorname{ch} \frac{1}{4p}$	
110	$t^{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} t^{\frac{1}{2}} - \cos t^{\frac{1}{2}})$	$2\sqrt{\pi}\, p^{-\frac{1}{2}} \operatorname{ch} \frac{1}{4p}$	

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
111	$t^{\nu} (\operatorname{sh} t)^{-1}$	$2^{-\nu}\,\Gamma(\nu+1)\,\zeta\left(\nu+1, \frac{p+1}{2}\right)$	$\operatorname{Re}(\nu) > 0$
112	$\operatorname{arg\,sh} t$	$\frac{\pi}{2p}[\mathbf{H}_0(p) - \mathrm{N}_0(p)]$	
113	$\operatorname{arg\,ch} t$	$\mathrm{K}_0(p)$	$t > 1$
114	$\operatorname{sh}(\nu \operatorname{arg\,ch} t)$	$\nu\, p^{-1}\, \mathrm{K}_{\nu}(p)$	
115	$t^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sh}(2t)^{\frac{1}{2}} \times \sin(2t)^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}} \sin\frac{1}{p}$	
116	$t^{-\frac{1}{2}} \operatorname{ch}(2t)^{\frac{1}{2}} \times \cos(2t)^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}} \cos\frac{1}{p}$	
117	$\operatorname{Pf} t^{-2} \operatorname{sh} t^{\frac{1}{2}}$	$\pi\left(\frac{a}{2} - p\right) \operatorname{erg}\left(\frac{1}{2\sqrt{p}}\right) - \sqrt{\pi p}\, e^{\frac{1}{4p}}$	
118	$\operatorname{Pf} t^{-1} \operatorname{ch} t^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2p}\, {}_2\mathrm{F}_2\left(1, 1; 2, \frac{3}{2}; \frac{1}{4p}\right) - \log \mathrm{C} p$	

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
	5. Fonction d'erreur et fonction complémentaire		
119	$\operatorname{erf} t$	$\frac{1}{p} e^{\frac{p^2}{4}} \operatorname{erfc} \frac{p}{2}$	
120	$\operatorname{erf} t^{\frac{1}{2}}$	$p^{-1}(p+1)^{-\frac{1}{2}}$	
121	$\operatorname{erf} \frac{1}{2\sqrt{t}}$	$\frac{1}{p}(1 - e^{-\sqrt{p}})$	
122	$e^t \operatorname{erfc} t^{\frac{1}{2}}$	$p^{\frac{1}{2}}\left(1 + p^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$	
123	$t^{-1} e^t \operatorname{erf} t^{\frac{1}{2}}$	$2 \arg\coth p^{\frac{1}{2}}$	$\alpha_0 = 1$
124	$\operatorname{Pf} t^{-2} e^t \operatorname{erf} t^{\frac{1}{2}}$	$-2(p-1) \arg\coth p^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{p}$	
125	$\operatorname{erg} t^{\frac{1}{2}}$	$(p-1)^{-\frac{1}{2}}$	
126	$t^{-1} \operatorname{erfc} t^{\frac{1}{2}}$	$-2 \operatorname{ei}(-2\sqrt{p})$	

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
	6. Polynômes de Laguerre		
127	$L_n(t)$	$\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$	
128	$e^{-t} L_n(t)$	$p^n (p+1)^{-n-1}$	
129	$\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} L_n(t)$	$\frac{(2p-1)^n}{(2p+1)^{n+1}}$	
130	$t^\alpha L_n^\alpha(t)$	$\frac{\Gamma(n+a+1)}{n!} p^{-\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$	
131	$e^{-t} t^\alpha L_n^\alpha(t)$	$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} p^n (p+1)^{-n-\alpha-1}$	
132	$2^{-\alpha-1} e^{-\frac{1}{2}} \times t^\alpha L_n^\alpha(t)$	$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \frac{(2p-1)^n}{(2p+1)^{n+\alpha+1}}$	
133	$\frac{L_{[t]}(\alpha)}{[t]!}$	$s^{-1} e^{\frac{\alpha}{1-e^s}}$	$[t]$ = le plus grand entier $\leq t$ fonction « gradins »

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
	7. Fonctions de Bessel		
134	$J_\nu(\alpha t)$	$\alpha^{-\nu}(p^2+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{p^2+\alpha^2}-p\right)^\nu$	$\operatorname{Re}(\nu) > -1, \quad \alpha > 0$
135	$I_\nu(\alpha t)$	$\alpha^{-\nu}(p^2-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\left(p-\sqrt{p^2-\alpha^2}\right)^\nu$	
136	$N_\nu(\alpha t)$	$\dfrac{\left(\frac{a}{R}\right)^\nu \cos \nu\pi - \left(\frac{R}{a}\right)^\nu}{(p^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}} \sin \nu\pi}$	$R = p + \sqrt{p^2+\alpha^2} \quad -1 < \operatorname{Re}(\nu) < 1$
137	$K_\nu(\alpha t)$	$\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{\left(\frac{S}{\alpha}\right)^\nu - \left(\frac{\alpha}{S}\right)^\nu}{(p^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}} \sin \nu\pi}$	$S = p + \sqrt{p^2-\alpha^2} \quad -1 < \operatorname{Re}(\nu) < 1$
138	$t^\nu J_\nu(t)$	$\dfrac{2^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(p^2+1)^{\nu+\frac{1}{2}}}$	$\operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}$ [Si $\operatorname{Re}\nu \leqq -\frac{1}{2}$, avec $2\nu \neq -1, -2, \ldots,$ remplacer $t^\nu J_\nu(t)$ par $\operatorname{Pf} t^\nu J_\nu(t)$]

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
139	$t^n \mathrm{J}_n(t)$	$\dfrac{1.3.5\ldots(2n+1)}{(p^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}$	
140	$t^\nu \mathrm{I}_\nu(t)$	$\dfrac{2^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(p^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}$	$\mathrm{Re}(\nu) > -\dfrac{1}{2}$ [Même observation que pour (138)]
141	$t^{\frac{n}{2}} \mathrm{J}_n(2\sqrt{t})$	$p^{-n-1} e^{-\frac{1}{p}}$	
142	$t^{\frac{n}{2}} \mathrm{I}_n(2\sqrt{t})$	$p^{-n-1} e^{\frac{1}{p}}$	
143	Pf $\mathrm{J}_{-\nu}(t)$	$(p^2+1)^{-\frac{1}{2}}\left[p+\sqrt{p^2+1}\right]^\nu$	$\nu \neq 1, 2, 3, \ldots$
144	Pf $t^{-1} \mathrm{J}_\nu(t)$	$\dfrac{1}{\nu}\left[p+\sqrt{p^2+1}\right]^{-\nu}$	
145	Pf $t^{-n} \mathrm{J}_n(t)$	$\dfrac{(n-1)!}{2^{n-1}} \mathrm{R}^{-2n+1} \sum_{m=0}^{n-1} \dfrac{\mathrm{R}^{2m}}{m!\,(2n-m-1)!}$	$\mathrm{R} = p + (p^2+1)^{\frac{1}{2}}$

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
146	$\mathrm{Pf}\,\dfrac{J_0(2\sqrt{t})}{t}$	$\mathrm{ei}\left(\dfrac{1}{p}\right) - 2\log C$	
147	$\mathrm{Pf}\, L_{-\nu}(t)$	$(p^2-1)^{-\frac{1}{2}}\left[p-\sqrt{p^2-1}\right]^{\nu}$	$\nu \neq 1, 2, 3, \ldots$
148	$\mathrm{Pf}\, t^{-1} I_\nu(t)$	$\dfrac{1}{\nu}\left[p-\sqrt{p^2-1}\right]^{-\nu}$	$\nu \neq 0, 1, 2, \ldots$
149	$\mathrm{Pf}\, t^{-n} I_n(t)$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\,2^{1-n}\,S^{-2n+1} \times \sum_{m=0}^{n-1} \dfrac{(-1)^m S^{2m}}{m!\,(2n-m-1)!}$	$S = p + \sqrt{p^2-1}$
150	$\mathrm{Pf}\, N_\nu(t)$	$\dfrac{R^{-\nu}\cos\nu\pi - R^{\nu}}{\sqrt{p^2+1}\,\sin\nu\pi}$	$\nu \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$
151	$I_0\left[\lambda\sqrt{t^2-\alpha^2}\right] \times U(t-\alpha)$	$(p^2-\lambda^2)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\alpha\sqrt{p^2-\lambda^2}}$	

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
152	$\left(\frac{t-\alpha}{t+\alpha}\right)^{\frac{\nu}{2}} \times \mathrm{I}_\nu\left(\sqrt{t^2-\alpha^2}\right) \times \mathrm{U}(t-\alpha)$	$(p^2-1)^{-\frac{1}{2}}\left(p-\sqrt{p^2-1}\right)^\nu e^{-\alpha\sqrt{p^2-1}}$	$\nu > -1$
153	$\mathrm{J}_0\left[\lambda\sqrt{t^2-\alpha^2}\right] \times \mathrm{U}(t-\alpha)$	$(p^2+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\alpha\sqrt{p^2+\lambda^2}}$	
154	$\left(\frac{t-a}{t+a}\right)^{\frac{\nu}{2}} \times \mathrm{J}_\nu\left[\sqrt{t^2-\alpha^2}\right] \times \mathrm{U}(t-\alpha)$	$(p+1)^{-\frac{1}{2}}\left[\sqrt{p^2+1}-p\right]^\nu e^{-\alpha\sqrt{p^2+1}}$	$\nu > -1$
155	$\mathrm{ber}_0(2\sqrt{t})$	$\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}$	
156	$\mathrm{bei}_0(2\sqrt{t})$	$\frac{1}{p}\sin\frac{1}{p}$	

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
157	$\int_t^{+\infty} J_\nu(x)\,dx$	$\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{p^2+1}\,[p+\sqrt{p^2+1}]}\right)$	
158	$\mathbf{H}_0(\alpha t)$	$\frac{2}{\pi}\,\frac{\log(\alpha + r) - \log p}{r}$	$r = \sqrt{p^2 + \alpha^2}$

8. Fonctions eulériennes

159	$\frac{1}{\Gamma(t+1)}$	$\nu(e^{-p})$	$\alpha_0 = -\infty$
160	$\frac{1}{\Gamma(t+\alpha+1)}$	$e^{\alpha p}\,\nu(e^{-p}, \alpha)$	$\alpha > -1$
161	$\frac{t^m}{\Gamma(t+1)}$	$\mu(e^{-p}; m)\,\Gamma(m+1)$	
162	$\frac{t^m}{\Gamma(t+\alpha+1)}$	$\mu(e^{-p}; m, \alpha)\,\Gamma(m+1)$	$\alpha > -1$
163	$\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{[\Gamma(x+1)]^2} \times dx$	$\nu\left(\frac{1}{p}\right)$	

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
164	$\int_0^{+\infty} \frac{t^x x^m}{[\Gamma(x+1)]^2} \times dx$	$\mu\left(\frac{1}{p};\ m\right)$	
165	$\int_0^t e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx$	$\frac{\Gamma(\alpha)}{p\,(p+1)^\alpha}$	$\alpha > 0$

9. Fonctions ν et μ

166	$\nu(t;\ \alpha)$	$p^{-\alpha-1}(\log p)^{-1}$	$\alpha > -1$
167	$\mu(t;\ m,\ \alpha)$	$p^{-\alpha-1}(\log p)^{-m-1}$	$\alpha > -1$
168	$\mathrm{Re}[\nu(te^{i\theta};\ \alpha)]$	$\frac{(\log p)\cos n\theta - \theta \sin n\theta}{p^{\alpha+1}[(\log p)^2 + \theta^2]}$	$\theta \in \mathbf{R}, \quad \alpha > -1$
169	$\mathrm{Im}[\nu(te^{i\theta};\ \alpha)]$	$\frac{(\log p)\sin n\theta + \theta \cos n\theta}{p^{\alpha+1}[(\log p)^2 + \theta^2]}$	$\theta \in \mathbf{R}, \quad \alpha > -1$
170	$\nu(e^{-t};\ \alpha)$	$\int_\alpha^{+\infty} \frac{ds}{(p+s)\,\Gamma(s+1)}$	$\alpha > -1$

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
171	$\nu(1-e^{-t};\alpha)$	$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+s+1)} ds$	
172	$\mu(1-e^{-t}; m, \alpha)$	$\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(m+1)} \int_{\alpha}^{+\infty} p^{-s} \mathrm{K}_{s+\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{2}\right) ds$	
173	$(1-e^{-t})^{-1}\nu(t)$	$\int_{0}^{+\infty} \zeta(s+1, p)\, dx$	
174	$\int_{0}^{+\infty} \frac{t^x \nu'(x)}{\Gamma(x+1)} \times dx$	$p^{-1}(\log\log p)^{-1}$	
175	$\frac{\nu(2\sqrt{t}, \alpha)}{\sqrt{\pi t}}$	$2p^{-\frac{1}{2}}\nu\left(\frac{1}{p}; \frac{\alpha}{2}\right)$	$\alpha > -1$
176	$\frac{\mu(2\sqrt{t}; m, \alpha)}{\sqrt{\pi t}}$	$2^{m+1} p^{-\frac{1}{2}}\mu\left(\frac{1}{p}; m, \frac{\alpha}{2}\right)$	$\alpha > -1$

10. Fonctions discontinues

177	$[t]$	$p^{-1}(e^p-1)^{-1}$	*Voir* observation du (133)
178	$t-[t]$	$p^{-2}-p^{-1}(e^p-1)^{-1}$	$f(t+n) = f(t)$

	$f(t)$	$\varphi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Observations
179	$[e^t]$	$p^{-1}\zeta(p)$	
180	$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{[t]}$	$-p^{-1}\log(1 - e^{-p})$	
181	$\frac{1}{2}[1 + (-1)^{[t]}]$	$p^{-1}e^p(e^p - 1)^{-1}$	« Fonction créneau »
182	$\left[\frac{t+1}{2}\right]$	$(p \operatorname{sh} p)^{-1}$	
183	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{[t]}$	$-\frac{1}{p}\log(1 - e^{-p})$	
184	$\alpha^{]t]}$	$\frac{1}{p}\left(1 + \frac{\alpha - 1}{e^p - \alpha}\right)$	

TABLES
DE TRANSFORMÉES DE LAPLACE
INVERSES

AVERTISSEMENT

Dans ces Tables de transformées inverses, sauf en ce qui concerne le paragraphe intitulé « Formules générales » ou sauf mention précise, toutes les fonctions de t sont supposées nulles pour $t > 0$.

SOMMAIRE

I. — FORMULES GÉNÉRALES

Formule d'inversion (*voir* aussi § 2,3) :

$$\mathcal{L}^{-1}\,\varphi(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \varphi(p)\, e^{tp}\, dp, \qquad \gamma > \gamma_0,$$

pourvu qu'il existe un demi-plan Re $p > \gamma_0$ dans lequel la fonction $\varphi(p)$ est holomorphe et $|\varphi(p)\, p^{1+\eta}|$ borné lorsque $|p| \to \infty$, $\eta > 0$.

Plus généralement :

S'il existe un demi-plan Re $p > \gamma_0$ dans lequel la fonction $\varphi(p)$ est holomorphe et $|\varphi(p)\, e^{-\alpha p}\, p^{-n+1+\eta}|$ borné lorsque $|p| \to \infty$, $\alpha \geqq 0$, $\eta > 0$ et n entier positif ou nul, on a

$$\mathcal{L}^{-1}\,\varphi(p) = V_{t+\alpha} = \delta(t+\alpha) \star V_t,$$

en posant

$$V_t = \frac{1}{2\pi i}\, D_t^n \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \varphi(p)\, p^{-n}\, e^{(t-\alpha)p}\, dp, \qquad \gamma > \gamma_0$$

où D_t désigne la dérivation au *sens des distributions.*

Formules opératoires.

Si

$$\mathcal{L}^{-1}\,\varphi(p) = f(t) \qquad \text{(fonction)}$$

on a, a étant complexe et α réel,

$$\mathcal{L}^{-1}\,\varphi(ap) = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right),$$

$$\star \quad \mathcal{L}^{-1}\,\varphi(p+a) = e^{-at} f(t),$$

$$\star \quad \mathcal{L}^{-1}\, e^{\alpha p}\,\varphi(p) = f(t+\alpha),$$

$$\star \quad \mathcal{L}^{-1}\, p^n\,\varphi(p) = D_t^n f(t),$$

dérivée au sens des distributions. [Rappelons, par exemple, que si $f(t) = 0$ pour $t < \alpha$ et est $n - 1$ fois continûment dérivable si $t > \alpha$:

$$D_t^n f(t) = f^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} f^{(n-j-1)}(\alpha + 0)\, \delta^{(j)}(t - \alpha)\Bigg],$$

on a aussi :

$$\mathcal{L}^{-1} p^{-1} \varphi(p) = \int_0^t f(u)\, du, \quad \text{si cette intégrale existe,}$$

$$\bigstar \quad \mathcal{L}^{-1} \frac{d^n}{dp^n} \varphi(p) = (-1)^n t^n f(t),$$

$$\bigstar \quad \mathcal{L}^{-1} \varphi_1(p)\, \varphi_2(p) = f_1(t) \bigstar f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u)\, f_2(t - u)\, du.$$

Les formules ci-dessus précédées d'un $\bigstar$ s'étendent au cas où $\mathcal{L}^{-1} \varphi(p)$ est une distribution.

Si $\mathcal{L}^{-1} \varphi(p)$ est une Pf, on utilisera les formules du paragraphe 5.3 de la première partie.

Si

$$\mathcal{L}^{-1} \varphi(p) = f(t)$$

et si

$$f(t) = 0 \qquad \text{pour} \quad t < \alpha,$$

on a (1)

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{\sqrt{p}} \varphi(\sqrt{p}) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_\alpha^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} f(x)\, dx \qquad \text{pour} \quad t > 0;$$

$$\mathcal{L}^{-1} p^{\frac{n}{2}} \varphi(\sqrt{p}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,.\,2^{\frac{n+1}{2}}\, t^{\frac{n+2}{2}}} \int_\alpha^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} \mathrm{He}_{n+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) f(x)\, dx \qquad \text{pour} \quad t > 0;$$

(1) Il suffit de prendre $\varphi(p) = p$ pour s'assurer que les formules suivantes ne subsistent pas si f est une distribution.

$$\mathcal{L}^{-1}\, p^{\nu}\, \varphi(\sqrt{p}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,.\,2^{\nu+\frac{1}{2}}\, t^{\nu+1}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{8t}}\, D_{2\nu+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) f(x)\, dx$$

pour $t > 0$;

$$\mathcal{L}^{-1}\, p^{-\nu}\, \varphi\left(\frac{1}{p}\right) = t^{\frac{\nu-1}{2}} \int_{\alpha}^{\infty} x^{-\frac{\nu-1}{2}}\, J_{\nu-1}(2\sqrt{tx})\, f(x)\, dx$$

pour $t > 0$;

$$\mathcal{L}^{-1}\, p^{-\frac{3}{2}}\, \varphi\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{2\sqrt{\alpha}}^{\infty} \sin(x\sqrt{t})\, f\left(\frac{x^2}{4}\right) dx$$

pour $t > 0$;

$$\mathcal{L}^{-1}\, \varphi(\log p) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{t^{x-1}}{\Gamma(x)}\, f(x)\, dx$$

pour $t > 0$;

$$\mathcal{L}^{-1}\, \varphi(r) = f(t) - a\, U(t-\alpha) \int_0^{\sqrt{t^2-\alpha^2}} f(\sqrt{t^2-x^2})\, J_1(ax)\, dx;$$

$$\mathcal{L}^{-1}\, r^{-1}\, \varphi(r) = U(t-\alpha) \int_{\alpha}^{t} f(x)\, J_0\left(a\sqrt{t^2-x^2}\right) dx;$$

$$\mathcal{L}^{-1}\, r^{-1}\, R^{-\nu}\, \varphi(r) = a^{-\nu}\, U(t-\alpha) \int_{\alpha}^{t} f(x) \left(\frac{t-x}{t+x}\right)^{\frac{\nu}{2}} \times J_{\nu}\left(a\sqrt{t^2-x^2}\right) dx, \qquad \operatorname{Re} \nu > -1;$$

$$\mathcal{L}^{-1}\, \varphi(s) = f(t) + a\, U(t-\alpha) \int_0^{\sqrt{t^2-\alpha^2}} f(\sqrt{t^2-x^2})\, I_1(ax)\, dx;$$

$$\mathcal{L}^{-1}\, s^{-1}\, \varphi(s) = U(t-\alpha) \int_{\alpha}^{t} f(x)\, I_0\left(a\sqrt{t^2-x^2}\right) dx;$$

$$\mathcal{L}^{-1}\, s^{-1}\, S^{-\nu}\, \varphi(s) = a^{-\nu}\, U(t-\alpha) \int_{\alpha}^{t} f(x) \left(\frac{t-x}{t+x}\right)^{\frac{\nu}{2}} \times I_{\nu}\left(a\sqrt{t^2-x^2}\right) dx, \qquad \operatorname{Re} \nu > -1.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\, p\, \varphi(p^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, t\, g\left(\frac{t^2}{4}\right),$$

où

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\, \frac{1}{\sqrt{p}}\, f\left(\frac{1}{p}\right), \qquad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\, \varphi(p).$$

Si $\mathcal{L}^{-1}\, \varphi(p) = f(t)$, on a, sous réserves d'existence,

$$f(ip) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(it)\, e^{-pt}\, dt$$

(transformation de Laplace bilatérale).

II. — FONCTIONS DE LA FORME $(p + a)^{-n}$, $(p^2 + a^2)^{-n}$ ET ANALOGUES

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
1	$\delta(t)$
p^n	$\delta^{(n)}(t)$
p^{-1}	$\mathrm{U}(t)$
$(p + a)^{-n}$	$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$
$(p + a)^{-\nu}$, $\quad \mathrm{Re}\,\nu > 0$	$\dfrac{1}{\Gamma(\nu)}t^{\nu-1}e^{-at}$
$(p + a)^{\nu}$ $\mathrm{Re}\,\nu \geqq 0, \quad \nu \neq n-1$ $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{1}{\Gamma(-\nu)}\,\mathrm{Pf}\,t^{-\nu-1}e^{-at}$
$\dfrac{\alpha p + \beta}{(p + a)^2}$	$[\alpha + (\beta - a\alpha)t]\,e^{-at}$
$\dfrac{\alpha p + \beta}{(p + a)(p + b)}$	$\dfrac{a\alpha - \beta}{a - b}e^{-at} - \dfrac{b\alpha - \beta}{a - b}e^{-bt}$
$(p^2 + a^2)^{-1}$	$a^{-1}\sin at$
$(p^2 + a^2)^{-1}p^{-1}$	$2a^{-2}\sin^2\dfrac{at}{2}$
$(p^2 - a^2)^{-1}$	$a^{-1}\,\mathrm{sh}\,at$
$(p^2 - a^2)^{-1}p^{-1}$	$2a^{-2}\,\mathrm{sh}^2\dfrac{at}{2}$
$(p^2 + a^2)^{-2}$	$(2a^3)^{-1}(\sin at - at\cos at)$
$(p^2 - a^2)^{-2}$	$-(2a^3)^{-1}(\mathrm{sh}\,at - at\,\mathrm{ch}\,at)$
$(p^4 - a^4)^{-1}$	$(2a^3)^{-1}(\mathrm{sh}\,at - \sin at)$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$\dfrac{Q(p)}{P(p)}$ $P(p)=(p-a_1)\times(p-a_2)\ldots(p-a_N)$, a_j distincts, $Q(p)$ polynome de degré $\leqq N-1$ [On peut remplacer $Q(p)$ par une fonction entière $E(p)$ telle que $\left\lvert\dfrac{E(p)}{p^{N-1}}\right\rvert \to 0$ quand $\lvert p\rvert \to \infty$]	$\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\frac{Q(a_j)}{P_j(a_j)}e^{a_j t}$ $P_j(p)=\dfrac{P(p)}{p-a_j}$
$\dfrac{Q(p)}{P(p)}$ $P(p)=(p-a_1)^{m_1}\ldots\times(p-a^N)^{m_N}$, a_j distincts, m_j entiers >0 $Q(p)$ polynome de degré $\leqq m_1+\ldots+m_N-1$ [On peut remplacer $Q(p)$ par une fonction entière $E(p)$ telle que $\left\lvert\dfrac{E(p)}{p^{m_1+\ldots+m_N-1}}\right\rvert \to 0$ quand $\lvert p\rvert \to \infty$]	$\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{jk}(a_j)\,t^{m_j-k}}{(m_j-k)!\,(k-1)!}e^{a_j t}$ $A_{jk}(p)=\dfrac{d^{k-1}}{dp^{k-1}}\dfrac{Q(p)(p-a_j)^{m_j}}{P(p)}$
$(p+a)^{-\frac{1}{2}}$	$\pi^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}e^{-at}$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$(p+a)^{-n-\frac{1}{2}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{t^{n-\frac{1}{2}} e^{-at}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\,\pi^{\frac{1}{2}}}$
$(p+a)^{-\frac{1}{2}}(p+b)^{-1}$	$(a-b)^{-\frac{1}{2}} e^{-bt} \operatorname{erf}\left(\sqrt{(a-b)t}\right)$
$(p-a)^{-m-n-\frac{1}{2}}(p-b)^{n}$	$\dfrac{(-1)^n e^{at} 2^{n+\frac{1}{2}}}{(b-a)^m \sqrt{\pi t}}$ $\times \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \dfrac{(n+k)!}{(2n+2k)!}$ $\times \mathrm{He}_{2n+2k}\left(\sqrt{2(b-a)t}\right)$
$(p+a)^{-\nu}(p+b)^{-1}$, $\nu \neq 0, -1, -2, \ldots$	$\dfrac{(a-b)^{-1}}{\Gamma(\nu)} \mathrm{Pf}\, e^{-bt}\gamma(\nu, (a-b)t)$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu > 0$
$(p+a)^{n}(p+b)^{-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$(a-b)^n e^{-bt} + \sum_{k=0}^{n-1} (a-b)^{n-1-k} \delta^{(k)}(t)$
$r^{-1} = (p^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}$	$J_0(at)$
$r^{-2\nu-1}$, $\nu \neq -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \cdots$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^\nu a^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \mathrm{Pf}\, t^\nu J_\nu(at)$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$
$R^{-\nu}$, $\nu \neq 0, -1, -2, -\ldots$	$\nu a^{-\nu} \mathrm{Pf}\, t^{-1} J_\nu(at)$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu > 0$
$r^{-1}R^{-\nu}$, $\nu \neq -1, -2, -\ldots$	$a^{-\nu} \mathrm{Pf}\, J_\nu(at)$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu > -1$
$r^{-1}R^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}} \cos at$
$r^{-1}R^{-\frac{1}{2}}$	$\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}} \sin at$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$s^{-1} = (p^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$	$I_0(at)$
$s^{-2\nu-1}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^\nu a^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \mathrm{Pf}\, t^\nu I_\nu(at)$
$2\nu \neq -1, -2, -3, \ldots$	Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$
$S^{-\nu}$	$\nu a^{-\nu} \mathrm{Pf}\, t^{-1} I_\nu(at)$
$\nu \neq 0, -1, -2, -\ldots$	Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu > 0$
$s^{-1} S^{-\nu}$	$a^{-\nu} \mathrm{Pf}\, I_\nu(at)$
$\nu \neq -1, -2, -\ldots$	Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu > -1$
$s^{-1} S^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\,\mathrm{ch}\, at$
$s^{-1} S^{-\frac{1}{2}}$	$\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\,\mathrm{sh}\, at$
$p^{-\frac{1}{2}}$	$\pi^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}$
$p^{-\frac{1}{2}}(p - a)^{-1}$	$a^{-\frac{1}{2}} e^{at} \mathrm{erf}(\sqrt{at})$
$p^{-\frac{1}{2}}\left(p^{\frac{1}{2}} + a\right)^{-1}$	$e^{a^2 t} \mathrm{erfc}(a\sqrt{t})$
$p^{-1}\left(p^{\frac{1}{2}} + a\right)^{-1}$	$a^{-1} - a^{-1} e^{a^2 t} \mathrm{erfc}(a\sqrt{t})$
$\dfrac{1}{p}\dfrac{p^{\frac{1}{2}} - a}{p^{\frac{1}{2}} + a}$	$2 e^{a^2 t} \mathrm{erfc}(a\sqrt{t}) - 1$

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ
ORSAY
99
IX

III. — EXPONENTIELLES

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$e^{-\alpha p}\,\gamma(p)$ α réel	$g(t-\alpha)$ $g(t)=\mathcal{L}^{-1}\gamma(p)$ [même si $\mathcal{L}^{-1}\gamma(p)$ est représentée par une distribution]
$e^{-\alpha p}$	$\delta(t-\alpha)$
$e^{-\alpha p}\,p^n$ $n=1, 2, \dots$	$\delta^{(n)}(t-\alpha)$
$e^{-\alpha p}\,p^{-1}$	$\begin{cases} 0 & \text{si } t<\alpha \\ 1 & \text{si } t>\alpha \end{cases}$
$e^{-\alpha p}\,p^{-n}$	$\begin{cases} 0 & \text{si } t<\alpha \\ \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } t>\alpha \end{cases}$
$(e^{-\alpha p}-e^{-\beta p})\,p^{-1}$ $\alpha<\beta$	$\begin{cases} 0 & \text{si } t<\alpha \\ 1 & \text{si } \alpha<t<\beta \\ 0 & \text{si } t>\beta \end{cases}$
$(e^{-\alpha p}-e^{-\beta p})^2\,p^{-2}$	$\begin{cases} 0 & \text{si } t<2\alpha \\ t-2\alpha & \text{si } 2\alpha<t<\alpha+\beta \\ 2\beta-t & \text{si } \alpha+\beta<t<2\beta \\ 0 & \text{si } t>2\beta \end{cases}$
$e^{-\alpha p}(cp+b)(p^2+a^2)^{-1}$	$\begin{cases} 0, & t<\alpha \\ c\cos a(t-\alpha) \\ \quad +a^{-1}b\sin a(t-\alpha), & t>\alpha \end{cases}$
$e^{-\alpha p}(cp+b)(p^2-a^2)^{-1}$	$\begin{cases} 0, & t<\alpha \\ c\,\mathrm{ch}\,a(t-\alpha) \\ \quad +a^{-1}b\,\mathrm{sh}\,a(t-\alpha), & <\alpha \end{cases}$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$\left(1-e^{-\frac{2n\pi p}{\alpha}}\right)(p^2+\alpha^2)^{-1}$ $\alpha>0,\quad n=1,2,\ldots$ $p\left(1-e^{-\frac{2n\pi p}{\alpha}}\right)(p^2+\alpha^2)^{-1}$	$\begin{cases}\alpha^{-1}\sin\alpha t, & 0<t<\dfrac{2n\pi}{\alpha}\\ 0, & \text{ailleurs}\end{cases}$ $\begin{cases}\cos\alpha t, & 0<t<\dfrac{2n\pi}{\alpha}\\ 0, & \text{ailleurs}\end{cases}$
$\left(1+e^{-\frac{2n\pi p}{\alpha}}\right)^{-1}(p^2+\alpha^2)^{-1}$ $\alpha<0,\quad n=1,2,\ldots$	$\begin{cases}\alpha^{-1}\sin\alpha t, & 2k\pi<\dfrac{\alpha t}{2\pi}<(2k+1)\pi\\ 0, & (2k+1)\pi<\dfrac{\alpha t}{2\pi}<2(k+1)\pi\end{cases}$ $k=0,1,2,\ldots$
$(1+b\,e^{-\alpha p})^{-\nu}\,\gamma(p)$ $\alpha>0$	$\sum\limits_{0\leq k\leq\frac{t-t_0}{\alpha}}(-1)^k\dfrac{(\nu)_k}{k!}b^k\,g(t-k\alpha)$ $g(t)=\mathcal{L}^{-1}\gamma(p)$ de support (t_0,∞), $t_0>-\infty$
$(e^{\alpha p}-1)^{-1}p^{-1}$ $\alpha>0$ $(e^{\alpha p}+1)^{-1}p^{-1}$	$k,\quad k\alpha<t<(k+1)\alpha$ $k=0,1,2,\ldots$ $\begin{cases}0, & 2k\alpha<t<(2k+1)\alpha\\ 1, & (2k+1)\alpha<t<2(k+1)\alpha\end{cases}$
$(e^{\alpha p}+b)^{-\beta}\,\gamma(p)$ $\alpha>0,\quad\beta$ réel	$\sum\limits_{0\leq k\leq\frac{t-t_0-\alpha\beta}{\alpha}}(-1)^k\dfrac{(\beta)_k}{k!}b^k\,g(t-\alpha\beta-k\alpha)$ $g(t)=\mathcal{L}^{-1}\gamma(p)$ de support $t>t_0$
$e^{\frac{a}{p}}$ $e^{\frac{a}{p}}p^{-\frac{3}{2}}$ $e^{\frac{a}{p}}p^{-\nu-1}$ $\nu\neq-1,-2,-\ldots$	$\dfrac{a}{\sqrt{at}}\,\mathrm{I}_1(2\sqrt{at})+\delta(t)$ $\dfrac{1}{\sqrt{a\pi}}\,\mathrm{sh}\,2\sqrt{at}$ $a^{-\frac{\nu}{2}}\,\mathrm{Pf}\,t^{\frac{\nu}{2}}\,\mathrm{I}_\nu(2\sqrt{at})$ Pf inutile si Re $\nu>-1$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$e^{-\frac{a}{p}}$	$-\frac{a}{\sqrt{at}}J_1(2\sqrt{at})+\delta(t)$
$e^{-\frac{a}{p}}p^{-\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\sin 2\sqrt{at}$
$e^{-\frac{a}{p}}p^{-\nu-1}$ $\nu\neq-1,-2,\ldots$	$a^{-\frac{\nu}{2}}\,\mathrm{Pf}\,t^{\frac{\nu}{2}}J_\nu(2\sqrt{at})$ Pf inutile si Re $\nu>-1$
$\lvert\arg a\rvert\leq\frac{\pi}{4}$	
$e^{-a\sqrt{p}}p^{-1}$	$\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
$e^{-a\sqrt{p}}p^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$
$e^{-a\sqrt{p}}p^{\frac{n-1}{2}}$	$\frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{\pi}\,t^{\frac{n+1}{2}}}\mathrm{He}_n\left(\frac{a}{\sqrt{2t}}\right)$
$e^{-a\sqrt{p}}p^{\nu-\frac{1}{2}}$	$\frac{e^{-\frac{a^2}{8t}}}{2^{\frac{\nu}{2}}\sqrt{\pi}\,t^{\nu+\frac{1}{2}}}D_{2\nu}\left(\frac{a}{\sqrt{2t}}\right)$
$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+b)}$ $\lvert\arg a\rvert\leq\frac{\pi}{4}$	$e^{ab+b^2t}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}+b\sqrt{t}\right)$
$e^{-\beta p}-e^{-\beta r}$ β réel	$0,\quad t<\beta$ $a\beta\frac{J_1(a\sqrt{t^2-\beta^2})}{\sqrt{t^2-\beta^2}},\quad t>\beta$
$e^{-\beta r}r^{-1}$ β réel	$0,\quad t<\beta$ $J_0(a\sqrt{t^2-\beta^2}),\quad t>\beta$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$	
$e^{-\beta r} r^{-2}(\beta + r^{-1})$ β réel	$0,$ $\frac{1}{a}\sqrt{t^2-\beta^2}\, J_1(a\sqrt{t^2-\beta^2}),$	$t < \beta$ $t > \beta$
$\frac{e^{-\beta r}}{r}\sqrt{p+r}$ β réel	$0,$ $\sqrt{\frac{2}{\pi(t+\beta)}}\cos a\sqrt{t^2-\beta^2},$	$t < \beta$ $t > \beta$
$\frac{e^{-\beta r}}{r\sqrt{p+r}}$ β réel	$0,$ $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi(t+\beta)}}\sin a\sqrt{t^2-\beta^2},$	$t < \beta$ $t > \beta$
$e^{-\beta r} r^{-1}(p+r)^{-\nu}$ β réel, $\nu \neq 1, 2, \ldots$	$0,$ $a^{-\nu}\,\mathrm{Pf}\left(\frac{t-\beta}{t+\beta}\right)^{\frac{\nu}{2}}$ $\times J_\nu(a\sqrt{t^2-\beta^2}),$ Pf inutile si Re $\nu > -1$	$t < \beta$ $t > \beta$
$e^{-\beta s} - e^{-\beta p}$ β réel	$0,$ $\alpha\beta\,\frac{I_1(a\sqrt{t^2-\beta^2})}{\sqrt{t^2-\beta^2}},$	$t < \beta$ $t > \beta$
$e^{-\beta s} s^{-1}$ β réel	$0,$ $I_0(a\sqrt{t^2-\beta^2}),$	$t < \beta$ $t > \beta$
$e^{-\beta s} s^{-2}(\beta + s^{-1})$ β réel	$0,$ $\frac{1}{a}\sqrt{t^2-\beta^2}\, I_1(a\sqrt{t^2-\beta^2}),$	$t < \beta$ $t > \beta$
$e^{-\beta s} s^{-1}(p+s)^{-\nu}$ β réel, $\nu \neq 1, 2, \ldots$	$0,$ $a^{-\nu}\,\mathrm{Pf}\left(\frac{t-\beta}{t+\beta}\right)^{\frac{\nu}{2}}$ $\times I_\nu(a\sqrt{t^2-\beta^2}),$ Pf inutile si Re $\nu > -1$	$t < \beta$ $t > \beta$

IV. — LOGARITHMES

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$\log p$	$-\operatorname{Pf} t^{-1} - (\log C)\,\delta(t)$
$p^n \log p$ $n = 1, 2, \ldots$	$(-1)^{n+1}\, n!\, \operatorname{Pf} t^{-n-1} + \psi(n+1)\,\delta^{(n)}(t)$
$p^{-1} \log p$	$-\log C t$
$p^{-n-1} \log p$	$\dfrac{1}{n!}\left[1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \log C t\right] t^n$
$p^{-\nu} \log p$ $\nu \neq 0, -1, -2, -\ldots$	$\dfrac{1}{\Gamma(\nu)} \operatorname{Pf} [\psi(\nu) - \log t]\, t^{\nu-1}$ Pf inutile si Re $\nu > 0$
$\dfrac{\log p}{p^2 + a^2}$ $\lvert \arg a \rvert < \pi$	$\dfrac{1}{a} \operatorname{Si}(at) \cos at - \dfrac{1}{a}[\operatorname{Ci}(at) - \log a] \sin at$
$\dfrac{\log(p + a)}{p}$	$-\operatorname{ei}(at) + \log a$
$\log \dfrac{p + a}{p + b}$	$t^{-1}(e^{-at} - e^{-bt})$
$\dfrac{(\log p)^2}{p^2}$	$t\left[(1 - \log C t)^2 + 1 - \dfrac{\pi^2}{6}\right]$
$(p^a \log p)^{-1}$ Re $a \geq 0$	$\nu(t, a - 1)$
$\log(p^2 + a^2)$	$-2 \operatorname{Pf} t^{-1} \cos at - 2(\log C)\,\delta(t)$
$p^{-1} \log(p^2 + a^2)$	$-2 \operatorname{Ci}(at) + 2 \log a$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$\log\dfrac{p^2+a^2}{p^2+b^2}$	$2t^{-1}(\cos bt - \cos at)$
$\log\dfrac{(p+a)^2+c^2}{(p+b)^2+c^2}$	$2t^{-1}(e^{-bt}-e^{-at})\cos ct$
$\log(p^2-a^2)$ $p^{-1}\log(p^2-a^2)$	$-2\,\mathrm{Pf}\,t^{-1}\,\mathrm{ch}\,at - 2(\log C)\,\delta(t)$ $-2\,\mathrm{chi}\,(at) + 2\log a$
$p^{-2}\log r$	$a^{-1}\sin at - t[\mathrm{Ci}\,(at) - \log a]$
$\log(p+r)$	$-\mathrm{Pf}\,t^{-1}\,\mathrm{J}_0(at) - \left(\log\dfrac{C}{2}\right)\delta(t)$
$p^{-1}\log(p+r)$	$-\mathrm{Ji}_0(at) + \log a$
$r^{-1}\log(p+r)$	$(\log a)\,\mathrm{J}_0(at) - \dfrac{\pi}{2}\mathrm{N}_0(at)$
$p^{-1}\log\dfrac{s}{p}$	$t^{-2}(\mathrm{ch}\,at - 1) - at^{-1}\,\mathrm{sh}\,at$
$\log(p+s)$	$-\mathrm{Pf}\,t^{-1}\,\mathrm{I}_0(a) - \left(\log\dfrac{C}{2}\right)\delta(t)$
$p^{-1}\log(p+s)$	$-\mathrm{Ii}_0(at) + \log a$
$s^{-1}\log(p+s)$	$(\log a)\,\mathrm{I}_0(at) + \mathrm{K}_0(at)$
$p^{-1}\log(1-e^{-\beta p})$ $\beta > 0$	$\sum_{k=1}^{j}\dfrac{1}{k}$ $j\beta < t < (j+1)\beta;\ j = 1, 2, \ldots$

V. — FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$p^{-1}\sin\frac{a}{p}$	$\mathrm{bei}_0(2\sqrt{at})$
$p^{-1}\cos\frac{a}{p}$	$\mathrm{ber}_0(2\sqrt{at})$
$p^{-\frac{3}{2}}\sin\frac{a}{p}$	$\frac{1}{\sqrt{2a\pi}}[\mathrm{ch}\sqrt{2at}\sin\sqrt{2at} - \mathrm{sh}\sqrt{2at}\cos\sqrt{2at}]$
$p^{-\frac{3}{2}}\cos\frac{a}{p}$	$\frac{1}{\sqrt{2a\pi}}[\mathrm{ch}\sqrt{2at}\sin\sqrt{2at} + \mathrm{sh}\sqrt{2at}\cos\sqrt{2at}]$
$p^{-\nu-1}\sin\frac{a}{p}$, $\nu \neq -2, -3, -\ldots$	$\mathrm{Pf}\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{\nu}{2}}\left[\cos\frac{3}{4}\nu\pi\,\mathrm{bei}_\nu(2\sqrt{at}) - \sin\frac{3}{4}\nu\pi\,\mathrm{ber}_\nu(2\sqrt{at})\right]$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu > -2$
$p^{-\nu-1}\cos\frac{a}{p}$, $\nu \neq -1, -2, -\ldots$	$\mathrm{Pf}\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{\nu}{2}}\left[\cos\frac{3}{4}\nu\pi\,\mathrm{ber}_\nu(2\sqrt{at}) + \sin\frac{3}{4}\nu\pi\,\mathrm{bei}_\nu(2\sqrt{at})\right]$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu > -1$
$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-a\sqrt{p}}\frac{\sin}{\cos}a\sqrt{p}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\frac{\sin}{\cos}\frac{a}{2t}$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
p^{-1} Arc tg ap p^{-1} Arc cotg ap	$-\operatorname{si}\left(\frac{t}{a}\right)$ $\operatorname{Si}\left(\frac{t}{a}\right)$
Arc tg $\frac{a}{p}$	$t^{-1}\sin at$
$\log(p^2+a^2)$ Arc tg $\frac{a}{p}$	$-2\,t^{-1}(\log C\,t)\sin at$
$\dfrac{\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\left(b+\text{Arc tg}\,\frac{a}{p}\right)}{(p^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}$	$\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(at+b)$

VI. — FONCTIONS HYPERBOLIQUES

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
sh ... ch ... (*voir* aux *Exponentielles* dont ce sont des combinaisons simples)	
$\dfrac{1}{p^2 \operatorname{sh} \alpha p}$ $\alpha > 0$	$0, \quad t < \alpha$ $2j(t - j\alpha),$ $2j - 1 < \dfrac{t}{\alpha} < 2j + 1$ $j = 1, 2, \ldots$
$\dfrac{1}{p^2 \operatorname{sh}^2 \alpha p}$ $\alpha > 0$	$0, \quad t < 2\alpha$ $2j(j+1)\left[t - \dfrac{2}{3}(2j+1)\alpha\right],$ $2j < \dfrac{t}{\alpha} < 2j + 2$ $j = 1, 2, \ldots$
$\dfrac{1}{p^2 \operatorname{ch} \alpha p}$ $\alpha > 0$	$0, \quad t < \alpha$ $t - (-1)^j (t - 2j\alpha),$ $2j - 1 < \dfrac{t}{\alpha} < 2j + 1$ $j = 1, 2, \ldots$
$\dfrac{1}{p^2 \operatorname{ch}^2 \alpha p}$ $\alpha > 0$	$0, \quad t < 2\alpha$ $4jt - 8j(2j-1)\alpha,$ $4j - 2 < \dfrac{t}{\alpha} < 4j$ $-4jt + 8j(2j+1)\alpha,$ $4j < \dfrac{t}{\alpha} < 4j + 2$ $j = 1, 2, \ldots$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$p^{-2}\,\mathrm{th}\,\alpha p$ $\alpha > 0$	$0, \quad t < 0$ $t - 4(j-1)\alpha,$ $4j - 4 < \frac{t}{\alpha} < 4j - 2$ $-t + 4j\alpha,$ $4j - 2 < \frac{t}{\alpha} < 4j$ $j = 1, 2, \ldots$
$p^{-2}\,\mathrm{coth}\,\alpha p$ $\alpha > 0$	$0, \quad t < 0$ $(2j-1)t - 2j(j-1)\alpha,$ $2j - 2 < \frac{t}{\alpha} < 2j$ $j = 1, 2, \ldots$
$p^{-\nu-1}\,\mathrm{sh}\,\frac{a}{p}$ $\nu \neq -2, -3, -\ldots$	$\frac{1}{2}\,\mathrm{Pf}\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{\nu}{2}}\left[\mathrm{I}_\nu(2\sqrt{at}) - \mathrm{J}_\nu(2\sqrt{at})\right]$ Pf inutile si Re > -2
$p^{-\nu-1}\,\mathrm{ch}\,\frac{a}{p}$ $\nu \neq -1, -2, -\ldots$	$\frac{1}{2}\,\mathrm{Pf}\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{\nu}{2}}\left[\mathrm{I}_\nu(2\sqrt{at}) + \mathrm{J}_\nu(2\sqrt{at})\right]$ Pf inutile si Re $\nu > -1$
$\mathrm{ch}\,\frac{a}{p}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{t}}\left[\mathrm{I}_1(2\sqrt{at}) - \mathrm{J}_1(2\sqrt{at})\right] + \delta(t)$
$\frac{1}{\mathrm{sh}\,a\sqrt{p}}$	$-\frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\,\theta_4\left(\frac{\nu}{2}\,\middle|\, i\frac{\pi t}{a^2}\right)\right]_{\nu=0}$
$\frac{1}{\sqrt{p}\,\mathrm{sh}\,a\sqrt{p}}$	$\frac{1}{a}\,\theta_4\left(0 \mid i\frac{\pi t}{a^2}\right)$
$\frac{1}{\mathrm{ch}\,a\sqrt{p}}$	$-\frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\,\theta_1\left(\frac{\nu}{2}\,\middle|\, i\frac{\pi t}{a^2}\right)\right]_{\nu=0}$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$\dfrac{1}{\sqrt{p}\,\mathrm{ch}\,a\sqrt{p}}$	$\dfrac{1}{a}\theta_2\left(\dfrac{1}{2}\middle\vert\, i\dfrac{\pi t}{a^2}\right)$
$\dfrac{\mathrm{th}\,a\sqrt{p}}{p}$	$\displaystyle\int_0^1 \hat{\theta}_2\left(\frac{\nu}{2}\middle\vert\, i\frac{\pi t}{a^2}\right)d\nu$ (1)
$\dfrac{\mathrm{th}\,a\sqrt{p}}{\sqrt{p}}$	$\dfrac{1}{a}\theta_2\left(0\,\middle\vert\, i\dfrac{\pi t}{a^2}\right)$
$\dfrac{\mathrm{coth}\,a\sqrt{p}}{\sqrt{p}}$	$\dfrac{1}{a}\theta_3\left(0\,\middle\vert\, i\dfrac{\pi t}{a^2}\right)$
$\arg \mathrm{sh}\, ap$	$-\mathrm{Pf}\, t^{-1} J_0\left(\dfrac{t}{a}\right) - \left(\log\dfrac{C}{2a}\right)\delta(t)$
$p^{-1} \arg \mathrm{sh}\, ap$	$-\mathrm{Ji}_0\left(\dfrac{t}{a}\right)$
$\arg \mathrm{ch}\, ap$	$-\mathrm{Pf}\, t^{-1} I_0\left(\dfrac{t}{a}\right) - \left(\log\dfrac{C}{2a}\right)\delta(t)$
$p^{-1} \arg \mathrm{ch}\, ap$	$-\mathrm{Ii}_0\left(\dfrac{t}{a}\right)$
$\arg \mathrm{coth}\, ap$	$t^{-1}\,\mathrm{sh}\,\dfrac{t}{a}$
$\arg \mathrm{coth}\sqrt{ap}$	$\dfrac{1}{2t}e^{\frac{t}{a}}\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{\dfrac{t}{a}}\right)$

(1) *Voir* Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, vol. 1, p. 388, pour les fonctions de Jacobi modifiées $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_4$.

VII. — FONCTION D'ERREUR, EXPONENTIELLE INTÉGRALE ET AUTRES

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$e^{a^2p^2}\operatorname{erfc}(ap)$ $\operatorname{Re} a^2 > 0$	$\pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{4a^2}}$
$pe^{a^2p^2}\operatorname{erfc}(ap)$ $\operatorname{Re} a^2 > 0$	$-2^{-1}a^{-3}\pi^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{t^2}{4a^2}} + a^{-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\delta(t)$
$p^{-1}e^{a^2p^2}\operatorname{erfc}(ap)$ $\operatorname{Re} a^2 > 0$	$\operatorname{erf}\left(\frac{t}{2a}\right)$
$(p-b)^{-1}e^{a^2p^2}\operatorname{erfc}(ap)$ $\operatorname{Re} a^2 > 0$	$e^{bt+a^2b^2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{t}{2a}+ab\right)-\operatorname{erf}(ab)\right]$
$p^{-1}e^{p^2}[\operatorname{erf}(p+\beta)-\operatorname{erf}(\beta)]$ $\beta > 0$	$\operatorname{erf}\left(\frac{t}{2}\right)$, $\quad t < 2\beta$ $\operatorname{erf}(\beta)$, $\quad t > 2\beta$
$\operatorname{erfc}(\sqrt{\beta p})$ $\beta > 0$	0, $\quad t < \beta$ $\pi^{-\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}t^{-1}(t-\beta)^{-\frac{1}{2}}$, $\quad t > \beta$
$p^{-\frac{1}{2}}\operatorname{erfc}(\sqrt{\beta p})$ $\beta > 0$	0, $\quad t < \beta$ $\pi^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}$, $\quad t > \beta$
$p^{-1}e^{ap}\operatorname{erfc}(\sqrt{ap})$	$2\pi^{-1}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{t}{a}}$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$e^{ap}\,\mathrm{erfc}\,(\sqrt{ap})$ $\lvert\arg a\rvert < \pi$	$\pi^{-1}\,a^{\frac{1}{2}}\,t^{-\frac{1}{2}}\,(t+a)^{-1}$
$p^{-\frac{1}{2}}\,e^{ap}\,\mathrm{erfc}\,(\sqrt{ap})$ $\lvert\arg a\rvert < \pi$	$\pi^{-\frac{1}{2}}\,(t+a)^{-\frac{1}{2}}$
$\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{a}{p}}\right)$	$\pi^{-1}\,t^{-1}\sin 2\sqrt{at}$
$p^{-\frac{3}{2}}\,e^{\frac{a}{p}}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{a}{p}}\right)$ $p^{-\frac{3}{2}}\,e^{\frac{a}{p}}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{a}{p}}\right)$ $p^{-\nu-1}\,e^{\frac{a}{p}}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{a}{p}}\right)$ $\nu \neq -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\ldots$	$\pi^{-\frac{1}{2}}\,a^{-\frac{1}{2}}\,(\mathrm{ch}\,2\sqrt{at}-1)$ $\pi^{-\frac{1}{2}}\,a^{-\frac{1}{2}}\,(1-e^{-2\sqrt{at}})$ Pf $a^{-\frac{\nu}{2}}\,t^{\frac{\nu}{2}}\,\mathbf{L}_\nu\,(2\sqrt{at})$ Pf inutile si Re $\nu > -\frac{3}{2}$
$\beta > 0$ $\mathrm{ei}\,(\beta p)$ $p^{-1}\,\mathrm{ei}\,(\beta p)$ $p^{n}\,\mathrm{ei}\,(\beta p)$ $n = 1, 2, 3, \ldots$	 $-\mathrm{U}\,(t-\beta)\,t^{-1}$ $-\mathrm{U}\,(t-\beta)\log\frac{t}{\beta}$ $(-1)^{n+1}\,n\,!\,\mathrm{U}\,(t-\beta)\,t^{-n-1}$ $+\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\frac{\beta^{-n+j}}{(n-j-1)!}\,\delta^{(j)}\,(t-\beta)$
$p^{-1}\,\mathrm{ei}\,(\beta\,(p+a))$ $\beta > 0,\quad \lvert\arg a\rvert < 0,$	$-\mathrm{U}\,(t-\beta)\,[\mathrm{ei}\,(at)-\mathrm{ei}\,(a\,\beta)]$
$e^{ap}\,\mathrm{ei}\,(ap)$	$-(t+a)^{-1}$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$p^{-1} e^{ap} \operatorname{ei}(ap)$ $\lvert \arg a \rvert < \pi$	$-\log(t+a) + \log a$
$\operatorname{ei}(\alpha p) \operatorname{ei}(\beta p)$ $\alpha > 0, \quad \beta > 0$	$t^{-1} \log \dfrac{(t-\alpha)(t-\beta)}{\alpha\beta} \mathrm{U}(t-\alpha-\beta)$
$e^{(a+b)p} \operatorname{ei}(ap) \operatorname{ei}(bp)$ $\lvert \arg(a+b) \rvert < \pi$	$\dfrac{1}{t+a+b} \log \dfrac{(t+a)(t+b)}{ab}$
$e^{a^2 p^2} \operatorname{ei}(a^2 p^2)$ $\lvert \arg a \rvert < \dfrac{\pi}{4}$	$-a^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{4a^2}} \operatorname{erg}\left(\dfrac{t}{2a}\right)$
$\operatorname{ei}(2\sqrt{ap})$	$-2^{-1} t^{-1} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\dfrac{a}{t}}\right)$
$\operatorname{ei}\left(\dfrac{a}{p}\right)$ $p^{-1} \operatorname{ei}\left(\dfrac{a}{p}\right)$	$\mathrm{Pf}\, t^{-1} \mathrm{J}_0(2\sqrt{at}) + 2(\log \mathrm{C}\, a)\, \delta(t)$ $2\, \mathrm{Ji}_0(2\sqrt{at})$
$p^{-1} e^{\frac{a}{p}} \operatorname{ei}\left(\dfrac{a}{p}\right)$	$2\, \mathrm{K}_0(2\sqrt{at})$
$\beta > 0$ $e^{-\beta p} \operatorname{ei}^*(\beta p)$ $p^{-1} e^{-\beta p} \operatorname{ei}^*(\beta p)$ $p^n e^{-\beta p} \operatorname{ei}^*(\beta p)$ $n = 1, 2, 3, \ldots$	$-\mathrm{Pf}(t-\beta)^{-1} \mathrm{U}(t)$ $-\log \left\lvert \dfrac{t}{\beta} - 1 \right\rvert \mathrm{U}(t)$ $(-1)^{n+1} n!\, \mathrm{Pf}(t-\beta)^{-n-1} \mathrm{U}(t)$ $+\sum_{j=0}^{n-1} (n-j-1)!\, \beta^{j-n} \delta^{(j)}(t)$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$\mathrm{ei}^*(\beta p)\,\mathrm{ei}(\beta p)$ $\beta > 0$	$t^{-1}\log\left\vert\frac{t^2}{\beta^2}-1\right\vert \mathrm{U}(t)$
$e^{\beta p}\,\mathrm{ei}(\beta p) - e^{-\beta p}\,\mathrm{ei}^*(\beta p)$ $\beta > 0$	$2\beta\,\mathrm{Pf}\,(t^2-\beta^2)^{-1}\,\mathrm{U}(t)$
$p^{-1}[\mathrm{ci}(ap)\cos ap$ $- \mathrm{si}(ap)\sin ap]$ $\mathrm{Re}\,a > 0$	$2^{-1}\log(t^2+a^2) - \log a$
$p^{-1}[\mathrm{ci}(ap)\sin ap$ $+ \mathrm{si}(ap)\cos ap]$ $\mathrm{Re}\,a > 0$	$-\mathrm{arc\,tg}\,\frac{t}{a}$
$[\mathrm{ci}(ap)]^2 + [\mathrm{si}(ap)]^2$ $\mathrm{Re}\,a > 0$	$t^{-1}[\log(t^2+a^2) - 2\log a]$
$p^{-1}[\mathrm{shi}(\beta p)\,\mathrm{sh}\,\beta p$ $- \mathrm{chi}(\beta p)\,\mathrm{ch}\,\beta p]$ $\beta > 0$	$\frac{1}{2}\log\left\vert\frac{t^2}{\beta^2}-1\right\vert \mathrm{U}(t)$
$p^{-1}[\mathrm{shi}(\beta p)\,\mathrm{ch}\,\beta p$ $- \mathrm{chi}(\beta p)\,\mathrm{sh}\,\beta p]$ $\beta > 0$	$\frac{1}{2}\log\frac{t+\beta}{\vert t-\beta\vert}\,\mathrm{U}(t)$
$\mathrm{chi}(\beta p)\,\mathrm{sh}\,\beta p$ $- \mathrm{shi}(\beta p)\,\mathrm{ch}\,\beta p$ $\mathrm{chi}(\beta p)\,\mathrm{ch}\,\beta p$ $- \mathrm{shi}(\beta p)\,\mathrm{sh}\,\beta p$	$\beta\,\mathrm{Pf}\,(t^2-\beta^2)^{-1}\,\mathrm{U}(t)$ $-\mathrm{Pf}\,t\,(t^2-\beta^2)^{-1}\,\mathrm{U}(t)$
$[\mathrm{chi}(\beta p)]^2 - [\mathrm{shi}(\beta p)]^2$	$t^{-1}\log\left\vert\frac{t^2}{\beta^2}-1\right\vert \mathrm{U}(t)$

VIII. — FONCTIONS EULÉRIENNES ET FONCTION ZÊTA

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$B(ap, \nu) = \dfrac{\Gamma(\nu)\Gamma(ap)}{\Gamma(ap+\nu)}$ $\mathrm{Re}\, a > 0,$ $\nu \neq 0, -1, -2, -\dots$	$a^{-1}\,\mathrm{Pf}\left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right)^{\nu-1}$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu > 0$
$\dfrac{\Gamma(\nu)\Gamma(ap+1-\nu)}{\Gamma(ap+1)}$ $\mathrm{Re}\, a > 0,$ $\nu \neq 0, -1, -2, -\dots$	$a^{-1}\,\mathrm{Pf}\left(e^{\frac{t}{a}} - 1\right)^{\nu-1}$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu > 0$
$\dfrac{\Gamma(p+a)\Gamma(p+b)}{\Gamma(p+c)\Gamma(p+d)}$ $\mathrm{Re}(c+d-a-b) > 0$	$\dfrac{e^{-at}(a-e^{-t})^{c+d-a-b}}{\Gamma(c+d-a-b)}$ $\times\, {}_2F_1(d-b, c-b;$ $c+d-a-b; 1-e^{-t})$
$\log\Gamma\left(\dfrac{p}{a}+b\right)$ $\mathrm{Re}\, a > 0$ $\mathrm{Re}\, b \geq 0$	$\mathrm{Pf}\,\dfrac{e^{-abt}}{t(1-e^{-at})}$ $+\dfrac{1}{2}[(1-2b)\log Ca + \log 2\pi]\,\delta(t)$ $-\dfrac{\log Ca}{a}\,\delta'(t)$
$\log\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{p}{4a}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{p}{4a}+\dfrac{1}{2}\right)}$	$\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Pf}\,\dfrac{e^{at}}{t\,\mathrm{ch}\,at} + \dfrac{\log 4Ca}{2}\,\delta(t)$
$\log\dfrac{\sqrt{p+b}\,\Gamma(p+a)}{\Gamma\left(p+b+\dfrac{1}{2}\right)}$	$\dfrac{e^{-bt}}{2t}\,\mathrm{th}\,\dfrac{t}{4}$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$p^{-1}\psi\left(\frac{p}{a}\right)$ $\operatorname{Re} a > 0$ $\psi\left(\frac{p}{a}\right)$	$-\log C\,(e^{at}-1)$ $-\frac{a}{1-e^{-at}} - (\log C\,a)\,\delta(t)$
$\psi\left(\frac{p}{2a}+\frac{1}{2}\right)$ $\operatorname{Re} a > 0$	$-\operatorname{Pf}\frac{a}{\operatorname{sh} at} - (\log 2\,C\,a)\,\delta(t)$
$p\,\psi\left(\frac{p}{a}+b\right)$	$a^2 \operatorname{Pf}\frac{e^{-abt}}{(1-e^{-at})^2}[b+(1-b)\,e^{-at}]$ $+(1-\log C\,a)\,\delta'(t)$
$p^{-1}\left[\psi\left(\frac{p+a}{2a}\right)-\psi\left(\frac{p}{2a}\right)\right]$	$2\log\frac{1+e^{at}}{2}$
$\frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma(p)}{\Gamma(p+\nu)}[\psi(p+\nu)-\psi(p)]$ $\nu \neq 0, -1, -2, -\ldots$	$\operatorname{Pf} t\,(1-e^{-t})^{\nu-1}$ Pf inutile si $\operatorname{Re}\nu > -1$
$\psi^{(n)}\left(\frac{p}{a}\right)$ $\operatorname{Re} a>0,\quad n=1,2,3,\ldots$	$(-a)^{n+1}\,t^n\,(1-e^{-at})^{-1}$
$p^{-\nu}\,\gamma(\nu, \beta p)$ $\nu \neq 0, -1, -2, -\ldots$	$\operatorname{Pf} t^{\nu-1}, \quad 0<t<\beta$ $0, \quad$ ailleurs Pf inutile si $\operatorname{Re}\nu > 0$
$\gamma\left(\nu, \frac{a}{p}\right)$ $\nu \neq 0, -1, -2, -\ldots$	$a^{\frac{\nu}{2}} \operatorname{Pf} t^{\frac{\nu}{2}-1}\, J_\nu(2\sqrt{at})$ Pf inutile si $\operatorname{Re}\nu > 0$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$p^{\nu-1} e^{\frac{a}{p}} \gamma\left(\nu, \frac{a}{p}\right)$ $\nu \neq 0, -1, -2, -\ldots$	$\Gamma(\nu)\, a^{\frac{\nu}{2}} t^{-\frac{\nu}{2}} \mathrm{I}_\nu(2\sqrt{at})$
$p^{\nu-\frac{3}{2}} e^{\frac{a}{p}} \gamma\left(\nu, \frac{a}{p}\right)$ $\nu \neq 0, -1, -2, -\ldots$	$\Gamma(\nu)\left(\frac{a}{t}\right)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} \mathbf{L}_{\nu-\frac{1}{2}}(2\sqrt{at})$
$p^{\lambda} \gamma\left(\nu, \frac{a}{p}\right)$ $\mathrm{Re}\,\nu > 0,$ $\mathrm{Re}\,(\nu - \lambda) > 0$	$t^{-\lambda-1} \int_0^{at} u^{\frac{\nu+\lambda-1}{2}} \mathrm{J}_{\nu-\lambda-1}(2\sqrt{at})$
$a^{-p}\gamma(p, a)$	$\exp(-a\, e^{-t})$
$\Gamma(n, \beta p)$ $n = 1, 2, 3, \ldots$	$(n-1)!\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta^{n-j}}{(n-j)!} \delta^{(n-j)}(t-\beta)$
$\Gamma(\nu, \beta p)$ $\beta > 0, \quad \nu \neq 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{\beta^\nu}{\Gamma(1-\nu)}\,\mathrm{Pf}\, t^{-1}(t-\beta)^{-\nu}\,\mathrm{U}(t-\beta)$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu < 1$
$p^{-\nu}\Gamma(\nu, \beta p)$ $\beta > 0$	$t^{\nu-1}\,\mathrm{U}(t-\beta)$
$e^{ap}\Gamma(\nu, ap)$ $\lvert \arg a \rvert < \pi,$ $\nu \neq 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{a^\nu}{\Gamma(1-\nu)}\,\mathrm{Pf}\, t^{-\nu}(t+a)^{-1}$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu < 1$
$p^{-\nu} e^{ap}\Gamma(\nu, ap)$ $\lvert \arg a \rvert < \pi$	$(t+a)^{\nu-1}$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$p^{\nu-1}\, e^{\frac{a}{p}}\Gamma\left(\nu, \frac{a}{p}\right)$ $\nu \neq 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{2}{\Gamma(1-\nu)}\,\mathrm{Pf}\left(\frac{a}{t}\right)^{\frac{\nu}{2}} \mathrm{K}_\nu(2\sqrt{at})$ Pf inutile si Re $\nu < 1$
$p^{\lambda}\,\Gamma\left(\nu, \frac{a}{p}\right)$ Re $\lambda > 0$ Re $(\lambda + \nu) < -\frac{1}{2}$	$t^{-\lambda-1}\int_{at}^{\infty} u^{\frac{\lambda+\nu-1}{2}}\,\mathrm{J}_{\nu-\lambda-1}(2\sqrt{u})\,du$
$a^p\,\Gamma(-p, a)$ Re $a > 0$	$\exp(-a\,e^t)$
$p^{-1}\,\zeta(p)$	$0, \quad t < 0$ $n, \quad \log n < t < \log(n+1)$
$p^{-1}\,\zeta(p+a)$	$\sum_{1 \leq n \leq e^t} n^{-a}$
$p^{-a}\,\zeta(p)$ $a \neq 0, -1, -2, -\ldots$	$\frac{1}{\Gamma(a)}\sum_{1 \leq n \leq e^t}(t - \log n)^{a-1}$
$\zeta(a, bp)$ $a \neq 0, -1, -2, -\ldots$ Re $b > 0$	$\frac{1}{\Gamma(a)\,b^a}\,\mathrm{Pf}\; t^{a-1}\left(1 - e^{-\frac{t}{b}}\right)^{-1}$ Pf inutile si Re $a < 0$

IX. — FONCTIONS DE BESSEL ET DE HANKEL

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$p^{-\nu}[\mathrm{J}_\nu(ap)\cos ap + \mathrm{N}_\nu(ap)\sin ap]$ $\nu-\frac{1}{2}\neq -1, -2, -\dots$ $\mathrm{Re}\, a<0$	$-\mathrm{Pf}\,\dfrac{2\,t^{\nu-\frac{1}{2}}(t^2+4a^2)^{\frac{\nu-1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,(2a)^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$ $\times\sin\left[\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\operatorname{arc\,cotg}\frac{t}{2a}\right]$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}$
$p^{-\nu}[\mathrm{J}_\nu(ap)\sin ap - \mathrm{N}_\nu(ap)\cos ap]$ $\nu-\frac{1}{2}\neq -1, -2, -\dots$ $\mathrm{Re}\, a>0$	$\mathrm{Pf}\,\dfrac{2\,t^{\nu-\frac{1}{2}}(t^2+4a^2)^{\frac{\nu-1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,(2a)^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$ $\times\cos\left[\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\operatorname{arc\,cotg}\frac{t}{2a}\right]$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}$
$p^{-\nu}\mathrm{H}_\nu^+(ap)\,e^{-iap}$ $\nu-\frac{1}{2}\neq -1, -2, -\dots$ $-\frac{1}{2}\pi<\arg a<\frac{3}{2}\pi$	$-i\,\mathrm{Pf}\,\dfrac{2\,(t^2-2\,iat)^{\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,(2a)^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$p^{-\nu}\,\mathrm{H}_\nu^-(ap)\,e^{iap}$ $\nu-\frac{1}{2}\neq 1, -2, -\ldots$ $-\frac{3}{2}\pi < \arg a < \frac{1}{2}\pi$	$i\,\mathrm{Pf}\,\dfrac{2\,(t^2+2\,iat)^{\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,(2\,a)^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$ Pf inutile si Re $\nu > -\frac{1}{2}$
$\frac{1}{p}\,\mathrm{J}_\nu\left(\frac{2\,ab}{p}\right)e^{\frac{a^2-b^2}{p}}$ $\nu\neq -1, -2, -\ldots$	$\mathrm{Pf}\,\mathrm{J}_\nu(2\,b\sqrt{t})\,\mathrm{I}_\nu(2\,a\sqrt{t})$ Pf inutile si Re $\nu > -1$
$\mathrm{J}_\nu\left(\frac{a}{p^2+1}\right)(p^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ $\times e^{-a(p^2+1)^{-1}}$	$\mathrm{Pf}\,\mathrm{J}_\nu(t)\,\mathrm{J}_{2\nu}(2\sqrt{at})$ Pf inutile si Re $\nu > -\frac{1}{2}$

X. — FONCTIONS DE BESSEL ET DE HANKEL MODIFIÉES

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$I_0(\beta p)$ β réel	$0, \quad \lvert t\rvert > \lvert\beta\rvert$ $\frac{1}{\pi}(\beta^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \lvert t\rvert < \lvert\beta\rvert$
$p^{-2} I_0(\beta p)$ β réel	$\frac{1}{2}\lvert t\rvert, \quad \lvert t\rvert > \lvert\beta\rvert$ $\frac{1}{\pi}\Big[(\beta^2 - t^2)^{\frac{1}{2}} - \left(\text{Arc cos}\,\frac{t}{\beta} - \frac{\pi}{2}\right)t\Big], \quad \lvert t\rvert < \lvert\beta\rvert$
$I_1(\beta p)$ β réel	$0, \quad \lvert t\rvert > \lvert\beta\rvert$ $-\frac{1}{\pi\beta}\,t\,(\beta^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \lvert t\rvert < \lvert\beta\rvert$
$I_n(\beta p)$ β réel	$0, \quad \lvert t\rvert > \lvert\beta\rvert$ $\frac{(-1)^n}{\pi}(\beta^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}} \times \cos\left(n\,\text{Arc cos}\,\frac{t}{\beta}\right), \quad \lvert t\rvert < \lvert\beta\rvert$
$I_\nu(\beta p)$ $\beta > 0$ $\nu \neq -1, -2, -\dots$	$0, \quad t < -\beta$ $\frac{1}{\pi}(\beta^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\nu\,\text{Arc cos}\,\frac{t}{\beta} - \nu\pi\right)$ $-\beta < t < \beta$ $-\frac{\beta^\nu \sin\nu\pi}{\pi}(t^2 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \times \left[t + (t^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\nu}, \quad t > \beta$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$p^{-\nu} I_\nu(\beta p)$ $\beta > 0$ $\nu - \frac{1}{2} \neq -1, -2, -\ldots$	$0, \quad \vert t\vert > \beta$ $\dfrac{(2\beta)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \times \mathrm{Pf}\,(\beta^2 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}}, \quad \vert t\vert < \beta$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$

[Rappelons que $I_{n+\frac{1}{2}}(\beta p)$ s'exprime au moyen de $e^{\beta p}$.]

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$K_\nu(\beta p)$ $\beta > 0$	$0, \quad t < \beta$ $(t^2 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{ch} \nu \left(\arg\operatorname{ch} \frac{t}{\beta}\right), \quad t > \beta$
$p^{-1} K_0(\beta p)$ $\beta > 0$	$0, \quad t < \beta$ $\arg\operatorname{ch} \frac{t}{\beta}, \quad t > \beta$
$p^{-1} K_\nu(\beta p)$ $\beta > 0 \quad \nu \neq 0$	$0, \quad t < \beta$ $\frac{1}{\nu} \operatorname{sh} \nu \left(\arg\operatorname{ch} \frac{t}{\beta}\right), \quad t > \beta$
$p^{-\nu} K_\nu(\beta p)$ $\beta > 0$ $\nu - \frac{1}{2} \neq -1, -2, -\ldots$	$0, \quad t < \beta$ $\dfrac{\sqrt{\pi}\,(2\beta)^{-\nu}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \mathrm{Pf}\,(t^2 - \beta^2)^{\nu - \frac{1}{2}}, \quad t > \beta$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$
$e^{ap} K_\nu(ap)$ $\vert \arg a \vert < \pi$	$(t^2 + 2at)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{ch} \nu \arg\operatorname{ch}\left(1 + \frac{t}{a}\right)$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$p^{-1}e^{ap}K_\nu(ap)$ $\|\arg a\| < \pi, \quad \nu \neq 0$	$\frac{1}{\nu}\operatorname{sh}\nu\arg\operatorname{ch}\left(1+\frac{t}{a}\right)$
$p^{-1}e^{ap}K_0(ap)$ $\|\arg a\| < \pi$	$\arg\operatorname{ch}\left(1+\frac{t}{a}\right)$
$p^{-\nu}e^{ap}K_\nu(ap)$ $\|\arg a\| < \pi$ $\nu-\frac{1}{2}\neq -1, -2, -\dots$	$\frac{\sqrt{\pi}(2a)^{-\nu}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\operatorname{Pf}(t^2+2at)^{\nu-\frac{1}{2}}$ Pf inutile si $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$
$e^{ap^2}K_0(ap^2)$ $\operatorname{Re}a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,e^{-\frac{t^2}{16a}}I_0\left(\frac{t^2}{16a}\right)$
$\sqrt{p}\,e^{ap^2}K_{\frac{1}{4}}(ap^2)$ $\operatorname{Re}a > 0$	$(2at)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{t^2}{8a}}$
$I_\nu\left(\frac{a}{p}\right)$ $\nu\neq 0, -1, -2, -\dots$	$\operatorname{Pf}\sqrt{\frac{2a}{t}}\,Z_\nu^{(b)}(\sqrt{2at})$ Pf inutile si $\operatorname{Re}\nu > 0$
$p^{-1}I_\nu\left(\frac{a}{p}\right)$ $\nu\neq -1, -2, -\dots$	$\operatorname{Pf}X_\nu^{(b)}(\sqrt{2at})$ Pf inutile si $\operatorname{Re}\nu > -1$
$p^{-2}I_\nu\left(\frac{a}{p}\right)$ $\nu\neq -2, -3, -\dots$	$\operatorname{Pf}\sqrt{\frac{2t}{a}}\,W_\nu^{(b)}(\sqrt{2at})$ Pf inutile si $\operatorname{Re}\nu > -2$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$p^{-1}e^{-\frac{a^2+b^2}{2p}}\mathrm{I}_\nu\left(\frac{ab}{p}\right)$ $\nu \neq -1, -2, -\ldots$	Pf $\mathrm{J}_\nu(a\sqrt{2t})\,\mathrm{J}_\nu(b\sqrt{2t})$ Pf inutile si Re $\nu > -1$
$p^{-1}e^{\frac{a^2+b^2}{2p}}\mathrm{I}_\nu\left(\frac{ab}{p}\right)$ $\nu \neq -1, -2, -\ldots$	Pf $\mathrm{I}_\nu(a\sqrt{2t})\,\mathrm{I}_\nu(b\sqrt{2t})$ Pf inutile si Re $\nu > -1$
$p^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{a}{p}}\mathrm{I}_\nu\left(\frac{a}{p}\right)$ $\nu - \frac{1}{2} \neq -1, -2, -\ldots$	Pf $(\pi t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{J}_{2\nu}(2\sqrt{2at})$ Pf inutile si Re $\nu > -\frac{1}{2}$
$p^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{a}{p}}\mathrm{I}_\nu\left(\frac{a}{p}\right)$ $\nu - \frac{1}{2} \neq -1, -2, -\ldots$	Pf $(\pi t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{I}_{2\nu}(2\sqrt{2at})$ Pf inutile si Re $\nu > -\frac{1}{2}$
$p^{-\lambda}e^{\frac{a}{p}}\mathrm{I}_\nu\left(\frac{a}{p}\right)$ $\nu \neq -1, -2, -\ldots$ $\lambda+\nu \neq 0, -1, -2, -\ldots$	Pf $\frac{2^{-\nu}a^\nu t^{\lambda+\nu-1}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda+\nu)}$ $\times {}_1F_2\left(\nu+\frac{1}{2}; 2\nu+1, \lambda+\nu; 2at\right)$ Pf inutile si Re $(\lambda+\nu) > 0$
$\mathrm{I}_0(\sqrt{p^2-a^2})$	$0, \quad \|t\| > 1$ $\frac{\cos a\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \|t\| < 1$
$p^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{a}{p}}\mathrm{K}_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a}{p}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2at}}e^{-2\sqrt{2at}}$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$p^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{a}{p}} K_\nu\left(\frac{a}{p}\right)$ $\nu \neq \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, +\ldots$	$2\cos\nu\pi \ \mathrm{Pf}\,(\pi t)^{-\frac{1}{2}} K_{2\nu}(2\sqrt{2at})$ Pf inutile si $\lvert \mathrm{Re}\,\nu \rvert < \frac{1}{2}$
$p^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{a}{p}} K_\nu\left(\frac{a}{p}\right)$ $\nu \neq \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, +\ldots$	$-\sin\nu\pi \ \mathrm{Pf}\,(\pi t)^{-\frac{1}{2}} J_{2\nu}(2\sqrt{2at})$ $-\cos\nu\pi \ \mathrm{Pf}\,(\pi t)^{-\frac{1}{2}} N_{2\nu}(2\sqrt{2at})$ Pf inutile si $\lvert \mathrm{Re}\,\nu \rvert < \frac{1}{2}$
$K_0(\sqrt{ap})$ $\mathrm{Re}\, a \geqq 0$	$\frac{1}{2} t^{-1} e^{-\frac{a}{4t}}$
$p^{-\frac{1}{2}} K_1(\sqrt{ap})$ $\mathrm{Re}\, a \geqq 0$	$a^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{a}{4t}}$
$p^{-\frac{1}{2}} K_\nu(2\sqrt{ap})$ $\mathrm{Re}\, a > 0$	$\frac{1}{2}(\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{a}{2t}} K_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a}{2t}\right)$
$p^{-\frac{\nu}{2}} K_\nu(2\sqrt{ap})$ $\mathrm{Re}\, a > 0$	$\frac{1}{2} a^{-\frac{\nu}{2}} t^{\nu-1} e^{-\frac{a}{t}}$
$p^{\frac{\nu}{2}} K_\nu(2\sqrt{ap})$ $\mathrm{Re}\, a > 0$	$\frac{1}{2} a^{\frac{\nu}{2}} t^{-\nu-1} e^{-\frac{a}{t}}$
$p^{\frac{\nu-2}{2}} K_\nu(2\sqrt{ap})$ $\mathrm{Re}\, a > 0$	$\frac{1}{2} a^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\nu, \frac{a}{t}\right)$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$K_0(\beta r)$ $\beta > 0$	$0, \quad t < \beta$ $\dfrac{\cos a\sqrt{t^2-\beta^2}}{\sqrt{t^2-\beta^2}}, \quad t > \beta$
$r^{-1} K_1(\beta r)$ $\beta > 0$	$0, \quad t < \beta$ $\dfrac{\sin a\sqrt{t^2-\beta^2}}{\sqrt{t^2-\beta^2}}, \quad t > \beta$
$r^{-\nu} K_\nu(\beta r)$ $\beta > 0$ $\nu \neq -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\dots$	$0, \quad t < \beta$ $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, a^{-\nu+\frac{1}{2}} \beta^{-\nu}\, \mathrm{Pf}\,(t^2-\beta^2)^{\frac{\nu-\frac{1}{2}}{2}}$ $\times J_{\nu-\frac{1}{2}}(a\sqrt{t^2-\beta^2}), \quad t > \beta$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$
$s^{-\nu} K_\nu(\beta s)$ $\beta > 0$ $\nu \neq -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\dots$	$0, \quad t < \beta$ $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, a^{-\nu+\frac{1}{2}} \beta^{-\nu}\, \mathrm{Pf}\,(t^2-\beta^2)^{\frac{\nu-\frac{1}{2}}{2}}$ $\times I_{\nu-\frac{1}{2}}(a\sqrt{t^2-\beta^2}), \quad t > \beta$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$
$K_\nu(\sqrt{\beta p})\, H_\nu^\pm(\sqrt{\beta p})$ $K_\nu(\sqrt{\beta p})\, J_\nu(\sqrt{\beta p})$ $K_\nu(\sqrt{\beta p})\, N_\nu(\sqrt{\beta p})$	$\frac{1}{2} t^{-1} H_\nu^\pm\left(\dfrac{\beta}{2t}\right)$ $\frac{1}{2} t^{-1} J_\nu\left(\dfrac{\beta}{2t}\right)$ $\frac{1}{2} t^{-1} N_\nu\left(\dfrac{\beta}{2t}\right)$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$K_\nu(\sqrt{ap}+\sqrt{bp})$ $\times I_\nu(\sqrt{ap}-\sqrt{bp})$ $\operatorname{Re} a > \operatorname{Re} b > 0$	$\frac{1}{2}t^{-1} I_\nu\left(\frac{a-b}{2t}\right) e^{-\frac{a+b}{2t}}$
$K_\nu(\sqrt{ap}+\sqrt{bp})$ $\times K_\nu(\sqrt{ap}-\sqrt{bp})$ $\operatorname{Re} a > \operatorname{Re} b > 0$	$\frac{1}{2}t^{-1} K_\nu\left(\frac{a-b}{2t}\right) e^{-\frac{a+b}{2t}}$
$K_\nu(\sqrt{p}+\sqrt{p-1})$ $\times K_\nu(\sqrt{p}-\sqrt{p-1})$	$\frac{1}{2}t^{-1} K_\nu\left(\frac{1}{2t}\right)e^{\frac{t}{2}-\frac{1}{t}}$
$K_\nu\left(\frac{\beta}{2}(r+p)\right) I_\nu\left(\frac{\beta}{2}(r-p)\right)$ $\beta > 0$ $\nu \neq -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\dots$	$0, \quad t < \beta$ $\mathrm{Pf}\,\frac{J_{2\nu}(a\sqrt{t^2-\beta^2})}{\sqrt{t^2-\beta_2}}, \quad t > \beta$ Pf inutile si $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$
$\operatorname{ker}(2\sqrt{p})$ $\operatorname{kei}(2\sqrt{p})$	$\frac{1}{2t}\cos\frac{1}{t}$ $-\frac{1}{2t}\sin\frac{1}{t}$

XI. — FONCTIONS ASSOCIÉES A CELLES DE BESSEL (ANGER, STRUVE, etc.)

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$\mathbf{J}_\nu(p) - J_\nu(p)$	$\dfrac{\sin\nu\pi}{\pi}(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\left[(t^2+1)^{\frac{1}{2}} - t\right]^\nu$
$\dfrac{\mathbf{J}_p(a) - J_p(a)}{\sin\pi p}$ $\mathrm{Re}\, a > 0$	$\dfrac{1}{\pi}e^{-a\,\mathrm{sh}\,t}$
$p^{-\nu}[\mathbf{H}_\nu(ap) - N_\nu(ap)]$ $\mathrm{Re}\, a > 0$	$\dfrac{2^{1-\nu}a^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)}(t^2+a^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$
$p^{-1}[\mathbf{H}_0(ap) - N_0(ap)]$ $\mathrm{Re}\, a > 0$	$\dfrac{2}{\pi}\arg\mathrm{sh}\,\dfrac{t}{a}$
$\mathbf{H}_1(ap) - N_1(ap)$ $\mathrm{Re}\, a > 0$	$\dfrac{2}{\pi\, a}t(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{2}{\pi}\delta(t)$
$p^{\frac{1}{2}}\left[\mathbf{H}_{\pm\frac{1}{4}}(p^2) - N_{\pm\frac{1}{4}}(p^2)\right]$	$\left(\dfrac{t}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\mp\frac{1}{4}}\left(\dfrac{t^2}{4}\right)$
$p^{-\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_0(2\sqrt{ap})$ $- N_0(2\sqrt{ap})]$	$2\pi^{-\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{a}{2t}}K_0\left(\dfrac{a}{2t}\right)$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$2^p a^{-p}\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\mathbf{H}^p(a)$	$\pi^{-\frac{1}{2}}(e^t-1)^{-\frac{1}{2}}\sin a(1-e^{-t})^{\frac{1}{2}}$
$p^{-\nu}[\mathbf{L}_\nu(\beta p)-\mathrm{I}_\nu(\beta p)]$ $\nu\neq-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\ldots$	$\dfrac{-2(2\beta)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$ $\times\mathrm{Pf}(\beta^2-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$, $0<t<\beta$ 0, ailleurs Pf inutile si Re $\nu>-\frac{1}{2}$
$p^{-1}[\mathbf{L}_0(\beta p)-\mathrm{I}_0(\beta p)]$	$-\frac{2}{\pi}\mathrm{Arc}\sin\frac{t}{\beta}$, $0<t<\beta$ 0, ailleurs
$\mathbf{L}_1(\beta p)-\mathrm{I}_1(\beta p)$	$-\frac{2}{\pi\beta}t(\beta^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}$, $0<t<\beta$ 0, ailleurs
$p^{-\nu}\mathbf{L}_\nu(\beta p)$ $\nu\neq-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\ldots$	$-\dfrac{(2\beta)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$ $\times\mathrm{Pf}(\mathrm{sg}\,t)(\beta^2-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$, $0<t<\beta$ 0, ailleurs Pf inutile si Re $\nu>-\frac{1}{2}$
$p^{-\frac{1}{2}}[\mathbf{L}_0(2\sqrt{p})-\mathrm{I}_0(2\sqrt{p})]$	$-(\pi t)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2t}}\mathrm{I}_0\left(\frac{1}{2t}\right)$
$\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)\left(\frac{\beta}{2}\right)^p$ $\times[\mathbf{L}_p(\beta)-\mathrm{I}_p(\beta)]$	$-\sqrt{\pi}(1-e^{-t})^{-\frac{1}{2}}\sin\beta(e^t-1)^{\frac{1}{2}}$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$S_{-1,\nu}(p)$ $p^{-1}S_{0,\nu}(p)$ $p^{-1}S_{1,\nu}(p)$	$\nu^{-1}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sh}\nu(\operatorname{arg\,sh} t)$ $\nu^{-1}\operatorname{sh}\nu(\operatorname{arg\,sh} t)$ $\operatorname{ch}\nu(\operatorname{arg\,sh} t)$
$O_n(p)$ $S_n(p)$	$\frac{1}{2}\left\{\left[t+(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\right]^n+\left[t-(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\right]^n\right\}$ $(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\left\{\left[t+(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\right]^n-\left[t-(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\right]^n\right\}$

XII. — FONCTIONS DE LEGENDRE

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$p^{-1}\,P_\nu(p)$ $0 < \operatorname{Re}\nu < 1$	$-\dfrac{\sin\nu\pi}{\pi}\,W_{0,\nu+\frac{1}{2}}(2t)$
$s^\lambda\,P_\nu^\lambda\left(\dfrac{p}{a}\right)$ $\lambda-\nu \neq 1, 2, 3, \ldots$ $\lambda+\nu \neq 0, 1, 2, \ldots$	$\dfrac{\left(\dfrac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\lambda+\nu+1)\,\Gamma(-\lambda-\nu)}$ $\times \operatorname{Pf} t^{-\lambda-\frac{1}{2}}\,K_{\nu+\frac{1}{2}}(at)$ Pf inutile si $\operatorname{Re}(\lambda-1) < \operatorname{Re}\nu < -\operatorname{Re}\lambda$
$s^{-\lambda}\,Q_\nu^\lambda\left(\dfrac{p}{a}\right)$ $\lambda+\nu \neq -1, -2,$ $-3, -\ldots$	$e^{i\nu\pi}\left(\dfrac{\pi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Pf} t^{\lambda-\frac{1}{2}}\,I_{\nu+\frac{1}{2}}(at)$ Pf inutile si $\operatorname{Re}(\lambda+\nu) > -1$
$Q_\nu\left(\dfrac{p^2+a^2+b^2}{2ab}\right)$ $\nu \neq -1, -2,$ $-3, -\ldots$	$\pi\,(ab)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Pf} J_{\nu+\frac{1}{2}}(at)\,J_{\nu+\frac{1}{2}}(bt)$ Pf inutile si $\operatorname{Re}\nu > -1$
$s^{-\nu-1}\,P_\nu^\lambda\left(\dfrac{p}{s}\right)$ $\lambda-\nu \neq 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{1}{\Gamma(\nu-\lambda+1)} \operatorname{Pf} t^\nu\,I_{-\lambda}(at)$ Pf inutile si $\operatorname{Re}(\nu-\lambda) > -1$
$s^{-\nu-1}\,Q_\nu^\lambda\left(\dfrac{p}{s}\right)$ $\nu \pm \lambda \neq -1, -2, -\ldots$	$\dfrac{\sin(\lambda+\nu)\pi}{\Gamma(\nu-\lambda+1)\sin\nu\pi} \operatorname{Pf} t^\nu\,K_\lambda(at)$ Pf inutile si $\operatorname{Re}(\nu\pm\lambda) > -1$

XIII. — FONCTIONS DU CYLINDRE PARABOLIQUE

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$e^{\frac{a^2p^2}{4}} D_{-\nu}(ap)$ $\lvert \arg a \rvert < \frac{\pi}{4}$ $\nu \neq 0, -1, -2, -\ldots$	$\frac{a^{-\nu}}{\Gamma(\nu)} \mathrm{Pf}\, t^{\nu-1} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$ Pf inutile si Re $\nu > 0$
$p^{-1} e^{\frac{a^2p^2}{4}} D_{-2\nu}(ap)$ $\lvert \arg a \rvert < \frac{\pi}{4}$ $2\nu \neq 0, -1, -2, -\ldots$	$\frac{2^{\nu-1}}{\Gamma(2\nu)} \gamma\left(\nu, \frac{t^2}{2a^2}\right)$
$p^{-1} e^{\frac{a^2p^2}{4}} D_0(ap)$ $\lvert \arg a \rvert < \frac{\pi}{4}$	$\gamma\left(1, \frac{t^2}{2a^2}\right) + e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$
$p^{-1} e^{\frac{a^2p^2}{4}} D_1(ap)$ $\lvert \arg a \rvert < \frac{\pi}{4}$	$2a^{-1} t e^{-\frac{t^2}{2a^2}} + a\,\delta(t)$
$p^{-1} e^{\frac{a^2p^2}{4}} D_{\frac{1}{2}}(ap)$ $\lvert \arg a \rvert < \frac{\pi}{4}$	$\frac{2^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{4}, \frac{t^2}{2a^2}\right) + \sqrt{\frac{a}{\pi t}}\, e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$
$D_{-2\nu}(2\sqrt{\beta p})$ $\beta > 0$ $\nu \neq 0, -1, -2, -\ldots$	$\frac{2^{-\nu}(2\beta)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu)} \mathrm{Pf}\, \frac{(t-\beta)^{\nu-1}}{(t+\beta)^{\nu+\frac{1}{2}}} U(t-\beta)$ Pf inutile si Re $\nu > 0$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$D_0(2\sqrt{\beta p}) = e^{-\beta p}$	$\delta(t-\beta)$
$D_1(2\sqrt{\beta p})$	$-\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{Pf}\,(t-\beta)^{-\frac{3}{2}}\,U(t-\beta)$
$p^{-\frac{1}{2}} D_{1-2\nu}(2\sqrt{\beta p})$ $\beta > 0$ $\nu \neq 0, -1, -2, -\dots$	$\frac{2^{\frac{1}{2}-\nu}}{\Gamma(\nu)} \mathrm{Pf}\,\frac{(t-\beta)^{\nu-1}}{(t+\beta)^{\nu-\frac{1}{2}}}\,U(t-\beta)$ Pf inutile si Re $\nu > 0$
$p^{-\nu} e^{\frac{a}{4p}} D_{-2\nu}\left(\sqrt{\frac{a}{p}}\right)$ Re $\nu > 0$	$\frac{1}{\Gamma(2\nu)}(2t)^{\nu-1} e^{-\sqrt{2at}}$
$p^{-\nu} e^{-\frac{a}{4p}} D_{2\nu-1}\left(\sqrt{\frac{a}{p}}\right)$ Re $\nu > 0$	$2^{\nu+\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}} t^{\nu-1} \sin(\nu\pi - \sqrt{2ap})$
$D_{-\nu-1}\left(e^{\frac{i\pi}{4}} p\right) D_{-\nu-1}\left(e^{-\frac{i\pi}{4}} p\right)$ Re $\nu > -1$	$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+1)} J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{t^2}{2}\right)$

XIV. — FONCTION HYPERGÉOMÉTRIQUE DE GAUSS

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$p^{-a}\,F\left(a,\ b;\ c;\ \frac{\lambda}{p}\right)$ $\operatorname{Re} a > 0$	$\frac{\lambda^{-\frac{c}{2}}}{\Gamma(a)}\, t^{a-\frac{c}{2}-1}\, e^{\frac{\lambda}{2}t}\, M_{\frac{c}{2}-b,\,\frac{c}{2}-\frac{1}{2}}(\lambda t)$
$F\left(a,\ b;\ c;\ \frac{1}{2}-\frac{p}{\lambda}\right)$ $\operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re} b > 0$	$\frac{\lambda\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(\lambda t)^{\frac{a+b-3}{2}}\, W_{\frac{a+b+1-2c}{2},\,\frac{a-b}{2}}(\lambda t)$
$p^{c-1}(p-1)^n$ $\times F\left(-n,\ b;\ c;\ \frac{p}{p-1}\right)$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ $\operatorname{Re} c < 1-n,$ $\operatorname{Re}(b-c) > n-1$	$\frac{n\,!}{\Gamma(1-c)}\, t^{-c-n}\, L_n^{b-c-n}(t)$
$(p^2+\lambda^2)^{-a}$ $\times F\left(a,\ b;\ a+b+\frac{1}{2};\ \frac{\lambda^2}{p^2+\lambda^2}\right)$ $\operatorname{Re} a > 0$	$\frac{\Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2a)}$ $\times\, t^{2a-1}\left(\frac{2}{\lambda t}\right)^{a+b-\frac{1}{2}} J_{a+b-\frac{1}{2}}(\lambda t)$
$F(a,\ b;\ c+p;\ z)\,B(p,\ c)$ $\operatorname{Re} c > 0$ $\lvert\arg(z-1)\rvert < \pi$	$(1-e^{-t})^{c-1}\,F(a,\ b;\ c;\ z(1-e^{-t}))$
$F(a,\ p;\ c+p;\ z)\,B(p,\ c)$ $\operatorname{Re} c > 0$ $\lvert\arg(z-1)\rvert < \pi$	$(1-e^{-t})^{c-1}(1-z\,e^{-t})^{-a}$

XV. — FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES CONFLUENTES

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$p^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}p} M_{\lambda,\nu}((\beta-\alpha)p)$ $\beta > \alpha \geqq 0$ $\mathrm{Re}(\nu \pm \lambda) < \frac{1}{2}$	$\dfrac{(\beta-\alpha)^{\frac{1}{2}-\nu}}{B\left(\frac{1}{2}+\lambda+\nu, \frac{1}{2}-\lambda+\nu\right)} \dfrac{(t-\alpha)^{\lambda+\nu-\frac{1}{2}}}{(\beta-t)^{\lambda-\nu+\frac{1}{2}}}$, $\alpha < t < \beta$ 0, ailleurs
$p^{\lambda} e^{\frac{a}{2p}} M_{\lambda,\nu}\left(\frac{a}{p}\right)$ $\nu-\lambda+\frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, -\ldots$ $2\nu \neq -1, -2, -\ldots$	$\dfrac{a^{\frac{1}{2}}\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma\left(\nu-\lambda+\frac{1}{2}\right)} \mathrm{Pf}\, t^{-\lambda-\frac{1}{2}} I_{2\nu}(2\sqrt{at})$ Pf inutile si $\mathrm{Re}(\nu-\lambda) > -\frac{1}{2}$
$p^{-\lambda-\frac{1}{2}} W_{\lambda,\nu}(p)$ $\mathrm{Re}(\nu-\lambda) > \frac{1}{2}$	0, $t < \frac{1}{2}$ $\dfrac{1}{\Gamma\left(\nu-\lambda+\frac{1}{2}\right)} \dfrac{\left(t-\frac{1}{2}\right)^{\nu-\lambda-\frac{1}{2}}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^{-\nu-\lambda+\frac{1}{2}}}$, $t > \frac{1}{2}$
$p^{-1} e^{\frac{ap}{2}} W_{\lambda,\nu}(ap)$ $\mathrm{Re}\,\lambda < 1$ $\lvert \arg a \rvert < \pi$	$(1+at^{-1})^{-\frac{1}{2}} P^{\lambda}_{\nu-\frac{1}{2}}(1+2a^{-1}t)$

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$p^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{\frac{ap}{2}} W_{\lambda,\nu}(ap)$ $\lvert \arg a \rvert < \pi$ $\lambda-\nu-\frac{1}{2} \neq 0, 1, 2, \ldots$	$\dfrac{a^{-\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda+\nu\right)} \mathrm{Pf}\, t^{\nu-\lambda-\frac{1}{2}}(t+a)^{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}$ Pf inutile si $\mathrm{Re}(\nu-\lambda) > -\frac{1}{2}$
$p^{\lambda} e^{\frac{ap}{2}} W_{\lambda,\nu}\left(\frac{a}{p}\right)$ $\lambda \pm \nu - \frac{1}{2} \neq 0, 1, 2, \ldots$	$\dfrac{2a^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)}$ $\times\, \mathrm{Pf}\, t^{-\lambda-\frac{1}{2}} K_{2\nu}(2\sqrt{at})$ Pf inutile si $\mathrm{Re}(\lambda \pm \nu) < \frac{1}{2}$

XVI. — FONCTIONS ELLIPTIQUES

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$p^{-1}\,\mathrm{K}\left(\frac{a}{p}\right)$	$\frac{\pi}{2}\,\mathrm{I}_0^2\left(\frac{at}{2}\right)$
$\mathrm{K}\left(\frac{a}{p}\right)$	$\frac{\pi a}{2}\,\mathrm{I}_0\left(\frac{at}{2}\right)\mathrm{I}_1\left(\frac{at}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\,\delta(t)$
$p\,\mathrm{E}\left(\frac{a}{p}\right)$	$-\frac{\pi a}{2}\,t^{-1}\,\mathrm{I}_0\left(\frac{at}{2}\right)\mathrm{I}_1\left(\frac{at}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\,\delta(t)$
$p\left[\mathrm{K}\left(\frac{a}{p}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{a}{p}\right)\right]$	$\frac{\pi a^2}{4}\left[\mathrm{I}_0^2\left(\frac{at}{2}\right)+\mathrm{I}_1^2\left(\frac{at}{2}\right)\right]$
$p\,(p^2-a^2)^{-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{a}{p}\right)$	$\frac{\pi}{2}\,\mathrm{I}_0\left(\frac{at}{2}\right)\left[\mathrm{I}_0\left(\frac{at}{2}\right)+at\,\mathrm{I}_1\left(\frac{at}{2}\right)\right]$
$r^{-1}\,\mathrm{K}\left(\frac{a}{r}\right)$	$\frac{\pi}{2}\,\mathrm{J}_0^2\left(\frac{at}{2}\right)$
$r^{-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{a}{r}\right)$	$\frac{\pi}{2}\,\mathrm{J}_0\left(\frac{at}{2}\right)\left[\mathrm{J}_0\left(\frac{at}{2}\right)-at\,\mathrm{J}_1\left(\frac{at}{2}\right)\right]$

XVII. — POLYNOMES ORTHOGONAUX (DE LEGENDRE, D'HERMITE ET DE LAGUERRE)

$\varphi(p)$	$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$
$(p+b)^{-n-1}\,P_n\left(\frac{p+a}{p+b}\right)$	$\frac{1}{n!}\,e^{-bt}\,t^n\,L_n\left(\frac{b-a}{2}t\right)$
$(p+b)^{-\nu}\,P_n\left(\frac{p+a}{p+b}\right)$ $\operatorname{Re}\nu>0$	$\frac{e^{-bt}}{\Gamma(\nu)}\,t^{\nu-1}\,{}_2F_2\left(-n,n+1;\,1,\nu;\,\frac{b-a}{2}t\right)$
$\frac{1}{\sqrt{p}}\,P_n\left(\frac{1}{p}\right)$	$\frac{\mathrm{He}_n(\sqrt{2t})\,\mathrm{He}_n(i\sqrt{2t})}{i^n\,n!\,\sqrt{\pi t}}$
$p^{-n-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{a}{p}}\,\mathrm{He}_{2n}\left(\sqrt{\frac{2a}{p}}\right)$	$(-2)^n\,\pi^{-\frac{1}{2}}\,t^{n-\frac{1}{2}}\cos 2\sqrt{at}$
$p^{-n-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{a}{p}}\,\mathrm{He}_{2n+1}\left(\sqrt{\frac{2a}{p}}\right)$	$(-1)^n\,2^{n+\frac{1}{2}}\,\pi^{-\frac{1}{2}}\,t^n\sin 2\sqrt{at}$
$p^{-b}\,L_n^{\alpha}\left(\frac{\lambda}{p}\right)$ $\operatorname{Re} b>0$	$\frac{t^{b-1}\,{}_1F_2(-n;\,\alpha+1,\,b;\,\lambda t)}{n\,\Gamma(b)\,B(n,\alpha+1)}$
$n!\,p^{-n-\alpha-1}\,e^{-\frac{\lambda}{p}}\,L_n^{\alpha}\left(\frac{\lambda}{p}\right)$ $\operatorname{Re}\alpha>-n-1$	$\lambda^{-\frac{\alpha}{2}}\,t^{n+\frac{\alpha}{2}}\,J_\alpha(2\sqrt{\lambda t})$

TABLES DE TRANSFORMÉES DE MELLIN

$$\varphi(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x)\, dx = \mathfrak{M}\{f(x)\}$$

σ_1, σ_2 désignent les frontières du domaine de convergence :

$\sigma_1 < \operatorname{Re}(s) < \sigma_2$.]

RÈGLES OPÉRATOIRES

$f(\alpha x)$	$\alpha^{-s}\varphi(s)$
$x^{\beta} f(x)$	$\varphi(s+\beta)$
$f(x^{\nu})$	$\frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{s}{\nu}\right)$
$\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$	$\varphi(1-s)$
$f(x)(\log x)^n$	$\varphi^{(n)}(s)$
$(x\,D_x)^n f(x)$	$(-s)^n\varphi(s)$
$D_x^n f(x)$	$(-1)^n(s-1)(s-2)\dots(s-n)\varphi(s-n)$
$\int_0^x f(u)\,du$	$-s^{-1}\varphi(s+1)$
$\int_0^{+\infty} f(u)\,du$	$s^{-1}\varphi(s+1)$
$\int_0^{+\infty} f_1(u) f_2\left(\frac{x}{u}\right) du$	$\varphi_1(s)\varphi_2(s)$

TABLE DE TRANSFORMÉES

	$f(x)$	$\varphi(s) = \mathfrak{M}\{f(x)\}$	σ_1	σ_2
	1. Fonctions exponentielles, logarithmiques, circulaires			
1	e^{-x}	$\Gamma(s)$	0	$+\infty$
2	$e^{x} - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-x)^{\nu}}{\nu!}$	$\Gamma(s)$	$-n-1$	$-n$
3	$e^{-x} \log x$	$\Gamma'(s)$	0	$+\infty$
4	$x^{\alpha} e^{-\beta x}$	$\beta^{-(s+\alpha)} (s+\alpha)$	$-\beta$	$+\infty$
5	$x^{-1} e^{-x^{-1}}$	$\Gamma(1-s)$	$-\infty$	1
6	e^{-x^2}	$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$	0	$+\infty$

	$f(x)$	$\varphi(s) = \mathfrak{M}\{f(x)\}$	σ_1	σ_2
7	$(e^x - 1)^{-1}$	$\zeta(s)\,\Gamma(s)$	1	$+\infty$
8	$e^{-\frac{\alpha}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)}, \quad \alpha > 0$	$2\,K_s(\alpha)$		
9	$\sin \alpha x, \quad \alpha > 0$	$\alpha^{-s}\,\Gamma(s)\sin\frac{\pi}{2}s$	0	1
10	$\cos \alpha x, \quad \alpha > 0$	$\alpha^{-s}\,\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}s$	0	1
11	$\cos x^\alpha$	$\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{s}{\alpha}\right)\cos\frac{\pi s}{2\alpha}$	0	α
12	$\sin x^\alpha$	$\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{s}{\alpha}\right)\sin\frac{\pi s}{2\alpha}$	0	α
13	$\frac{\sin x}{x}$	$(1-s)^{-1}\,\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}s$	0	1
14	$(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,e^{a\log\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}$	$2^{-s}\dfrac{\Gamma(s)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}+\frac{s}{2}\right)}$	0	$1 + \mathrm{Re}(a)$

	$f(x)$	$\varphi(s) = \mathfrak{M}\{f(x)\}$	σ_1	σ_2
15	$e^{-a\log(x+1)}, \quad \mathrm{Re}(a) > 0$	$\dfrac{\Gamma(s)\,\Gamma(a-s)}{\Gamma(a)}$	0	$\mathrm{Re}(a)$
16	$e^{-a\log(x+1)}\log x, \quad \mathrm{Re}(a) > 0$	$[\psi(s) - \psi(s-a)]\,\mathrm{B}(s, a-s)$	0	$\mathrm{Re}(a)$
17	$\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$\pi\,[(1-s)\sin\pi s]^{-1}$	0	1
18	$\log\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$\dfrac{\pi}{s}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi s}{2}$	-1	1
19	$(1+x^{-1})\log \mathrm{C}\,(1+x^{-1})$	$\dfrac{\psi(s+1)}{\sin\pi s}$	-1	0
20	$\left(\mathrm{sh}\,\dfrac{x}{2}\right)^{-2}$	$4\,\zeta(s)\,\Gamma(s+1)$	2	$+\infty$
21	$e^{-ax}(1-e^{-x})^{-1}, \quad \mathrm{Re}(a) > 0$	$\zeta(s, a)\,\Gamma(s)$	1	$+\infty$
22	$\sin x \sin\dfrac{\alpha^2}{x}$	$\alpha^s\left[\mathrm{K}_s(2\alpha)\cos\dfrac{\pi}{2}s + \dfrac{\pi}{4\sin\dfrac{\pi}{2}s}\left(\mathrm{J}_s(2\alpha) - \mathrm{J}_{-s}(2\alpha)\right)\right]$	-2	0

	$f(x)$	$\varphi(s) = \mathfrak{M}\{f(x)\}$	σ_1	σ_2
23	$\cos x \cos \dfrac{\alpha^2}{x}$	$\alpha^s \left[K_s(2\alpha) \cos \dfrac{\pi}{2} s - \dfrac{\pi}{4 \sin \frac{\pi}{2} s} (J_s(2\alpha) - J_{-s}(2\alpha)) \right]$	0	1

2. Fonctions algébriques

24	$(1 + x)^{-1}$	$\dfrac{\pi}{\sin \pi s}$	0	1
25	$(1 + x^2)^{-1}$	$\dfrac{\pi}{2} \left(\sin \dfrac{\pi}{2} s \right)^{-1}$	0	1
26	$1 - x(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$	$2^{-s} \dfrac{\Gamma(s) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right)}$	0	2
27	$(-1)^n x^{-n} (x + \alpha)^{-1}, \quad \alpha > 0$	$\dfrac{\pi}{\sin \pi s} \alpha^{s-n-1}$	n	$n + 1$

	$f(x)$	$\varphi(s) = \mathfrak{M}\{f(x)\}$	σ_1	σ_2
	3. Distributions, fonctions discontinues			
28	$U(x) - U(x-\alpha), \quad \alpha > 0$	$s^{-1}\alpha^s$	0	$+\infty$
29	$U(x-\alpha) - U(x-\beta), \quad \beta > \alpha > 0$	$\dfrac{\beta^s - \alpha^s}{s}$	$-\infty$	$+\infty$
30	$x^\alpha U(1-x)$	$(s+\alpha)^{-1}$	$-\alpha$	$+\infty$
31	$x^\alpha U(x-1)$	$-(s+\alpha)^{-1}$	$-\infty$	$-\alpha$
32	$(1-x)^{\alpha-1} U(1-x), \quad \alpha > 0$	$\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(s+\alpha)}$	0	$+\infty$
33	$(x^\alpha \log x) U(1-x)$	$-(s+\alpha)^{-2}$	$-\alpha$	$+\infty$
34	$(x^\alpha \log x) U(x-1)$	$(s+\alpha)^{-2}$	$-\infty$	$-\alpha$
35	$\{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{ch}\,[a \log(x - \sqrt{x^2+1})]\} \times U(x-1)$	$2^{-s-1}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2}-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(1-s)}$	$-\infty$	$1 + \mathrm{Re}(a)$
36	$e^{-x} U(x-\alpha), \quad \alpha > 0$	$\Gamma(s, \alpha)$	$-\infty$	$+\infty$

	$f(x)$	$\varphi(s) = \mathfrak{M}\{f(x)\}$	σ_1	σ_2
37	$e^{-x}[\mathrm{U}(x) - \mathrm{U}(x-\alpha)]$, $\alpha > 0$	$\gamma(s, \alpha)$	0	$+\infty$
38	$\delta(x-1)$	1		
39	$\delta(x-1) - \delta'(x-1)$	s		

4. Fonctions de Bessel, Neumann, Kelvin

40	$x^{-\nu}\,\mathrm{J}_\nu(x)$	$\dfrac{2^{s-\nu-1}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+1-\frac{s}{2}\right)}$	0	$\nu + \frac{3}{2}$
41	$x^{\nu}\,\mathrm{J}_\nu(x)$	$\dfrac{2^{s-\nu-1}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}$	-2ν	$\frac{3}{2} - \nu$
42	$\mathrm{J}_\nu(x)$	$\dfrac{2^{s-1}\,\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-s}{2}+1\right)}$	$-\nu$	$\frac{3}{2}$

	$f(x)$	$\varphi(s) = \mathfrak{M}\{f(x)\}$	σ_1	σ_2
43	$x^{\frac{1}{2}} J_\nu(x)$	$\dfrac{2^{s-\frac{1}{2}}\Gamma\left[\frac{1}{2}\left(s+\nu+\frac{1}{2}\right)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}\left(\nu-s+\frac{3}{2}\right)\right]}$	$-\nu-\frac{1}{2}$	1
44	$N_\nu(x)$	$\dfrac{-2^{s-1}}{\pi}\Gamma\left(\dfrac{s+\nu}{2}\right) \times\Gamma\left(\dfrac{s-\nu}{2}\right)\cos\dfrac{\pi}{2}(s-\nu)$	$\|\nu\|$	$\frac{3}{2}$
45	$x^{-\nu} N_\nu(x)$	$-\dfrac{2^{s-\nu-1}}{\pi}\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right) \times\Gamma\left(\dfrac{s}{2}-\nu\right)\cos\dfrac{\pi}{2}(s-2\nu)$	$\nu+\|\nu\|$	$\nu+\frac{3}{2}$
46	$x^{-\nu} K_\nu(x)$	$2^{s-\nu-2}\,\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{s}{2}-\nu\right)$	Max $[0,\ 2\nu]$	$+\infty$
47	$x^{\nu} K_\nu(x)$	$2^{s+\nu-2}\,\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{s}{2}+\nu\right)$	Max $[0,\ -2\nu]$	$+\infty$

	$f(x)$	$\varphi(s) = \mathfrak{M}\{f(x)\}$	σ_1	σ_2
48	$e^{ix} J_\nu(x)$	$\frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu+s)\,\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu-s+1)} e^{i\frac{\pi}{2}(s+\nu)}$	$-\nu$	$\frac{1}{2}$
49	$2\,K_0(2\sqrt{x})$	$[\Gamma(s)]^2$	0	$+\infty$
		5. Fonctions diverses		
50	$\operatorname{erfc} x$	$\frac{1}{s\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$	0	$+\infty$
51	$\operatorname{Arc\,cotg} x$	$\frac{\pi}{2s}\left[\cos\frac{\pi}{2}s\right]^{-1}$	0	1
52	$\frac{\alpha^x}{\Gamma(x+1)}$	$\mu(\alpha, s)\,\Gamma(s)$	0	$+\infty$
53	${}_2F_1(a, b; c; -x)$	$\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(a-s)\,\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}$	0	$\min[R(a), R(b)]$
54	$(1+x)^{-m} P_{m-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$	$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}\left[\frac{\Gamma(m-s)}{\Gamma(m)}\right]^2$	0	m
55	$\frac{\alpha^x x^\nu}{\Gamma(1+x)}$	$\Gamma(s+\nu)\,\mu(\alpha, s+\nu-1)$	0	$+\infty$

TABLES DE TRANSFORMÉES DE MELLIN INVERSES

AVERTISSEMENT

Toutes les fonctions de x apparaissant dans ces tables sont nulles pour $x < 0$.

SOMMAIRE

I. — FORMULES GÉNÉRALES

$$\mathfrak{M}^{-1}\, v(s) = V_x$$

et $h(x)$ est une fonction Mellin-transformable.

$$\mathfrak{M}^{-1}\, v(\beta s) = \tilde{V}_X,$$

distribution définie par $\langle \tilde{V}_X, \Phi(x) \rangle = |\beta| \langle V_x, x^{\beta-1}\, \Phi(x^\beta) \rangle$, β réel [si V_x est associée à $h(x)$, $\tilde{V}_X$ est associée à $h(x^{1/\beta})$].

$$\mathfrak{M}^{-1}\, \alpha^{-s}\, v(s) = V_x^0,$$

distribution définie par $\langle V_x^0, \Phi(x) \rangle = \alpha^{-1} \langle V_x, \Phi(\alpha^{-1} x) \rangle$, $\alpha > 0$ [si V_x est associée à $h(x)$, V_x^0 est associée à $h(\alpha x)$].

$$\mathfrak{M}^{-1}\, s^k\, v(s) = (-1)^k (x\, D_x)^k\, V_x,$$
$$\mathfrak{M}^{-1}\, (s-1)^k\, v(s) = (-1)^k (D_x\, x)^k\, V_x.$$

(Voir aussi paragraphes 6.3 et 6.4 de la première partie),

II. — FONCTIONS ALGÉBRIQUES ET ANALOGUES

$f(s)$	$\mathfrak{M}^{-1} f(s)$	
1	$\delta(x-1)$	
s	$\delta(x-1) - \delta'(x-1)$	
$(s+a)^{-1}$ $\operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} a$	$x^a,$ $0,$	$0 < x < 1$ $x > 1$
$(s+a)^{-1}$ $\operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} a$	$0,$ $-x^a,$	$0 < x < 1$ $x > 1$
$(s+a)^{-2}$ $\operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} a$	$-x^a \log x,$ $0,$	$0 < x < 1$ $x > 1$
$(s+a)^{-2}$ $\operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} a$	$0,$ $x^a \log x,$	$x < 1$ $x > 1$
$(s+a)^{-1}(s+b)^{-1}$ $\operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} a > -\operatorname{Re} b$	$(b-a)^{-1}(x^a - x^b),$ $0,$	$0 < x < 1$ $x > 1$
$(s+a)^{-1}(s+b)^{-1}$ $-\operatorname{Re} a > \operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} b$	$-(b-a)^{-1} x^b,$ $-(b-a)^{-1} x^a,$	$0 < x < 1$ $x > 1$
$(s+a)^{-1}(s+b)^{-1}$ $\operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} b < -\operatorname{Re} a$	$0,$ $(b-a)^{-1}(x^b - x^a),$	$x < 1$ $x > 1$
$[(s+a)^2 + b^2]^{-1}$ $\operatorname{Re}(s+a) > \lvert \operatorname{Im} b \rvert$	$-b^{-1} x^a \sin(b \log x)$ $0,$	$0 < x < 1$ $x > 1$
$[(s+a)^2 + b^2]^{-1}$ $-\operatorname{Im} b < \operatorname{Re}(s+a)$ $< \operatorname{Im} b$	$\dfrac{1}{2ib} x^{a-ib},$ $\dfrac{1}{2ib} x^{a+ib},$	$0 < x < 1$ $x > 1$

$f(s)$	$\mathcal{M}^{-1} f(s)$
$[(s+a)^2+b^2]^{-1}$ $\mathrm{Re}\,(s+a) < \vert \mathrm{Im}\, b \vert$	$0, \quad x<1$ $b^{-1} x^a \sin(b \log x), \quad x>1$
$(s^2-a^2)^{\frac{1}{2}} - s$ $\mathrm{Re}\, s > \vert \mathrm{Re}\, a \vert$	$\dfrac{a}{\log x} \mathrm{I}_1(-a \log x)\,[\mathrm{U}(x) - \mathrm{U}(x-1)]$
$(s+a)^\nu$ $\mathrm{Re}\, s > -\mathrm{Re}\, a$ $\nu \neq 0, 1, 2, \ldots$	$\dfrac{1}{\Gamma(-\nu)} \mathrm{Pf}\, x^a (-\log x)^{-\nu-1}$ $\times [\mathrm{U}(x) - \mathrm{U}(x-1)]$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu < 0$
$(s+a)^\nu$ $\mathrm{Re}\, s < -\mathrm{Re}\, a$ $\nu \neq 0, 1, 2, \ldots$	$\dfrac{1}{\Gamma(-\nu)} \mathrm{Pf}\, x^a (\log x)^{-\nu-1}\, \mathrm{U}(x-1)$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu < 0$
$(s^2-a^2)^{-\nu}$ $\mathrm{Re}\, s > \vert \mathrm{Re}\, a \vert$ $\nu \neq 0, -1, -2, -\ldots$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)} a^{1-\nu}\, \mathrm{Pf} \left(\dfrac{a \vert \log x \vert}{2} \right)^{\nu-\frac{1}{2}}$ $\times \mathrm{I}_{\nu-\frac{1}{2}}(a \vert \log x \vert)\,[\mathrm{U}(x) - \mathrm{U}(x-1)]$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu > 0$
$(a^2-s^2)^{-\nu}$ $-\mathrm{Re}\, a < \mathrm{Re}\, s < \mathrm{Re}\, a$ $\nu \neq 0, -1, -2, -\ldots$	$\dfrac{a^{1-\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)} \mathrm{Pf} \left(\dfrac{a \vert \log x \vert}{2} \right)^{\nu-\frac{1}{2}}$ $\times \mathrm{K}_{\nu-\frac{1}{2}}(a \vert \log x \vert)$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\,\nu > 0$

III. — EXPONENTIELLES, LOGARITHMES ET FONCTIONS CIRCULAIRES

$f(s)$	$\mathcal{M}^{-1} f(s)$
$e^{\beta s}$ β réel	$e^{\beta}\,\delta(x - e^{\beta})$
$s\,e^{\beta s}$	$e^{\beta}\,\delta(x - e^{\beta}) - e^{2\beta}\,\delta'(x - e^{\beta})$
$s^{-1}\,e^{\beta s}$ $\operatorname{Re} s > 0$	$1, \quad 0 < x < e^{\beta}$ $0, \quad x < e^{\beta}$
$s^{-1}\,e^{\beta s}$ $\operatorname{Re} s < 0$	$-\mathrm{U}(x - e^{\beta})$
$s^{-2}\,e^{\beta s}$ $\operatorname{Re} s > 0$	$-\log(e^{-\beta} x), \quad 0 < x < e^{\beta}$ $0, \quad x > e^{\beta}$
$s^{-2}\,e^{\beta s}$ $\operatorname{Re} s < 0$	$\log(e^{-\beta} x)\,\mathrm{U}(x - e^{\beta})$
e^{as^2} $\operatorname{Re} a > 0$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi a}}\,e^{-\frac{(\log x)^2}{4a}}$
$s^{-\nu}\,e^{-\frac{\alpha}{s}}$ $\operatorname{Re} s > 0, \quad \alpha > 0$ $\nu \neq 0, -1, -2, -\ldots$	$\operatorname{Pf}\left(\dfrac{\lvert\log x\rvert}{a}\right)^{\frac{\nu-1}{2}} \mathrm{J}_{\nu-1}\left(2\sqrt{\alpha\,\lvert\log x\rvert}\right)$ $\times\,[\mathrm{U}(x) - \mathrm{U}(x-1)]$ Pf inutile si $\operatorname{Re} \nu > 0$

$f(s)$	$\mathfrak{M}^{-1} f(s)$
$s^{-1} e^{-a\sqrt{s}}$ $\operatorname{Re} s > 0$ $\lvert \arg a \rvert < \frac{\pi}{4}$	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{\lvert \log x \rvert}}\right), \quad 0 < x < 1$ $0, \quad x > 1$
$s^{-\frac{1}{2}} e^{-a\sqrt{s}}$ $\operatorname{Re} s > 0$ $\lvert \arg a \rvert < \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi} \lvert \log x \rvert} e^{\frac{a^2}{4 \log x}}, \quad 0 < x < 1$ $0, \quad x > 1$
$\log (s + a)$ $\operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} a$	$\operatorname{Pf} \frac{x^a}{\log x} [U(x) - U(x - 1)]$ $- (\log C)\, \delta (x - 1)$
$s^{-\nu} \log s$ $\operatorname{Re} s > 0$ $\nu \neq 0, -1, -2, -\dots$	$\operatorname{Pf} \frac{\psi(\nu) - \log \lvert \log x \rvert}{\Gamma(\nu) \lvert \log x \rvert^{1-\nu}}$ $\times [U(x) - U(x - 1)]$ Pf inutile si $\operatorname{Re} \nu > 0$
$s^{-1} (\log s)^2$ $\operatorname{Re} s > 0$	$(\log C \lvert \log x \rvert)^2 - \frac{\pi^2}{6}, \quad 0 < x < 1$ $0, \quad x > 1$
$\frac{\pi \alpha^{s-k-1}}{\sin \pi s}$ $k < \operatorname{Re} s < k + 1$ $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$	$(-1)^k \frac{x^{-k}}{x + \alpha}, \quad \alpha > 0$
$\frac{\pi \alpha^{s-j-1} (s - j)_j}{\sin \pi s}$ $0 < \operatorname{Re} s < j + 1$	$(-1)^j j!\, (x + \alpha)^{-j-1}, \quad \alpha > 0$ $j = 0, 1, 2, \dots$

$f(s)$	$\mathfrak{M}^{-1} f(s)$
$\dfrac{\pi\alpha^{s-k-\frac{1}{2}}}{\cos \pi s}$ $k-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < k+\frac{1}{2}$ $k = -\ldots, -1, 0, 1, \ldots$	$(-1)^k \dfrac{x^{-k+\frac{1}{2}}}{x+\alpha}, \qquad \alpha > 0$
$\pi\alpha^{s-k-\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \pi s$ $k-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < k+\frac{1}{2}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm\ldots$	$\operatorname{Pf} \dfrac{x^{-k+\frac{1}{2}}}{\alpha - x} \mathrm{U}(x), \qquad \alpha > 0$
$\pi\alpha^{s-k-1} \operatorname{cotg} \pi s$ $k < \operatorname{Re} s < k+1$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm\ldots$	$\operatorname{Pf} \dfrac{x^{-k}}{\alpha - x} \mathrm{U}(x)$
$\dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi s}$ $k < \operatorname{Re} s < k+1$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm\ldots$	$\dfrac{x^{-k}}{x-1} \log x$
$\dfrac{\pi}{(s-1)\sin \pi s}$ $0 < \operatorname{Re} s < 1$	$-\dfrac{\log(1+x)}{x}$
$\dfrac{\pi}{s \cos \frac{\pi}{2} s}$ $0 < \operatorname{Re} s < 1$	$2 \operatorname{Arc\,cotg} x$

IV. — FONCTIONS GAMMA, ZÊTA ET ASSOCIÉES

$f(s)$	$\mathfrak{M}^{-1} f(s)$
$\Gamma(s)$ $\operatorname{Re} s > 0$	e^{-x}
$\Gamma(s)$ $-k-1 < \operatorname{Re} s < -k$ $k = 0, 1, 2, \ldots$	$e^{-x} - \sum_{j=0}^{k} \frac{(-x)^j}{j!}$
$[\Gamma(s)]^2$ $\operatorname{Re} s > 0$	$2 K_0 (2\sqrt{x})$
$\Gamma\left(\frac{s}{\alpha}\right) \sin \frac{\pi s}{2\alpha}$ $\operatorname{Re} s > 0, \quad \alpha > 0$	$\alpha \sin x^{\alpha}$
$\Gamma\left(\frac{s}{\alpha}\right) \cos \frac{\pi s}{2\alpha}$ $\operatorname{Re} s > 0, \quad \alpha > 0$	$\alpha \cos x^{\alpha}$
$\frac{1}{s-1} \Gamma(s) \cos \frac{\pi}{2} s$ $\operatorname{Re} s > 1$	$-\frac{\sin x}{x}$
$\Gamma(s) \sin as$ $\operatorname{Re} s > -1$ $\lvert \operatorname{Re} a \rvert < \frac{\pi}{2}$	$e^{-x \cos a} \sin (x \sin a)$

$f(s)$	$\mathcal{M}^{-1} f(s)$
$\Gamma(s) \cos as$ $\operatorname{Re} s > 0$ $\lvert \operatorname{Re} a \rvert < \frac{\pi}{2}$	$e^{-x\cos a} \cos(x \sin a)$
$\dfrac{\Gamma(s)}{\cos \pi s}$ $0 < \operatorname{Re} s < \frac{1}{2}$	$e^x \operatorname{erfc}(\sqrt{x})$
$\Gamma(a+s)\Gamma(b-s)$ $-\operatorname{Re} a < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} b$ $\operatorname{Re}(a+b) > 0$	$\Gamma(a+b)\, x^a (1+x)^{-a-b}$
$\dfrac{1}{\pi s} \Gamma\left(\dfrac{s+1}{2}\right)$ $\operatorname{Re} s > 0$	$\operatorname{erfc} x$
$\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)$ $\operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} b > -\operatorname{Re} a$	$2\, x^{\frac{a+b}{2}} K_{\frac{a-b}{2}}(2\sqrt{x})$
$\Gamma(s+a)\Gamma(s+b) \cos \pi (s-a)$ $\lvert \operatorname{Re} a \rvert < \operatorname{Re} s < \frac{3}{4}$	$-\pi N_{2a}(2\sqrt{x})$
$\dfrac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+a)}$ $\operatorname{Re} s > 0$ $a \neq 0, -1, -2, -\ldots$	$\dfrac{1}{\Gamma(a)} \operatorname{Pf} (1-x)^{a-1} [U(x) - U(x-1)]$ Pf inutile si $\operatorname{Re} a > 0$
$\Gamma(1-s)$ $\operatorname{Re} s < 1$	$\dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$

$f(s)$	$\mathfrak{M}^{-1} f(s)$
$\dfrac{\Gamma(1-a-s)}{\Gamma(1-s)}$ $\mathrm{Re}\, s > 0$ $a \neq 0, -1, -2, -\dots$	$\dfrac{1}{\Gamma(a)} \mathrm{Pf}\,(x-1)^{a-1}\, \mathrm{U}(x-1)$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\, a > 0$
$\dfrac{\Gamma(s)}{\Gamma(a-s+1)}$ $0 < \mathrm{Re}\, s < \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\, a + \dfrac{1}{4}$	$x^{-\frac{a}{2}}\, \mathrm{J}_a(2\sqrt{x})$
$\dfrac{\Gamma(s+a)\,\Gamma(s-a)}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}$ $\mathrm{Re}\, s > \lvert \mathrm{Re}\, a \rvert$	$\pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\, \mathrm{K}_a\left(\dfrac{x}{2}\right)$
$\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)\Gamma(s+a)}{\Gamma(1+a-s)}$ $-\mathrm{Re}\, a < \mathrm{Re}\, s < \dfrac{1}{2}$	$\pi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\, \mathrm{I}_a\left(\dfrac{x}{2}\right)$
$\Gamma(s)\dfrac{\Gamma(a-s)\,\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)}$ $0 < \mathrm{Re}\, s$ $< \min(\mathrm{Re}\, a, \mathrm{Re}\, b)$	$\dfrac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1(a, b; c; -x)$
$\psi(s+a)\, \beta^{a+s-1}$ $\mathrm{Re}\, s > -\mathrm{Re}\, a$ $\beta > 0$	$-\mathrm{Pf}\, \dfrac{x}{\beta - x}[\mathrm{U}(x) - \mathrm{U}(x-\beta)]$ $-\beta^a\left(\log \dfrac{\mathrm{C}}{\beta}\right)\delta(x-\beta)$
$s^{-1}\psi(s+1)$ $\mathrm{Re}\, s > 0$	$-\log \mathrm{C}(1-x), \quad 0 < x < 1$ $0, \quad x > 1$

$f(s)$	$\mathfrak{M}^{-1} f(s)$
$\dfrac{\psi(s+1)}{\sin \pi s}$ $-1 < \operatorname{Re} s < 0$	$(1 + x^{-1}) \log C (1 + x^{-1})$
$\psi(s)\,\Gamma(s)$ $\operatorname{Re} s > 0$	$e^{-x} \log x$
$\gamma(s, \beta)$ $\operatorname{Re} s > 0$	$e^{-x}, \qquad 0 < x < \beta$ $0, \qquad x > \beta$
$\Gamma(s, \beta)$	$e^{-x}\,U(x - \beta), \qquad \beta > 0$
$\Gamma(1 - s, a)$ $\operatorname{Re} s > 0$	$(x + 1)^{-1} e^{-a(x+1)}$ $\operatorname{Re} a > 0$
$\zeta(s)\,\Gamma(s)$ $\operatorname{Re} s > 1$	$(e^{x} - 1)^{-1}$
$\zeta(s)\,\Gamma(s + 1)$ $\operatorname{Re} s > 1$	$\dfrac{1}{4}\left(\operatorname{sh} \dfrac{x}{2}\right)^{-2}$
$\zeta(s, a)\,\Gamma(s)$ $\operatorname{Re} s > 1$	$e^{-ax}(1 - e^{-x})^{-1}$ $\operatorname{Re} a > 0$

V. — FONCTIONS DE BESSEL

$f(s)$	$\mathfrak{M}^{-1} f(s)$
$J_{\frac{s}{2}+\nu}(2\beta^2)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ $\operatorname{Re} s > 0$ $\nu \neq -1, -2, -\dots$	$2\beta^{-\nu}\,\mathrm{Pf}\,(\beta^2 - x^2)^{\frac{\nu}{2}}$ $\times J_\nu(2\beta\sqrt{\beta^2 - x^2}), \quad 0 < x < \beta$ $0, \quad x > \beta$ Pf inutile si $\operatorname{Re}\nu > -1$
$J_{\nu-\frac{s}{2}}(2\beta^2)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}\nu + \frac{3}{2}$ $\beta > 0$	$2\beta^\nu (x^2 + \beta^2)^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\beta\sqrt{x^2 + \beta^2})$
$N_{\nu-\frac{1}{2}}(2\beta^2)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}\nu + \frac{3}{2}$ $\beta > 0$	$2\beta^\nu (x^2 + \beta^2)^{-\frac{\nu}{2}} N_\nu(2\beta\sqrt{x^2 + \beta^2})$
$H_s^+(\beta)\, e^{\frac{i\pi s}{2}}$ $H_s^-(\beta)\, e^{-\frac{i\pi s}{2}}$ $-1 < \operatorname{Re} s < 1$ $\beta > 0$	$i\pi^{-1} e^{\frac{i\beta(x+x^{-1})}{2}}$ $-i\pi^{-1} e^{-\frac{i\beta(x+x^{-1})}{2}}$
$s^{-1} I_0(s)$ $\operatorname{Re} s > 0$	$1, \quad 0 < x < e^{-1}$ $\pi^{-1} \arccos \log x, \quad e^{-1} < x < e$ $0, \quad x > e$

$f(s)$	$\mathfrak{M}^{-1} f(s)$
$s^{-\nu} I_\nu(s)$ $\mathrm{Re}\, s > 0$ $\nu + \frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, -\dots$	$0, \quad 0 < x < e^{-1}$ $\mathrm{Pf} \frac{(1 - \log^2 x)^{\nu - \frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}.2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}, \quad e^{-1} < x < e$ $0, \quad x > e$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\, \nu > -\frac{1}{2}$
$s^{-1} K_0(s)$ $\mathrm{Re}\, s > 0$	$\arg \mathrm{ch} \log x, \quad 0 < x < e^{-1}$ $0, \quad x > e^{-1}$
$s^{-1} K_1(s)$ $\mathrm{Re}\, s > 0$	$(\log^2 x - 1)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < x < e^{-1}$ $0, \quad x > e^{-1}$
$s^{-1} K_\nu(s)$ $\mathrm{Re}\, s > 0$	$\nu^{-1} \mathrm{sh}(\nu \arg \mathrm{ch} \vert \log x \vert), \quad 0 < x < e^{-1}$ $0, \quad x > e^{-1}$
$s^{-\nu} K_\nu(s)$ $\mathrm{Re}\, s > 0$ $\nu + \frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, -\dots$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}$ $\times \mathrm{Pf} (\log^2 x - 1)^{\nu - \frac{1}{2}}, \quad 0 < x < e^{-1}$ $0, \quad x > e^{-1}$ Pf inutile si $\mathrm{Re}\, \nu > -\frac{1}{2}$
$K_s(\beta)$	$\frac{1}{2} e^{-\frac{\beta(x + x^{-1})}{2}}, \quad \beta > 0$
$K_s(\beta)\, e^{i\varphi s}$ $\vert\varphi\vert < \frac{\pi}{2}, \quad \beta > 0$ $\left(\vert\mathrm{Re}\, s\vert < 1 \text{ si } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{1}{2} e^{-\frac{\beta(e^{-i\varphi} x + e^{i\varphi} x^{-1})}{2}}$
$K_{\nu - \frac{s}{2}}(2\beta^2)\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ $\mathrm{Re}\, s > 0$	$2\beta^\nu (x^2 + \beta^2)^{-\frac{\nu}{2}}$ $\times K_\nu\left(2\beta\sqrt{x^2 + \beta^2}\right), \quad \beta > 0$

VI. — AUTRES FONCTIONS

$f(s)$	$\mathfrak{M}^{-1} f(s)$
$D_{2\nu}(2\sqrt{s})$ $\operatorname{Re} s > 0, \quad \operatorname{Re} \nu < 0$	$\dfrac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\nu)} \dfrac{(\lvert\log x\rvert + 1)^{\nu-\frac{1}{2}}}{(\lvert\log x\rvert - 1)^{\nu+1}}$ $\times [U(x) - U(x - e^{-1})]$
$\dfrac{1}{\sqrt{s}} D_{2\nu+1}(2\sqrt{s})$ $\operatorname{Re} s > 0, \quad \operatorname{Re} \nu < 0$	$\dfrac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\nu)} \dfrac{(\lvert\log x\rvert + 1)^{\nu+\frac{1}{2}}}{(\lvert\log x\rvert - 1)^{\nu+1}}$ $\times [U(x) - U(x - e^{-1})]$
${}_1F_1(s; s+\nu; a)\, B(\nu, s)$ $\operatorname{Re} s > 0$ $\nu \neq 0, -1, -2, -\ldots$	$\operatorname{Pf} e^{ax}(1-x)^{\nu-1}[U(x) - U(x-1)]$
${}_1F_1\left(-s; \frac{1}{2}; a\right)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)$ $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$	$x^{\frac{1}{2}} e^{a-x} \cos 2\sqrt{ax}$
${}_1F_1\left(1 - s; \frac{3}{2}; a\right)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)$ $\operatorname{Re} s > -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} e^{a-x} \sin 2\sqrt{ax}$
$s^{-1}\, {}_2F_1(s, \nu; s+1; -a)$ $\operatorname{Re} s > -1, \quad \lvert a\rvert < 1$	$(1 + ax)^{-\nu}, \qquad 0 < x < 1$ $0, \qquad x > 1$
$s^{-1}\, {}_2F_1(-s, \nu; -s+1; -a)$ $\operatorname{Re} s < 1, \quad \lvert a\rvert < 1$	$-\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^{-\nu} U(x-1)$
${}_2F_1(s, a; b; c)\, \Gamma(s)$ $\operatorname{Re} s > 0, \quad \operatorname{Re} c < 1$	$e^{-x}\, {}_1F_1(a; b; cx)$

BIBLIOGRAPHIE

(Les ouvrages indiqués avec un astéristique contiennent des tables de transformées)

ARSAC (J.). — *Transformation de Fourier et théorie des distributions.* Paris, Dunod, 1961.

*BARRUCAND (P.). — La transformation de Mellin et ses applications. *Annales des Télécommunications*, 1950, p. 381-390.

BENEDETTO (J.). — The Laplace transform of generalized functions. *Canad. J. Math.*, **18**, 1966, p. 357-374.

BOAS (R. P.). — Inversion of Fourier and Laplace Transforms. *Amer. Math. Monthly*, **69**, 1962, p. 955-960.

BOUIX (M.). — *Les fonctions généralisées ou distributions.* Paris, Masson, 1958.

BREMMER (H.). — *Voir* VAN DER POL (B.) et BREMMER (H.).

— The jumps of Discontinuous solutions of the Wave Equation. *Comm. Pure and Appl. Math.*, **4**, 1950, p. 419-426.

BROWER (B. F.). — *Voir* MC COLLUM (P. A.) et BROWER (B. F.).

BUREAU (F.). — Le problème de Cauchy. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, **8**, 1955, p. 143-202.

BUTZER (P. L.). — Singular integral Equations and the Finite Parts of Divergent Integrals. *Arch. f. Rat. Mech.*, **3**, 1959, p. 194-205.

*CARSLAW (H. S.) et JAEGER (J. C.). — *Operational Methods in Applied Mathematics*, 2e édit. Oxford University Press, 1948.

CHILOV (G. E.). — *Voir* GUELFAND (I. M.) et CHILOV (G. E.).

*CHURCHILL (R. V.). — *Operational Mathematics*, 2e édit. New York, Mc Graw-Hill, 1958.

— The solution of Linear Boundary-Value problems in Physics by means of the Laplace-Transformation. *Math. Annalen*, **114**, 1937, p. 591-613.

*COLOMBO (S.). — *Les transformations de Mellin et de Hankel.* C. N. R. S., 1959.

— *Étude des transcendantes intervenant dans la résolution des équations de Volterra à noyaux logarithmiques.* Studia Universitatis « Lovanium », Fac. des Sc., n° 18, 1964.

— *Voir* HUMBERT (P.) et COLOMBO (S.).

CONSUL (P. C.). — On some inverse Mellin integral transforms. *Acad. Roy. Belg. Bull. Sc.*, (5), **52**, 1966, p. 547-561.

COOPER (J. L. B.). — Laplace transformation of distribution. *Canad. J. Math.*, **18**, 1966, p. 503-516.

CRAIG (E. J.). — *Laplace and Fourier Transforms for Electrical Engineers.* Holt, Rinehart and Winston, 1967.

DELAVAULT (H.). — Application de la transformée de Laplace et de la transformation de Hankel à la détermination de solutions de l'équation de la chaleur et des équations de Maxwell. *Publ. scient. et tech. Min. de l'Air*, 1957.

— *Les transformations intégrales à plusieurs variables et leurs applications* (Mém. Sc. math., CXLVIII). Paris, Gauthier-Villars, 1961.

DELERUE (P.). — *Voir* POLI (L.) et DELERUE (P.).

*DITKIN (V. A.) et PRUDNIKOV (A. P.). — *Integral transforms and operational calculus.* Oxford, Pergamon Press, 1965.

DITZIAN (Z.) et JAKIMOVSKI. — Inversion theorems for the Laplace-Stieltjes transform. *Canad. J. Math.*, **18**, 1966, p. 1325-1332.

DOETSCH (G.). — *Einführung in Theorie mit Anwendung der Laplace Transformation.* Springer, 1937.

— *Introduction à l'utilisation pratique de la transformation de Laplace avec table par Rudolf Herschel.* Paris, Gauthier-Villars, 1959.

— *Handbuch der Laplace-Transformation*, 3 vol. Birkhauser, 1955.

— *Voir* SAUER (R.) et SZABO (I.).

ERDÈLYI (A.). — The Inversion of the Laplace-Transformation. *Math. Mag.*, **24**, 1950, p. 1-6.

— *Calcul opérationnel et fonctions généralisées*, Paris, Dunod, 1971.

FROESE (C.). — *Voir* HULL (T. E.) et FROESE (C.).

GARNIR (H. G.) et MUNSTER (M.). — Transformation de Laplace des distributions. *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, **33**, 1964, p. 615-631; **34**, 1965, p. 28-33.

GUELFAND (I. M.) et CHILOV (G. E.). — *Les distributions.* Paris, Dunod, t. I, 1962.

*Ghizzetti (A.). — *Calcolo simbolico.* Zanichelli, 1943.

— Ricerche abeliane e tauberiane. *Annali di Matemat. Pure ed Applicata*, **34**, 1953, p. 113-132.

Gonzalez-Dominguez (A.). — Distribuciones y funciones analiticas. *Symposium Punta del Este*, 1951.

Gilly (J.). — Les parties finies d'intégrales et la transformation de Laplace. *Rev. Scientifique*, 1945, p. 259-270.

Hadamard (J.). — *Le problème de Cauchy et les équations hyperboliques.* Paris, Hermann, 1932.

Heinig (H. P.). — A new Inversion and Representation Theory of the Laplace-Transform. *Canad. Math. Bull.*, **9**, 1966, p. 447-455; **10**, 1967, p. 333-345.

Hille (E.). — Some extremal properties of Laplace Transforms. *Mathem. Scandinavica*, **1**, 1953, p. 227-236.

Hille (E.) et Caton (W. B.). — Laguerre Polynomials and Laplace Integrals. *Duke Math. J.*, **12**, 1946, p. 217-242.

Hille (E.) et Tamarkin (J. D.). — On the theory of Laplace Integrals. *Proceed. Nat. Acad. Sc.*, **19**, 1933, p. 908-912; **20**, 1934, p. 140-144.

Hull (T. E.) et Froese (C.). — Asymptotic Behaviour of the Inverse of a Laplace Transform. *Canad. J. Math.*, **7**, 1955, p. 116-125.

Humbert (P.). — *Le calcul symbolique.* Paris, Hermann, 1934.

— Nouvelles correspondances symboliques. *Bull. Sc. math.*, **69**, 1945, p. 121.

Humbert (P.) et Colombo (S.). — *Le calcul symbolique et ses applications à la Physique mathématique*, 2e édit. (Mém. Sc. math., CLVIII). Paris, Gauthier-Villars, 1965.

Humbert (P.) et Poli (L.). — Sur certaines transcendantes liées au calcul symbolique. *Bull. Sc. math.*, **68**, 1944, p. 204-214.

Jaeger (J. C.). — *Voir* Carslaw (H. S.) et Jaeger (J. C.).

Janet (M.). — *Précis de calcul matriciel et de calcul opérationnel.* Paris, P. U. F., 1954.

Janikowski (A.). — *Voir* Ditzian et Janikowski.

Kaplan (W.). — *Operational methods for linear systems.* Addison-Wesley.

Krabbe (G.). — *Operational Calculus.* Springer, 1970.

* Lavoine (J.). — *Calcul symbolique, distributions et pseudo-fonctions.* Paris, C. N. R. S., 1959.

— **Transformation de Fourier des pseudo-fonctions.* Paris, C. N. R. S., 1963.

Livermann (T. P. G.). — *Generalized functions and direct operational methods.* Prentice Hall, 1964.

Mac Lachlan (N. W.). — **Modern Operational Calculus.* Mac Millan, 1948.

*Mac Collum (P. A.) et Brower (B. P.). — *Laplace transforms.* Holt, Rinehart and Winston, 1965.

Mikusinski (J.). — Sur les fondements du calcul opératoire. *Studiæ Mathem.*, **11**, 1950, p. 41-70.

— *Operational Calculus.* Pergamon Press, 1959.

Mikusinski et Sikorski (R.). — *Théorie élémentaire des distributions.* Paris, Gauthier-Villars, 1964.

Munster (M.). — *Voir* Garnir (H. G.) et Munster (M.).

Murnaghan (F. D.). — *The Laplace Transformation.* Spartan, 1962.

Parodi (M.). — *Introduction à l'analyse symbolique.* Paris, Gauthier-Villars, 1957.

Poli (L.) et Delerue (P.). — *Le calcul symbolique à deux variables et ses applications* (Mém. Sc. math., CXXVIII). Paris, Gauthier-Villars, 1954.

Reed (J. S.). — The Mellin type of double integral. *Duke Math. J.*, **11**, 1944, p. 565-572.

Ruho (F.). — Operatorenrechnung und Hadamardscher « Partie finie ». *Math. Nachr.*, **30**, 1965, p. 237-250.

Sauer (R.) et Szabo (I.). — *Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs* (Teil I : *Funktionaltransformationen*, von G. Doetsch). Springer, 1967.

Schwartz (L.). — *Théorie des distributions.* Paris, Hermann. 2e édit., 1966.

— *Méthodes mathématiques pour les Sciences physiques.* Paris, Hermann, 1960.

Sikorski (R.). — *Voir* Mikusinski (I.) et Sikorski (R.).

*Sneddon (I. N.). — Chapitre « Functional Analysis » du tome 2 du *Handbuch der Physik.* Springer, 1955.

Temple (G.). — La théorie de la convergence généralisée et des fonctions généralisées et leurs applications à la physique mathématique. *Rendiconti di Matem.*, **11**, 1952, p. 111-122.

— Theory and applications of generalized functions. *J. London Math. Soc.*, **28**, 1953.

— The theory of generalized functions. *Proceed. Roy. Soc.*, A **228**, 1955, p. 175-190.

Titchmarsh (E. C.). — *Introduction to the theory of Fourier Integrals*, 2e édit. Oxford, University Press, 1948.

TRICOMI (F.). — Les transformations de Fourier, Laplace et Gauss et leurs applications au calcul des probabilités. *Ann. Inst. H. Poincaré*, **8**, 1938, p. 111-149.

*VAN DER POL (B.) et BREMMER (H.). — *Operational Calculus based on Two-sided Laplace Transform*, 2e édit. Cambridge University Press, 1955.

WAGNER (K. W.). — *Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation*. Barth, 1950.

WIDDER (D. V.). — *The Laplace Transform*. Princeton University Press, 1941.

ZEMANIAN (A. H.). — On the pole and zero locations of rational Laplace transformations of non negative functions. *Proceedings Am. Math. Soc.*, **10**, 1959, p. 868-872.

— *Distribution Theory and Transform Analysis*. Mc Graw Hill, 1965.

— The distributional Laplace and Mellin transformations. *S.I.A.M. J. Appl. Math.*, **14**, 1966, p. 678-690; *ibid.*, **14**, 1966, p. 1255-1265.

— *Duke Math. J.*, **34**, 1967, p. 761-769.

— *Generalized Integral Transformations*. Wiley, 1968.

Tables de transformées

DITKIN (V. A.) et PRUDNIKOV (A. P.). — *Formulaire pour le calcul opérationnel*. Paris, Masson, 1967.

DOETSCH (G.), KNIESS (H.) et VOELKER (D.). — *Tabelen zur Laplace-Transformation*. Berlin, 1947.

VOELKER (D.) et DOETSCH (G.). — *Die zweidimensionale Laplace-Transformation*. Bâle, Birkhauser, 1950.

ERDELYI, MAGNUS, OBERHETTINGER et TRICOMI. — *Tables of integral transforms*, 2 vol. New York, Mc Graw Hill, 1954.

MAC LACHLAN (N. W.) et HUMBERT (P.). — *Formulaire pour le calcul symbolique* (Mém. Sc. math., C). Paris, Gauthier-Villars, 1940.

MAC LACHLAN (N. W.), HUMBERT (P.) et POLI (L.). — *Supplément au Formulaire pour le calcul symbolique* (Mém. Sc. math., CXIII). Paris, Gauthier-Villars, 1950.

ROBERTS (G. E.) et KAUFMANN (H.). — *Tables of Laplace Transforms*. Saunders, 1966.

LAUGHLIN (T. A.). — *A table of distributional Mellin transforms*. Report 40, College of Eng. New York State University, 1965.

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS XI
ORSAY

INDEX ALPHABÉTIQUE

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS XI ORSAY