W. J. Trjitzinsky

La totale-D de Denjoy et la totale-S symétrique

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 166 (1968)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1968__166__1_0>

W. J. TRJITZINSKY
Urbana, Illinois, U. S. A.

LA TOTALE-D DE DENJOY
ET
LA TOTALE-S SYMÉTRIQUE

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
Directeur : H. VILLAT
FASCICULE CLXVI

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
1968

LA TOTALE-D DE DENJOY

ET

LA TOTALE-S SYMÉTRIQUE

Par W. J. TRJITZINSKY,

Urbana, Illinois, U. S. A.

1. Introduction. — *Notre objet est le développement approfondi de totalisations abstraites aux genres* -D *de Denjoy et* -S *symétrique.* A l'origine de toutes les totalisations est A. Denjoy; pour les totalisations en général d'une utilité capitale, *voir* les indications données dans *son livre* (D) [1] [en particulier, *voir* (D; p. 440-465)]. Dans la théorie abstraite il faut des conditions mi-topologiques, mi-métriques; on essaie d'employer une topologie minimale. Les propositions de nature métrique, comme le théorème Denjoy-Vitali entre autres, dont on fait usage dans les totalisations abstraites, ont été développées par Denjoy (D^*) [2] et, ensuite, par l'auteur dans les fascicules (T^*) [3], (T^m) [5]. Les totales-D et -S ont été développées dans l'Ouvrage (T) [4] de l'auteur sans la condition que les fermetures des ensembles des familles fondamentales, qui interviennent, soient compactes. La théorie de la totale-D, comme présentée dans (T), constitue une extension de la théorie (d'une pareille totale) due à P. Romanovski (R) [7]; le Mémoire (R) est dans l'hypothèse de compacité. La totale-S symétrique fait intervenir des difficultés considérables additionnelles. Des totalisations au genre symétrique surviennent d'une manière indispensable dans plusieurs problèmes fondamentaux. La première totalisation de cette sorte, dans l'espace euclidien $\mathfrak{U}_1$ (de dimension 1), a été développée par Denjoy, dans (D), pour le but de la résolution du problème classique du calcul des coefficients d'une série trigonométrique; il s'agit de la totalisation des dérivées secondes généralisées (de Riemann) — c'est une totalisation symétrique de second ordre. D'une façon plus générale, les totales de l'espèce-S sont utiles pour la totalisation de certains laplaciens généralisés.

En rapport avec la totalisation-D nous étudions les P- et les R-minorantes et majorantes [(2.8), (2.20)], qui sont respectivement aux genres de Perron et de Ridder. Dans la section 3 il s'agit des $\hat{\mathrm{D}}$-minorantes et majorantes [(3.1)] qui sont pareilles aux minorantes et majorantes désignées dans (R; p. 96-101) par $\overline{\mathrm{D}}$. f étant la fonction de point qui intervient, on définit, moyennant ces trois sortes de minorantes et majorantes, certaines fonctionnelles (si elles existent), désignées respectivement $\mathrm{P}(f, \mathrm{R})$ (2.8 *c*), $\mathbf{R}(f, \mathrm{R})$ (2.23), $\hat{\mathrm{D}}(f, \mathrm{R})$ (3.4). Nous n'appelons pas ces fonctionnelles, respectivement, la P-totale (ou la totale de Perron), la R-totale (ou la totale de Ridder) et la $\hat{\mathrm{D}}$-totale, pour les raisons sur ce sujet que Denjoy a données dans (D; p. 667-683) — c'est-à-dire, essentiellement parce que, en général, il n'y a aucun moyen effectivement constructif pour les calculer à partir de f; d'autre part, une totale (ou bien une intégrale) devrait éventuellement être le résultat d'un calcul. Liées avec la totalisation-S symétrique sont les P^s-, les R^s- et les $\hat{\mathrm{S}}$-minorantes et majorantes [(5.3), (6.7), (7.1)] d'une fonction f ponctuelle. Les fonctionnelles correspondantes $\mathrm{P}^s(f, \ldots)$, $\mathbf{R}^s(f, \ldots)$, $\hat{\mathrm{S}}(f, \ldots)$ sont introduites dans [(5.3), (6.11), (7.4)]; elles ressemblent d'assez loin aux fonctionnelles $\mathrm{P}(f, \ldots)$, $\mathbf{R}(f, \ldots)$, $\hat{\mathrm{D}}(f, \ldots)$. Pour les raisons indiquées plus haut nous ne les appelons pas totales.

Les conditions, définitions et résultats relativement à la totale-D ont été présentés, en résumé, dans la section 2 de notre Mémoire (T^s) [6]. Les notions d'un point « indéfiniment couvert par une famille d'ensembles $\mathcal{F}$ » et d'ensemble $\Delta(\mathcal{F})$ de points indéfiniment couverts par $\mathcal{F}$ se trouvent dans (T; p. 2). Quant à *la famille fondamentale* $\mathfrak{M}$ et la famille $\tilde{\mathfrak{M}}$, on a l'hypothèse (T; 7.4) et la définition (T; 7.7); on admet que $\mathfrak{M} \supset \mathrm{G}'$, G' étant d'accord avec [T; (2.8)]. Les décompositions-f et -$\tilde{f}$ sont spécifiées dans (T; p. 36 et 38), tandis que dans (T; p. 37-38) sont présentées l'intégrale de Burkill et les notions de la « continuité intérieure dans $\mathfrak{M}$ », de « l'additivité complète dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ », d'un point isolé-*s* et d'un ensemble parfait-*s*. La définition de la totale-D se trouve dans (T; p. 40). Notons l'hypothèse (T; 7.8) pour la mesure φ.

Dans la section 2 le théorème 2.7 est fondamental pour la définition éventuelle de $\mathrm{P}(f, \ldots)$. La constatation (2.10) présente un cas particulier où la fonctionnelle P vaut la totale-D. L'énoncé (2.11) est sur une propriété de f, lorsque f possède une P-minorante et une P-majorante. Selon (2.12), la sommabilité de f sur un R de $\mathfrak{M}$ implique

$$\mathrm{P}(f,\, \mathrm{R}) = (\mathrm{L})\int_{\mathrm{R}} f\,d\varphi.$$

Quelques propriétés immédiates de $\mathrm{P}(f, r)$, en tant qu'une fonctionnelle et une fonction d'ensemble, sont indiquées dans (2.14). D'après (2.5), l'existence de $\mathrm{P}(f, \mathrm{R})$ entraîne $\mathrm{D}\,\mathrm{P}(f, x) = f(x)$ (dérivation par rapport à $\overline{\mathfrak{M}}$) sur une plénitude de R. Si $\mathrm{P}(f, \mathrm{R})$ existe, f est mesurable sur R; si $\mathrm{P}(f, \mathrm{R})$ existe et $f \geqq 0$, f est sommable (2.16). La proposition fondamentale, qui est à la base de l'emploi de R-minorantes et R-majorantes, est comprise au théorème 2.19. Selon (2.21), si Φ est une R-minorante (de f) sur R, il vient $\overline{\mathrm{D}}\,\Phi(x) < +\infty$ sur une plénitude de R. L'existence d'une R-minorante et d'une R-majorante de f sur R (de $\mathfrak{M}$) implique $|f| < \infty$ sur une plénitude de R (2.24). D-totalisabilité de f sur R entraîne $\mathbf{R}(f, \mathrm{R}) = (\mathrm{D})\int_{\mathrm{R}} f\,d\varphi$ (D-totale) (2.25). La fonctionnelle $\mathbf{R}(f, \ldots)$ satisfait aux propriétés élémentaires (2.26). On note en plus (2.27) : $\mathrm{D}\,\mathbf{R}(f, x) = f(x)$ sur une plénitude de R, si $\mathbf{R}(f, \mathrm{R})$ existe; (2.28) $f \geqq 0$ et l'existence de $\mathbf{R}(f, \mathrm{R})$ impliquent

$$\mathbf{R}(f,\, \mathrm{R}) = (\mathrm{L})\int_{\mathrm{R}} f\,d\varphi.$$

Au théorème 2.29 il s'agit des conditions sous lesquelles l'existence de $\mathrm{P}(f, \mathrm{R})$ implique celle de $\mathbf{R}(f, \mathrm{R})$ et l'égalité de ces fonctionnelles; pour la démonstration on adapte le raisonnement dans (T; p. 60-62).

Dans la section 3, en faisant usage du lemme 7.11 de (T), on démontre (3.2) que f est mesurable et $|f| < \infty$ sur une plénitude de R, lorsque $f(x)$ possède sur R une $\hat{\mathrm{D}}$-minorante et une $\hat{\mathrm{D}}$-majorante. Moyennant le même lemme, on établit le théorème 3.3 : $\Phi(r) \leqq \Psi(r)$ [pour tout r (de $\mathfrak{M}$) $\subset$ R], dès que $\Phi[\Psi]$ est sur R une $\hat{\mathrm{D}}$-minorante [$\hat{\mathrm{D}}$-majorante] d'une même fonction ponctuelle. Quelques propriétés assez immédiates de $\hat{\mathrm{D}}(f, \ldots)$ surviennent dans (3.5). La totalisabilité-D de f sur R implique l'existence de $\hat{\mathrm{D}}(f, \mathrm{R})$ (3.5 *a*). Les énoncés (3.5 *b*), (3.5 *c*) s'obtiennent aisément. Dans (3.6) nous introduisons la notion d'une fonction *prétotalisable*-D; cette notion intervient au théorème 3.7; celui-ci présente des conditions sous lesquelles l'existence de $\mathbf{R}(f, \mathrm{R})$ entraîne celle de $\hat{\mathrm{D}}(f, \mathrm{R})$ et l'égalité de ces nombres. Enfin, au théorème 3.8 on constate que l'existence de $\hat{D}(f, R)$ (un $R \in \mathfrak{M}$) implique la relation $D(\hat{D}(f, x) = f(x)$ sur une plénitude de R, la dérivation étant par rapport à la famille $\overline{\mathfrak{M}}$.

Un résumé sommaire des résultats sur la totalisation-S (T; p. 67-131), dont nous faisons usage par la suite, est présenté de (4.1) jusqu'à (4.39 *a*). L'hypothèse 4.41 mène à une simplification considérable de la théorie de la totale-S; *cette hypothèse est admise dans les développements des sections* 5, 6, 7 *sur les* P^s-, R^s- *et* $\hat{S}$-*minorantes et majorantes*. La proposition fondamentale, fondée sur l'hypothèse 4.41, est le théorème (4.42), qui présente des conditions sous lesquelles, étant donnée une fonction Ψ sur un H de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$, il existe un ensemble $p = p(H)$ parfait-*s* dans H de sorte que Ψ soit *s. a.* (au sens de [(4.17)-(4.17 *b*)]), *relativement à p, sur* H [*voir* (4.42 *a*)]. L'énoncé (4.43) est sur la mesurabilité des dérivées extrêmes $\overline{\underline{D}}^\sigma F$ (4.28).

A la base de l'emploi des P^s-minorantes et majorantes est le théorème 5.2. F étant définie dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ sur un H de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$, l'énoncé (5.4) présente les conditions sous lesquelles l'existence de la dérivée (symétrique sphérique) $D^s F(x)$ sur une plénitude de H entraîne

$$F(H) = P^s(D^s F(x), H);$$

la constatation (5.5) fait intervenir des conditions entraînant

$$F(H) = (S)\int_H D^s F(x)\, d\varphi(x),$$

où le second membre est une totale-S. Il est montré (5.6) que l'existence sur un H (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) d'une P^s-minorante et d'une P^s-majorante de $f(x)$ entraîne $|f(x)| < \infty$ sur une plénitude de H. Au théorème 5.7 il est établi que la sommabilité (L) de $f(x)$ sur H entraîne

$$P^s(f, R) = (L)\int_H f(x)\, d\varphi(x).$$

La proposition (5.8) donne quelques conséquences de l'existence de $P^s(f, H)$ pour un H (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$). On démontre que l'existence de $P^s(f, H)$ implique la relation $D^s P^s(f, x) = f(x)$ sur une plénitude de H. Enfin, dans l'hypothèse (4.29), si $P^s(f, H)$ existe, f sera mesurable sur H et, au cas $f \geqq 0$, f sera sommable sur H.

Dans (6.1)-(6.1″) nous introduisons les notions V^σ.B. (variation bornée au sens sphérique asymétrique), A. C^σ. (continuité absolue sphérique asymétrique), A. C^σ. S., A. C^σ. I., A. C^σ. G. (continuité absolue généralisée au sens sphérique asymétrique) et la notation $F_{\langle p\rangle}$ [p au moins fermé dans l'ensemble de H considéré]. Les caractères asymétriques impliquent les propriétés correspondantes au sens symétrique (6.2). A la base de l'emploi des R^s-minorantes et majorantes est le théorème 6.5, dont la démonstration tient à la proposition (6.6); celle-ci fait intervenir le caractère A. C^σ. G. et est analogue au résultat (4.33) [*voir* la preuve à la suite du théorème 6.18]. On note l'énoncé (6.9), selon lequel le caractère V^s. B. sur un H (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) entraîne la sommabilité sur H des dérivées extrêmes $\overline{D}^\sigma$, $\underline{D}^\sigma$ asymétriques. Au moyen de (6.9) on établit (6.8) : sur une plénitude de H, $\overline{D}^\sigma \Phi(x) < +\infty$ [$\underline{D}^\sigma \Psi(x) > -\infty$], lorsque sur H, Φ [Ψ] est une R^s-minorante [une R^s-majorante] d'une fonction $f(x)$. Ensuite, on déduit (6.10), l'inégalité $\Phi(r) \leqq \Psi(r)$ [pour tout r (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) $\subset$ H], valide si sur H, Φ est une R^s-minorante et Ψ est une R^s-majorante de $f(x)$. L'existence sur H de R^s-minorantes et majorantes de f entraîne $|f| < \infty$ sur une plénitude de H (6.12). On montre que, si la S-totale F de f dans un H (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) existe et F possède les propriétés A. C^σ. G. et (4.41, I, II), on aura $R^s(f, \ldots) = F(\ldots)$ dans H. La sommabilité de f sur un H implique $R^s(f, r) = (L)\int_r f\,d\varphi$ [tout r ($\in \tilde{\mathfrak{M}}^s$) $\subset$ H] (6.14). Puis, au théorème 6.16 on vérifie que l'existence de $R^s(f, H)$ entraîne $D^s R^s(f, x) = f(x)$ sur une plénitude de H; si l'on ajoute l'hypothèse (4.29), on aura $f(x)$ mesurable et si, en plus $f \geqq 0$, f sera sommable sur H (6.17). En procédant comme dans (T; p. 123, 124), on déduit le théorème 6.19, selon lequel, F étant une fonction définie et finie pour les sphères dans un H (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$), l'inégalité $\underline{D}^\sigma F > -\infty$ sur $H - e$, où $e \in ({}^{*s})$ (5.1), implique F^-(6.3) $\in$ A. C^σ. G. sur H. Cette proposition survient dans la preuve du théorème 6.18 : l'existence de $P^s(f, H)$ entraîne celle de $R^s(f, H)$ et l'égalité des deux nombres.

Moyennant (T; lemme 13.6) on établit que $f(x)$ est finie sur une plénitude de H et mesurable, lorsque sur H, $f(x)$ possède une $\hat{S}$-minorante Φ et une $\hat{S}$-majorante Ψ (7.2). En tenant compte de (T; lemme 13.6), on déduit aussi le théorème 7.3 : $\Phi \leqq \Psi$ dans H, lorsque Φ et Ψ sont respectivement une $\hat{S}$-minorante et une $\hat{S}$-majorante sur H d'une même fonction ponctuelle. Quelques propriétés de $\hat{S}(f \ldots)$ assez immédiates sont indiquées dans (7.5). L'existence dans un H (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) de la S-totale F de f, F satisfaisant à (4.41, I, II), implique que $\hat{S}(f, H)$ existe et vaut (S) $\int_H f\,d\varphi$ (7.6). La sommabilité de f sur H entraîne

$$\hat{S}(f, H) = (L)\int_H f\,d\varphi;$$

si $f \geqq 0$ sur H et $\hat{S}(f, H)$ existe, il vient

$$\hat{S}(f, H) = (L)\int_H f\,d\varphi.$$

Dans (7.7) nous introduisons la notion d'une fonction *prétotalisable*-S sur un H. Au théorème 7.8 on admet la condition (4.29); si $f(x)$ est prétotalisable-S sur H et $R^s(f, H)$ existe, on aura $\hat{S}(f, H) = R^s(f, H)$. Enfin on montre (7.9) que, la condition (4.29) étant admise, l'existence de $\hat{S}(f, H)$ entraîne sur une plénitude de $H : D^s\,\hat{S}(f, x) = f(x)$, où la dérivation est au sens sphérique symétrique.

Dans la section 3 du Mémoire (T^s) [6] de l'auteur on a présenté une construction effective de la totale-D, en forme d'une succession transfinie des calculs. Dans la section 8 de l'Ouvrage actuel nous résolvons le problème correspondant pour la totale-S. On admet que $f(x)$ soit totalisable-S, au sens (4.18), sur un H de $\mathfrak{M}^s$ et l'on entreprend le calcul dans H de la S-totale, (S) $\int f\,d\varphi$, à partir de f. Nous procédons sans l'hypothèse (4.29) [*voir* la remarque à la fin de la section 8].

Dans les sections 9, 10, 11 nous développons la totalisation-S des séries, liée avec la totalisation-S des fonctions. Dans (D; p. 343-388) on trouve l'exposé de la totalisation des séries dans l'espace euclidien $\mathfrak{U}_1$ de dimension 1, que Denjoy a réalisée en rapport avec sa totalisation originelle, dite « simple », des fonctions. Dans (T^s) l'auteur a présenté la totalisation-D des séries; cette théorie est liée avec la totalisation-D des fonctions.

Selon (9.1), si F est définie et finie pour les sphères fermées contenues dans un H (de $\mathfrak{M}_0^s$) et p est parfait-s dans H, tandis que $\int_H^s F$ (rel. à p) [(4.15)] finie existe, alors l'intégrale $\int_r^s F$ (rel. à p) finie existe pour tout r (de $\mathfrak{M}^s$) $\subset$ H; de plus, cette intégrale indéfinie est complètement additive dans $\mathfrak{M}^s$ (9.2). En admettant que F(e) puisse être distincte de zéro pour des ensemble e de ($\ast$) (4.12), on définit le caractère de l'additivité complète de F dans $\mathfrak{M}^s$ (9.3). Dans (9.4)-(9.7) nous spécifions les notions de décompositions (finies) dans $\mathfrak{M}^s$, avec composants dans une famille $\mathfrak{N}$, de s. a. (rel. à p), de A. S. G. sur un H (de $\mathfrak{M}^s$) épais. Le lemme 9.8, qui est une adaptation de (T; lemme 13.6), joue un rôle fondamental dans la suite. Soit u_n ($n = 1, 2, \ldots$) une suite de nombres avec zéro comme le seul point d'accumulation. Désignons par $\theta = \{\theta_n\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) un ensemble de points θ_n situés sur un H de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$. Les θ_n et les u_n correspondent l'un à l'autre d'une manière biunivoque. Nous admettons la condition (10.1). *La totale*-S (si elle existe) *de la série* $\sum u_n$ sur ρ (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$)$\subset$H est une fonction finie $F(\rho) = (\rho)\sum Su_n$, qui satisfait aux conditions de la définition 10.3. Moyennant le lemme 9.8 on obtient le théorème 10.4, selon lequel *cette totale est unique*. La classe des séries $\sum u_n$ totalisables-S est linéaire (10.5).

Soit un H (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) $= \sum_1^\nu q_\iota + e$, où les q_ι (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) sont épais, disjoints, $eq_\iota = 0$, $e \in (\substack{*\\ *})$; si la série $\sum u_n$ est totalisable-S sur chacun des q_ι, cette série sera totalisable-S sur H [*voir* (10.6), (10.6 *a*)]. Au moyen du lemme 9.8 on montre (10.7) : la totalisabilité-S de $\sum u_n$ sur un r_0 (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$)$\subset$H, avec $u_n \geqq 0$, entraîne $(r_0)\sum Su_n \geqq 0$. D'après (10.8), la convergence absolue de la série $\sum u_n$ implique la totalisabilité-S de cette série et l'égalité (H)$\sum Su_n = \sum u_n$, au moins au cas où pour tout ensemble p parfait-s dans H ($\in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) et tout r de $\mathfrak{M}^s$, $r \subset$ H, $rp \neq 0$, il existe un r' (de $\mathfrak{M}^s$), contenu dans r, joint à p et dépourvu des points de θ.

Dans la section 11 on envisage une série $\sum u_n$ totalisable-S sur un H (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$), avec $\theta = \{\theta_n\}$ sur H; au moyen d'une succession transfinie des calculs on résout le problème de trouver, d'une façon effectivement constructive, la totale-S de cette série.

2. Les P_τ et les R-minorantes et majorantes associées avec la totalisation-D. — *Dans les sections* 2 *et* 3 *il s'agira toujours de fonctions d'ensemble, nulles pour tout e contenu dans la frontière d'un ensemble de* $\mathfrak{M}$. Dans les conditions actuelles, d'après [T; (7.4, 8°)], le théorème exact de Denjoy-Vitali [(D*), aussi (T; (8.1)] s'applique sous la forme suivante :

(2.1) Soient un R$\in\mathfrak{M}$ [T; hypothèse 7.4], un ensemble H, $\subset$R, mesurable et une famille $\overline{\mathfrak{N}}_1 = \{\bar{\rho}\}$, avec les ρ (de $\mathfrak{M}$) contenus dans R. Supposons que, sauf peut-être pour un ensemble mince, H est contenu dans $\Delta(\overline{\mathfrak{N}}_1)$. Étant donné un $\varepsilon > 0$, on peut choisir une suite dénombrable de $\bar{\rho}_j$, $\in \overline{\mathfrak{N}}_1$, disjoints, de sorte qu'en posant $\Gamma = \sum \bar{\rho}_j$, on ait

$$(2.1\,a) \qquad \varphi(\mathrm{H} - \mathrm{H}\Gamma) = 0, \qquad \varphi(\Gamma) < \varphi(\mathrm{H}) + \varepsilon.$$

On sait que la famille $\overline{\mathfrak{N}}_1$ peut être réduite en sorte qu'en retenant la notation originelle H et $\Delta(\overline{\mathfrak{N}}_1)$ soient identiques, sauf pour des ensembles minces [*voir* (D*; p. 353) et (T^m; p. 67, 68)].

Si $f(x)$ est une fonction numérique définie sur un ensemble H et $x_0 \in \mathrm{H}$, posons

$$(2.2) \quad \begin{cases} \mathrm{M}_{\mathrm{H}}(f, x_0, r) = \mathrm{M}_{\mathrm{H}}(x_0, r) = \sup(x \in r\mathrm{H})\, f(x), \\ m_{\mathrm{H}}(f, x_0, r) = m_{\mathrm{H}}(x_0, r) = \inf(x \in r\mathrm{H})\, f(x), \qquad \text{avec } r \text{ (de } \mathfrak{M}) \ni x_0; \end{cases}$$

$$(2.2\,a) \quad \begin{cases} \mathrm{M}_{\mathrm{H}}(f, x_0) = \mathrm{M}_{\mathrm{H}}(x_0) = \inf(r \text{ (de } \mathfrak{M}) \ni x_0)\, \mathrm{M}_{\mathrm{H}}(x_0, r), \\ m_{\mathrm{H}}(f, x_0) = m_{\mathrm{H}}(x_0) = \sup(r \text{ (de } \mathfrak{M}) \ni x_0)\, m_{\mathrm{H}}(x_0, r). \end{cases}$$

$f(x)$ sera *semi-continue supérieurement* (*inférieurement*) au point x_0 de H sur H, si

$$(2.2\,b) \qquad f(x_0) = \mathrm{M}_{\mathrm{H}}(f, x_0) \qquad [f(x_0) = m_{\mathrm{H}}(f, x_0)];$$

on dira que $f(x)$ est *continue* au point x_0 de H sur H, si

$$(2.2\,c) \qquad f(x_0) = m_{\mathrm{H}}(f, x_0) = \mathrm{M}_{\mathrm{H}}(f, x_0) \quad \text{fini}.$$

On pourrait indiquer ces propriétés « en x_0 de H relativement à H ». En tenant compte de la condition [T; (7.4, 9°)], il vient que *la continuité de f sur* H (e. g. en tout point de H relativement à H) signifie que

$$x_0 \in \mathrm{H}, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{entraînent l'existence d'un } \eta_0 = \eta(x_0, \varepsilon) > 0$$

tel que

$$(2.2\,d) \quad \operatorname{osc}(\bar{r}\mathrm{H})\, f < \varepsilon, \qquad \text{dès que} \quad \bar{r}\,(\text{de } \overline{\mathfrak{M}}) \ni x_0 \quad \text{et} \quad \varphi(\bar{r}) < \eta_0;$$

ici, le nombre au premier membre est l'oscillation de f sur $\bar{r}\mathrm{H}$, e.g. $\sup |f(x') - f(x'')|$ pour x' et x'' sur $\bar{r}$ H.

Un théorème de Lusin s'applique dans nos conditions [T; (9.2)] :

(2.3) Si $f(x)$ est mesurable et finie sur une plénitude d'un ensemble mesurable E et $\mathrm{E} \subset \overline{\mathrm{R}}(\in \mathfrak{M})$, à tout $\varepsilon > 0$ il correspond un E_ε, $\subset \mathrm{E}$, fermé tel que

$$\varphi(\mathrm{E} - \mathrm{E}_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{et} \quad f(x) \text{ est continue sur } \mathrm{H}_\varepsilon.$$

(2.4) La mesure φ est nulle pour tout ensemble contenu dans la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$; φ est complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ (T; p. 38); φ est intérieurement continue dans $\mathfrak{M}$ (T; p. 37) sur tout R de $\mathfrak{M}$.

En effet, soient un $R \in \mathfrak{M}$ et un ensemble $e \subset \overline{R} - R$; d'après [T; (7.4, 6°)] il y a r et ρ dans $\mathfrak{M}$ tels que

$$\overline{r} \subset R, \qquad \overline{R} \subset \rho, \qquad \varphi(R - r) < \varepsilon, \qquad \varphi(\rho - R) < \varepsilon;$$
$$e \subset \rho - r \qquad \text{et} \qquad \varphi(e) \leqq \varphi(\rho - r) = \varphi[(\rho - R) + (R - r)] < 2\varepsilon;$$

d'où $\varphi(e) = 0$. La seconde partie de (2.4) s'ensuit. La troisième partie est immédiate.

(2.5) Si Ψ est intérieurement continue dans $\mathfrak{M}$ pour un R (de $\mathfrak{M}$), des $r_n \in \mathfrak{M}$ existent tels que $\overline{r}_n \subset R$ et $\Psi(R) = \lim_n \Psi(r_n)$.

A tout $\varepsilon > 0$ il correspond un $\eta(\varepsilon) > 0$ de sorte que les relations

$$r(\in \mathfrak{M}) \subset R, \qquad \varphi(R - r) < \eta(\varepsilon)$$

entraînent $|\Psi(R) - \Psi(r)| < \varepsilon$; selon [T; (7.4, 6°)] il existe un $r(\varepsilon)$ (de $\mathfrak{M}$) tel que

$$\overline{r}(\varepsilon) \subset R, \qquad \varphi(R - r(\varepsilon)) < \eta(\varepsilon);$$

on aura $|\Psi(R) - \Psi(r(\varepsilon))| < \varepsilon$. La conclusion dans (2.5) découle en posant $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $r_n = r\left(\frac{1}{n}\right)$.

(2.6) Étant donnés un R de $\mathfrak{M}$ et une fonction Ψ définie pour les $\overline{r}$ (de $\overline{\mathfrak{M}}$) contenus dans $\overline{R}$, on définit les *dérivés extrêmes* $\overline{D}\,\Psi(x)$, $\underline{D}\,\Psi(x)$ et la *dérivée* unique $D\,\Psi(x)$ (si elle existe) d'accord avec [T; (8.2)] e. g. *en faisant usage des ensembles* $\imath$ *de* $\overline{\mathfrak{M}}$; $\overline{D}\,\Psi(x)$, $\underline{D}\,\Psi(x)$ et toute dérivée intermédiaire, $\underline{D}\,\Psi \leqq D^*\Psi \leqq \overline{D}\,\Psi$, sont mesurables [T; (8.3)].

(2.7) *Désignons par* (*) *toute réunion dénombrable de frontières d'ensembles de* $\mathfrak{M}$.

Le lemme fondamental qui est à la base de l'emploi des P-majorantes (P-minorantes), du genre de Perron, donné par Romanovski (R; p. 92) en rapport avec sa théorie, aura lieu dans les conditions actuelles. Ainsi :

Théorème 2.7. — *Soit* F *additive dans* $\mathfrak{M}$ *sur un* R *de* $\mathfrak{M}$ *et intérieurement continue dans* $\mathfrak{M}$ *sur* R, *tandis que sur* R :

(2.7 *a*) $\underline{D}\,F(x) > -\infty$, *sauf sur un ensemble* (*); $D\,F(x) \geqq 0$ *sur une plénitude de* R. *Alors* $F(r) \geqq 0$ *pour tout* r *(de* $\mathfrak{M}$*)* $\subset$ R.

Il suffit de démontrer le théorème en supposant que : (1°) $\underline{\mathrm{D}}\,\mathrm{F}(x) > 0$ sur une plénitude de R; en effet, si F satisfait aux conditions indiquées au théorème, d'après (2.4) la fonction $\mathrm{F}' = \mathrm{F} + \varepsilon\varphi$ sera additive dans $\mathfrak{M}$ et intérieurement continue dans $\mathfrak{M}$ sur R, tandis que $\underline{\mathrm{D}}\,\mathrm{F}'(x) > 0$ sur une plénitude de R; on aura la conclusion du théorème pour F′, donc pour F. De plus, comme une conséquence de (2.5), il suffit d'obtenir la conclusion du théorème pour $\mathrm{R}_0 \in \mathfrak{M}$, avec $\overline{\mathrm{R}}_0 \subset \mathrm{R}$. Le reste de la démonstration est comme dans (R), en s'appuyant sur le théorème de Denjoy-Vitali sous la forme (2.1).

(2.8) Si $f(x)$ est une fonction numérique de point définie sur une plénitude d'un R (de $\mathfrak{M}$), une fonction Φ [une fonction Ψ] sera dite une P-*minorante* [P-*majorante*] de $f(x)$, si elle est additive dans $\mathfrak{M}$ et intérieurement continue dans $\mathfrak{M}$ sur R, tandis que

(2.8 *a*) $\overline{\mathrm{D}}\,\Phi(x) < +\infty$ $[\underline{\mathrm{D}}\,\Psi(x) > -\infty]$ sur R sauf sur un ensemble (*),
(2.8 *b*) $\overline{\mathrm{D}}\,\Phi(x) \leqq f(x)$ $[\underline{\mathrm{D}}\,\Psi(x) \geqq f(x)]$ sur une plenitude de R;

si pour une $f(x)$ de la sorte indiquée et pour tout $\varepsilon > 0$ il y a une P-minorante Φ et une P-majorante Ψ de f, telles que $\Psi(\mathrm{R}) - \Phi(\mathrm{R}) < \varepsilon$, on définit le nombre

$$\mathrm{P}(f, \mathrm{R}) = \sup_{\Phi} \Phi(\mathrm{R}) = \inf_{\Psi} \Psi(\mathrm{R}). \tag{2.8 c}$$

On note que, d'après le théorème 2.7, $\Phi(r) \leqq \Psi(r)$ (tout r, de $\mathfrak{M}$, $\subset$ R); $\mathrm{P}(f, r)$ est une fonctionnelle de f, f décrivant un certain champ $\mathfrak{P}$, et une fonction d'ensemble r (de $\mathfrak{M}$) $\subset$ R. Pour les raisons indiquées dans la section 1 nous n'appelons pas $\mathrm{P}(f, \ldots)$ totale (ou intégrale) de Perron.

(2.9) Admettons que F est additive dans $\mathfrak{M}$ et intérieurement continue dans $\mathfrak{M}$ sur R, tandis que $-\infty < \underline{\mathrm{D}}\,\mathrm{F}(x)$, $\overline{\mathrm{D}}\,\mathrm{F}(x) < +\infty$, sauf sur un ensemble (*), et que la dérivée $\mathrm{D}\,\mathrm{F}(x)$ existe sur $\mathrm{R} - e$, $\varphi(e) = 0$; alors $\mathrm{P}(\mathrm{D}\,\mathrm{F}(x), \mathrm{R})$ existe et vaut $\mathrm{F}(\mathrm{R})$.

En effet, la fonction $f(x) = \mathrm{D}\,\mathrm{F}(x)$ est définie sur $\mathrm{R} - e$ [elle est mesurable d'après (2.6)]; F sera à la fois une P-minorante et une P-majorante de $f(x)$; d'où la conclusion.

(2.10) *Si* F *satisfait aux conditions de l'énoncé* (2.9) *et si, en plus,* F *est complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}$ *sur* R [(T; (7.7)), (T; p. 38)] *et est continue au sens de* [T; (10.7)], *tandis que* $\mathfrak{M}$ *jouit de la propriété de mobilité* (T; p. 60), *il s'ensuivra que*

$$(2.10\,a)\qquad \mathrm{F}(\mathrm{R}) = \mathrm{P}(\mathrm{D\,F}(x),\ \mathrm{R}) = (\mathrm{D})\int_{\mathrm{R}} \mathrm{D\,F}(x)\, d\varphi(x),$$

le troisième membre étant une totale-D.

Ce résultat découle de (2.9) et du théorème 10.8 (T; p. 60).

(2.11) *Si f possède sur* R *une* P-*minorante* Φ *et une* P-*majorante* Ψ, *f sera finie sur une plénitude de* R [pour cela il suffit donc que P(*f*, R) existe].

Si (2.11) est en défaut, on aura par exemple $f = +\infty$ sur un ensemble *h*, $\varphi_e(h) = \eta > 0$. Selon (2.6), la dérivée $\underline{\mathrm{D}}\,\Psi(x)$ est mesurable, donc l'ensemble $h_0 = \{x \in \mathrm{R};\ \underline{\mathrm{D}}\,\Psi(x) = +\infty\}$ l'est. D'après (2.8 *b*) (pour Ψ) $\underline{\mathrm{D}}\,\Psi(x) = \mathrm{D}\,\Psi(x) = +\infty$ sur $h - \lambda$, $\varphi(\lambda) = 0$; $h_0 \supset h - \lambda$. $\mathrm{F} = \Psi - \Phi$ (additive dans $\mathfrak{M}$ sur R) $\geqq 0$, donc $\mathrm{F} \in$ V.B. sur R au sens de (T; p. 50); d'après [T; (9.4)], tous les dérivés (extrêmes et intermédiaires) de F sont sommables sur R; en particulier, D^* désignant un dérivé intermédiaire quelconque, $\mathrm{D}^*\mathrm{F}$ sera fini sur une plénitude de R. On a $\dfrac{\Psi(r_i)}{\varphi(r_i)} \to \mathrm{D}\,\Psi(x)\ (= +\infty)$ pour $x \in h_0$, dès que $r_i = r_i(x) \in \mathfrak{M}$, $\bar{r}_i \ni x$, $\varphi(r_i) \to 0$. Pour tout $x \in h - \lambda$ prenons les $r_i = r_i(x)$ de sorte que $\lim \dfrac{\Phi(r_i)}{\varphi(r_i)} = \mathrm{D}^*\Phi(x)$ (fini ou infini) existe. D'après (2.8 *a*), $\mathrm{D}^*\Phi(x)\ \big(\leqq \overline{\mathrm{D}}\,\Phi(x)\big) < +\infty$ sur une plénitude h_1 de $h - \lambda$ (donc de *h*). On a

$$\lim \frac{\mathrm{F}(r_i)}{\varphi(r_i)} = \mathrm{D}\,\Psi(x) - \mathrm{D}^*\Phi(x) = \mathrm{D}^*\mathrm{F}(x) \quad \text{sur } h_1;$$

ici $\mathrm{D}^*\mathrm{F}(x)$ est fini sur une plénitude h_2 de h_1 (de *h*); ainsi

$$\mathrm{D}^*\mathrm{F}(x)\ \ (\text{fini}) \geqq \mathrm{D}\,\Psi(x) - \mathrm{D}\,\Phi(x) = +\infty - \overline{\mathrm{D}}\,\Phi(x) = +\infty \quad \text{sur } h_2;$$

il y a une impossibilité, en tant que h_2 est non vide [car $\varphi_e(h_2) = \varphi_e(h) = \eta > 0$]. On procède d'une même façon pour $f = -\infty$ sur un *h*, $\varphi_e(h) > 0$. (2.11) *est vérifié.*

(2.12) *Si f est sommable sur un* R, P(*f*, R) *existe et vaut l'intégrale de Lebesgue* $(\mathrm{L})\int_{\mathrm{R}} f\,d\varphi$.

Comme au cas analogue (R; p. 93) il suffit d'établir cet énoncé avec $f \geqq 0$ et finie partout sur R. Il y a des modifications dans la démonstration en tant que dans la théorie actuelle on ne suppose pas que les fermetures des ensembles de $\mathfrak{M}$ soient compactes. Notons d'abord qu'avec la semi-continuité définie selon (2.2)-(2.2 *b*) on peut vérifier, dans les conditions actuelles, le fait suivant :

(2.13) Si q est sommable sur un R (de $\mathfrak{M}$), pour l'intégrale indéfinie $F(e) = \int_e q\,d\varphi$ (e mesurable, $\subset R$) on aura $\underline{D}\,F(x) \geqq q(x)$ aux points x de R, où $q(x)$ est semi-continue inférieurement relativement à R.

L'énoncé (2.12) est démontré comme dans (R; p. 93-94) en faisant usage du théorème de Lusin dans la forme (2.3) et de (2.13). Au cas envisagé, on définit effectivement une P-majorante Ψ et une P-minorante Φ de $f(x)$, toutes les deux étant certaines intégrales lebesguiennes indéfinies, tandis que $\Psi - \Phi < \varepsilon$.

(2.14) Si P(f, R) existe, P(f, r) existe pour tout r (de $\mathfrak{M}$)$\subset$R et représente une fonction additive dans $\mathfrak{M}$ et intérieurement continue dans $\mathfrak{M}$ sur R; si $P(f_i, R)$ ($i = 1, 2$) existent et si k_1 et k_2 sont des constantes, on aura

$$P(k_1 f_1 + k_2 f_2, R) = k_1 P(f_1, R) + k_2 P(f_2, R).$$

Cet énoncé est une conséquence immédiate des définitions.

(2.15) *Si* P(f, R) *existe*, $D\,P(f, x) = f(x)$ *sur une plénitude de* R.

On peut suivre l'idée de la démonstration dans (R; p. 95). Pour $\varepsilon > 0$, une P-majorante Ψ et une P-minorante Φ de f sur R existent, telles que $F(r) = \Psi(r) - \Phi(r) < \varepsilon^2$ (r, de $\mathfrak{M}$, $\subset R$). Posons

$$h = h(\varepsilon) = (x \in R;\ \overline{D}\,F(x) > \varepsilon);$$

d'après (2.6), h est mesurable; moyennant le théorème de Denjoy-Vitali dans la forme (2.1), il vient $\varphi(h) < \varepsilon^{-1}F(R) < \varepsilon$. Sur une plénitude $q = q(\varepsilon)$ de $R - h(\varepsilon)$

$$(1) \qquad 0 \leqq D\,\Psi(x) - \overline{D}\,\Phi(x) \leqq \overline{D}\,\Psi(x) - \overline{D}\,\Phi(x) \leqq \overline{D}\,F(x) \leqq \varepsilon.$$

Écrivons $P(r) = P(f, r)$; $q_n = q\left(\frac{1}{n}\right)$, Φ_n, Ψ_n correspondent à $\varepsilon = \frac{1}{n}$; sur q_n : $\overline{D}\,\Phi_n(x) \equiv f(x) \leqq \underline{D}\,\Psi_n(x)$. Sur une plénitude Q_0 de $Q = \overline{\lim}\, q_n$ (donc de R), on aura $(\underline{D}\,P(x) \leqq) f(x) = \overline{D}\,P(x)$, ce résultat pour $P_1(r) = P(-f, r)$ donne $f(x) = \underline{D}\,P(x)$ sur une plénitude de R; (2.15) *s'ensuit.*

Corollaire 2.16. — *L'existence de* P(f, R) *entraîne la mesurabilité de f sur* R; *si* $f \geqq 0$ *sur* R *et* P(f, R) *existe, f sera sommable sur* R.

La première partie découle de (2.15) et de (2.6), la seconde comme dans (R; p. 94-95).

Avant de considérer des R-*minorantes et* R-*majorantes, au genre de Ridder*, empruntons quelques faits préliminaires au mémoire (T), à savoir (T; p. 52, 53, 55).

(2.17) F étant définie dans $\mathfrak{M}$ sur un R, on dira que $F \in$ A. C. (*absolument continue*) sur R, si pour $\varepsilon > 0$ il y a un $\eta(\varepsilon) > 0$ de sorte que $\left|\sum F(q_i)\right| < \varepsilon$, dès que :

(2.17 *a*) q_i (de $\mathfrak{M}$), en nombre fini, sont disjoints, $q_i \subset R$, $\varphi\left(\sum q_i\right) < \eta(\varepsilon)$; $F \in$ A. C. I. (A. C. inférieurement), si (2.17 *a*) implique seulement $\sum F(q_i) > -\varepsilon$; une définition analogue pour A. C. S. (A. C. supérieure). On dit *système fini dans* R pour désigner un nombre fini de q_i (de $\mathfrak{M}$) disjoints et contenus dans R; on écrira

$$F^-(s) = \inf_\sigma F(\sigma), \qquad F^+(s) = \sup_\sigma F(\sigma),$$

si s est un système fini dans R, les σ désignant tous les systèmes finis (vide ou non) contenus dans s. Il vient

$$(2.17\,b) \qquad F^+(s) \geqq 0 \geqq F^-(s), \qquad F^+(s) \geqq F(s) \geqq F^-(s),$$
$$\overline{D}F^+ \geqq D^*F \geqq \underline{D}F^- \quad \text{sur } R.$$

(2.17 *c*) Si F est additive dans $\mathfrak{M}$ sur R et p est fermé, on pose (avec $r \in \mathfrak{M}$, $r \subset R$)

$$F_p(r) = F(r) \quad (\text{si } \bar{r}p \neq 0), \quad = 0 \quad (\text{si } \bar{r}p = 0).$$

$F \in$ A. C. G. (*A. C. généralisée*) sur R, si p parfait-s, $r \in \mathfrak{M}$, $r \subset R$, $rp \neq 0$ entraînent l'existence d'un r_1 (de $\mathfrak{M}$), $\subset r$ et joint à p, de sorte que $F_p \in$ A. C. sur r_1; $F \in$ *A. C. G. sur un* R *équivaut à* $R = \sum_n \lambda(n)$, *où les* $\lambda(n)$ *sont fermés (dans* R*), tout* $\lambda(n)$ *étant dans la frontière d'un ensemble de* $\mathfrak{M}$, *ou bien* $F_{\lambda(n)} \in$ *A. C. sur* R.

(2.18) Avec F définie dans $\mathfrak{M}$ sur un R, on dira que $F \in$ A. C. G. I. *est* A. C. G. *inférieurement, sur* R, si $F^- \in$ A. C. G. sur R; une définition analogue pour le caractère A. C. G. S.

La base pour l'emploi de minorantes et majorantes au genre de Ridder, introduites plus loin, est le théorème suivant qui est analogue à un énoncé dans (R; p. 95) :

THÉORÈME 2.19. — *F étant additive dans* $\mathfrak{M}$ *et intérieurement continue dans* $\mathfrak{M}$ *sur* R, *si* $F \in$ A. C. G. I. (2.18) *sur* R *et* $\underline{D}F(x) \geqq 0$ *sur une plénitude de* R, *on aura* $F(r) \geqq 0$ *pour tout* r *(de* $\mathfrak{M}$*)* $\subset$ R.

Moyennant (2.4) et (2.5), comme dans la preuve du théorème 2.7, on voit qu'il suffit de démontrer le théorème en admettant que $\underline{D}\,F(x) > 0$ sur une plénitude de R et d'obtenir la conclusion pour $R_0 \in \mathfrak{M}$, $\overline{R}_0 \subset R$. La démonstration est achevée comme dans (R; p. 95) en s'aidant de (2.17 *c*) et du théorème de Denjoy-Vitali (2.1); on ne fait pas usage d'ensembles compacts.

(2.20) On dira que $\Phi[\Psi]$ est R-*minorante* [R-*majorante*] de *f*, *f* définie sur une plénitude de R, si elle est additive et intérieurement continue dans $\mathfrak{M}$ sur R, tandis que

$$\Phi \in \text{A. C. G. S.}\ [\Psi \in \text{A. C. G. I.}]\quad \text{sur R},$$
$$\overline{D}\,\Phi(x) \leqq f(x)\ [\underline{D}\,\Psi(x) \geqq f(x)]\quad \text{sur une plenitude de R}.$$

(2.21) Pour les fonctions Φ, Ψ survenant dans (2.20), on a $\overline{D}\,\Phi(x) < +\infty$ et $\underline{D}\,\Psi(x) > -\infty$ sur une plénitude de R.

En effet, $\Psi^- \in$ A. C. G. et

$$(2.17\,c)\qquad R \subset \sum \lambda_n + \sum g_n,$$

où g_n est la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$, tandis que λ_n est fermé et $\Psi^-_{\lambda_n} \in$ A. C. sur R. On obtient : $(1_0)\ \underline{D}\,\Psi_{\lambda_n}(x) = \underline{D}\,\Psi(x)$ sur $R\lambda_n$; or $\Psi^-_{\lambda_n} \in$ V. B. sur R et, d'après (T; p. 51), $\underline{D}\,\Psi^-_{\lambda_n}(x)$ est fini sur une plénitude de R (le dérivé est sommable sur R); ainsi [(1_0), (2.17 *b*)] :

$$\underline{D}\,\Psi(x)\,[= \underline{D}\,\Psi_{\lambda_n}(x) \geqq \underline{D}\,\Psi^-_{\lambda_n}(x)] > -\infty$$

sur une plénitude de $R\lambda_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), donc de R.

La démonstration est pareille pour $\overline{D}\,\Phi(x)$.

(2.22) *Si sur* R, Φ *est une* R-*minorante et* Ψ *est une* R-*majorante de* $f(x)$, *on aura* $\Phi(r) \leqq \Psi(r)$ *pour tout* r (*de* $\mathfrak{M}$) $\subset$ R.

Cela s'ensuit du théorème 2.19 et de (2.21).

(2.23) Étant donnée une $f(x)$ définie sur une plénitude de R, *on dira que le nombre* $\mathbf{R}(f, R)$ *existe, si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe des* R-*minorantes* Φ *et des* R-*majorantes* Ψ *de* $f(x)$, *telles que* $\Psi(R) - \Phi(R) < \varepsilon$; *alors on pose*

$$\mathbf{R}(f, R) = \sup_{\Phi} \Phi(R) = \inf_{\Psi} \Psi(R).$$

Pour les raisons données dans la section 1 nous n'appelons par $\mathbf{R}(f, r)$ totale (ou intégrale) de Ridder. $\mathbf{R}(f, r)$ est une fonctionnelle de *f*, pour *f* dans un certain champ, et une fonction d'ensemble *r* (de $\mathfrak{M}$) $\subset$ R.

(2.24) *Si une* R-*minorante* Φ *et une* R-*majorante* Ψ *de* $f(x)$ *existent sur* R, f *sera finie sur une plénitude de* R.

Supposons, par exemple, que $f = +\infty$ sur un h, $\varphi_e(h) = \eta > 0$. Or $h_0 = \{x \in R;\ \underline{D}\,\Psi(x) = +\infty\}$ est mesurable. D'après (2.20), $D\,\Psi(x) = +\infty$ sur un h_1, $\varphi(h - h_1) = 0$; $h_0 \supset h_1$, $\varphi(h_0) \geqq \eta$. Comme dans la démonstration de (2.11), il suit que tout dérivé $D^*(\Psi - \Phi)$ est fini sur un e, $\varphi(R - e) = 0$, et que $D\,\Psi(x) - \underline{D}\,\Phi(x)$ est finie sur eh_0. Donc $\underline{D}\,\Phi(x) = D\,\Phi(x) = +\infty$ sur eh_0, ce qui est contraire à (2.21).

(2.25) *Si* f *est* D-*totalisable sur* R, $\mathbf{R}(f, R)$ *existe et*

$$(D)\int_R f\,d\varphi = \mathbf{R}(f, R).$$

D'après les caractères de la D-totale,

$$F(r) = (D)\int_r f\,d\varphi \qquad [r \text{ de } \mathfrak{M} \text{ variable, } r \subset R],$$

spécifiés au Mémoire (T), on a $F \in$ A. C. G. sur R, e. g. simultanément F est A. C. G. I. et A. C. G. S.; en outre, selon (T; théorème 8.8), $D\,F(x) = f(x)$ sur une plénitude de R; F est une R-majorante ainsi qu'une R-minorante sur R de f, d'où la conclusion dans (2.25).

L'énoncé suivant est immédiat :

(2.26) Si $\mathbf{R}(f, R)$ existe, $\mathbf{R}(r) = \mathbf{R}(f, r)$ existe dans $\mathfrak{M}$ sur R et y représente une fonction additive et intérieurement continue dans $\mathfrak{M}$; si k_1, k_2 sont des constantes et les $\mathbf{R}(f_i, R)$ $(i = 1, 2)$ existent, on aura

$$\mathbf{R}(k_1 f_1 + k_2 f_2, R) = k_1\,\mathbf{R}(f_1, R) + k_2\mathbf{R}(f_2, R).$$

(2.27) *Si* $\mathbf{R}(f, R)$ *existe, en posant* $\mathbf{R}(r) = \mathbf{R}(f, r)$ (r *de* $\mathfrak{M}$ *variable*, $r \subset R$), *on aura* $D\,\mathbf{R}(x) = f(x)$ *sur une plénitude de* R.

La démontration est comme celle pour (2.15).

(2.28) *Si* $\mathbf{R}(f, R)$ *existe et* $f(x) \geqq 0$ *sur* R, f *sera sommable et* $\mathbf{R}(f, R) = (L)\int_R f\,d\varphi$ (*finie*).

En effet, d'après (2.27) et en raison de (2.6), l'existence de $\mathbf{R}(f, R)$ entraîne la mesurabilité de f sur R; si $(L)\int_R f\,d\varphi = +\infty$, en posant $q_n = f$ (où $f < n$), $= n$ (où $f \geqq n$), on aura

$$(L)\int_R q_{n_1}\,d\varphi > \mathbf{R}(f, R) \quad \text{(fini) pour } n_1 \text{ suffisamment grand.}$$

Conséquemment, en tenant compte de [T; (7.13 e)], (2.25), il vient

$$(\mathrm{L})\int_{\mathrm{R}} q_{n_1}\,d\varphi \ (\text{finie}) = (\mathrm{D})\int_{\mathrm{R}} q_{n_1}\,d\varphi = \mathbf{R}(q_{n_1}, \mathrm{R}) > \mathbf{R}(f, \mathrm{R}).$$

L'inégalité ici présente une contradiction, car $q_{n_1} \leqq f$.

Théorème 2.29. — *Admettons la mobilité* [T; (10.7 a)] *de* $\mathfrak{M}$ *e la continuité* [T; (10.7)] *dans* $\mathfrak{M}$ *de* $\Psi[\Phi]$; *si* $\Psi[\Phi]$ *est un* R *une* P-*majorante* [P-*minorante*] *de* $f(x)$, $\Psi[\Phi]$ *sera une* R-*majorante* [R-*minorante*] *de* $f(x)$; *l'existence de* P(f, R) *entraînera celle de* $\mathbf{R}(f, \mathrm{R})$ *et l'égalité de ces nombres.*

Envisageons, par exemple, une P-majorante Ψ. Selon (2.8), $f(x)$ est définie sur une plénitude de R, Ψ est additive dans $\mathfrak{M}$ sur R, $\underline{\mathrm{D}}\,\Psi(x) \geqq f(x)$ sur une plénitude de R et

$$(1^{\circ})\quad \underline{\mathrm{D}}\,\Psi(x) > -\infty \quad \text{sur } \mathrm{R}-\mathrm{H}_0, \qquad \text{où}\quad \mathrm{H}_0 \subset \mathrm{H}_1 = \sum_{1}^{\infty} g_n \in (^*)\quad (2.7).$$

Ψ remplira les conditions (2.20) pour une R-majorante, si l'on établit que $\Psi \in$ A. C. G. I. sur R, ce qui voudrait dire $\Psi^- \in$ A. C. G. sur R (2.18); d'après (2.17 c), cela reviendrait à montrer que des ensembles $\mathrm{E}_m\,(\subset \mathrm{R})$ *fermés* existent tels que $\mathrm{R}-\sum_{1}^{\infty}\mathrm{E}_m$ est contenu dans un ensemble (*) (2.7), tandis que $\Psi^-_{\mathrm{E}_m} \in$ A. C. sur R (2.17); e. g. que pour $\varepsilon > 0$ un $\eta_m(\varepsilon) > 0$ correspond, de sorte que les relations

$$(2^{\circ})\quad q_i(\text{de } \mathfrak{M}) \subset \mathrm{R} \quad (i = 1, \ldots, \nu \text{ fini}),\quad q_i \text{ disjoints},\qquad \varphi\Big(\sum q_i\Big) < \eta_m(\varepsilon)$$

[c'est-à-dire $\{q_i\}$ est un système fini $s \subset \mathrm{R}$, avec $\varphi(s) < \eta_m(\varepsilon)$] entraînent

$$(3^{\circ})\qquad (0 \geqq)\ \Psi^-_{\mathrm{E}_m}(q_i) > -\varepsilon \qquad (\text{ou bien}, \geqq -\varepsilon).$$

Nous adaptons le raisonnement dans (T; p. 60-62) en faisant les modifications suivantes dans les formules et constatations (1′), ..., (14′). L'inégalité dans (3′) est remplacée par $\Psi(\rho) \geqq -m\,\varphi(\rho)$; la seconde inégalité (6′) est omise; (8′) prend la forme $\Psi(\rho) \geqq -b(x)\,\varphi(\rho)$; dans la quatrième ligne à la suite de (9′) on aura

$$\Psi(\rho) \geqq -b(x)\,\varphi(\rho) \geqq -m_x\varphi(\rho), \qquad \rho \subset \mathrm{R};$$

(10′) *devient* $\mathrm{R}-\mathrm{H}_0 = \sum \mathrm{E}_m$, *où* H_0 *est l'ensemble survenant dans* (1°); à partir de (10′) x est un point sur $\overline{\mathrm{E}}_m$, E_m étant défini selon les formules (1′), (2′), (3′) modifiées; la première partie de (13′) sera

$$\Psi(\rho') \geqq -m\,\varphi(\rho') = -m\,\varphi(\rho);$$

dans (12') et (13') on fait usage de la mobilité de $\mathfrak{M}$; l'inégalité dans (14') est remplacée par $\Psi(\rho) \geqq -m\,\varphi(\rho)$; (14') s'ensuit en raison de la continuité dans $\mathfrak{M}$ de Ψ; on conclut que x de $\overline{E}_m$ ($\subset F_m$ fermé) est sur E_m, donc E_m est *fermé* ($m = 1, 2, \ldots$).

A cause de (1°), $R - \sum E_m = H_0 \subset H_1 \in$ (*). Pour $0 < \varepsilon \leqq 1$, posons $\eta_m(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{m}$ et considérons un système fini s ($\subset R$) satisfaisant à (2°), $s = \{q_j\}$; on a

$$\varphi(q_j) < \frac{\varepsilon}{m} \leqq \frac{1}{m}.$$

Si $\bar{q}_j E_m \neq 0$ pour un j, en utilisant la définition [T; p. 60; (2'), (3')] modifiée de E_m (avec $\rho = q_j$ et un point $x \in \bar{q}_j E_m$), on obtient $\Psi(q_j) \geqq -m\,\varphi(q_j)$. Par conséquent, (2°) implique

$$\begin{aligned}\Psi_{E_m}(s) &= \sum_j \Psi_{E_m}(q_j) \\ &= \sum_j{}' (\bar{q}_j E_m \neq 0)\, \Psi(q_j) \geqq -m \sum_j{}' \varphi(q_j) \geqq -m\,\varphi(s) > -\varepsilon;\end{aligned}$$

ainsi (2.17), $(0 \geqq)\, \Psi_{E_m}(s) \geqq -\varepsilon$, e. g. (2°) entraîne (3°). Le théorème est vérifié pour Ψ; d'une manière analogue on le démontre pour Φ; le reste est immédiat.

3. Les $\hat{D}$-minorantes et majorantes associées avec la totalisation-D.

(3.1) $f(x)$ étant définie sur une plénitude d'un R (de $\mathfrak{M}$), on dira que $\Phi[\Psi]$ est une $\hat{D}$-*minorante* [$\hat{D}$-*majorante*] de f, si $\Phi[\Psi]$ est *complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}$, *intérieurement continue dans* $\mathfrak{M}$ sur R et est telle que : les relations

(3.1 a) $\quad p$ parfait-s, $\quad pR \neq 0$, $\quad r$ (de $\mathfrak{M}$) $\subset R$, $\quad rp \neq 0$

entraînent l'existence d'un ρ (de $\mathfrak{M}$) $\subset r$, $\rho p \neq 0$, de sorte que

(3.1 b) $\quad \overline{\int_q} \Phi_p \leqq (L) \int_{qp} f\, d\varphi \quad \left[\underline{\int_q} \Psi_p \geqq (L) \int_{qp} f\, d\varphi \right]$ pour tout q (de $\mathfrak{M}$) $\subset \rho$,

f étant sommable au sens fini sur ρp.

Il serait naturel d'appeler cette sorte de minorantes [majorantes] les *minorantes* [...] *de Denjoy*, parce qu'apparemment elles sont étroitement liées avec la totalisation-D [comme développée dans (T; p. 35-67)], qui est du genre des totalisations originelles de Denjoy. Les $\hat{\mathrm{D}}$-minorantes [...] correspondent aux $\overline{\mathrm{D}}$-minorantes [...] dans (R; p. 96-101), qui ont été envisagées dans les conditions du Mémoire de Romanovski.

On pourrait procéder à partir de la définition (3.1), en n'employant pas d'abord les conditions [T; (7.4, 7°), (7.4, 8°), la partie extérieure de (7.4, 6°)].

(3.2) *Si $f(x)$ possède sur* R *une $\hat{\mathrm{D}}$-minorante [$\hat{\mathrm{D}}$-majorante]* $\Phi[\Psi]$, *$f(x)$ sera mesurable et finie sur une plénitude de* R.

Nous allons démontrer cet énoncé au moyen de (T; lemme 7.11) [qui est essentiellement différent du lemme analogue dans (R)]. Considérons le cas où $f(x)$ a sur R une $\hat{\mathrm{D}}$-minorante Φ. Soit $\mathfrak{N}, \subset \mathfrak{M}$, la famille d'ensembles ρ, tels que :

(1′) $\rho \subset \mathrm{R}$, $f(x)$ est mesurable sur ρ, $f(x)$ est finie sur une plénitude de ρ.

Supposons qu'un r (de $\mathfrak{N}) \subset \mathrm{R}$, tandis que des r^n $(n=1, 2, \ldots)$ épais existent tels que

(2′) $r^n \in \tilde{\mathfrak{M}}$, $r^n \uparrow r$, r^n possède dans $\mathfrak{M}$ une décomposition-$\tilde{f}$ avec composants dans $\mathfrak{N}$; ainsi :

$$(3') \quad r^n = \sum_{1}^{\nu_n} \rho_i^n + e^n, \text{ les } \rho_i^n \ (n \text{ fixe}) \text{ disjoints, } \rho_i^n \in \mathfrak{N},\ e^n \text{ contenu}$$

dans une réunion finie de frontières d'ensembles de $\mathfrak{M}$.

Il suit que $f(x)$ est mesurable sur r^n et est finie sur une plénitude de r^n; d'après (2′), $f(x)$ aura les mêmes propriétés relativement à r; donc $r \in \mathfrak{N}$; *la condition* [T; (7.11, 1_0)] *est remplie.* Si un $\rho \in \mathfrak{N}$, tout r (de $\mathfrak{M}$) contenu dans ρ sera un ensemble de $\mathfrak{N}$, e. g. *la condition* [T; (7.11, 2_0)] *est satisfaite.* Considérons un r' de $\mathfrak{M}$, tel que tout r de $\mathfrak{M}$, avec $\bar{r} \subset r'$, apartient à $\mathfrak{N}$; φ satisfait à la partie intérieure de la condition [T; (7.4, 6_0)], donc pour $n=1, 2, \ldots$ il existe un r_n (de $\mathfrak{M}$), tel que $\bar{r}_n \subset r'$, $\varphi(r'-r_n) < \frac{1}{n}$; on a $r_n \in \mathfrak{N}$, donc sur une plénitude de $q = \sum r_n$ $f(x)$ est finie, $f(x)$ est mesurable sur q; or

$$r' - q = \prod (r' - r_n) \subset r' - r_n, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi(r'-q) < \frac{1}{n}$$

et q est une plénitude de $\bar{r}'$; ainsi $r' \in \mathfrak{N}$; *on a vérifié* [T; (7.11, 3_0)] pour la famille $\mathfrak{N}$.

Soit $\mathfrak{N}_1$ *une sous-famille de* $\mathfrak{N}$ *ne couvrant pas* R. *L'ensemble* $\lambda = F - \sum(\mathfrak{N}_1)\rho$, *où* F est l'espace $\Delta(\mathcal{F})$, est fermé et λR est non vide.

Cas (1°) : λR *possède un point* x_0 *isolé-s.* — Il y a un r_0 (de $\mathfrak{M}$) tel que

$$R \supset r_0 \ni x_0, \qquad r_0\lambda \subset g,$$

où g est la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$;

$$r_0 - r_0\lambda \in \tilde{\mathfrak{M}} \qquad \text{et} \qquad r_0 - r_0\lambda \subset \sum(\mathfrak{N}_1)\,\rho.$$

En vertu de (T; lemme 7.10), pour $\mathfrak{N}_1$ et avec $\tilde{r} = r_0 - r_0\lambda$, il vient

$$r_0 - r_0\lambda = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\rho}_\nu, \quad \text{les } \tilde{\rho}_\nu \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}) \text{ disjoints},$$

$$\tilde{\rho}_\nu \subset \text{un } r_\nu \text{ de } \mathfrak{N}_1; \qquad \tilde{\rho}_\nu = \sum_{i=1}^{k_\nu} \rho_{\nu,i} + e_\nu \quad (\text{décomposition-}\tilde{f} \text{ dans } \mathfrak{M}),$$

$$\varphi(e_\nu) = 0; \qquad \rho_{\nu,i} \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset \tilde{\rho}_\nu \subset r_\nu, \qquad \text{avec} \quad r_\nu \in \mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}.$$

D'après [T; (7.11, 2_0)], déjà établi pour $\mathfrak{N}$, on obtient $\rho_{\nu,i} \in \mathfrak{N}$. Or

$$(4') \qquad r^n = r_0\lambda + \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{\rho}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_\nu} \rho_{\nu,i} + e^n \ (e^n \text{ mince}) \in \tilde{\mathfrak{M}}; \qquad r^n \uparrow r_0 (\subset R).$$

Par conséquent, le caractère [T; (7.11, 1_0)], déjà vérifié pour $\mathfrak{N}$, entraîne $r_0 \in \mathfrak{N}$. Ainsi, *au cas* (1°) *il existe un* r_0 *de* $\mathfrak{N}$ *non couvert par* $\mathfrak{N}_1$.

Cas (2°) : *L'ensemble* λ *est parfait-s dans* R. — Puisque $\lambda R \neq 0$ et Φ est une D-minorante de f, selon (3.1) on déduit l'existence d'un ρ (de $\mathfrak{M}$) $\subset R$, $\lambda\rho \neq 0$, de sorte que

$$\bar{\int_q} \Phi_\lambda \leqq (L) \int_{q\lambda} f\,d\varphi \ \text{(fini)} \quad \text{pour tout } q \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset \rho;$$

en particulier, f étant sommable (au sens fini) sur ρ, f est mesurable sur ρ et est finie sur une plénitude de ρ, e. g. (1′) on voit que ρ est dans $\mathfrak{N}$. En tant que $\lambda\rho \neq 0$, ρ n'est pas couvert par $\mathfrak{N}_1$. *Au cas* (2°) *on a la même conclusion qu'au cas* (1°).

La condition [T; (7.11, 4_0)], ainsi que les autres conditions de (T; lemme 7.11), est vérifiée pour $\mathfrak{N}$ (1′). Conséquemment, $R \in \mathfrak{N}$, *ce qui démontre* (3.2).

THÉORÈME 3.3. — *Si sur* R, Φ *est une* $\hat{\mathrm{D}}$*-minorante et* Ψ *est une* $\hat{\mathrm{D}}$*-majorante de* $f(x)$, *on aura* $\Phi(r) \leqq \Psi(r)$ *pour tout* r (*de* $\mathfrak{M}$) $\subset$ R.

Soit $\mathfrak{N}$, $\subset \mathfrak{M}$, la famille d'ensembles $\rho \subset$ R sur lesquels $\Phi \leqq \Psi$. Supposons qu'un r (de $\mathfrak{M}$) $\subset$ R satisfait à (2′). On aura (3′) pour r^n; d'après la définition de $\mathfrak{N}$, $\Phi(\rho_i^n) \leqq \Psi(\rho_i^n)$; Φ et Ψ sont complètement additives dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ (T; p. 38), donc Φ et Ψ sont nulles pour tout ensemble contenu dans la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$, de sorte que $\Phi(e^n) = \Psi(e^n) = 0$ pour e^n de (3′); par suite,

$$\Phi(r^n) = \sum_1^{\nu_n} \Phi(\rho_i^n) \leqq \sum_1^{\nu_n} \Psi(\rho_i^n) = \Psi(r^n);$$

r^n (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\uparrow r$ (de $\mathfrak{M}$) entraîne (vu l'additivité complète dans $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\Phi(r) \leqq \Psi(r)$. Si q (de $\mathfrak{M}$) $\subset r$, en notant que qr^n (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) possède dans $\mathfrak{M}$ une décomposition-$\bar{f}$ avec composants dans $\mathfrak{N}$, au moyen du raisonnement qu'on vient de donner on obtiendra

$$\Phi(qr^n) \leqq \Psi(qr^n) \qquad \text{et, enfin,} \qquad \Phi(q) \leqq \Psi(q) \qquad (\text{car } qr^n \uparrow q).$$

Ainsi $r \in \mathfrak{N}$, *ce qui vérifie* [T; (7.11, 1_0)]. Soit un r' (de $\mathfrak{M}$), tel que tout r (de $\mathfrak{M}$) ayant $\bar{r} \subset r'$ est dans $\mathfrak{N}$. Considérons q (de $\mathfrak{M}$) $\subset r'$; Φ et Ψ étant intérieurement continues dans $\mathfrak{M}$, d'après (2.5) on trouvera des q_n (de $\mathfrak{M}$) tels que

$$\bar{q}_n \subset q, \qquad \Phi(q_n) \to \Phi(q), \qquad \Psi(q_n) \to \Psi(q);$$

or $\bar{q}_n \subset r'$, donc $q_n \in \mathfrak{N}$ et $\Phi(q_n) \leqq \Psi(q_n)$; par conséquent, $\Phi(q) \leqq \Psi(q)$, e. g. $r' \in \mathfrak{N}$. La condition [T; (7.11, 3_0)] *est établie*. Si un r de $\mathfrak{M}$ est contenu dans un ρ de $\mathfrak{N}$, selon la définition de $\mathfrak{N}$ on aura $r \in \mathfrak{N}$, ce qui signifie [T; (7.11, 2_0)] pour $\mathfrak{N}$.

Étant donnée une famille $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}$, *ne couvrant pas* R, *posons*

$$\lambda = \mathrm{F} - \sum (\mathfrak{N}_1)\, \rho;$$

λR $\neq 0$ et λ est fermé. *Si* λR *possède un point* x_0 *isolé-s*, nous procédons comme au cas (1°) dans la démonstration de (3.2); on obtient (4′), où r_0, r^n, $\tilde{\rho}_\nu$, $\rho_{\nu,i}$, e^n sont des ensembles spécifiés par rapport aux familles $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}$ à présent considérées. On fait l'emploi de (T; lemme 7.10) [T; (7.11, 2_0); (7.11, 1_0)] et l'on montre que $\Phi(q) \leqq \Psi(q)$ pour tout q (de $\mathfrak{M}$) $\subset r_0$. Donc $r_0 \in \mathfrak{N}$; mais r_0 contient le point x_0 de λR; ainsi *au cas envisagé il existe un* r_0 *de* $\mathfrak{N}$ *non couvert par* $\mathfrak{N}_1$.

Vérifions le fait suivant :

(i_1) α *(de* $\mathfrak{M}$*)* $\subset \mathrm{R} - \mathrm{R}\chi$ *entraîne* $\alpha \in \mathfrak{N}$,

e. g $\Phi(h) \leqq \Psi(h)$ *pour tout* h *(de* $\mathfrak{M}$*)* $\subset \alpha$.

En effet, $\alpha \subset \sum (\mathfrak{N}_1)\rho$; d'après (T; lemme 7.10), il existe des $\tilde{\rho}_\nu$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) disjoints et des r_ν (de $\mathfrak{N}_1$), $\tilde{\rho}_\nu \subset r_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), tels que

$$\alpha = \sum \tilde{\rho}_\nu, \qquad \tilde{\rho}_\nu = \sum_{i=1}^{k_\nu} \rho_{\nu, i} + e_\nu, \qquad \varphi(e_\nu) = 0,$$

$\{\rho_{\nu,i}\}$ (ν fixe) étant une décomposition-$\tilde{f}$ dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ de $\tilde{\rho}_\nu$; $\rho_{\nu,i}$ (de $\mathfrak{M}$) $\subset r_\nu \in \mathfrak{N}_1 [\subset \mathfrak{N}]$ entraîne $\rho_{\nu,i} \in \mathfrak{N}$; $r^n = \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{\rho}_\nu \in \tilde{\mathfrak{M}}$ et r^n possède une décomposition-$\tilde{f}$ dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ avec les composants dans $\mathfrak{N}$, de plus $r^n \uparrow \alpha$; selon [T; (7.11, i_0)], déjà établie, $\alpha \in \mathfrak{N}$, e. g. (i_1) *s'ensuit.*

En continuant avec λ parfait-s et en faisant usage de (i_1), nous procédons comme dans (R; p. 97) et nous concluons qu'un ρ de $\mathfrak{M}$ existe non couvert par $\mathfrak{N}_1$; [T; (7.11, 4_0)], ainsi que les autres conditions de (T; lemme 7.11), est remplie, d'où $\mathrm{R} \in \mathfrak{N}$; *le théorème* 3.3 *en découle.*

(3.4) $f(x)$ étant définie sur une plénitude de R, *on dira que le nombre* $\hat{\mathrm{D}}(f, \mathrm{R})$ *existe, si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il y a une* $\hat{\mathrm{D}}$*-minorante* Φ *et une* $\hat{\mathrm{D}}$*-majorante* Ψ *de* f *sur R, telles que* $\Psi(\mathrm{R}) - \Phi(\mathrm{R}) < \varepsilon$; *on pose*

$$\hat{\mathrm{D}}(f, \mathrm{R}) = \sup_{\Phi} \Phi(\mathrm{R}) = \inf_{\Psi} \Psi(\mathrm{R}).$$

L'énoncé suivant est immédiat :

(3.5) Si $\hat{\mathrm{D}}(f, \mathrm{R})$ existe, $\hat{\mathrm{D}}(f, r)$ est définie pour tout r (de $\mathfrak{M}$) $\subset \mathrm{R}$ et représente une fonction complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ et intérieurement continue dans $\mathfrak{M}$ sur R; de plus, $\hat{\mathrm{D}}(kf, \mathrm{R}) = k\hat{\mathrm{D}}(f, \mathrm{R})$ lorsque k est une constante.

En tenant compte de la définition (T; 7.12) de la totale-D et d'après (3.4) on conclut ainsi :

(3.5 *a*) *Si* f *est totalisable*-D *sur un* R *(de* $\mathfrak{M}$*),* $\hat{\mathrm{D}}(f, \mathrm{R})$ *existe et l'on aura*

$$(\mathrm{D})\int_{\mathrm{R}} f\,d\varphi = \hat{\mathrm{D}}(f, \mathrm{R}).$$

On démontre comme dans (R; p. 98) la constatation suivante :

(3.5 *b*) L'existence des nombres $\hat{D}(f_i, R)$ $(i = 1, 2)$ entraîne l'existence de $\hat{D}(f_1 + f_2, R)$, qui vaut $\hat{D}(f_1, R) + \hat{D}(f_2, R)$.

(3.5 *c*) *Si* $f \geqq 0$ *sur* R *et* $\hat{D}(f, R)$ *existe,*

$$\hat{D}(f, R) = (L)\int_R f\,d\varphi \quad (\textit{finie}).$$

En raison de (3.2), $f(x)$ est mesurable et finie sur une plénitude de R; si f est non sommable sur R, définissons q_n comme à la suite de (2.28); pour un $n_1 (> 0)$, en tenant compte de [T; (7.13 *e*)] et de (3.5 *a*), il vient

$$\hat{D}(f, R) < (L)\int_R q_{n_1}\,d\varphi = (D)\int_R q_{n_1}\,d\varphi = \hat{D}(q_{n_1}, R),$$

ce qui est une impossibilité, car $f \geqq q_{n_1}$.

Réintroduisons maintenant les conditions [T; (7.4, 7°), (7.4, 8°), la partie extérieure de (7.4, 6°)].

(3.6) On dira qu'une fonction $f(x)$ est *prétotalisable*-D sur R de $\mathfrak{M}$, si

(1_0) $\qquad p$ parfait-s, un r (de $\mathfrak{M}$) $\subset R$, $\quad rp \neq 0$,

entraînent l'existence d'un ρ (de $\mathfrak{M}$) $\subset r$, $\rho p \neq 0$, tel que $f(x)$ soit sommable sur ρp.

Ce caractère est nécessaire, mais non pas suffisant, pour que $f(x)$ soit D-totalisable sur R.

THÉORÈME 3.7. — *Soit* $f(x)$ *prétotalisable*-D *sur un* R; *supposons que* $\mathbf{R}(f, R)$ *existe. Alors* $\hat{D}(f, R)$ *existe, sans qu'on exige que* $\hat{D}(f, \ldots)$ *soit complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}$ *sur* R; *de plus, on aura*

$$\mathbf{R}(f, R) = \hat{D}(f, R).$$

Soient sur R, Φ une R-minorante et Ψ une R-majorante de $f(x)$. Supposons qu'un p et un r satisfont à (1_0). D'après (2.20), Φ^+ et Ψ^-, sont A. C. G. sur R. Donc (2.17 *c*), on peut trouver un r_1 (de $\mathfrak{M}$) $\subset r$, $r_1 p \neq 0$, tel que sur r_1 :

(2_0) $\qquad \Phi_p^+ \in$ A. C., $\quad \Psi_p^- \in$ A. C..

Puisque f est prétotalisable-D, il y a un ρ (de $\mathfrak{M}$), tel que

(3_0) $\qquad \rho \subset r_1 (\subset r), \quad \rho p \neq 0, \quad (L)\int_{\rho p} f\,d\varphi$ (finie) existe.

En appliquant [T; (9.6)] à Φ_p ($\in$ A. C. S. sur ρ) et à Ψ_p ($\in$ A. C. I. sur ρ), il vient pour tout q (de $\mathfrak{M}$)$\subset$:

$$(4_0)\qquad \overline{\int_q} \Phi_p \leqq \int_q \bar{\mathrm{D}}\Phi_p\, d\varphi = \int_{qp} \bar{\mathrm{D}}\Phi\, d\varphi \leqq (\mathrm{L}) \int_{qp} f\, d\varphi \quad \text{(finie)}$$
$$\leqq \int_{pq} \underline{\mathrm{D}}\Psi\, d\varphi = \int_q \underline{\mathrm{D}}\Psi_p\, d\varphi \leqq \underline{\int_q} \Psi_p.$$

Ainsi [(3.1)-(3.1 b)], Φ [Ψ] est sur R une $\hat{\mathrm{D}}$-minorante [$\hat{\mathrm{D}}$-majorante] de f au sens modifié, e. g. sans qu'on exige l'additivité complète dans $\tilde{\mathfrak{M}}$. La conclusion du théorème en découle.

Remarque 3.7'. — Dans la démonstration de (R; p. 98-99) d'un résultat analogue au théorème 3.7 on ne fait pas l'emploi d'une condition pour f au genre de (3.6). Il est indiqué que la sommabilité de f (sur l'ensemble approprié) est une conséquence d'un énoncé dans (R; p. 81); celui-ci correspond à (T; p. 51-52). Nous n'avons pas pu vérifier cette constatation. Si l'on omet le caractère (3.6), en vertu de (2_0) et de (T; p. 51-52) on conclut que *les dérivés de* Φ_p^+ *et de* Ψ_p^- *sont sommables sur* ρ (en général Φ_p et Ψ_p ne sont pas additives dans $\mathfrak{M}$), mais il ne semble pas possible de déduire autant pour les dérivés de Φ_p^- et de Ψ_p^+; sur une plénitude de ρp il vient $\bar{\mathrm{D}}\Phi_p \leqq f \leqq \underline{\mathrm{D}}\Psi_p$; on n'obtient, pour q (de $\mathfrak{M}$)$\subset\rho$, que

$$(5_0)\qquad \begin{cases} \alpha = \displaystyle\int_q \mathrm{D}\Phi_p\, d\varphi = \int_q \bar{\mathrm{D}}\Phi_p^+\, d\varphi < +\infty, \\ -\infty < \displaystyle\int_q \underline{\mathrm{D}}\Psi_p^-\, d\varphi \leqq \int_q \underline{\mathrm{D}}\Psi_p\, d\varphi = \beta; \end{cases}$$

il est concevable que $\alpha = -\infty$, ou bien $\beta = +\infty$; la sommabilité sur ρp de f ne s'ensuivrait pas.

THÉORÈME 3.8. — *L'existence de* $\hat{\mathrm{D}}(f, \mathrm{R})$ *entraîne* $\mathrm{D}\,\mathrm{F}(x) = f(x)$ *sur une plénitude de* R, *où* $\mathrm{F}(r) = \hat{\mathrm{D}}(f, r)$ *pour* r (de $\mathfrak{M}$) *variable dans* R.

La démonstration est comme dans (R; p. 99-101), en faisant usage du théorème de Lusin dans la forme (2.3) et du théorème Cantor-Baire (T; section 4), qui s'applique dans les conditions actuelles et qui permet de constater qu'une certaine suite d'ensembles fermés se stabilise; on évite partout l'emploi d'ensembles compacts, en les remplaçant par des ensembles qui sont seulement fermés.

4. **La totalisation-S symétrique.** — Résumons sommairement ce qu'il nous fait sur la totalisation- S (T; p. 67-131). Comme en rap-

port avec la totalisation-D, *nous admettons encore les définitions et les développements des sections* 2, 3, 4 *dans* (T; p. 2-19). Ainsi *les enveloppes et les noyaux s'identifient respectivement avec les ensembles ouverts et fermés dans l'espace* $F = \Delta(\mathcal{F})$.

(4.1) On admet la propriété [T; (7.1)] : *si* H $(\subset F)$ *est mesurable et* $\varepsilon > 0$ *est donné, il existe un* Q *fermé et un* O *ouvert, tels que* $Q \subset H \subset O$, $\varphi(O - Q) < \varepsilon$.

Une certaine famille *dénombrable* G′ [T; (2.8)] d'ensembles ouverts possède la propriété (T; 7.2) (G′ est une base de la topologie qui survient).

(4.2) Tout ensemble fermé est l'intersection d'une suite non croissante d'ensembles ouverts.

(4.3) D'accord avec (T; p. 8) la *pseudo-distance* ρ (*sans que l'inégalité triangulaire soit nécessairement satisfaite*) est définie comme il suit : si x_1 et x_2 sur F sont tels que des O (de G′) les contiennent, on pose

$$\rho(x_1, x_2) = \inf[O \text{ (de } G') \supset (x_1\ x_2)]\, \varphi(O); \qquad \rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1) \geqq 0;$$

on suppose que $\rho(x_1, x_2) > 0$ lorsque $x_1 \neq x_2$ et $\rho(x_1, x_2)$ existe; $\rho(x, x) = 0$.

Dès lors on suppose la pseudo-distance ρ *étendue de sorte qu'elle soit définie et finie pour tout couple de points sur* F. La condition [T; (3.1 c)] de continuité de ρ n'est pas nécessaire pour la totalisation-D. En outre, nous en avons besoin pour la totalisation-S; cette condition est la suivante :

(4.3 *a*) Si le point x_2 et le nombre $\sigma > 0$ sont fixes et il y a des x_3 tels que $\sigma = \rho(x_2, x_3)$, x_3 étant variable on aura $\rho(x_1, x_3) \to \sigma$ dès que $\rho(x_1, x_2) \to 0$ [x_3, variable, assujetti à l'équation $\rho(x_2, x_3) = \sigma$].

Les sphères et les surfaces de sphères sont introduites d'accord avec (T; p. 67-68); ainsi on a la situation suivante :

(4.4) La sphère fermée $S(x, r) = \{z; \rho(x, z) \leqq r\}$; la sphère ouverte $S^0(x, r) = \{z; \rho(x, z) < r\}$ (si $r > 0$); la surface de $S(x, r)$ est $C(x, r) = S(x, r) - S^0(x, r)$. On dit r est un « *rayon effectif* » de $S(x, r)$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $z \in S(x, r)$ tel que $\rho(x, z) > r - \varepsilon$. *Par la suite on ne considère que les sphères* $S(x, r)$ *pour lesquelles* [avec $0 < c_0 \leqq c = \varphi(F)$] :

(4.4 *a*) $0 < r \leqq c_0$, $C(x, r)$ n'est pas vide [ainsi r est toujours un rayon effectif pour $S(x, r)$]. De plus, pour la mesure φ on admet que $\varphi(C(x, r)) = 0$. Il suit que $\varphi(S(x, r)) \geqq r$.

DÉFINITION 4.5. — *Soient* L *le segment linéaire* $0 \leq r \leq c_0$ *et* $F^* = F \times L$ [avec $F = \Delta(\mathcal{F})$] un *espace produit*. Pour tout couple de points $v = (x, r)$, $v_1 = (x_1, r_1)$ de F^* la *pseudo-distance* $\rho^*(v, v_1)$ vaut $\rho(x, x_1) + |r - r_1|$.

La *continuité* d'une fonction numérique définie dans F^* sera entendue moyennant la pseudo-distance dans F^*.

(4.6) *Les familles* $\mathfrak{M}$, $\tilde{\mathfrak{M}}$ *étant celles ainsi désignées dans* (T) *en rapport avec la totalisation*-D [*voir* (T; 7.4, 7.7)], on introduit les familles

$$(4.6\,a) \qquad \mathfrak{M}^s, \quad \mathfrak{M}'^s, \quad \tilde{\mathfrak{M}}^s, \quad \tilde{\mathfrak{M}}_0^s$$

de la manière suivante. $\mathfrak{M}^s$ *est formée de* $\mathfrak{M}$ *et des sphères ouvertes;* $\mathfrak{M}'^s$ est la famille des ensembles $H + e$, H décrivant $\mathfrak{M}^s$, e (vide ou non) $\subset \overline{H} - H$; $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ est la famille minimale, $\supset \mathfrak{M}'^s$, telle que les inclusions $H_i \in \tilde{\mathfrak{M}}^s$ $(i = 1, 2)$ entraînent que les ensembles $H_1 + H_2$, $H_1 H_2$, $H_1 - H_1 H_2$ sont dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$; $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$ consiste des ensembles ouverts de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$.

(4.7) φ étant toujours étendue de sorte que les sous-ensembles d'ensembles minces-φ sont minces-φ et les frontières des ensembles de $\mathfrak{M}^s$ étant minces-φ, il suit que les sous-ensembles des frontières d'ensembles de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ jouissent de la même propriété; φ satisfait aux conditions intervenant relativement à $\mathfrak{M}$ dans (T; 7.4); en outre, *on admet à présent aussi la condition de continuité relativement à* $\mathfrak{M}^s$:

(4.7 *a*) $\varphi(S(x, r))$ est continue dans $F^* = F \times L$ (4.5), comme fonction de point (x, r); $\varphi(S(x, r))$ tend vers zéro quand $r \to 0$.

(4.8) Notons [T; (12.5)] que pour tout x fixe sur F, chacune des relations

$$\varphi(S(x, r)) \to 0, \qquad \rho(S(x, r))\ (= \text{diamètre de}) \to 0, \qquad r \to 0$$

implique les deux autres.

DÉFINITION 4.9. — On dira qu'une fonction Ψ *additive*, définie et finie pour les ensembles de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$, est *complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$, si les relations

$$H \in \tilde{\mathfrak{M}}^s, \qquad H_n \in \tilde{\mathfrak{M}}^s, \quad \text{les } H_n \text{ disjoints}, \qquad H = \sum_1^{\infty} H_n$$

entraînent $\Psi(H) = \sum \Psi(H_n)$; *nous convenons toujours d'inclure dans la définition de la complète additivité dans* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ *le caractère de conti-*

nuité, relativement aux sphères, au sens de (4.7 *a*), avec Ψ au lieu de φ [on évitera la mention explicite de cette condition, dès que le caractère de la complète additivité dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ est admise].

Des hypothèses déjà introduites on conclut ainsi [T; (13.3, 6°)].

(4.10) Pour tout r de $\mathfrak{M}^s$ et $\varepsilon > 0$ il existe des r_ε, ρ_c de $\mathfrak{M}^s$, tels que

$$\bar{r}_\varepsilon \subset r, \qquad \bar{r} \subset \rho_\varepsilon, \qquad \varphi(r - r_\varepsilon) < \varepsilon, \qquad \varphi(\rho_\varepsilon - r) < \varepsilon.$$

(4.11) *On admet l'hypothèse* [T; (7.4, 7°)], *avec* $\mathfrak{M}^s$ *au lieu de* $\mathfrak{M}$.

(4.12) On désignera par $(^*_*)$ tout ensemble contenu dans une réunion *finie* de frontières d'ensembles de $\mathfrak{M}^s$.

Soient $\mathfrak{N} \subset \tilde{\mathfrak{M}}^s_0$ et un $r \in \tilde{\mathfrak{M}}^s$; on dira que r possède une *décomposition finie dans* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ *avec composants dans* $\mathfrak{N}$, *si*

$$(4.12\,a) \qquad r = \sum_1^{\nu} q_\iota + e, \quad q_\iota \in \mathfrak{N}. \quad q_\iota \text{ disjoints}, \qquad e \in (^*_*) \quad (4.12).$$

Notons que les relations $\mathfrak{N} \subset \tilde{\mathfrak{M}}^s_0$, $r \in \tilde{\mathfrak{M}}^s_0$, $\mathfrak{N}$ couvrant r, entraînent l'existence des r_ν, ρ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) tels que

$$(4.12\,b) \qquad r = \sum \rho_\nu, \quad \rho_\nu \text{ disjoints}, \quad \rho_\nu \subset r_\nu, \quad \rho_\nu \in \tilde{\mathfrak{M}}^s, \quad r_\nu \in \mathfrak{N};$$

on peut faire en sorte que

$$\rho^\nu = \rho_1 + \ldots + \rho_\nu \in \tilde{\mathfrak{M}}^s_0 \qquad (\rho^\nu \uparrow r).$$

Le lemme (T; 13.6) *joue un rôle fondamental pour la totale*-S.

D'accord avec les remarques de A. Denjoy (*Un demi- siècle de Notes...*, t. II; Observations, p. 68-69), ou bien comme dans (T; p. 87) on réalise le théorème de Denjoy-Vitali pour les sphères dans la forme suivante :

(4.13) Étant donnés un ensemble H ($\subset$ F) et une famille $\mathfrak{N}^s$ de sphères fermées, de sorte que tout point de H est contenu dans une suite de sphères de $\mathfrak{N}^s$ de mesure (de rayon) tendant vers zéro, on pourra associer avec tout $\varepsilon > 0$ des sphères $S_\iota \in \mathfrak{N}^s$, *disjointes et en nombre fini*, telles que $M\{S_\iota\}$ $(= \sup \varphi(S_\iota)) < \varepsilon$ et

$$\varphi_e\left(H - H\sum S_\iota\right) < \varepsilon, \qquad \varphi_e\left(\sum S_\iota - H\sum S_\iota\right) < \varepsilon.$$

(4.13 *a*) Si Ψ est définie pour les sphères fermées et $p \subset$ F, on définit $\Psi_{(p)}$ ainsi : $\Psi_{(p)}(s) = \Psi(s)$ (si le centre de s est sur p), $\Psi(s) = 0$ (au contraire).

(4.14) Si un $r \in \mathfrak{M}_0^s$ et un p *fermé* est joint à r, on dira que $S = \{s_j\}$ est un *système fini* (de sphères), *relativement à p, dans r*, lorsque les s_j en nombre fini sont des *sphères fermées disjointes*, contenues dans r, de sorte que ou bien le centre de s_j est sur pr, ou bien s_j est disjointe de p; il suit de (4.13) que S (rel. à p, dans r) peut être choisi tel que

$$(4.14\,a)\qquad M\{s_j\}[=\sup\varphi(s_j)] < \varepsilon, \qquad \varphi\left(r-\sum s_j\right) < \varepsilon;$$

pour un tel système fini S on pose

$$(4.14\,b)\qquad N(S)\,[=N\{s_j\} = N(r, S)] = \sup\left(M\{s_j\},\ \varphi\left(r-\sum s_j\right)\right).$$

DÉFINITION 4.15. — Soient p fermé, un r de $\mathfrak{M}^s$ épais, une Ψ définie (finie) pour les sphères fermées. *Les intégrales de Burkill (au sens sphérique symétrique) de Ψ sur r, relativement à p*, seront désignées par

$$(4.15\,a)\qquad \overline{\int_r^s}\Psi\ (\text{rel. à } p),\qquad \underline{\int_r^s}\Psi\ (\text{rel. à } p),\qquad \int_r^s (\text{rel. à } p);$$

ce sont les intégrales supérieure, inférieure et unique (si elle existe) et elles sont définies comme $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$, lim unique de $\sum\Psi(s_j)$, où $S = \{s_j\}$ est un *système* (variable) *fini, relativement à p, dans* r^0 (4.14), le nombre $\mathfrak{N}(S)$ (4.14 b) tendant vers zéro.

Ψ, p, r étant comme dans la définition, on pourra dans (4.15 a) remplacer Ψ par $\Psi_{(p)}$ (4.13 a); dans ce cas nous omettrons parfois la désignation (rel. à p); ainsi, si la limite existe,

$$(4.15\,b)\qquad \int_{r_0}^s \Psi_{(p)} = \int_{r_0}^s \Psi_{(p)} = \lim \sum_{s_j p \neq 0} \Psi(s_j)\ [= \mathcal{V}^s(\Psi, rp)],$$

lorsque $N\{s_j\}$ (4.14 b) $\to 0$, $\{s_j\}$ *étant un système variable fini, relativement à p, dans* r^0 [le centre de tout s_j intervenant au troisième membre est sur p].

(4.16) Si p est fermé et un r épais $\in \mathfrak{M}^s$, tandis que $\Gamma(r) = \int_s^s \Psi$ (rel. à p) finie existe, à tout $\varepsilon > 0$ il correspond un $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que les relations

$$S = \{s_j\} \text{ un système fini (rel. à } p) \text{ dans } r^0, \qquad M(S)[=\sup\varphi(s_j)] < \eta(\varepsilon)$$

impliquent $|\Psi(S) - \Gamma(S)| < \varepsilon$; ici, par exemple, $\Psi(S) = \sum\Psi(s_j)$ [*voir plus loin* (9.1), (9.2)].

(4.17) On dira que Ψ, définie dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ est *s. a.* (*additive au sens sphérique*), *relativement à un p fermé, pour un* $r \in \tilde{\mathfrak{M}}^s$, si $\Psi(r) = \int_r^s \Psi$ (rel. à p).

(4.17 *a*) x_0 est un point *isolé-s* de p, si pour un r_0 de $\mathfrak{M}$ (ou de $\mathfrak{M}^s$) contenant x_0 on a $r_0 p \in (\overset{*}{*})$; on dira qu'un ensemble est *parfait-s* s'il est fermé et sans points isolés-*s*.

(4.17 *b*) Si $\Psi(e) = 0$ pour tout $e \in (\overset{*}{*})$, on note (T; p. 91) que Ψ est s. a. (sans intervention de p) pour tout r mince de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$. On dira que Ψ est *s. a. relativement à p* (fermé) *sur un r* de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$, si Ψ possède cette propriété *pour* tout ρ (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset r$ [cela revient à dire : pour tout ρ (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset r$].

(4.18) $f(x)$ étant définie (finie) sur une plénitude d'un $H \in \tilde{\mathfrak{M}}^s$, on dira que *f est totalisable*-S (*totalisable au sens symétrique*) sur H, s'il existe une Ψ, *nulle pour les ensembles* $(\overset{*}{*})$ (4.12), *complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ sur H (4.9), telle que :

— si p est parfait-*s* dans $(H)^0$ (au cas de H épais) et r (de $\mathfrak{M}^s$) est contenu dans H et est joint à p, il existe un r' (de $\mathfrak{M}^s$), $r' \subset r$, $pr' \neq 0$, pour lequel :

(I) $\Psi = \int^s \Psi_{(p)}$ (rel. à p) dans r' [e. g. (4.17) Ψ *est s. a.* (*rel. à p*) *sur* r'];

(II) $\int_{r_1}^{\bullet s} \Psi_{(p)}$ (rel. à p) $[= \mathcal{V}^s(\Psi, r_1 p)] = (L)\int_{r_1 p} f\,d\varphi$ (intégrale finie de Lebesgue) pour tout r_1 (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset r'$ (4.15 *b*). Dans ces conditions, on écrit

(4.18 *a*) $$(S)\int_H f\,d\varphi \text{ (totale–S de } f \text{ sur H)} = \Psi(H).$$

Cette totale est unique (T; p. 92-95).

(4.19) (*a*) Si f est totalisable-S sur un $H \in \tilde{\mathfrak{M}}^s$, f le sera sur tout r (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset H$;

(*b*) Si les q_i $(i = 1, 2, \ldots)$ sont les composants d'une décomposition dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ de H et f est totalisable-S sur chaque q_i, f sera totalisable-S sur H et

$$(S)\int_r f\,d\varphi = \sum (S)\int_{rq_i} f\,d\varphi \quad \text{pour tout } r \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset H;$$

(*c*) La classe de fonctions totalisables-S est linéaire;

(*d*) Si $f \geqq 0$ sur une plénitude de H et f est totalisable-S sur H, $(S)\int_H f\,d\varphi \geqq 0$; si $f = 0$ sur une plénitude de H, $(S)\int f\,d\varphi = 0$ sur H;

(*e*) *Si f est sommable sur* H, *f sera totalisable et* $(L)\int_H f\,d\varphi = (S)\int_H f\,d\varphi$.

Si Ψ est définie pour les sphères (fermées), on envisage (T; 11.8) les *dérivés extrêmes* et la *dérivée* unique (si elle existe) *sphériques; symétriques* :

$$(4.20)\quad \begin{cases} \overline{D}^s\,\Psi(x) = \overline{\lim}\,\dfrac{\Psi(S(x,r))}{\varphi(S(x,r))}, \\ D^s\,\Psi(x) = \lim\,\dfrac{\Psi(S(x,r))}{\varphi(S(x,r))} \qquad [\text{pour } r(>0) \to 0]. \end{cases}$$

Notons le fait suivant (T; p. 100), conséquence de (4.13).

(4.21) Avec dérivation au sens (4.20) D^s symétrique, des théorèmes analogues aux constatations [T; (8.5)-(8.6 *b*)] ont lieu, y inclus : le théorème d'épaisseur et les énoncés relativement aux fonctions complètement additives et absolument continues d'ensemble mesurable et aux fonctions sommables.

(4.22) Avec H $(\in \tilde{\mathfrak{M}}^s)$ épais et $\mathfrak{N}$ étant la famille de sphères fermées contenues dans $(H)^0$, soit Ψ une fonction définie dans $\mathfrak{N}$; si l'intégrale symétrique (4.15) de Burkill $\int^s \Psi$ (sans intervention d'aucun ensemble p) existe sur H et si $\int_\sigma^s \Psi = 0$ pour tout σ de $\mathfrak{N}$, $D^s\Psi(x) = 0$ sur une plénitude de H [*voir* (T; p. 100-101)].

De plus, selon [T; (14.2), (14.3)] on a ceci :

(4.23) Avec H $(\in \tilde{\mathfrak{M}}^s)$ épais et p fermé joint à $(H)^0$, si $\int^s \Psi$ (rel. à p) existe sur H et si $\int^s$ (rel. à p) est *s. a.* (4.17) *relativement à p* pour toute sphère dans H, sur une plénitude de H on aura

$$\overline{D}^s\,\Psi(x) = \overline{D}_x^s \int^s \Psi \quad (\text{rel. à } p), \qquad \underline{D}^s\,\Psi(x) = \underline{D}_x^s \int^s \Psi \quad (\text{rel. à } p).$$

(4.23 *a*) L'ensemble p intervenant ou non, si $\int^s \Psi$ existe dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ sur un $H \in \mathfrak{M}^s$, $\int^s \Psi$ sera additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ sur H.

(4.24) *Si f est totalisable-*S *sur un* H *de* $\mathfrak{M}^s$, *sur une plénitude de* H *on aura*

$$D_x^s\left[(S)\int f\,d\varphi\right]=f(x).$$

(4.25) Soient un H (de $\mathfrak{M}^s$) épais, un $E \subset (H)^0$, une Ψ définie pour les sphères fermées $\subset H$; on dira que $\Psi \in V^s.B.$ (Ψ *est à variation bornée au sens sphérique*) *sur* E *dans* H, s'il existe un $\eta > 0$ tel que $\sum |\Psi(S_j)| \leqq B < \infty$, dès que les sphères $S_j = S_j(x_j)$, $\subset (H)^0$, en nombre *fini* et disjointes, ont les centres x_j sur E et $M\{S_j\}$ $\left[=\sup\limits_j \varphi(S_j)\right] < \eta$; on dira que $\Psi \in A.C^s.$ [Ψ *est absolument continue au sens sphérique* (symétrique)] *sur* E *dans* H, si $\left|\sum \Psi(S_j)\right| < \varepsilon$, lorsque les sphères S_j, $\subset (H)^0$, en nombre *fini* et disjointes, ont les centres sur E et $\sum \varphi(S_j) < \eta(\varepsilon)$; nous dirons $\Psi \in A.C^s.I.$ (Ψ *est* A. C^s. *inférieurement*) *sur* E *dans* H, quand les conditions pour les S_j qu'on vient d'indiquer entraînent seulement $\sum \Psi(S_j) > -\varepsilon$; d'une pareille façon on définit les caractères : A. C^s. S. (A. C^s. *supérieure*), V^s. B. I. (V^s. B. *inférieure*), V^s. B. S. (V^s. B. *supérieure*) *sur* E *dans* H. La définition de A. C^s. n'est pas modifiée si l'on remplace $\left|\sum \Psi(S_j)\right|$ par $\sum |\Psi(S_j)|$.

(4.26) *Le théorème de Lusin, au genre de* [T; (9.2)], *a lieu dans les conditions actuelles.*

(4.27) *Si* $\Psi \in V^s.B.$ *sur* $(H)^0$ *dans un* H *de* $\mathfrak{M}^s$ *épais, tout dérivé (intermédiaire ou extrême) au sens sphérique symétrique de* Ψ *sera sommable sur* H.

(4.28) *Les dérivés extrêmes et la dérivée unique* (si elle existe) *au sens sphérique général,* d'une fonction Ψ en un point x sont désignées par $\overline{\underline{D}}^\sigma \Psi(x)$, $D^\sigma \Psi(x)$ et sont définis comme les limites, respectivement supérieure, inférieure et unique, de $\frac{\Psi(\sigma)}{\varphi(\sigma)}$, σ représentant les sphères fermées, $\sigma \ni x$, $\varphi(\sigma) \to 0$.

Quelques développements relatifs à la totalisation-S sont dans l'hypothèse suivante :

$$(4.29)\qquad \underline{D}^\sigma \Psi(x) = \underline{D}^s \Psi(x) \qquad \left[\overline{D}^\sigma \Psi(x) = \overline{D}^s \Psi(x)\right]$$

sur une plénitude de l'ensemble où les dérivés indiqués sont définis [*cf.* (T; (14.11))].

THÉORÈME 4.30. — *Admettons que* $\Psi \in$ A. C^s. I. (4.25) *sur* $(\mathrm{H})^0$ *dans un* H *épais de* $\mathfrak{M}^s$. *Si un p fermé est joint à* $(\mathrm{H})^0$, *on aura*

$$(4.30\,a)\qquad \overline{\int_{\mathrm{H}}^{s}} \Psi\ (\text{rel. à } p) \geqq \int_{\mathrm{H}} \overline{\mathrm{D}}^s \Psi\, d\varphi, \qquad \underline{\int_{\mathrm{H}}^{s}} \Psi\ (\text{rel. à } p) \geqq \int_{\mathrm{H}} \underline{\mathrm{D}}^s \Psi\, d\varphi;$$

la seconde inégalité est dans la condition (4.29). *Si le caractère* A. C^s. I. *est remplacé* par A. C^s. S., *on aura dans les relations* (4.30 *a*) *le signe* $\leqq$ [alors il faut admettre (4.29) pour la première inégalité].

Par la suite, avec H (de $\mathfrak{M}^s$) épais et p fermé, $(\mathrm{H})^0 p \neq 0$, on fera usage des nombres $\Psi(s)$, $\Psi^+(s)$, *définis relativement à p*, $s = \{s_j\}$ désignant un *système fini de sphères dans* H [e. g., les sphères fermées s_j, en nombre fini, sont disjointes, $s_j \subset (\mathrm{H})^0$]; avec la notation $\Psi(s) = \sum \Psi(s_j)$, voici la définition :

$$(4.31)\qquad \Psi^-(s) = \inf_{\sigma} \Psi(\sigma), \qquad \Psi^+(s) = \sup_{\sigma} \Psi(\sigma),$$

les $\sigma = \{\sigma_i\}$ *étant des systèmes finis de sphères fermées, relativement à p, contenus dans s* [ainsi, pour un σ fixe, les σ_i sont disjointes, toute $\sigma_i \subset (s_k)^0$ pour un k, tandis que toute σ_i (de σ), dont le centre est étranger à p, est disjointe de p]; σ peut être vide, e. g. dépourvu d'éléments; on pourrait écrire $\Psi(s)$ (rel. à p), ... :

$$(4.31\,a)\qquad \Psi^+(s) \geqq 0 \geqq \Psi^-(s), \qquad \Psi^+(s) \geqq \Psi(s) \geqq \Psi^-(s),$$
$$\overline{\mathrm{D}}^s \Psi^+(x) \geqq \mathrm{D}^s \Psi(x) \geqq \underline{\mathrm{D}}^s \Psi^-(x) \quad [\text{aux points où } \mathrm{D}^s\Psi(x) \text{ existe}].$$

(4.32) Soit Ψ définie pour les sphères dans un H $(\in \mathfrak{M}^s)$ épais; on dira que $\Psi \in$ A. C^s. G., *absolument continue généralisée sur* H [e. g. sur $(\mathrm{H})^0$ dans H], au sens symétrique, si les relations

$$p \text{ parfait-}s, \quad (\mathrm{H})^0 p \neq 0, \qquad r\ (\text{de } \mathfrak{M}_0^s) \subset (\mathrm{H})^0, \qquad rp \neq 0$$

entraînent l'existence d'un r_1 (de $\mathfrak{M}_0^s$) $\subset r$, tel que $r_1 p \neq 0$ et $\Psi \in$ A. C^s. [déf. (4.25)] *sur* $r_1 p$ *dans* r_1 [e. g. $\Psi_{(p)}$ (4.13 *a*) $\in$ A. C^s. sur r_1 dans r_1].

(4.33) $\Psi \in$ A. C^s. G. *sur un* H (*de* $\mathfrak{M}^s$) *épais équivaut à ce que :*

$$(\mathrm{H})^0 = \sum_{1}^{\infty} \lambda(n), \quad \textit{les } \lambda(n) \textit{ étant fermés dans } (\mathrm{H})^0, \quad \textit{avec } \lambda(n) \in \left(\begin{smallmatrix}*\\ *\end{smallmatrix}\right) \ (4.12),$$

ou bien

$$\Psi_{(\lambda(n))} \in \text{A. C}^s. \quad \textit{sur } \mathrm{H} \qquad [\text{e. g. sur } (\mathrm{H})^0 \text{ dans } (\mathrm{H})^0].$$

Notons que *ce théorème est indépendant de l'hypothèse* (4.29).

(4.34) *Admettons que* $\Psi \in$ A. C^s. *sur un* H *épais de* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$. L'existence de $D^s\Psi$ sur une plénitude de H implique l'existence de $\int_H^s \Psi$ (rel. à p) et l'indépendance de cette valeur de p; l'existence de $\int_H^s \Psi$ (rel. à p_0), pour un p_0 fermé, entraîne l'existence de $D^s\Psi$ sur une plénitude de H.

Cet énoncé suit du théorème 4.30 [et de 4.27)]; ainsi l'hypothèse (4.29) intervient.

(4.35) Soit Ψ définie dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ dans un H épais de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$. On dira que Ψ est *additive au sens sphérique généralisé*, $\Psi \in$ A. S. G., *sur* H, si pour tout p parfait-s joint à H^0 et tout r de $\mathfrak{M}^s$, contenu dans H et joint à p, il existe un r_1 de $\mathfrak{M}^s$, $r_1 \subset r$, $r_1 p \neq 0$, tel que $\Psi = \int^s \Psi$ (rel. à p) dans r_1 [e. g. Ψ est s. a. (rel. à p) sur r_1; *cf.* (4.17), (4.17 *b*)].

Théorème 4.36. — Admettons que $\Psi(\lambda) = 0$ pour tout λ de $(^*_*)$ dans un H $(\in \tilde{\mathfrak{M}}^s)$ épais, que Ψ est complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ sur H et $\Psi \in$ A. S. G. sur H (4.35). Dans ces conditions, *pour que* Ψ *soit une totale*-S *sur* H, *il faut et il suffit que*

(4.36 *a*) $\Psi \in$ A. C^s. G. *sur* H *et* $D^s\Psi(x)$ (*finie*) *existe une plénitude de* H.

(4.36′) Dans les conditions du théorème, pour que Ψ *soit la totale*-S *d'une fonction* $f(x)$ (définie et finie sur une plénitude de H), *il faut et il suffit que* $\Psi \in$ A. C^s. G. *sur* H *et* $D^s\Psi(x) = f(x)$ *sur une plénitude de* H [le théorème 4.36 et (4.36′) sont dans l'hypothèse (4.29)].

(4.37) *Soit* Ψ *complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ *sur un* H *épais de* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$, $\Psi = 0$ *pour les ensembles* $(^*_*)$, $\Psi \in$ A. S. G. *sur* H. Si, en plus :

(1°) $D^s\Psi(x)$ existe sur une plenitude de H;

(2°) $-\infty < \underline{D}^s\Psi(x), \quad \overline{D}^s\Psi(x) < +\infty$ sur $H - H_0$,

avec H_0 contenu dans une réunion dénombrable de frontières d'ensembles de $\mathfrak{M}^s$, *il s'ensuivra que* Ψ *est la totale*-S *sur* H *de sa dérivée* $D^s\Psi(x)$ [on inclut $H - (H)^0$ dans H_0].

Dans cet énoncé, l'hypothèse (4.29) intervient.

Définition 4.38. — Ψ étant définie pour les sphères fermées (contenues dans un certain ensemble), e étant *fermé*, on posera (4.13 *a*);

$$(4.38\,a)\quad \begin{cases} \Psi^{(e)}(s(x)) = \Psi(s(x)) = \Psi_{(e)}(s(x)) = \Psi(s(x)) \\ \qquad (\text{si } x \notin e), \qquad = 0 \quad (\text{si } x \in e), \end{cases}$$

$s(x)$ désignant une sphère de centre x. Pour un H ($\in \mathfrak{M}^s$) épais nous désignons par $\Gamma(\mathrm{H}-\mathrm{H}_e)$ l'intégrale de Burkill (4.15), si elle existe,

$$(4.38\,b)\quad \Gamma(\mathrm{H}-\mathrm{H}_e)=\int_{\mathrm{H}}^{s} \Psi^{(e)}\ (\text{rel. à } e)\quad \left[=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum (x_i \notin e)\,\Psi(s_i(x))\right],$$

où $\mathrm{S}=(s_j(x_j))$ est un *système variable fini, relatif à e, dans* H, *avec* $\mathrm{N}(\mathrm{H}^0, \mathrm{S})$ (4.14 b) $<\varepsilon$; on note que pour les sphères de S on a $s_j(x_j)\subset \mathrm{H}^0$ et que $s_j(x_j)$ est disjointe de e dès que $x_j \notin e$; *le nombre* $\Gamma(\mathrm{H}-\mathrm{H}_e)$, s'il existe, *est défini par les valeurs de* Ψ *pour les sphères fermées* $\subset \mathrm{H}^0-\mathrm{H}^0 e$.

THÉORÈME 4.39. — Soient un H (de $\mathfrak{M}^s$) épais, un e fermé, $e\mathrm{H}^0 \neq 0$, une $f(x)$ définie sur une plénitude de H et sommable sur He; supposons, de plus, que $\Psi(r)=(\mathrm{S})\int_r f\,d\varphi$ existe pour tout r (de $\mathfrak{M}_0^s$) tel que $r\subset \mathrm{H}^0$ et $\bar{r}e=0$, tandis que $\nu(\rho)=\Gamma(\rho-\rho e)$ *est* (1_0) *complètement additive dans* $\mathfrak{M}^s$ *sur* H *et* (2_0) *possède la propriété A. S. G.* (4.35) *sur* H. *Dans ces conditions il s'ensuivra que f est totalisable*-S *sur* H *et*

$$(4.39\,a)\qquad (\mathrm{S})\int_{\mathrm{H}} f\,d\varphi=(\mathrm{L})\int_{\mathrm{H}e} f\,d\varphi+\Gamma(\mathrm{H}-\mathrm{H}e).$$

Dans le texte en rapport avec [T; (15.3)] est introduit le caractère I^s. G. qui dénote *l'intégrabilité, au sens sphérique symétrique, Burkill généralisée;* I^s. G. intervient dans les énoncés (T; 15.4), (T; 15.6) et dans la partie (15.8 a) de [T; (15.8)]. Au théorème (T; 15.16) il est affirmé que toute fonction $f(x)$ totalisable-S appartient à une classe K_α [Définition (T; (15.15))] pour un α des classes I, II.

En tenant compte de (4.14)-(4.15 a) on conclut comme il suit.

(4.40) Si r de $\mathfrak{M}^s$ est épais et Ψ est définie pour les sphères fermées, contenues dans r^0, et si p est fermé dans r^0, on aura

$$\underline{\int_r^s}\Psi \leqq \underline{\int_r}\Psi\ (\text{rel. à } p)\leqq \overline{\int_r^s}\Psi\ (\text{rel. à } p)\leqq \overline{\int_r^s}\Psi;$$

les intégrales extrêmes aux premier et quatrième membres sont sans qualification; elles peuvent être définies relativement à r^0.

Notons que si $p_1\subset p_2(\subset r^0)$ et les p_i ($i=1, 2$) distincts sont fermés dans r^0, tandis que $r^0-p_2\neq 0$, il ne s'ensuivra pas que $\int_r^s \Psi$ (rel. à p_1) $\leqq \overline{\int_r^s}\Psi$ (rel. à p_2). En effet, un système fini S_1 (de sphères fermées) (4.14), relativement à p_1, dans r^0, ne l'est pas nécessairement relativement à p_2, puisqu'il peut arriver qu'une sphère fermée $s_1 \in S_1$ existe, telle que $s_1 p_1 = 0$, $s_1 p_2 \neq 0$ et le centre de s_1 est dans $r^0 - p_2$; une telle s_1 ne sera dans aucun système fini relativement à p_2.

Par la suite, à quelques reprises, on admettra l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 4.41. — Soit Ψ définie pour les sphères fermées, contenues dans un H de $\tilde{\mathfrak{M}}^s_0$.

(I) *C'est la propriété suivante : pour toute frontière* γ *d'un ensemble de* $\mathfrak{M}^s$, $\gamma H \neq 0$, *les relations*

$S = \{\sigma_j\}$ un système fini (de sphères fermées) dans H (4.14), $\sigma_j \gamma \neq 0$, M(S) (4.14 *a*) $\to 0$, *entraînent*

$$\Psi(S)\left(=\sum \Psi(\sigma_j)\right) \to 0.$$

(II) $\lim\limits_n \underline{\int}_{q_n}^{s} \Psi = \lim\limits_n \overline{\int}_{q_n}^{s} \Psi = 0$, *dès que* $q_n (\in \tilde{\mathfrak{M}}^s_0) \subset H$ et $q_n \downarrow 0$.

Remarque (4.41'). — En conséquence du théorème de Denjoy-Vitali pour les sphères il s'ensuit que φ nécessairement satisfait à la condition (4.41, II) [même avec la relation $q_n \downarrow 0$ remplacée par $q_n \downarrow \theta$, où $\varphi(\theta) = 0$].

L'énoncé ci-après permettra une simplification considérable de la théorie de la totale-S, si les deux parties de l'hypothèse (4.41) ont lieu pour la fonction d'ensemble, éventuellement la totale-S, tandis que φ satisfait à (4.41, I). Ce résultat nous sera utile dans l'étude de majorantes et de minorantes de divers genres, au sens sphérique.

THÉORÈME 4.42. — Soit un $H \in \tilde{\mathfrak{M}}^s_0$. Supposons que Ψ est complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ sur H (4.9), nulle pour les ensembles (*) (4.12) et $\Psi \in$ A. C. S. sur H (4.35) [ce qui est la propriété (4.18, I)]. En plus, admettons que Ψ satisfait, dans H, aux conditions (4.41, I), (4.41, II) et que φ remplit (4.41, I). *Alors il existe un ensemble* $p = p(H)$ *parfait-s dans* H, *tel que* Ψ *est s. a.* (additive au sens sphérique [(4.17)-(4.17 *b*)]), *relativement à p, sur* H, *e. g. que*

$$\Psi(\rho) = \int_{\rho}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p) \quad \text{pour tout } \rho\ (\tilde{\mathfrak{M}}^s_0) \subset H. \tag{4.42 a}$$

Nous ferons usage du lemme 13.6 de (T). Soit $\mathfrak{N}$ la famille de tous les ρ tels que :

(1°) $\rho \in \tilde{\mathfrak{M}}^s_0$, $\rho \subset H$, Ψ est s. a. [rel. à $p(\rho)$] sur ρ, où $p(\rho)$ est parfait-*s* dans ρ. Ici et dans la suite la désignation $p(\dots)$ signifiera un ensemble parfait-s dans l'ensemble indiqué. Par définition à tout ρ de $\mathfrak{N}$, il correspond un $p(\rho)$, parfait-s dans ρ, pour lequel (1°) a lieu.

Considérons un r de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$ contenu dans un r' de $\mathfrak{N}$. Avec $p' = p(r')$ on aura

$$\Psi(r_1) = \int_{r_1}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p') \quad \text{pour tout } r_1 \left(\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}_0^s\right) \subset r'.$$

En particulier, cela aura lieu pour $r_1 = r$; d'où $r \in \mathfrak{N}$. Pour $p(r)$ on peut prendre p'. *$\mathfrak{N}$ satisfait à la condition* [T; (13.6, 3_0)]. Démontrons la proposition suivante :

(2°) *Si r_1 et r_2 sont dans $\mathfrak{N}$, $r_1 + r_2$ sera dans $\mathfrak{N}$.*

On a $(r_2 - r_1 r_2)^0$ (si non vide) $\in \mathfrak{N}$; posons

$$p_1 = p(r_1), \qquad p_2 = p[r_2 - r_1 r_2)^0].$$

Il existe un ensemble p parfait-s dans $r_1 + r_2$ tel qu'on peut prendre $p_1 = p_2 = p$. Soit λ $\left(\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}_0^s\right)$ un ensemble quelconque contenu dans $r_1 + r_2$; posons

$$\lambda_1 = \lambda r_1, \qquad \lambda_2 = (\lambda - \lambda_1)^0, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda_2 \subset (r_2 - r_1 r_2)^0.$$

On aura

$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + e$, $\quad e \in (\ast)$ (4.12), $\quad e$ disjoint de $\lambda_1 + \lambda_2$, $\qquad \lambda_i \in \mathfrak{N}$ $\quad (i = 1, 2)$;

$$(1') \qquad \Psi(\lambda) = \Psi(\lambda_1) + \Psi(\lambda_2) = \sum_{i=1}^{2} \int_{\lambda_i}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p).$$

$S = \{s_k\}$ étant un *système fini quelconque, relativement à p, dans λ* [*voir* (4.14)-(4.14 *b*)], il vient $S = S^1 + S^2 + S^*$, où $S^i = \{s_k^i\}$ est un système fini (rel. à p) dans λ_i ($i = 1, 2$) et $S^* = \{s_k^*\}$ est un système fini dans λ dont les sphères sont jointes à e. Puisque φ satisfait à (4.41, I), $\varphi(S^*) \to 0$ lorsque $N(\lambda, S) \to 0$ [car alors $M(S^*)$ (4.14 *a*) $\to 0$). Par conséquent, $N(\lambda, S) \to 0$ entraîne $N(\lambda^i, S^i) \to 0$ ($i = 1, 2$). En tant que $\int_{\lambda_i}^{s} \Psi$ (rel. à p) existe et vaut $\Psi(\lambda_i)$, Ψ satisfaisant à (4.41, I) d'après (1′) on obtient [pour $N(\lambda, S) \to 0$]

$$\Psi(S) = \Psi(S^1) + \Psi(S^2) + \Psi(S^*) \to \sum_{i=1}^{2} \int_{\lambda_i}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p) = \Psi(\lambda);$$

e. g. $\Psi(\lambda) = \int_{\lambda}^{s} \Psi$(rel. à p) pour tout λ $\left(\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}_0^s\right) \subset r_1 + r_2$. Ainsi $r_1 + r_2 \in \mathfrak{N}$, avec $p(r_1 + r_2) = p$. *L'énoncé* (2°) *est vérifié.*

Envisageons un r (*de* $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) $\subset$ H *ayant une décomposition finie dans* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ *avec composants dans* $\mathfrak{N}$, e. g.

$$(3^o) \qquad r = \sum_1^{\nu} q_i + e, \quad \text{les } q_i \text{ et } e \text{ disjoints}, \quad q_i \in \mathfrak{N}, \qquad e \in (\,^*_*\,).$$

En vertu de (2°) il existe un ensemble p' parfait-s dans $q_1 + \ldots + q_\nu$, tel que

$$q = \sum_1^{\nu} q_i \in \mathfrak{N}, \qquad \text{avec} \quad p(q) = p'.$$

Il y a un ensemble p parfait-s dans r tel qu'on peut prendre $p' = p$. Soit un λ (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) $\subset r$. On aura $\lambda q \in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s$, $\lambda q \subset q$, donc [d'après (T; (13.6, 3_0))]

$$\lambda = \lambda q + e', \quad \lambda q \text{ et } e' \text{ disjoints}, \quad \lambda q \in \mathfrak{N}, \qquad \text{avec} \quad p(\lambda q) = p, \qquad e' \in (\,^*_*\,).$$

$S = \{s_k\}$ désignant un système fini (rel. à p) dans λ, on obtient $S = \hat{S} + S^*$, où $\hat{S}$ est un système fini (rel. à p) dans λq, tandis que S^* est un système fini dans λ dont les sphères sont jointes à e'. Pour $N(\lambda, S) \to 0$ il résulte que $\varphi(S^*) \to 0$, $N(\lambda q, \hat{S}) \to 0$ et

$$\Psi(\hat{S}) \to \int_{\lambda q}^{s} \Psi \ (\text{rel. à } p) = \Psi(\lambda q) \ \ (\text{car } \lambda q \in \mathfrak{N}) = \Psi(\lambda) \ \ (\text{car } \Psi(e') = 0)$$

Ainsi $\Psi(S) = \Psi(\hat{S}) + \Psi(S^*) \to \Psi(\lambda)$, puisque $\Psi(S^*) \to 0$; e. g. $\Psi(\lambda) = \int_{\lambda}^{s} \Psi$ relativement à p, cela étant pour tout λ (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) $\subset r$. Par là, $r \in \mathfrak{N}$. *La condition* [T; (13.6, 1_0)] *est vérifiée.*

Envisageons maintenant un r et des r^n ($n = 1, 2, \ldots$) tels que

$$(4^o) \qquad r \in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s, \qquad r^n \in \mathfrak{N}, \quad r^n \uparrow r \qquad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

$p(r^n)$ parfait-s dans r^n est associé à r^n; il existe un ensemble p parfait-s dans r de sorte qu'on peut prendre $p(r^n) = p$ ($n = 1, 2, \ldots$). Si un λ (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) $\subset r$, posons $\lambda^n = \lambda r^n$, $\rho^n = (\lambda - \lambda^n)^0$. En tant que λ^n (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) $\subset r^n$, selon [T; (13.6, 3_0)] $\lambda^n \in \mathfrak{N}$, avec $p(\lambda^n) = p(r^n) = p$. On observe que

$$(5^o) \qquad \lambda = \lambda^n + \rho^n + e^n,$$

les ensembles au second membre étant disjoints, $e^n \in (\,^*_*\,)$,

$$\Psi(\lambda) = \Psi(\lambda^n) + \Psi(\rho^n), \qquad \Psi(\lambda^n) = \int_{\lambda^n}^{s} \Psi \ (\text{rel. à } p), \quad \lambda^n \uparrow \lambda,$$

$$\lim_n (\Psi^n) = \Psi(\lambda).$$

$S = \{s_n\}$ désignant un système fini (rel. à p) dans λ, on obtient $S = S^n + \tilde{S}^n + \overset{*}{S}{}^n$, où S^n est un système fini (rel. à p) dans λ^n, $\tilde{S}^n$ est un système fini (rel. à p) dans ρ^n, tandis que $\overset{*}{S}{}^n$ est formé des s_k jointes à e^n. Avec n *fixe*, la relation $N(\lambda, S) \to 0$ implique

$$\varphi(\overset{*}{S}{}^n) \to 0, \qquad N(\lambda^n, S^n) \to 0, \qquad N(\rho^n, \tilde{S}^n) \to 0, \qquad \Psi(\overset{*}{S}{}^n) \to 0,$$

$$\lim \Psi(S^n) = \int_{\lambda^n}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p) = \Psi(\lambda^n) \qquad (\text{car } \lambda^n \in \mathfrak{N});$$

or

$$\Psi(S) = \Psi(S^n) + \Psi(\tilde{S}^n) + \Psi(\overset{*}{S}{}^n);$$

il en résulte

$$(6^{\circ}) \quad \underline{\int}_{\rho^n}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p) + \Psi(\lambda^n) \leqq \underline{\int}_{\lambda}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p) \leqq \overline{\int}_{\lambda}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p)$$
$$\leqq \Psi(\lambda^n) + \overline{\int}_{\rho^n}^{s} \Psi \text{ (rel à } p).$$

$\rho^n (\in \mathfrak{M}_0^s) \subset \lambda \subset r \subset H$ et $\rho^n \downarrow 0$, donc (4.41, II) s'applique et l'on déduit (4.40) :

$$\overline{\lim_n} \overline{\int}_{\rho^n}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p) \leqq \overline{\lim_n} \overline{\int}_{\rho^n}^{s} \Psi = \lim_n \overline{\int}_{\rho^n}^{s} \Psi = 0;$$

$$\underline{\lim_n} \underline{\int}_{\rho^n}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p) \geqq \underline{\lim_n} \underline{\int}_{\rho^n}^{s} \Psi = \underline{\lim_n} \underline{\int}_{\rho^n}^{s} \Psi = 0.$$

En tenant compte de (5°), (6°), on obtient

$$\overline{\int}_{\lambda}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p) \leqq \Psi(\lambda) + \overline{\lim_n} \overline{\int}_{\rho^n}^{s} \Psi = \Psi(\lambda),$$

$$\underline{\int}_{\lambda}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p) \geqq \Psi(\lambda) + \underline{\lim_n} \underline{\int}_{\rho^n}^{s} \Psi = \Psi(\lambda);$$

conséquemment,

$$\Psi(\lambda) = \int_{\lambda}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p) \quad \text{pour tout } \lambda \ (\text{de } \mathfrak{M}_0^s) \subset r;$$

c'est-à-dire, les relations (4°) entraînent $r \in \mathfrak{N}$ avec $p(r) = p$; [T; (13.6, 2_0)] *est établie pour* $\mathfrak{N}$.

La preuve de [T; (13.6, 4_0)]. — *Soit une famille* $\mathfrak{N}_1$, $\subset \mathfrak{N}$, *ne couvrant pas* H; *on veut montrer qu'il existe un* ρ' *de* $\mathfrak{N}$ *non couvert par* $\mathfrak{N}_1$. Posons

$$(7^0) \qquad q = \mathrm{H} - \sum (\mathfrak{N}_1)\, \rho;$$

q est non vide, fermé dans H. Considérons d'abord le cas où q est parfait-s dans H. La propriété A. S. G. sur H (4.35) de Ψ entraîne l'existence d'un ρ' de $\mathfrak{M}^s$, tel que $\rho' \subset \dot{\mathrm{H}}$, $\rho' q \neq 0$, Ψ est s. a. (rel. à q) sur ρ'. On voit (1^0) que $\rho' \in \mathfrak{N}$ avec $p(\rho') = q$. En outre, ρ' contient un point de q, d'où ρ' est non couvert par $\mathfrak{N}_1$. Il reste à considérer *le cas où* q *possède un point* λ_0 *isolé-s*. Il existe un r_0 (de $\mathfrak{M}^s$) contenant x_0, tel que $r_0 \subset \mathrm{H}$, $r_0 q \subset \gamma$, γ étant la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}^s$.

Soit un λ (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset r_0$. Il résulte que

$$(8^0) \qquad \lambda' = \lambda - \lambda\gamma \in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s, \qquad \lambda' \subset \mathrm{H} - q = \sum (\mathfrak{N}_1)\, \rho.$$

L'énoncé (4.12 b) s'applique à λ', qui est couvert par la famille $\mathfrak{N}_1$. Des r_ν, ρ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) existent tels que

$$\lambda' = \sum_1^\infty \rho_\nu, \quad \rho_\nu \text{ sont disjoints}, \quad \rho_\nu \subset r_\nu, \quad \rho_\nu \in \tilde{\mathfrak{M}}^s, \quad r_\nu \in \mathfrak{N}_1 \ (\subset \mathfrak{N}).$$

En tenant compte de [T; (13.5′)], on peut prendre

$$\rho_1 = \lambda' r_1, \qquad \rho_\nu = \lambda' r_\nu - \lambda' r_\nu (\rho_1 + \ldots + \rho_{\nu-1}) \qquad (\nu > 1);$$

alors

$$(9^0) \qquad \rho^\nu = \rho_1 + \ldots + \rho_\nu \quad [= \lambda'(r_1 + \ldots + r_\nu)], \qquad \rho^\nu \in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s, \quad \rho^\nu \uparrow \lambda'.$$

Les r_n étant dans $\mathfrak{N}_1$, donc dans $\mathfrak{N}$, d'après l'énoncé (2^0) on a

$$r^\nu = r_1 + \ldots + r_\nu \in \mathfrak{N}.$$

Selon [T; (13.6, 3_0)] et (9^0) : $\rho^\nu (\subset r')$ est dans $\mathfrak{N}$. Il y a un ensemble p, parfait-s dans r_0, tel qu'on peut prendre $p(\rho^\nu) = p$ ($\nu = 1, \ldots$) [noter que $r_0 r^\nu \in \mathfrak{N}$, avec $p(r_0 r^\nu) = p$, et $\rho^\nu \subset r_0 r'$, de sorte que $p(\rho^\nu) = p(r_0 r^\nu) = p$]. Posons $\tau^\nu = (\lambda' - \rho^\nu)^0$; on obtient

$$(10^0) \quad \begin{cases} \lambda' = \rho^\nu + \tau^\nu + e_\nu, \quad e'_\nu \in (^*_*); \qquad \Psi(\lambda) = \Psi(\lambda') = \Psi(\rho^\nu) + \Psi(\tau^\nu); \\ \Psi(\rho^\nu) = \int_{\rho^\nu} \Psi \ (\text{rel. à } p); \end{cases}$$

$\lambda = \rho^\nu + \tau^\nu + e_\nu$, les ensembles (pour ν fixe) au second membre étant disjoints, $e_\nu \in (\overset{*}{*})$. Soit $S = \{s_k\}$ un système fini (rel. à p) dans λ; alors $S = S^\nu + \hat{S}^\nu + \overset{*}{S}{}^\nu$, S^ν étant un système fini (rel. à p) dans ρ^ν, $\hat{S}^\nu$ étant un système de la même sorte dans τ^ν, $\overset{*}{S}{}^\nu$ comprenant les s_k jointes à e_ν. En procédant comme à la suite de (6°), on observe que la relation $N(\lambda, S) \to 0$ entraîne (pour ν fixe)

$$N(\rho^\nu, S^\nu) \to 0, \qquad N(\tau^\nu, \hat{S}^\nu) \to 0, \qquad \Psi(\overset{*}{S}{}^\nu) \to 0,$$
$$\lim \Psi(S^\nu) = \int_{\rho^\nu}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p) = \Psi(\rho^\nu);$$

de plus $\left[\text{en tant que } \Psi(S) = \Psi(S^\nu) + \Psi(\hat{S}^\nu) + \Psi(\overset{*}{S}{}^\nu)\right]$

$$\underline{\int}_{\tau^\nu}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p) + \Psi(\rho^\nu) \leqq \underline{\int}_{\lambda}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p) \leqq \overline{\int}_{\lambda}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p)$$
$$\leqq \Psi(\rho^\nu) + \overline{\int}_{\tau^\nu}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p).$$

Ψ étant complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$,

$$\lim_\nu \Psi(\rho^\nu) = \Psi(\lambda') = \Psi(\lambda).$$

Comme à la suite de (6°), en tenant compte de (4.41, II) on déduit que

$$\int_{\lambda}^{s} \Psi \text{ (rel. à } p) = \Psi(\lambda) \quad \text{pour tout } \lambda \left(\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}_0^s\right) \subset r_0,$$

e. g. $r_0 \in \mathfrak{N}$, avec $p(r_0) = p$; mais r_0 contient le point x_0 de q (7°), donc r_0 est non couvert par $\mathfrak{N}_1$. On a établi que $\mathfrak{N}$ *satisfait* à [T; (13.6, 4₀)].

Le lemme 13.6 de (T) entraîne que $H \in \mathfrak{N}$, la famille $\mathfrak{N}$ étant définie selon (1°). *Le théorème est vérifié.*

(4.43) *Soit un* $H \in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s$ (donc H est ouvert). *Désignons par* G *la famille de toutes les sphères fermées* $s \subset H$. *Étant donnée une* F *définie et finie pour toute s de* G, *il suit que les dérivés* $\underline{D}^\sigma F$, $\overline{D}^\sigma F$ (4.28) *extrêmes sont mesurables sur* $H (= \Delta(G))$; *de plus, l'ensemble* E (s'il est non vide) *où* $D^\sigma F$ *existe est mesurable;* $D^\sigma F$ *est mesurable sur* E.

Cela s'ensuit essentiellement parce que pour G le théorème de Denjoy-Vitali s'applique [*voir* Denjoy (D^*; p. 338-339), aussi (T^m; (5.7))].

5. **Les P^s-minorantes et majorantes associées avec la totalisation-S.** — *Dans les sections* 5, 6, 7 *on supposera toujours que les fonctions d'ensemble, qu'on considère, sont nulles pour les ensembles* $(^*_*)$ (4.12) [si elles sont définies pour $e \in (^*_*)$].

(5.1) *Désignons par* $(^{*s})$ *toute réunion dénombrable de frontières d'ensembles de* $\mathfrak{M}^s$ (4.6).

La proposition suivante est à la base de l'emploi des majorantes (minorantes) au sens P^s, qui seront introduites par la suite et qui ressembleront d'assez loin aux majorantes (minorantes) de Perron.

Théorème 5.2. — *Soit un* $H \in \tilde{\mathfrak{M}}^s_0$. *Admettons que* F *est complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ *sur* H (4.9), *A. S. G. sur* H (4.35), *que* F *satisfait à* (4.41, I, II) *et que* φ *remplit* (4.41, I). *Si* [avec $\underline{D}^\sigma$ au sens (4.28)] :

$$(5.2\,a)\qquad \underline{D}^\sigma F(x) > -\infty \quad \textit{sur } H - eH, \quad \textit{où} \quad e \in (^{*s});$$

$$(5.2\,b)\qquad \underline{D}^s F(x) \geqq 0 \quad \textit{sur une plénitude de } H,$$

on aura $F(r) \geqq 0$ *pour tout* r $\left(\textit{de } \tilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset H$.

Il suffit de démontrer cet énoncé en remplaçant (5.2 *b*) par la condition

$$(5.2\,b')\qquad \underline{D}^s F(x) > 0 \quad \text{sur une plénitude de } H.$$

En effet, d'après les propriétés de φ, le caractère (4.41, I) pour φ inclus, on voit que la fonction $F' = F + \varepsilon\varphi$ remplit toutes les conditions du théorème, mais avec $\underline{D}^s(F'(x) > 0$ sur une plénitude de H; si le théorème était démontré avec (5.2 *b'*) au lieu de (5.2 *b*) on aurait sur H :

$$F' \geqq 0, \qquad \text{d'où} \qquad F \geqq -\varepsilon\varphi \quad \text{et} \quad F \mathrel{\underset{=}{\not<}} 0.$$

Ainsi, nous procédons sous la condition (5.2 *b'*), avec l'objet de démontrer que $F(H) \geqq 0$, donc pour tout ensemble de $\tilde{\mathfrak{M}}^s_0$ et de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ contenus dans H; la conclusion du théorème s'ensuivra.

L'ensemble e dans (5.2 *a*) est $\sum_1^\infty \gamma_n$, γ_n étant la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}^s$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Supposons, s'il est possible, que* $F(H) < 0$. D'après le théorème 4.42, qui s'applique sur H à F et à φ, il existe un $p = p(H)$, parfait-s dans H, tel que

$$(1_0)\qquad F(\rho) = \int_\rho^{\backprime} F \ (\text{rel. à } p) \quad \text{pour tout } \rho \left(\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}^s_0\right) \subset H.$$

Soit $S \overset{!}{=} \{ s_k \}$ $(k = 1, \ldots, \nu)$ un système fini (de sphères fermées), relativement à p, dans $H_1 = H - H\gamma_1$; $H_1 \in \mathfrak{M}_0^s$. Pour $N(H_1, S)$ (4.14 b) $\to 0$, il vient

$$F(S) = \sum_1^\nu F(s_k) \quad \to \quad \int_{H_1}^{s} F \text{ (rel. à } p) = F(H_1) = F(H) \ (< 0).$$

Ainsi il existe un système fini S de la sorte indiquée, tel que $F(S) < 0$. Parmi les s_k de ce système il y en a un, soit s', pour lequel

$$(2_0) \qquad F(s') < 0 \qquad [s' \text{ fermée}, \ s' \subset H, \ s'\gamma_1 = 0];$$

la sphère s' est (rel. à p), e. g. $s'p = 0$ ou bien le centre de s' est sur p. Selon (5.2 b'), $\underline{D}^s F(x) > 0$ sur $s' - e'$, avec $\varphi(e') = 0$; la frontière de s' étant mince, nous la comprenons dans e'; on aura $s' - e' \subset (s')^0$ (l'intérieur de s'). Pour $x \in s' - e'$ il existe une suite de sphères fermées $s_n(x)$, de centre x, telles que $\varphi(s_n(x)) \to 0$ et

$$s_n(x) \subset (s')^0, \qquad \lim_n \frac{F(s_n(x))}{\varphi(s_n(x))} > 0, \qquad \begin{matrix} F(s_n(x)) > 0 & (n = 1, 2, \ldots); \\ \text{si} \quad x \notin p, & \text{on a} \quad s_n(x)\, p = 0. \end{matrix}$$

Soit $\mathcal{F} = \{ s_n(x) \}$, x décrivant $s' - e'$, $n = 1, 2, \ldots$. $\mathcal{F}$ couvre au sens de Denjoy-Vitali l'ensemble $s' - e'$; $\mathcal{F}$ contient une suite dénombrable de sphères $s^n (n = 1, \ldots)$ *disjointes*, pour lesquelles

$$s^n \subset (s')^0, \qquad F(s^n) > 0, \quad \text{les } s^n \text{ sont (rel. à p)},$$
$$\varphi\left(s' - \sum_1^\infty s^n \right) = 0, \quad \text{le centre de } s^n \text{ est sur } s' - e'.$$

En prenant n^1 assez grand, $(s^1, s^2, \ldots, s^{n^1})$ formera un système fini (rel. à p) dans $(s')^0$, tel que

$$(3_0) \qquad \varphi(q^1) < \varepsilon, \qquad \text{où} \quad q^1 = (s')^0 - \sum_1^{n^1} s^k \in \mathfrak{M}_0^s \qquad [F(s^k) > 0].$$

Or F est s. a. (rel. à p) sur q^1 [4.17)-(4.17 b)]; d'où, $S^1 = \{ s_k^1 \} (k = 1, \ldots, \nu^1)$ désignant un système fini (rel. à p) dans q^1 avec $N(q^1, S^1) \to 0$, en tenant compte de (2_0), (3_0) il vient

$$(4_0) \quad \lim F(S^1) = F(q^1), \qquad F(s') = \sum_1^{n^1} F(s^k) + F(q^1) = \sum_1^{n^1} F(s^k) + \lim F(S^1) < 0;$$

les $F(s^k)$ sont positifs. Il existe un système S^1, avec $N(q^1, S^1)$ assez petit, de sorte que

$$| F(q^1) - F(S^1) | < -\frac{1}{2} F(s');$$

alors, d'après (4_0),

$$(5_0)\quad F(S^1) = F(q^1) - [F(q^1) - F(S^1)] < F(s') - \frac{1}{2}F(s') = \frac{1}{2}F(s') \quad (< 0)$$

Les s_k^1 de S^1 sont dans q^1, donc (3_0) $\varphi(S^1) < \varepsilon$; en raison de (5_0)

$$(6_0)\qquad \frac{\sum F(s_k^1)}{\varphi\left(\sum s_k^1\right)}\left(< \frac{F(s')}{2\varepsilon} < 0\right) \to -\infty \qquad \text{pour } \varepsilon \to 0.$$

Il existe un $\varepsilon > 0$, tel que parmi les s_k^1 d'un système S^1, qui correspond, il s'en trouve une, soit σ_1, qui est (rel. à p) et pour laquelle

$$(7_0)\quad \frac{F(\sigma_1)}{\varphi(\sigma_1)} < 2\frac{F(H)}{\varphi(H)} = \beta(< 0) \quad \left[\sigma_1 \subset q^1 = (s')^0 - \sum_1^{n^1} s^k (\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}_0^s),\ \sigma_1\gamma_1 = 0(2_0)\right].$$

Sinon, pour tout $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ aucun $\sigma_1 (= s_k^1)$ de S^1 (S^1 correspondant à ε), satisfaisant à (7_0), n'existe; e. g.

$$F(s_k^1) \geqq \beta\,\varphi(s_k^1) \qquad (k = 1, \quad , \nu^1), \qquad \text{d'où} \qquad F\left(\sum s_k^1\right) \geqq \beta\,\varphi\left(\sum s_k^1\right),$$

ici le système $S^1 = \{s_k^i\}$ correspond à $\varepsilon = \frac{1}{n}$; en laissant $n \to \infty$, on obtient une contradiction à (6_0). En succession on trouve des sphères fermées σ_j $(j = 1, 2, \ldots)$, chacune étant relativement à p, telles que $\varphi(\sigma_j) \to 0$ et

$$(\sigma_{j-1})^0 \supset \sigma_j, \qquad \frac{F(\sigma_j)}{\varphi(\sigma_j)} < 2\frac{F(\sigma_{j-1})}{\varphi(\sigma_{j-1})}, \qquad \sigma_j\gamma_j = 0,$$

pour $j = 1, 2, \ldots$, avec $\sigma_0 = H$; on a $\frac{F(\sigma_j)}{\varphi(\sigma_j)} \to -\infty$. Il existe un point unique $x_0 = \prod \sigma_j$, $\in H - H\sum\gamma_j$, en lequel $\underline{D}^\sigma F(x_0) = -\infty$ (4.28), ce qui est contraire à (5.2 *a*). *Le théorème est établi.*

Définition 5.3. — $f(x)$ étant une fonction numérique de point, définie sur une plénitude d'un H de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$, on dira que $\Phi(\Psi)$ est une P^s-*minorante* P^s-*majorante de* $f(x)$ sur H, si $\Phi[\Psi]$ est complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ sur H et A. S. G. sur H, si $\Phi(\Psi]$ satisfait à (4.41, I, II) et φ remplit (4.41, I), tandis que

(5.3 *a*) $\bar{D}^\sigma\Phi < +\infty$ $\quad[\underline{D}^\sigma\Psi(x) > -\infty]$ sur $H - He$, ou $e \in (*_s)$,

(5.3 *b*) $\bar{D}^s\Phi(x) \leqq f(x)$ $\quad[\underline{D}^s\Psi(x) \geqq f(x)]$ sur une plenitude de H, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une P^s-minorante Φ et une P^s-majorante Ψ de f sur H, telles que $\Psi(H) - \Phi(H) < \varepsilon$, *on définit le nombre*

$$(5.3\,c) \qquad P^s(f, H) = \sup_{\Phi} \Phi(H) = \inf_{\Psi} \Psi(H).$$

La définition de $P^s(f, H)$ a un sens puisque *pour les fonctions* Ψ, Φ *survenant dans* (5.3 *c*) *il vient* $\Phi(r) \leqq \Psi(r)$ (pour tout r, de $\mathfrak{M}^s$, $\subset H$), ce qui est une conséquence du théorème 5.2. Par définition, *dire que* Φ *est une* P^s*-minorante sur un* r $(\in \mathfrak{M}^s)$ *équivaut à ce que* Φ *est une* P^s*-minorante sur* $(r)^0$ $(\in \mathfrak{M}^0)$; $\Phi(r) = \Phi((r)^0)$, car $r - (r)^0 \in (\overset{*}{*})$. Si $\Phi\,[\Psi]$ est un P^s-minorante $[P^s$-majorante$]$ de $f(x)$ sur H, il en sera de même sur tout $r(\in \mathfrak{M}^s) \subset H$.

Si pour un $H(\in \mathfrak{M}_0^s)$ $P^s(f, H)$ existe, le nombre $P^s(f, r) = P^s(r)$ existe pour tout r de $\mathfrak{M}^s$, $r \subset H$; par définition, $P^s(f, r) = P^s(f, (r)^0)$. Pour un H fixe, H étant dans $\mathfrak{M}_0^s$ ou bien épais, $P^s(f, r)$ est une fonctionnelle en f, f parcourant un certain champ $\mathfrak{P}^s = \mathfrak{P}^s(H)$; pour H et $f(\in \mathfrak{P}^s(H))$ fixes $P^s(f, r)$ est une fonction d'ensemble r (de $\mathfrak{M}^s$) $\subset$ H.

(5.4) *Soit* F *complètement additive dans* $\mathfrak{M}^s$ *sur un* H *de* $\mathfrak{M}_0^s$, *A.S. G. sur* H, *satisfaisant à* (4.41, I, II), φ *étant assujettie à* (4.41, I); *si, en outre,* $-\infty < \underline{D}^\sigma F(x) \leqq \overline{D}^\sigma F(x) < +\infty$ *sur un* H $-$ H*e, où* $e \in (^{*s})$, *et si* $D^s F(x)$ *existe sur une plénitude de* H, *on aura*

$$F(H) = P^s(D^s F(x), H).$$

La fonction $f(x) = D^s F(x)$ est définie sur une plénitude de H; F est simultanément une P^s-minorante et une P^s-majorante de $f(x)$ sur H; (5.4) s'ensuit.

(5.5) *Soient* H, F, φ *assujettis aux conditions de* (5.4); *de plus, admettons l'hypothèse* (4.29). *Alors* .

$$F(H) = P^s(D^s F(x), H) = (S)\int_H D^s F(x)\, d\varphi(x),$$

le troisième membre étant une totale-S.

Sur H — *e*H, on aura

$$-\infty < \underline{D}^\sigma F \leqq \underline{D}^s F, \qquad \overline{D}^s F \leqq \overline{D}^\sigma F < +\infty.$$

Le théorème (4.37) s'applique, ce qui mène à la conclusion dans (5.5).

(5.6) *Si sur un* H (*de* $\mathfrak{M}_0^s$) $f(x)$ *possède une* P^s*-minorante* Φ *et une* P^s*-majorante* Ψ, f *sera finie sur une plénitude de* H [il suffira que $P^s(f, H)$ existe].

Si cet énoncé est en défaut, on aura par exemple $f = +\infty$ sur un ensemble h, avec $\varphi_e(h) = \eta > 0$. Soit $h_0 = [x \in H;\ \underline{D}^s\Psi(x) = +\infty]$; d'après (5.3 *b*) $D^s\Psi(x) \geqq f(x)$ sur une plénitude de H, donc $h_0 \supset h - \lambda$, $\varphi(\lambda) = 0$, $\underline{D}^s\Psi(x) = +\infty$ sur $h - \lambda$. Or $F(r) = \Psi(r) - \Phi(r) \geqq 0$ pour tout r (de $\mathfrak{M}^s$) $\subset$ H, tandis que F est complètement additive dans $\mathfrak{M}^s$ sur H. Pour tout système fini (de sphères fermées) $S = \{s_j\}$ $(j = 1, \ldots, \nu)$ dans H, il vient

$$\sum_1^\nu s_j\ (\text{de } \mathfrak{M}^s) \subset H, \qquad 0 \leqq F(S) \leqq F(H) < +\infty;$$

par conséquent, $F \in V^s.B.$ sur H dans H (4.25); à cause de la proposition (4.27) *tous les dérivés* $\underline{\overline{D}}^s F$, $D^{s*}F$ (intermédiaires) sont sommables sur H, donc mesurables et *finis, chacun sur une plénitude de* H. On obtient

$$(1_0) \qquad D^s\Psi(x)\ (= +\infty) = \lim \frac{\Psi(s_i(x))}{\varphi(s_i(x))} \qquad \text{pour} \quad x \in h - \lambda,$$

lorsque les $s_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ sont des sphères fermées quelconques de centre x, $\varphi(s_i(x)) \to 0$. Choisissons les $s_i(x)$, pour tout $x \in h - \lambda$, de sorte que $\lim \frac{\Phi(s_i(x))}{\varphi(s_i(x))} = D^{s*}\Phi(x)$ (fini ou infini) existe; alors (1_0) :

$$\lim_i \frac{F(s_i(x))}{\varphi(s_i(x))} = D^s\Psi(x) - D^{s*}\Phi(x) = D^{s*}F(x) \quad \text{sur une plénitude } h_1 \text{ de } h - \lambda$$

$\left[D^{s*}\Phi \leqq \overline{D}^\sigma\Phi\right.$; vu (5.3 *a*) $\overline{D}^\sigma\Phi < +\infty$ sur une plénitude de H; donc la différence $D^s\Psi(x) - D^{s*}\Phi(x)$ est déterminée sur une plénitude h_1 de $\left.h - \lambda\right]$. Le dérivé intermédiaire au troisième membre est *fini* sur une plénitude h_2 de h_1, $\varphi_e(h_2) = \eta > 0$; or sur h_2 :

$$(2_0) \qquad D^{s*}F(x)\ (\text{fini}) \geqq D^s\Psi(x) - \overline{D}^s\Phi(x) = +\infty - \overline{D}^s\Phi(x);$$

donc $\overline{D}^s\Phi(x) = +\infty$ sur h_2; par là $\overline{D}^\sigma\Phi(x) = +\infty$, sur h_2 ce qui est contraire à (5.3 *a*). De la même façon, on obtient une contradiction, si $f = -\infty$ sur un ensemble q, avec $\varphi_e(q) > 0$; ainsi *l'énoncé* (5.6) *est vérifié.*

Théorème 5.7. — *Si $f(x)$ est sommable-φ sur un* H *épais de* $\mathfrak{M}_0^s$, $P^s(f, H)$ *existe et*

$$P^s(f, R) = (L)\int_H f(x)\, d\varphi(x).$$

On peut supposer que $H \in \mathfrak{M}_0^s$ et donner la démonstration pour f non négative et finie sur H. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble

$Q = Q_\varepsilon (\subset H)$ fermé tel que $\varphi(H - Q) < \varepsilon$ et que $f(x)$ est continue sur Q relativement à Q. *La fonction* $q = f$ (sur Q), $= 0$ (sur $H - Q$) *est semi-continue supérieurement* (rel. à H); $\int_H (f - q)\, d\varphi \to 0$ *pour* $\varepsilon \to 0$; *posons* $F(r) = \int_r q\, d\varphi$. On obtient

$$\bar{D}^\sigma F(x) \leqq q(x) \leqq f(x) < +\infty \quad \text{sur H},$$

d'où

$$(1^\circ) \qquad \bar{D}^s F(x) \leqq f(x) \quad \text{sur H} \qquad (\text{car } \bar{D}^s \leqq \bar{D}^\sigma).$$

F satisfait aux conditions (5.3 *a*), (5.3 *b*) d'une P^s-minorante. F est complètement additive dans $\mathfrak{M}^s$, puisqu'elle l'est comme fonction d'ensemble mesurable-φ. Soit $S = \{s_j\}$ $(j = 1, \ldots, \nu)$ un système fini de sphères fermées dans un ρ $(\text{de } \mathfrak{M}_0^s) \subset H$; on obtient

$$(2^\circ) \qquad F(\rho) - F(S) = \int_\lambda q\, d\varphi, \qquad \text{où} \quad \lambda = \lambda(S) = \rho - \sum s_j.$$

Pour $N(\rho, S)$ (4.14 *b*) $\to 0$, il vient $\varphi(\lambda) \to 0$ et [d'après la continuité absolue de F comme fonction d'ensemble mesurable-φ]

$$(3^\circ) \qquad F(\rho) = \lim F(S) = \int_\rho^s F \quad \text{pour tout } \rho \ (\text{de } \mathfrak{M}_0^s) \subset H;$$

donc F présente un cas assez spécial du caractère A. S. G. (4.35) sur H. Soit $\gamma (\gamma H \neq 0)$ la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}^s$; désignons par $S = \{\sigma_j\}$ $(j = 1, \ldots, \nu)$ un système fini (de sphères fermées) dans H, $\sigma_j \gamma \neq 0$; on aura

$$0 \leqq F(S) = \int_\tau q\, d\varphi, \qquad \tau \doteq \tau(S) = \sum_1^\nu \sigma_j;$$

posons $q^n = q$ (où $q < n$), $= n$ (où $q \geqq n$), alors

$$\delta_n(S) = \int_\tau (q - q^n)\, d\varphi \leqq \int_H (q - q^n)\, d\varphi = \nu_n, \qquad \nu_n \downarrow 0 \text{ pour } n \to \infty;$$

pour $\xi > 0$ il y a un $n' = n(\varepsilon)$ tel que $\nu_{n'} < \frac{\varepsilon}{2}$; il vient

$$F(S) = \int_\tau q^{n'}\, d\varphi + \delta_{n'}(S) \leqq n' \varphi(\tau) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

dès que M(S) (4.14 *a*) est suffisamment petit afin que $\varphi(\tau) = \varphi(S) < \frac{\varepsilon}{2n'}$ [noter que φ satisfait à (4.41, I)]; ainsi $M(S) \to 0$ entraîne $F(S) \to 0$, d'où F satisfait à (4.41, I). Envisageons des ensembles q_n $(n=1,2,\ldots)\in\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$, $q_n\subset H$, $q_n\downarrow 0$; d'après (3°) $\int_{q_n}^s F$ existe et vaut

$$F(q_n)=\int_{q_n} q(x)\,d\varphi(x), \qquad \text{donc} \quad \lim_n \int_{q_n}^s F=0,$$

ce qui est la propriété (4.41, II) pour F. On conclut comme il suit.

(4°) *La fonction* F, *introduite plus haut, est sur* H *une* P^s*-minorante de* $f(x)$; *on peut faire en sorte que* $(0\leqq)\int_H (f-q)\,d\varphi$ *soit aussi petit qu'on veut.*

Nous allons construire une fonction g d'une façon pareille à des développements analogues dans l'Ouvrage (R; p. 93-94). Par la suite dans les applications successives du théorème de Lusin [comme établi dans (T*)] il s'agira de certains ensembles fermés, plutôt que compacts. On pose $E_1=\{x\in H; f(x)<1\}$; il existe un Q_1 $(\subset E_1)$ fermé tel que $\varphi(E_1-Q_1)<\varepsilon\, 2^{-1}$ et f est continue sur Q_1 relativement à Q_1; soit $f_1=f$ [sur $Q_1+(H-E_1)$], $=1$ [sur E_1-Q_1]; ensuite, dans $E_2=\{x\in H; 1\leqq f_1<2\}$ on trouve un ensemble Q_2 fermé, $\varphi(E_2-Q_2)<\frac{1}{2}\varepsilon\, 2^{-2}$, tel que f_1 est continue sur Q_2 relativement à Q_2. En procédant ainsi, on obtient des ensembles fermés Q_m, des E_m et des fonctions f_m, tels que :

$$(5^\circ)\quad \left\{\begin{array}{ll} f=f_0\leqq f_1\leqq f_2\leqq\ldots; & Q_m\subset E_m=\{x\in H;\ m-1\leqq f_{m-1}<m\};\\ & \varphi(E_m-Q_m)<\dfrac{1}{m}\varepsilon\, 2^{-m};\end{array}\right.$$

$$f_m=f_{m-1}\quad [\text{sur } Q_m+(H-E_m)], \qquad =m\quad [\text{sur } E_m-Q_m];$$

f_m continue sur Q_{m+1} relativement à $Q_m\,(m\geqq 0)$;

$$\int_H (f_m-f_{m-1})\,d\varphi<\frac{1}{m}\varepsilon\, 2^{-m};$$

$$(6^\circ)\quad Q_1+\ldots+Q_{m-1}+E_m=\{x\in H; f(x)<m\}; \qquad \varphi(Q_1+Q_2+\ldots)=\varphi(H);$$

$$f_{\nu-1}=f_\nu=f_{\nu+1}=\ldots \quad \text{sur } Q_\nu[\subset H-E_m\,(m>\nu)],$$

cela étant pour $\nu=1, 2, \ldots$;

(7°) $f_m\,(m\geqq 1)$ est semi-continue inférieurement, relativement à H, en tout point de Q_m; on définit $g(x)=\lim\limits_m f_m(x)$ sur H.

Cette fonction $g(x)$ jouit des propriétés :

(8°) $g \geqq f$ sur H; g est sommable sur H; $g = f_m$ sur Q_m; g est semi-continue inférieurement, relativement à H, en tout point de $Q_1 + Q_2 + \ldots$ (une plénitude de H);

$$\int_H (g-f)\, d\varphi < \varepsilon.$$

Montrons que $\Psi(r) = \int_r g\, d\varphi$ $[r$ (de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s) \subset H]$ est sur H une P^s-majorante de $f(x)$. Ψ est complètement additive dans $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$; $\Psi(\rho) = \int_\rho^s \Psi$ pour tout ρ (de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset H$ [*voir* le raisonnement en rapport avec (2°), (3°)]; donc Ψ est A. C. S. sur H; Ψ satisfait aux conditions (4.41, I, II), ce qui résulte des développements à la suite de (3°), en tant que Ψ est une intégrale de Lebesgue. D'après la propriété (8°) de semi-continuité de g, il vient

$$\underline{D}^\sigma \Psi(x) \geqq g(x) \geqq f(x) \quad \text{sur la plenitude } Q^\star = Q_1 + Q_2 + \ldots \text{ de H.}$$

Or $\underline{D}^s \geqq \underline{D}^\sigma$, donc $\underline{D}^s \Psi(x) \geqq f(x)$ sur $Q^\star$; Ψ satisfait à la condition (5.3 *b*) pour une P^s-majorante de $f(x)$. La fonction Ψ étant non négative, $\underline{D}^\sigma \Psi \geqq 0$ sur H; ainsi Ψ remplit (5.3 *a*). On conclut que Ψ est en effet une P^s-majorante sur H de $f(x)$; de plus, comme on vient de voir

$$\int_r f\, d\varphi \leqq \Psi(r) < \int_r f\, d\varphi + \varepsilon \qquad [\text{tout } r \text{ (de } \widetilde{\mathfrak{M}}^s) \subset H].$$

En tenant compte de (4°), *le théorème* 5.7 *est vérifié.*

(5.8) *Si* $P^s(f, H)$ *existe pour un* H *de* $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$ (*ou bien de* $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$), $P^s(f, r)$ *existe pour tout* r (*de* $\widetilde{\mathfrak{M}}^s) \subset H$ *et est une fonction complètement additive dans* $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ *et A. C. S. sur* H, *satisfaisant à* (4.41, I, II); *si les* $P^s(f_i, H)$ $(i = 1, 2)$ *existent et* k_1, k_2 *sont des constantes, on aura*

$$P^s(k_1 f_1 + k_2 f_2, H) = k_1 P^s(f_1, H) + k_2 P^s(f_2, H).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on trouve une P^s-majorante $\Psi(H)$ [P^s-minorante $\Psi(H)$] de f sur H de sorte que $\Psi(H) - \Phi(H) < \varepsilon$; r (de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$) désignant un ensemble quelconque contenu dans H, $\Psi(r)$ [$\Phi(r)$] sera une P^s-majorante [P^s-minorante] de f sur r;

$$(0 \leqq) \quad \Psi(r) - \Phi(r) \leqq \Psi(H) - \Phi(H) < \varepsilon;$$

donc $P^s(f, r)$ *existe.* Soient les r_n et r dans $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$, $r \subset H$, $r_n \uparrow r$. On obtient

$$\Phi(r_n) \leqq P^s(f, r_n) \leqq \Psi(r_n);$$

d'après la complète additivité dans $\mathfrak{M}^s$ de Φ et de Ψ, il vient

$$(1_0)\quad \Phi(r) \leqq \overline{\lim_n}\, P^s(f, r_n) \leqq \Psi(r), \qquad |P^s(f, r) - \overline{\lim}\, P^s(f, r_n)| < \varepsilon;$$

par conséquent $\lim_n P^s(f, r_n) = P^s(f, r)$. Ainsi $P^s(f, r)$ *est complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ *sur* H.

Soient un p parfait-s dans H et un r (de $\mathfrak{M}^s$) $\subset$ H avec $rp \neq 0$; écrivons $P^s(f, \ldots) = P(\ldots)$. Ψ èt Φ étant A. C. S. (4.35) sur H, d'abord on trouve un r' (de $\mathfrak{M}^s$), $r' \subset r$, $r'p \neq 0$, tel que $\Psi = \int^s \Psi$ (rel. à p) dans r' [e. g. Ψ est a. s. (rel. à p) sur r']; ensuite on trouve un r_1 (de $\mathfrak{M}^s$), $r_1 \subset r'$, $r_1 p \neq 0$, de sorte que $\Phi = \int^s \Phi$ (rel. à p) dans r_1. Soit S un système fini (de sphères fermées), relativement à p, dans un ρ (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) $\subset r_1$; alors $\Phi(S) \leqq P(S) \leqq \Psi(S)$; en laissant $N(\rho, S)$ (4.14 b) $\rightarrow 0$ on obtient

$$\int_\rho^s \Phi \text{ (rel. à } p) \leqq \underline{\int}_\rho^s P \text{ (rel. à } p) \leqq \overline{\int}_\rho^s P \text{ (rel. } p) \leqq \int_\rho^s \Psi \text{ (rel. à } p);$$

d'où

$$\Phi(\rho) \leqq \overline{\underline{\int}}_\rho^s P \text{ (rel. à } p) \leqq \Psi(\rho).$$

Enfin $\int^s P$ (rel. à p) existe dans r_1 et l'on a

$$P(\rho) = \int_\rho^s P \text{ (rel. à } p) \quad \text{pour tout } \rho \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset r_1.$$

Ainsi $P^s(f, r)$ *est A. C. S. sur* H. Soit γ la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}^s$, $\gamma H \neq 0$. Or Ψ et Φ satisfont à (4.41, I); si $S = \{\sigma_j\}$ est un système fini dans H, avec les sphères fermées σ_j jointes à γ, on aura

$$\Psi(S) \rightarrow 0, \qquad \Phi(S) \rightarrow 0, \qquad \text{lorsque } M(S)\ (4.14\,a) \rightarrow 0.$$

Puisque $\Phi(S) \leqq P(S) \leqq \Psi(S)$, on obtient $P(S) \rightarrow 0$; e. g. $P^s(f, r)$ *remplit* (4.41, I). Prenons

$$q_n (\in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad q_n \subset H, \quad q_n \downarrow 0;$$

Ψ, Φ satisfont à (4.41, II), donc

$$(2_0)\qquad \lim_n \overline{\int}_{q_n}^s \Psi = 0, \qquad \lim_n \underline{\int}_{q_n}^s \Phi = 0;$$

soit $S_n = \{ s_{n,k} \}$ $(k = 1, \ldots, \nu_n)$ un système fini dans q_n;

$$\Phi(S_n) \leqq P(S_n) \leqq \Psi(S_n).$$

Avec n fixe, pour $N(q_n, S_n)$ tendant vers zéro, il résulte

$$\underline{\lim}\,\Phi(S_n) \leqq \overline{\lim}\,P(S_n) \leqq \overline{\lim}\,\Psi(S_n); \qquad \underline{\int}_{q_n}^{s} \Phi \leqq \underline{\int}_{q_n}^{s} P \leqq \overline{\int}_{q_n}^{s} P \leqq \overline{\int}_{q_n}^{s} \Psi;$$

enfin, en laissant $n \to \infty$ (2_0) il vient $\lim \overline{\underline{\int}}_{q_n}^{s} P = 0$. Donc $P^s(f, r)$ *satisfait à* (4.41, II). *Le reste de l'énoncé* (5.8) *est immédiat.*

THÉORÈME 5.9. — *Si* $P^s(f, H)$ *existe pour un* H *de* $\mathfrak{M}_0^s$, *on aura* $D^s P^s(f, x) = f(x)$ *sur une plénitude de* H.

Soit un $\varepsilon > 0$; il existe une P^s-majorante et une P^s-minorante (de f sur H) telles que

(a_1) $\quad (0 \leqq)\, F(r) = \Psi(r) - \Phi(r) < \varepsilon^2$ pour tout r (de $\mathfrak{M}^s$) $\subset$ H.

Puisque $\overline{D}^s \leqq \overline{D}^\sigma$ (4.28), il vient

(a_2) $\quad h(\varepsilon) = \{ x \in H; \overline{D}^s F(x) > \varepsilon \} \subset h'(\varepsilon) = \{ x \in H; \overline{D}^\sigma F(x) > \varepsilon \};$

selon (4.43), l'ensemble $h'(\varepsilon)$ est mesurable. Soit $\mathcal{F}$ la famille de toutes les sphères fermées σ, telles que $\sigma \subset H$ (ouvert), $F(\sigma) > \varepsilon\varphi(\sigma)$. L'ensemble $h'(\varepsilon)$ est indéfiniment couvert par $\mathcal{F}$ [e. g. tout point x de $h'(\varepsilon)$ est contenu dans une suite σ^n (de $\mathcal{F}$), avec $\varphi(\sigma^n) \to 0$]. En raison du théorème (4.13) de Denjoy-Vitali pour les sphères, des σ_n $(n = 1, 2, \ldots, \nu)$ existent telles que

$$\sigma_n \in \mathcal{F}, \quad \text{les } \sigma_n \text{ sont disjointes}, \qquad \varphi\left(h'(\varepsilon) - h'(\varepsilon) \sum_1^\nu \sigma_n \right) < \varepsilon$$

$[\sigma_n \subset H,\ F(\sigma_n) > \varepsilon\varphi(\sigma_n)]$. Par là $[(a_1), (a_2)]$:

$$(a_3) \qquad \varphi_e(h(\varepsilon) \leqq \varphi(h'(\varepsilon)) < \sum_1^\nu \varphi(h'(\varepsilon)\sigma_n) + \varepsilon \leqq \sum_1^\nu \varphi(\sigma_n) + \varepsilon$$
$$< \frac{1}{\varepsilon} \sum_1^\nu F(\sigma_n) + \varepsilon \leqq \frac{1}{\varepsilon} F(H) + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

D'après (a_2) et (5.3 b), il y a une plénitude $q(\varepsilon)$ de $H - h(\varepsilon)$ sur laquelle

(a_4) $\quad \overline{D}^s\Phi \leqq f \leqq \underline{D}^s\Psi, \qquad 0 \leqq \underline{D}^s\Psi - \overline{D}^s\Phi \leqq \overline{D}^s\Psi - \overline{D}^s\Phi \leqq \overline{D}^s F \leqq \varepsilon.$

Désignons par Φ_n et Ψ_n les fonctions Φ et Ψ qui correspondent à

$$\varepsilon=\frac{1}{n};\qquad F_n=\Psi_n-\Phi_n;\qquad h_n=h\left(\frac{1}{n}\right),\qquad q_n=q\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons

$$Q=\overline{\lim_n}\, q_n,\quad Q_1=\overline{\lim_n}\,(H-h_n);\qquad \varphi(Q_1-Q)=0,$$

Or (a_3) :

$$H-Q_1=\underline{\lim}\, h_n=\sum_1^\infty (h_n h_{n+1}\ldots),$$

$$\varphi_e(h_n h_{n+1}\ldots)\leqq \varphi_e(h_m)<\frac{2}{m}\quad(\text{tout } m\geqq n);$$

$\varphi(h_n h_{n+1}\ldots)=0$, donc $\varphi(H-Q_1)=0$; ainsi Q *est une plénitude de* H. Soit un point x sur Q; des entiers $n_i=n_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots,)$ existent tels que $\lim n_i=\infty$ et $x\in q_{n_i}$; on aura (a_4) :

$$(a_5)\quad \begin{cases} \overline{D}^s\Phi_{n_i}(x)\leqq f(x)\leqq \underline{D}^s\Psi_{n_i}(x), \\ 0\leqq \underline{D}^s\Psi_{n_i}(x)-\overline{D}^s\Phi_{n_i}(x)\leqq \overline{D}^s\Psi_{n_i}(x)-\overline{D}^s\Phi_{n_i}(x)\leqq \overline{D}^s F_{n_i}(x)\leqq \frac{1}{n_i}; \end{cases}$$

puisque $\Phi_n(\ldots)\leqq P^s(f, \ldots)=P(\ldots)\leqq\Psi_n(\ldots)$ dans H, on obtient

$$(a_6)\qquad \overline{D}^s\Phi_{n_i}(x)\leqq \overline{D}^s p(x)\leqq \overline{D}^s\Psi_{n_i}(x);$$

pour les x considérés, de (a_5) il suit que

$$\lim_i \underline{\overline{D}}^s\Psi_{n_i}(x)=\lim \overline{D}^s\Phi_{n_i}(x)=f(x);$$

il en résulte [d'après (a_6)] : $\overline{D}^s P(x)=f(x)$ sur la plénitude Q de H. Cette conclusion, appliquée à $P_1(r)=P^s(-f, r)$, mène à la relation $f(x)=\underline{D}^s P(x)$ sur une plénitude Q' de H. *Le théorème est vérifié.*

(5.10) *Admettons l'hypothèse* (4.29). *Si* $P^s(f, H)$ *existe,* f *sera mesurable sur* H; *si, en plus,* $f\geqq 0$ *sur* H, f *sera sommable sur* H.

La mesurabilité de $f(x)$ suit du théorème 5.9 et de l'énoncé (4.43). Pour démontrer la seconde partie de (5.10) notons d'abord que l'existence de $P^s(f_i, H)$, avec $f_1\leqq f_2$ sur H, entraîne $P^s(f_1, H)\leqq P^s(f_2, H)$ Si $f(\geqq 0)$, connue être mesurable, est non sommable, prenons $q_n=f$ (où $f<n$), $=n$ (où $f\geqq n$); pour n suffisamment grand, en vertu du théorème 5.7, il vient

$$(L)\int_H q_n\, d\varphi=P^s(q_n, H)>P^s(f, H)\quad(\text{fini}),$$

ce qui est impossible, car $q_n\leqq f$.

6. Les R^s-minorantes et majorantes associées avec la totalisation-S. — Introduisons :

DÉFINITION 6.1. — *Soit* F *définie* (et finie) *pour toutes les sphères fermées contenues dans un* H *de* $\mathcal{M}_0^s$; *soit* E *joint à* H. On dira que $F \in V^\sigma.B.$ (est à *variation bornée au sens sphérique asymétrique*) *sur* E *dans* H, s'il existe un $\eta > 0$ tel que $\left|\sum F(\sigma_i)\right| \leqq B < +\infty$, dès que $\sigma' = \{\sigma_i\}$ est un système fini dans H, $M(\sigma')\left[= \sup\limits_i \varphi(\sigma_i)\right] < \eta$, $\sigma_i E \neq 0$. On dira que $F \in A.C^\sigma.$ (est *absolument continue au sens sphérique asymétrique*) *sur* E *dans* H, si pour $\varepsilon > 0$ un $\eta(\varepsilon) > 0$ existe de sorte que les relations

$$\sigma' = \{\sigma_i\{ \text{ est un système fini}, \qquad \sigma_i \subset H, \qquad \sigma_i E \neq 0, \qquad \sum \varphi(\sigma_i) < \eta(\varepsilon)$$

entraînent $\left|\sum F(\sigma_i)\right| < \varepsilon$. Dans ces définitions, la signification des caractères $V^\sigma.B.$, $A.C^\sigma.$ n'est pas changée quand on remplace $\left|\sum F(\sigma_i)\right|$ par $\left|\sum F(\sigma_i)\right|$. On obtient les caractères :

$A.C^\sigma.S.$ ($A.C^\sigma.$ *supérieure*) [$A.C^\sigma.I.$ ($A.C^\sigma.$ *inférieure*)], en remplaçant $\left|\sum F(\sigma_i)\right|$ dans la définition de $A.C^\sigma.$ par $\sum F(\sigma_i) < \varepsilon$ $\left[\sum F(\sigma_i) > -\varepsilon\right]$. De la même manière, on spécifie : $V^\sigma.B.S.$ ($V^\sigma.B$ supérieure) et $V^\sigma.B.I.$ ($V^\sigma.B.$ inférieure).

(6.1′) F et H étant comme plus haut, supposons p fermé est joint à H. Pour toute sphère fermée $s \subset H$, nous posons

$$F_{\langle p \rangle}(s) = F(s) \quad (\text{si } sp \neq 0), \qquad = 0 \quad (\text{si } sp = 0).$$

Ceci constitue une modification de $F_{(p)}$ (4.13 *a*).

(6.1″) $F \in A.C^\sigma.G.$, *absolument continue généralisée au sens asymétrique*, sur H, si pour tout p parfait-*s*, joint à H, et tout r (de $\mathcal{M}_0^s$) dans H, joint à p, il existe un r_1 (de $\mathcal{M}_0^s$) $\subset r$, tel que $r_1 p \neq 0$ et que $F \in A.C^\sigma.$ sur $r_1 p$ dans r_1 [e. g. $F_{\langle p \rangle} \in A.C^\sigma.$ sur r_1 dans r_1].

(6.2) Les caractères *sur* E *dans* H : $V^\sigma.B.$, $V^\sigma.B.S.$, $V^\sigma.B.I.$, $A.C^\sigma.$, $A.C^\sigma.S.$, $A.C^\sigma.I.$ impliquent respectivement *sur* E *dans* H : $V^s.B.$, $V^s.B.S.$, $V^s.B.I.$, $A.C^s.$, $A.C^s.S.$, $A.C^s.I.$ [*cf.* (4.25)]. $A.C^\sigma.G.$ sur H entraîne $A.C^s.G.$ (4.32) sur H.

Notons que, si F est définie pour les sphères fermées dans un H (de $\mathfrak{M}^s$) épais (ou bien de $\mathfrak{M}_0^s$), pour tout système fini $s = \{s_\iota\}$ dans $(H)^0$ on définit

$$(6.3) \qquad F^-(s) = \inf_\sigma (\sigma), \qquad F^+(s) = \sup_\sigma F(\sigma),$$

$\sigma = \{\sigma_\iota\}$ désignant des systèmes finis continus dans s [*voir* la définition (4.31) pour le cas où l'ensemble fermé p y intervenant est tel que $p(H)^0 = (H)^0$]; on a

$$(6.3\,a) \qquad \begin{cases} F^+(s) \geqq 0 \geqq F^-(s), \qquad F^+(s) \geqq F(s) \geqq F^-(s); \\ \bar{D}^s F^+(x) \geqq \bar{D}^s F(x) \geqq \underline{D}^s F^-(x), \\ \bar{D}^\sigma F^+(x) \geqq \bar{D}^\sigma F(x) \geqq \underline{D}^\sigma F^-(x) \quad (4.28) \text{ sur } (H^0). \end{cases}$$

Définition 6.4. — Soit F définie pour les sphères fermées dans un H de $\mathfrak{M}_0^s$. *On dira que* $F \in$ A. C$^\sigma$. G. I. [A. C$^\sigma$. G. S.] *sur* H, *si* F^-[F^+] *est* A. C$^\sigma$. G. *sur* H (6.1″).

Théorème 6.5. — H *étant dans* $\mathfrak{M}_0^s$, *supposons que* F *est complètement additive dans* $\mathfrak{M}^s$ *sur* H (4.9), $F \in$ A. S. G. *sur* H (4.35), F *satisfait à* (4.41, I, II) et φ *remplit* (4.41, I). *Les conditions*

$$(6.5\,a) \qquad F \in \text{A. C}^\sigma\text{. G. I.} \quad \textit{sur } H \quad (\text{definition } 6.4);$$

$$(6.5\,b) \qquad \underline{D}^s F(x) \geqq 0 \quad \textit{sur une plénitude de } H$$

entraîneront $F(r) \geqq 0$ *pour tout* r (*de* $\mathfrak{M}^s$) $\subset$ H.

Il suffit d'établir cet énoncé avec la condition

$$(6.5\,b') \qquad \underline{D}^s F(x) > 0 \quad \text{sur une plenitude de } H,$$

au lieu de (6.5 *b*). Or φ satisfait aux conditions du théorème; le même sera vrai pour $F' = F + \varepsilon\varphi$, si F remplit ces conditions; mais on aura $\underline{D}^s F'(x) > 0$ sur une plénitude de H; ayant établi que $F' \geqq 0$ dans H, il s'ensuivrait que $F \geqq -\varepsilon\varphi$, donc $F \geqq 0$ dans H. Ainsi *il suffira de procéder sous la condition* (6.5 *b'*) *pour* F, en obtenant $F(H) \geqq 0$. On aura alors la même conclusion pour tout r de $\mathfrak{M}_0^s$ (donc de $\mathfrak{M}^s$) contenu dans H.

On a (6.5 *a*) $F^- \in$ A. C$^\sigma$. G. sur H. Or, en utilisant les méthodes qu'on avait employées pour établir le théorème (4.33), *on peut vérifier une proposition* [*analogue à* (4.33)], selon laquelle le caractère *A. C$^\sigma$. G. sur* H (*de* $\mathfrak{M}_0^s$) *pour une fonction* Q *équivaut à ce que*

(6.6) $H = \sum_1^\infty \lambda(n)$; *les* $\lambda(n)$ *fermés dans* H; $\lambda(n)$ *contenu dans la frontière d'un ensemble de* $\mathfrak{M}^s$; *ou bien* $Q_{\langle\lambda(n)\rangle} \in$ A. C$^\sigma$. *sur* H [e. g.

sur H dans H; (6.1′)]. Nous en donnerons une preuve à la suite du théorème 6.18.

Par conséquent :

$$(1^o) \qquad H \subset \sum_{m=1}^{\infty} e_m + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m,$$

λ_m étant la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}^s$; les e_m sont fermés; $F^{-}_{\langle e_m \rangle} \in$ A. C$^\sigma$. sur H. Pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta(\varepsilon) > 0$ existe tel que les relations

$$(2^o) \qquad \{s_\iota\} \text{ est un système fini dans H}, \quad \sum \varphi(s_\iota) < \eta(\varepsilon)$$

impliquent $\sum_\iota F^{-}_{\langle e_m \rangle}(s_\iota) > -\varepsilon$ (car $F^{-}_{\langle e_m \rangle} \leqq 0$); or $F_{\langle e_m \rangle} \geqq F^{-}_{\langle e_m \rangle}$ pour les sphères, donc (2°) entraîne $\sum_\iota F_{\langle e_m \rangle}(s_\iota) > -\varepsilon$. Ainsi *la formule* (1°) *a lieu avec* $F_{\langle e_m \rangle} \in$ A. C$^\sigma$. I. *sur* H. Supposons, si cela est possible, que $F(H) < 0$. En vertu du théorème 4.42, pour H et F, il existe un $p = p(H)$, parfait-*s* dans H, de sorte que

$$(3^o) \qquad F(\rho) = \int_\rho^s F \text{ (rel. à } p) \quad \text{pour tout } \rho \text{ (de } \mathfrak{M}_0^s) \subset H.$$

Désignons par $S = \{s_k\}$ un système (rel. à p) dans

$$H_1 = H - H\lambda_1, \qquad H_1 \in \mathfrak{M}_0^s;$$

on obtient

$$F(S) \to \int_{H_1}^s F \text{ (rel. à } p) = F(H_1) = F(H) < 0$$
$$\text{lorsque} \quad F(H_1, S) \ (4.14\, b) \to 0$$

[on se rappelle la constatation au commencement de la section 5]. Pour $N(H_1, S)$ suffisamment petit, S contiendra une sphère *fermée* s' telle que

$$(4^o) \qquad F(s') < 0, \quad s' \subset H, \qquad s'\lambda_1 = 0, \quad s' \text{ est (rel. à } p).$$

Soit $0 < \varepsilon_1 < 1$, $\varepsilon_1 \leqq \frac{1}{2} |F(s')|$. En raison de (6.5 b') on a $\underline{D}^s F(x) > 0$ sur $s' - e' \subset (s')^0$, avec un e' mince (on inclut la frontière de s' dans e'). En tenant compte du théorème de Denjoy-Vitali (4.13) et procédant comme à la suite de (5.2 b') de (2_0) jusqu'à (3_0), on trouve un système fini $(s^1, s^2, \ldots, s^{n^1})$, *relativement à p*, dans $(s')^0$, tel que

$$(5^0)\qquad s^k \subset (s')^0, \quad F(s^k) > 0, \quad \text{le centre de } s^k \text{ est sur } s' - e'; \quad \varphi(q^1) < \eta(\varepsilon_1), \quad \text{avec} \quad q^1 = (s')^0 - \sum_1^{n^1} s^k \in \mathfrak{M}_0^s.$$

Pour les raisons qui, à la suite de (5.2 b'), mènent à (4_0), (5_0) il existe un système $S^1 = \{ s_k^1 \}$ ($k = 1, 2, \ldots, \nu^1$) fini (rel. à p) dans q^1, tel que

$$(6^0)\qquad | F(q^1) - F(S^1) | < -\frac{1}{2} F(s'), \qquad F(S^1) < \frac{1}{2} F(s') \; (< 0).$$

D'après la seconde inégalité (6^0) des s_k^1 existent tels que $F(s_k^1) < 0$; désignons-les par σ_i ($i = 1, \ldots, m$); les autres seront notées $s_{k_1}^1$; $F(\sigma_i) < 0$, $F(s_{k_1}^1) \geqq 0$. On a [(5^0), (6^0)]

$$F(s') = \sum_k F(s^k) + \sum_i F(\sigma_i) + \sum_{k_1} F(s_{k_1}^1) + \delta, \qquad \text{où} \qquad \delta = F(q^1) - F(S^1);$$

$$\sum_i F(\sigma_i) < F(s') - \delta < \frac{1}{2} F(s') \; (< 0).$$

Si l'on avait toute σ_i jointe à e_1, on obtiendrait

$$\sum_i F_{\langle e_1 \rangle}(\sigma_i) = \sum_i F(\sigma_i) < \frac{1}{2} F(s');$$

$F_{\langle e_1 \rangle}$ est A. C^σ. I. sur H (dans H); or $\sum \sigma_i \subset q^1$, d'où ($5^0$) $\sum \varphi(\sigma_i) < \eta(\varepsilon_1)$; $\{ \sigma_i \}$ satisfait à (2^0), avec $\varepsilon = \varepsilon_1$; par là,

$$-\varepsilon_1 < \sum_i F_{\langle e_1 \rangle}(\sigma_i) < \frac{1}{2} F(s') \; (< 0).$$

ce qui est contraire à l'inégalité $\varepsilon_1 \leqq \frac{1}{2} | F(s') |$. Par conséquent, il y a une σ_i, soit σ^1 (rel. à p), telle que (4^0)

$$\sigma^1 \subset s', \qquad \sigma^{-1} \lambda_1 = 0, \qquad \sigma^1 e_1 = 0, \qquad F(\sigma^1) < 0, \qquad \varphi(\sigma^1) < \eta(\varepsilon_1).$$

En succession on trouve une suite de sphères fermées σ^n (chacune relativement à p)

$$(7^0)\qquad \sigma^1 \supset \sigma^2 \supset \ldots; \qquad \sigma^n . (e_n + \lambda_n) = 0; \qquad \varphi(\sigma^n) < \eta(\varepsilon_n); \qquad F(\sigma^n) < 0;$$

on prend successivement $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n}$, $\varepsilon_n \leqq \frac{1}{2} \mid F(\sigma^{n-1}) \mid$; ainsi $\varphi(\sigma^n) \to 0$. Le point unique $x_0 = \prod \sigma^n$ est dans H et est étranger à $\sum (e_n + \lambda_n)$, ce qui est contraire à (1°). *Le théorème* 6.5 *est vérifié.*

DÉFINITION 6.7. — On dira que $\Phi[\Psi]$ est R^s-*minorante* [R^s-*majorante*] d'une fonction $f(x)$, définie sur une plénitude d'un H de $\mathfrak{M}_0^s$, si elle est complètement additive dans $\mathfrak{M}^s$ sur H (4.9), A. S. G. sur H (4.35), satisfait à (4.41, I, II) [φ remplissant (4.41, I)], tandis que :

(6.7 *a*) $\Phi \in$ A. C$^\sigma$. G. S. [$\Psi \in$ A. C$^\sigma$. G. I.] sur H (définition 6.14);

(6.7 *b*) $\overline{D}^s \Phi(x) \leqq f(x)$ [$\underline{D}^s \Psi(x) \geqq f(x)$] sur une plénitude de H.

(6.8) *Si* Φ *et* Ψ *ont les propriétés qu'on vient d'indiquer, on aura* $\overline{D}^\sigma \Phi(x) < +\infty$ *et* $\underline{D}^\sigma \Psi(x) > -\infty$ *sur une plénitude de* H.

En tant que $\Psi^- \in$ A. C$^\sigma$. G. sur H, d'après (6.6) :

$$(1') \qquad H \subset \sum_{m=1}^{\infty} e_m + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m,$$

λ_m étant la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}^s$, les e_m fermés; $\Psi^-_{\langle e_m \rangle} \in$ A. C$^\sigma$. sur H (6.1′). On voit que

$$(2') \qquad \underline{D}^\sigma \Psi(x) = \underline{D}^\sigma \Psi_{\langle e_m \rangle}(x) \quad \text{sur } e_m H.$$

Moyennant des méthodes pareilles à celles utilisées dans la preuve de (4.27) [*voir* (T; p. 107-108)] on vérifie la constatation suivante.

(6.9) Q *étant définie pour les sphères fermées contenues dans un* H (*de* $\mathfrak{M}_0^s$) *si* Q $\in$ V^s. B. *sur* H *dans* H [*ce qui revient à* V$^\sigma$. B. [(4.25), (6.1)] *sur* H *dans* H], *il s'ensuit que les dérivés* $\overline{\underline{D}}^\sigma$ Q *sont sommables sur* H.

On ne peut pas déduire cet énoncé comme une conséquence directe de la proposition (4.27). Nous savons déjà (4.43) que les dérivés extrêmes $\overline{\underline{D}}^\sigma Q(x)$ sont mesurables; (6.9) est prouvé essentiellement en utilisant le théorème de Denjoy-Vitali pour les sphères.

A. C$^\sigma$. sur H (dans H) pour $\Psi^-_{\langle e_m \rangle}$ entraîne le caractère V$^\sigma$. B., donc V^s. B., sur H (dans H); d'après (6.9), le dérivé $\underline{D}^\sigma \Psi^-_{\langle e_m \rangle}$ est fini sur une plénitude de H (y étant sommable). Par conséquent (2′),

$$\underline{D}^\sigma \Psi(x) \geqq \underline{D}^\sigma \Psi^-_{\langle e_m \rangle}(x) > -\infty \quad \text{sur une plénitude de } e_m H.$$

En tenant compte de (1′), la conclusion de l'énoncé (6.8) pour Ψ découle. La partie de (6.8) relative à Φ se démontre de la même façon.

(6.10) *Si sur un* H, Φ *est une* R^s*-minorante et* Ψ *est une* R^s*-majorante de* $f(x)$, *il s'ensuivra que* $\Phi(r) \leqq \Psi(r)$ *pour tout* r $(de\ \mathfrak{M}^s) \subset H$.

En effet, (6.7 *a*) Ψ et $-\Phi$ sont A. C^σ. G. I. sur H, donc $F = \Psi - \Phi$ l'est, e. g. F satisfait à (6.5 *a*). De plus, F (comme Ψ et Φ) est complètement additive dans $\mathfrak{M}^s$ sur H, A. S. G. sur H et remplit (4.41, I, II). Montrons que $\underline{D}^s F(x) \geqq 0$ sur une plénitude de H; alors le théorème 6.5 entraînerait $F \geqq 0$ dans H, e. g. la conclusion dans (6.10). D'après (6.7 *b*) et (6.8), il y a une plénitude h de H sur laquelle simultanément

$$(1_1)\qquad \overline{D}^s\Phi \leqq f \leqq \underline{D}^s\Psi,\qquad \overline{D}^s\Phi(\leqq \overline{D}^\sigma\Phi) < +\infty,\qquad -\infty < (\underline{D}^\sigma\Psi \leqq)\,\underline{D}^s\Psi.$$

Conséquemment *pour x sur h* il est impossible que l'un ou l'autre des deux cas suivants ait lieu

$$(2_1)\qquad \{\overline{D}^s\Phi(x) \text{ et } \underline{D}^s\Psi(x) \text{ sont } +\infty\},\quad \{\overline{D}^s\Phi(x) \text{ et } \underline{D}^s\Psi(x) \text{ sont } -\infty\}.$$

Mais les cas (2_1) sont précisément ceux pour lesquels

$$\alpha(x) = \underline{D}^s\Psi(x) - \overline{D}^s\Phi(x)$$

est indéterminée. Il vient

$$\underline{D}^s F \geqq \underline{D}^s\Psi + \underline{D}^s(-\Phi) = \alpha(x) \geqq 0$$

sur *h, ce qui établit* (6.10).

DÉFINITION 6.11. — *Soit une* $f(x)$ *définie sur une plénitude de* H $(de\ \mathfrak{M}_0^s)$. *Nous dirons que le nombre* $R^s(f, H)$ *existe, si pour tout* $\varepsilon > 0$, *f possède sur* H *une* R^s*-minorante* Φ *et une* R^s*-majorante* Ψ, *telles que*

$$\Psi(H) - \Phi(H) < \varepsilon;\qquad R^s(f, H) = \sup_{\Phi}\Phi(H) = \inf_{\Phi}\Psi(H).$$

(6.12) *Si f possède sur* H *une* R^s*-minorante* Φ *et une* R^s*-majorante* Ψ, *f sera finie sur une plénitude de* H.

Cela se démontre comme l'énoncé correspondant (5.9) pour les P^s-minorantes et majorantes. Supposons, par exemple, s'il est possible, que $f = +\infty$ sur un ensemble h, avec $\varphi_e(h) = \eta > 0$. Selon (6.7 *b*), $\underline{D}^s\Psi(x) \geqq f(x)$ sur une plénitude de H; ainsi $D^s\Psi(x) = +\infty$ sur une plénitude h' de h. $F(r) = \Psi(r) - \Phi(r)$ $(\geqq 0)$ est complètement additive dans $\mathfrak{M}^s$ sur H; $F \in V^s$.B. (aussi V^σ.B.) sur H dans H; par conséquent (4.27), tout dérivé intermédiaire $D^{s*}F$ est fini sur une plénitude de H. D'après (6.8), $\overline{D}^s\Phi(x)\,[\leqq \overline{D}^\sigma\Phi(x)] < +\infty$ sur une plénitude h_1 de h'. Pour tout x sur h_1 prenons des sphères fermées $s_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots)$, $\varphi(s_i(x) \to 0)$, de sorte que $\lim\limits_i \frac{\Phi(s_i(x))}{\varphi(s_i(x))} = D^{s*}\varphi(x)$ existe; cette limite sera sur h_1 inférieure à $+\infty$. On aura sur h_1

$$\lim \frac{F(s_i(x))}{\varphi(s_i(x))} = \lim \frac{\Psi(s_i(x))}{\varphi(s_i(x))} - \lim \frac{\Phi(s_i(x))}{\varphi(s_i(x))} = +\infty - D^{s*}\Phi(x) = D^{s*}F(x).$$

Le dernier membre est fini sur une plénitude h_2 de h_1 (de h', de h); $\varphi_2(h_2) = \eta > 0$, il y a une impossibilité en tout point de h_2. On procède de la même manière au cas où $f = -\infty$ sur un ensemble de mesure extérieure positive.

(6.13) *Si la* S-*totale* F *de* f *existe dans* H, *tandis que* $F \in A.\, C^{\sigma}.\, G.$ *sur* H [(6.1)-(6.1″)] *et* F *remplit* (4.41, I, II), *il suivra que* $R^s(f, H)$ *existe et*

$$[F(r) =](S)\int_r f\,d\varphi = R^s(f, r) \quad \text{pour tout } r \text{ (de } \mathfrak{M}^s) \subset H.$$

D'après (4.18), F est nulle pour les ensembles (*) (4.12) contenus dans H, F est complètement additive dans $\mathfrak{M}^s$, $F \in A.\, S.\, G.$ sur H (4.35); en raison de (4.24) on a $D^s F(x) = f(x)$ sur une plénitude de H. Puisque $F \in A.\, C^{\sigma}.\, G.$ sur H, F est simultanément $A.\, C^{\sigma}.\, G.\, S.$ et $A.\, C^{\sigma}.\, G.\, I.$ sur H. En tenant compte de la définition 6.7, il vient que F est à la fois une R^s-minorante et une R^s-majorante de f; *d'où la conclusion dans* (6.13).

En tenant compte du théorème (T; 15.10) on peut faire la remarque suivante. Dans l'hypothèse (4.29) la totale-S est $A.\, C^s.\, G.$; or dans l'énoncé (6.13) cette hypothèse n'intervient pas, tandis qu'on admet le caractère $A.\, C^{\sigma}.\, G.$, qui n'est pas entraîné par $A.\, C^s.\, G.$; par conséquent, la totale F, survenant à (6.13), est dans un certain sens plus restreinte et dans un autre sens moins restreinte que la S-totale selon (T; 15.10).

(6.14) *Si* f *est sommable sur un* H, *on aura*

$$L\int_r f\,d\varphi = R^s(f, r) \quad \textit{dans } H.$$

L'intégrale indéfinie $F(r) = (L)\int_r f\,d\varphi$ [r (de $\mathfrak{M}^s$) variable] satisfait dans H aux conditions (4.41, I, II), comme on peut vérifier par les procédés qui à la suite du théorème 5.7 mènent à (4°). Or on sait (T) que F est dans H la S-totale de f; $F \in A.\, C^{\sigma}.\, G.$ sur H; donc (6.14) suit de (6.13).

(6.15) *Si* $R^s(f, H)$ *existe, il suit que* $F(r) = R^s(f, r)$ *existe pour tout* r (*de* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) $\subset H$ *et que* F *est complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ *sur* H, F *est A. S. G. et A.* C^σ*. G. sur* H. *Si les* $R^s(f_i, H)$ $(i = 1, 2)$ *existent et les* k_i *sont des constantes,*

$$R^s(k_1 f_1 + k_2 f_2, H) = \sum k_i R^s(f_i, H),$$

La démonstration est pareille à celle de l'énoncé (5.8); on montre en même temps que F satisfait à (4.41, I, II).

THÉORÈME 6.16. — *Si* $R^s(f, H)$ *existe,* $D^s R^s(f, x) = f(x)$ *sur une plénitude de* H.

La preuve est comme celle du théorème 5.9, avec (6.7 *b*) au lieu de (5.3 *b*).

(6.17) *Admettons* (4.29); *l'existence de* $R^s(f, H)$ *entraînera la mesurabilité de* f *sur* H; *si, en plus,* $f \geqq 0$, f *sera sommable sur* H [de sorte que (6.14) s'applique].

La première partie découle du théorème 6.16 et de la constatation (4.43) [$D^s R^s(f, x) = D^\sigma R^s(f, x)$ sur une plénitude de H]. Démontrons la deuxième partie; si elle est en défaut, c'est que $(L)\int_H f\,d\varphi = +\infty$; en posant $q_n = f$ (où $f < n$), $q_n = n$ ailleurs, il y a un n' tel que $(L)\int_H q_{n'}\,d\varphi$ surpasse $R^s(f, H)$; en raison de (6.14) :

$$(L)\int_H q_n\,d\varphi = R^s(q_n, H) > R^s(f, H),$$

ce qui est contraire à l'inégalité $q_{n'} \leqq f$ (sur H).

THÉORÈME 6.18. — *Si sur un* H *de* $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$ $\Psi[\Phi]$ *est une* P^s*-majorante* [P^s*-minorante*] *de* $f(x)$, *ces fonctions seront respectivement une* R^s*-majorante et une* R^s*-minorante de* $f(x)$. *Si* $P^s(f, H)$ *existe, il en sera de même pour* $R^s(f, H)$ *et l'on aura*

$$P^s(f, H) = R^s(f, H).$$

D'après (5.6), f est finie sur une plénitude de H. Ψ est sur H complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$, A. S. G. et satisfait à (4.42, I, II) [comme toujours φ remplit (4.41, I)]. On a [(5.3 *a*), (5.3 *b*)] :

$$(1_0) \qquad \underline{D}^\sigma \Psi - \infty \quad \text{sur } H - H_0, \qquad \text{où} \quad H_0 \subset H_1 = \sum_1^\infty g_n\,(\in (*^s)),$$

les g_n étant des frontières d'ensembles de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$; de plus,

$$\underline{D}^s \Psi \geqq f \quad \text{sur une plénitude de H.}$$

En tant que Ψ, il ne reste à montrer que (6.7 *a*) : $\Psi \in$ A. C$^\sigma$. G. I. sur H (définition 6.4), e. g. que

$$(2_0) \qquad \Psi^- \in \text{A. C}^\sigma\text{. G.} \quad [(6.3);\ (6.1''),\ (6.1');\ \text{définition } 6.1).$$

Or par la vertu du *théorème* 6.19, *établi plus loin*, (1_0) entraîne (2_0) [on note que, selon la définition 4.9, l'additivité complète dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ comprend la continuité au sens (4.7 *a*)]. Conséquemment Ψ est sur H une R^s-majorante de *f*. De la même manière, il suit que Φ est une R^s-minorante de *f*. La dernière partie du théorème 6.18 en découle.

Vérification de l'énoncé (6.6). — *Soit* F *définie et finie pour les sphères fermées contenues dans un* H (*de* $\tilde{\mathfrak{M}}^s_0$). Soit :

(I) F $\in$ A. C$^\sigma$. G. (6.1″) sur H. Montrons que

(II) $\mathrm{H} = \sum_1^\infty \lambda(n)$ [les $\lambda(n)$ fermés dans H]; $\lambda(n)$ contenu dans la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}^s$, ou bien $F_{\langle\lambda(n)\rangle}$ (6.1′)$\in$ A. C$^\sigma$. (6.1) sur H dans H.

Procédons comme dans (T; p. 117-118) avec F au lieu de Ψ. [T; (1′)] est remplacée par : $F_{\langle e_{\alpha-1}\rangle} \in$ A. C$^\sigma$. sur $r'_{\alpha-1}$ dans $r'_{\alpha-1}$. La constatation en rapport avec [T; (2′), (3′)] n'est pas changée, sauf que l'inclusion $\rho \subset r'_{\alpha-1}$ soit remplacée par $\bar\rho \subset r'_{\alpha-1}$; ici [T; (13.3, 7°)] veut dire (4.11) [e. g. l'hypothèse [T; (7.4, 7°)] avec $\mathfrak{M}^s$ au lieu de $\mathfrak{M}$]. A (T; 1″) correspond l'assertion

$$(a) \qquad \left|\sum_j F_{\langle e_{\alpha-1}\rangle}(S'_j)\right| = \left|\sum_j{}' (S'\,.e_{\alpha-1} \neq 0)\, F(S'_j)\right| < \varepsilon,$$

lorsque $S' = \{S_j\}$ est un système fini (de sphères fermées) dans $r'_{\alpha-1}$, avec $\sum \varphi(S'_j) < \eta_{\alpha-1}(\varepsilon) \leqq \sigma_\alpha$. Ensuite on envisage un système $S = \{S_j\}$ fini dans H, tel que $\sum \varphi(S_j) < \eta_{\alpha-1}(\varepsilon)$, et en posant $\nu_\alpha \quad \bar{}_{\alpha-1}\, e_{\alpha-1}$ on obtient

$$\sum_j F_{\langle\nu_\alpha\rangle}(S_j) = \sum_j{}' (S_j . \nu_\alpha \neq 0)\, F(S_j);$$

ici pour les S_j (fermées) au second membre on a $\varphi(S_j) < \sigma_\alpha$, $S_j \bar r_{\alpha-1} \neq 0$, donc [T; (3')] entraîne que les S_j $\left(\text{de} \sum'\right) \subset r'_{\alpha-1}$; ces S_j sont jointes à $e_{\alpha-1}$. D'après (*a*) : $\left|\sum F_{\langle v_\alpha \rangle}(S_j)\right| < \varepsilon$. Par conséquent,

$$(b) \qquad F_{\langle v_\alpha \rangle} \in \text{A. C}^\sigma. \quad \text{sur} \quad \text{H dans H},$$

si α est de type 2 [au sens de (T; p. 117)].

On obtient une suite transfinie d'ensembles fermés $\Delta(\mathcal{F}) = e_0 \supset e_1 \supset \ldots$. Si α est de type 1 (α de la première espèce et $e_{\alpha-1}$ possédant un point x' isolé-*s*), on pose $e_\alpha = e_{\alpha-1} - r_{\alpha-1} e_{\alpha-1}$, où $r_{\alpha-1}$ (de $\mathfrak{M}^s$) est un ensemble contenant x' et tel que $\bar{r}_{\alpha-1}\, e_{\alpha-1} \subset g_{\alpha-1} \in (\overset{*}{_*})$ (4.12). Si α est de type 2, on prend encore $e_\alpha = e_{\alpha-1} - r_{\alpha-1} e_{\alpha-1}$, où $r_{\alpha-1}$ (de $\mathfrak{M}^s$) est choisi selon (T; p. 118). Si α est de la première espèce et $e_{\alpha-1}$ est parfait-*s* et $e_{\alpha-1}\text{H} = 0$, on pose $e_\alpha = e_{\alpha-1}$. On achève la preuve du résultat voulu en faisant usage de (*b*) et en suivant les développements des sept dernières lignes dans (T; p. 118), avec $(\overset{*}{_*})$ (4.12), $F_{\langle \xi \rangle}$, A. C^σ. au lieu de (*), $\Psi_{(\xi)}$, A. C^s.; (I) *implique* (II).

La réciproque. — Admettons (II). On obtient l'énoncé (T; I_1, p. 119), sans rien à modifier :

(I_1) *Soient p parfait-s et* $p\text{H} \neq 0$ *et un r* $\left(\textit{de } \tilde{\mathfrak{M}}^s_0\right) \subset \text{H}$, *joint à p; alors il existe un* r_1 (*de* $\mathfrak{M}^s$) $\subset r$, *tel que* $r_1 p \neq 0$, $r_1 p \subset \lambda(n)$ *pour un n.*

Pour ce r_1, p étant sans points isolés-*s*, $r_1 p$ sera contenu dans un des $\lambda(n)$, pour lequel on a l'alternative : $F_{\langle \lambda(n) \rangle} \in$ A. C^σ. sur H dans H; ainsi il existe un $\eta_n(\varepsilon)$ (> 0 pour $\varepsilon < 0$) tel que les relations

$$\sigma' = \{\sigma_i\} \text{ un systeme fini dans H}, \qquad \sum \varphi(\sigma_i) < \eta_n(\varepsilon)$$

impliquent $\left|\sum_i (\sigma_i \lambda(n) \neq 0) F(\sigma_i)\right| < \varepsilon$; or $r_1 p \subset \lambda(n)$, donc (6.1) F $\in$ A. C^σ. sur $r_1 p$ dans r_1. Ainsi (6.1'') F $\in$ A. C^σ. G. sur H, e. g. (II) *entraîne* (I). *La proposition* (6.6) *est vérifiée.*

THÉORÈME 6.19. — *Soit* F *définie et finie pour les sphères contenues dans* H $\left(\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}^s_0\right)$ *et continue, relativement aux sphères, au sens de* (4.7 *a*) *avec* F *pour* φ). *L'inégalité*

$$(6.19a) \qquad \underline{D}^\sigma F > -\infty \qquad \textit{sur} \quad \text{H} - \text{H}\sum_i^\infty g_n$$

[*les* g_n *étant des frontières d'ensembles* $\left(\textit{de } \tilde{\mathfrak{M}}^s_0\right)$] *entraîne* F– (6.3) $\in$ A. C^σ. G. *sur* H [si s est une sphère fermée et s^0 est son intérieur, tandis que $s^0 \subset$ H, on a $F(s) = F(s^0)$].

En raison de l'énoncé (6.6), il suffira d'établir l'existence d'ensembles $e_m (\subset H)$ fermés de sorte que $H - \sum e_m$ soit contenu dans un ensemble de (*') (5.1), tandis que

(a_1) $$F^-_{\langle e_m \rangle} \in A.\,C^\sigma. \quad \text{sur H dans H;}$$

e. g. que e_m fermé soit tel que pour $\varepsilon > 0$ un $\eta_m(\varepsilon) > 0$ existe de sorte que les relations

(a_2) $$\sigma' = \{\sigma_l\} \text{ un système fini}, \quad \sigma' \subset H, \qquad \sigma_l e_m \neq 0, \qquad \sum \varphi(\sigma_l) < \eta_m'(\varepsilon)$$

impliquent

(a_3) $$(0 \geqq) \sum_l F^-_{\langle e_m \rangle}(\sigma_l) \geqq -\varepsilon.$$

Nous procédons en quelque sorte comme dans (T; p. 123-124). il vient [T; (7.3)] $H = \sum_1^\infty f_m$, les f_m étant fermés, $f_m \uparrow$. *Dans la suite s désignera toujours une sphère fermée.* Soit e_m l'ensemble des points x de f_m, pour lesquels les relations

(b_1) $$s \ni x, \qquad \varphi(s) < \frac{1}{m}$$

entraînent

(b_2) $$s^0 \text{ (l'intérieur de } s) \subset H, \qquad F(s) \geqq -m\,\varphi(s).$$

A cause de (4.8) sur H il existe une $\nu(x) > 0$, telle que si $s \ni x$, l'inégalité

(b_3) $$\varphi(s) < \nu(x)$$

implique

(b_4) $$s \subset H.$$

Posons $H_0 = H \sum g_n$. En raison de (6.19 a) sur $H - H_0$ il existe une $b(x)$, telle que

(b_5) $$0 < b(x) < +\infty, \qquad -b(x) < \underline{D}^\sigma F(x) \quad \text{sur } H - H_0.$$

De plus, il y a une $c(x)$, > 0 sur $H - H_0$ de sorte que

(b_6) $$F(s) \geqq -b(x)\,\varphi(s), \qquad \text{dès que} \quad s \ni x\,(\in H - H_0) \quad \text{et} \quad \varphi(s) < c(x).$$

Pour tout x sur $H - H_0$ on trouve un entier m_x satisfaisant à

(b_7) $$f_{m_x} \ni x, \qquad m_x \geqq b(x), \qquad \frac{1}{m_x} \leqq \nu(x), \qquad \frac{1}{m_x} \leqq c(x).$$

Les relations $s \ni x$ (sur $H - H_0$), $\varphi(s) < \frac{1}{m_x}$, entraînent

$$s \subset H, \qquad F(s) \geqq -b(x)\,\varphi(s) \geqq -m_x\,\varphi(s);$$

ainsi, sur $H - H_0$, $x \in e_{m_x}$; d'où

$$(b_8) \qquad H = H_0 + \sum e_m.$$

Il est à démontrer que e_m est fermé. Soient un point y et une sphère fermée S, tels que

$$(b_9) \qquad y \in \bar{e}_m(\subset f_m), \qquad S^0 \text{ (l'intérieur de S)} \ni y, \qquad \varphi(S) < \frac{1}{m}.$$

Il existe un point x sur $e_m S^0$; donc d'après (b_1), (b_2),

$$(b_{10}) \qquad S^0 \subset H, \qquad F(S) \geqq -m\,\varphi(S);$$

(b_9) *entraîne* (b_{10}).

Envisageons maintenant un point y et une sphère (fermée) s, tels que

$$(b_{11}) \qquad y \in \bar{e}_m(\subset f_m), \qquad s \ni y, \qquad \varphi(s) < \frac{1}{m}.$$

D'après la continuité de φ au sens de $(4.7\,a)$, on peut trouver une sphère S, de même centre que s, de sorte que $S^0 \supset s(\ni y)$, $\varphi(S) < \frac{1}{m}$, e. g. que (b_9) ait lieu. Pourtant (b_{10}), on sait que (b_9) implique (b_{10}); en particulier, $s^0(\subset s \subset S^0) \subset H$, ce qui est *la première relation dans* (b_2). En raison de la continuité $(4.7\,a)$ de F et de φ, cette sphère S peut être choisie de façon que

$$F(S) = F(s) + \delta, \qquad \varphi(S) = \varphi(s) + \theta,$$
$$|\delta| < \varepsilon, \qquad 0 \leqq \theta < \frac{\varepsilon}{m}, \qquad \theta < \frac{1}{m} - \varphi(s).$$

D'après (b_{10}) :

$$F(s) + \delta \geqq -m\,\varphi(s) - m\theta;$$

s est indépendante de ε, d'où $F(s) \geqq -m\,\varphi(s)$, ce qui est la seconde relation dans (b_2). Conséquemment (b_{11}) implique (b_2); selon la définition $[(b_1), (b_2)]$ de e_m il suit que y (de $\bar{e}_m$) $\in e_m$, e. g. $e_m = \bar{e}_m$, e_m *est fermé.*

Envisageons un système fini $\sigma' = \{\sigma_i\}$ satisfaisant à (a_2), avec $\eta_m(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{m}$, $0 < \varepsilon \leqq 1$. Sur $\sigma_i e_m$ il y a un point x; on aura

$$\sigma_i \ni x, \qquad \varphi(\sigma_i) < \eta_m(\varepsilon) \leqq \frac{1}{m},$$

e. g. la condition (b_1); d'après la définition $[(b_1), (b_2)]$ de e_m il vient $F(\sigma_\iota) \geqq -m\varphi(\sigma_\iota)$; ainsi (a_2) implique

$$F_{\langle e_m \rangle}(\sigma') = \sum_\iota F_{\langle e_m \rangle}(\sigma_\iota) = \sum F(\sigma_\iota) \geqq -m\sum \varphi(\sigma_\iota) > -\varepsilon,$$

ce qui donne $F_{\langle e_m \rangle}(\sigma') \geqq -\varepsilon$, e. g. (a_3). En tenant compte de (b_3), où les e_m sont fermés, et du texte en rapport avec (a_1)-(a_3), *la preuve du théorème est achevée.*

7. Les Ŝ-minorantes et majorantes associées avec la totalisation-S. — Nous continuons avec φ toujours remplissant (4.41, I).

DÉFINITION 7.1. — Soit une $f(x)$ définie sur une plénitude de H $(\in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s)$. Nous disons que, sur H, $\Phi[\Psi]$ est une Ŝ-*minorante* [Ŝ-*majorante*] de f, si $\Phi[\Psi]$ est complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ sur H (4.9), A. S. G. (4.35), satisfait à (4.41, I, II), tandis que les relations

$$(7.1\,a) \qquad p \text{ parfait } s, \quad pH \neq 0, \qquad r \; (\text{de } \mathfrak{M}^s) \subset H, \qquad rp \neq 0,$$

impliquent l'existence d'un ρ (de $\mathfrak{M}^s) \subset r$, $\rho p \neq 0$, tel que $f(x)$ soit sommable sur ρp et

$$(7.1\,b) \quad \overline{\int_q}^{s} \Phi_{(p)}\,(\text{rel. à } p) \leqq (L)\int_{qp} f\,d\varphi \qquad \left[\underline{\int_q}^{s} \Psi_{(p)}\,(\text{rel. à } p) \geqq (L)\int_{qp} f\,d\varphi\right]$$

pour tout q $(\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset \rho$ [*cf.* (4.13 *a*), (4.15 *b*)].

On observe le lien étroit entre les minorantes, les majorantes de cette espèce et la S-totale [définition (4.18)]; en effet, si F est sur H à la fois une Ŝ-minorante et une Ŝ-majorante de f, c'est que $F = (S)\int f\,d\varphi$ (totale-S de f sur H). On pourra envisager de telles minorantes et majorantes sans les conditions (4.41, I, II); pourtant cela empêcherait des développements utiles ultérieurs.

(7.2) *Si sur H, $f(x)$ a une* Ŝ-*minorante* [Ŝ-*majorante*] $\Phi[\Psi]$, *f sera finie et mesurable sur une plénitude de* H.

Pour la preuve nous utilisons (T; lemme 13.6). Procédons en tant que Φ. Soit $\mathfrak{N}$, $\subset \tilde{\mathfrak{M}}_0^s$, la famille d'ensembles ρ, tels que

$$\rho \subset H, \quad f(x) \text{ est mesurable et finie sur une plénitude de } \rho.$$

Soit un $r \in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s$, $r \subset H$, r possédant une décomposition finie dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ avec composants dans $\mathfrak{N}$ [*cf.* (4.12 *a*)]; l'ensemble e intervenant dans (4.12 *a*) est mince, donc $r \in \mathfrak{N}$. *La condition* [T; (13.6, 1_0)] *est* *remplie.* Soient $r \in \tilde{\mathfrak{M}}^s$, $r^n \in \mathfrak{N}$, $r^n \uparrow r$; il suivra que $r \in \mathfrak{N}$, e. g. [T; (13.6, 2_0)] *a lieu* pour $\mathfrak{N}$. Si $r' \in \mathfrak{N}$ et r (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) $\subset r'$, r sera dans $\mathfrak{N}$, d'où [T; (13.6, 3_0)] *est satisfaite.*

Envisageons une famille $\mathfrak{N}_1$, $\subset \mathfrak{N}$, *ne couvrant pas* H. L'ensemble $\lambda = \mathrm{H} - \sum (\mathfrak{N}_1)\rho$ est non vide, fermé dans H. Si λ possède un point x_0 isolé-s, il y aura un r_0 (de $\mathfrak{M}^s$), tel que

$$x_0 \in r_0, \qquad r_0 \subset \mathrm{H}, \qquad r_0 \lambda \subset \gamma,$$

où γ est la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}^s$.

$\tilde{r} = r_0 - r_0\lambda$ est ouvert et appartient à $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$; $\tilde{r} \subset \sum (\mathfrak{N}_1)\rho$; d'après (4.12 *b*) (pour $\tilde{r}$, $\mathfrak{N}_1$) ρ^ν (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) $\uparrow \tilde{r}$, où ρ^ν est contenu dans une réunion finie d'ensembles de $\mathfrak{N}_1 (\subset \mathfrak{N})$, $\rho^\nu \in \mathfrak{N}$; d'après [T; (13.6, 2_0)], déjà établie, $\tilde{r} \in \mathfrak{N}$; $r_0 = \tilde{r} + r_0\lambda$ sera dans $\mathfrak{N}$, car $r_0\lambda (\subset \gamma)$ est mince; mais r_0 contient un point (à savoir x_0) de λ, e. g. r_0 est non couvert par $\mathfrak{N}_1$; ainsi [T; (13.6, 4_0)] est vérifiée au cas considéré. Supposons λ est parfait-s dans H. Soit un r (de $\mathfrak{M}^s$) $\subset \mathrm{H}$, $r\lambda \neq 0$; selon la définition 7.1 d'une $\hat{\mathrm{S}}$-minorante, r contient un ρ' (de $\mathfrak{M}^s$) $\subset r$, joint à λ, tel que $f(x)$ soit sommable sur $\rho'\lambda$ [tandis que (7.1 *b*) ait lieu] : ρ' est dans $\mathfrak{N}$; étant joint à λ, ρ' est non couvert par $\mathfrak{N}_1$. Par conséquent, [T; (13.6, 4_0)] *est vérifiée* dans les deux cas. D'après (T; lemme 13.6), $\mathrm{H} \in \mathfrak{N}$; *l'énoncé* (7.2) *en découle.*

THÉORÈME 7.3. — *Si sur* H (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) Φ *et* Ψ *sont respectivement une* $\hat{\mathrm{S}}$*-minorante et une* $\hat{\mathrm{S}}$*-majorante de* $f(x)$, *on aura* $\Phi(r) \leqq \Psi(r)$ *pour tout* r (*de* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) $\subset \mathrm{H}$.

Désignons par $\mathfrak{N}$, $\subset \tilde{\mathfrak{M}}_0^s$, *la famille d'ensembles* $\rho \subset \mathrm{H}$, *sur lesquels* $\Phi \leqq \Psi$, e. g. tels que $\Phi(r) \leqq \Psi(r)$ pour tout r (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$, en effet de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) $\subset \rho$. Soit un r (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) contenu dans un r' de $\mathfrak{N}$; il suit que $r \in \mathfrak{N}$; ainsi [T; (13.6, 3_0)] *a lieu.*

(1°) *Si* r_1 *et* r_2 *appartiennent à* $\mathfrak{N}$, *on aura* $r_1 + r_2 \in \mathfrak{N}$.

Pour démontrer (1°) nous procédons en partie comme en rapport avec (2°) à la suite de (4.42 *a*). Si $(r_2 - r_1 r_2)^0$ est non vide, cet ensemble sera dans $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$ et, d'après [T; 13.6, 3_0)], dans $\mathfrak{N}$; λ désignant un ensemble quelconque de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$ contenu dans $r_1 + r_2$, en posant $\lambda_1 = \lambda r_1$, $\lambda_2 = (\lambda - \lambda_1)^0$, il vient

$$\lambda_i \in \mathfrak{N} \quad (i = 1, 2), \qquad \lambda - \lambda_1 - \lambda_2 \in (\ast) \quad (4.12);$$

donc

$$\Phi(\lambda) = \Phi(\lambda_1) + \Phi(\lambda_2) \leqq \Psi(\lambda_1) + \Psi(\lambda_2) = \Psi(\lambda), \qquad \text{d'où} \qquad r_1 + r_2 \in \mathfrak{N}.$$

Considérons un r de $(\tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset \mathrm{H}$, r possédant une décomposition finie dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$, avec composants dans $\mathfrak{N}$:

$$r = \sum_1^\nu q_i + e, \quad \text{les } q_i \text{ et } e \text{ disjoints}, \quad q_i \in \mathfrak{N}, \qquad e \in (\substack{*\\*}) \quad (4.12\,a).$$

Selon l'énoncé (1°) : $r = q + e$, avec $q = \sum q_i \in \mathfrak{N}$. Si un λ (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset r$, on aura $\lambda q \in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s$; à cause de [T; (13.6, 3_0)] $\lambda q \in \mathfrak{N}$; $\lambda - \lambda q \in (\substack{*\\*})$; par conséquent,

$$\Phi(x) = \Phi(\lambda q) \leqq \Psi(\lambda q) = \Psi(\lambda),$$

ce qui veut dire : $r \in \mathfrak{N}$. La propriété [T; (13.6, 1_0)] *est vérifiée.*

Soient $r \in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s$, $r^n \in \mathfrak{N}$, tels que $r^n \uparrow r$. Envisageons un λ (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset r$. Pour les $\lambda^n = \lambda r^n$ on aura $\lambda^n \in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s$, $\lambda^n \in \mathfrak{N}$ (car $\lambda^n \subset r^n$ de $\mathfrak{N}$), $\lambda^n \uparrow \lambda$. En raison de la complète additivité dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ de Φ et de Ψ on obtient

$$\Phi(\lambda) = \lim \Phi(\lambda^n), \qquad \Psi(\lambda) = \lim \Psi(\lambda^n);$$
$$\Phi(\lambda^n) \leqq \Psi(\lambda^n), \qquad \text{d'où} \qquad \Phi(\lambda) \leqq \Psi(\lambda);$$

ainsi $r \in \mathfrak{N}$ et [T; (13.6, 2_0)] *s'ensuit.*

Occupons-nous de *la condition* [T; (13.6, 4_0)]. Soit une sous-famille $\mathfrak{N}_1$ de $\mathfrak{N}$ qui ne couvre pas H; $q = \mathrm{H} - \sum(\mathfrak{N}_1)\rho$ non vide est fermé dans H.

(2°) *Si un r (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset \mathrm{H} - q\left[= \sum(\mathfrak{N}_1)\rho\right]$, on aura $\Phi(r) \leqq \Psi(r)$ (en effet $r \in \mathfrak{N}$).*

D'après (4.12 *b*), des ρ_ν (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) disjoints et des r_ν (de $\mathfrak{N}_1$) existent, tels que $r = \sum \rho_\nu$ et $\rho_\nu \subset r_\nu$. Si $\rho_\nu^0 \neq 0$, $\rho_\nu^0 \in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s$; ρ_ν étant dans r_ν (de $\mathfrak{N}_1$, donc de $\mathfrak{N}$), on a $\rho_\nu^0 \in \mathfrak{N}$ et (en vertu de l'additivité complète dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$)

$$\Phi(\rho_\nu) = \Phi(\rho_\nu^0) \leqq \Psi(\rho_\nu^0) = \Psi(\rho_\nu); \qquad \Phi(r) = \sum \Phi(\rho_\nu) \leqq \sum \Psi(\rho_\nu) = \Psi(r).$$

Considérons maintenant *le cas où q est parfait-s dans* H. Φ et Ψ étant A. S. G. sur H (4.35), il existe un ρ' (de $\mathfrak{M}^s$), tel que $\rho' \subset \mathrm{H}$, $\rho' q \neq 0$ et Φ est s. a. (rel. à q) sur ρ'; dans ρ' il se trouve un ρ'' (de $\mathfrak{M}^s$) de sorte que $\rho'' q \neq 0$ et Ψ est s. a. (rel. à q) sur ρ''; par conséquent,

$$(3^\circ) \qquad \Phi(r) = \int_r^s \Phi \ (\text{rel. à } q), \qquad \Psi(r) = \int_r^s \Psi \ (\text{rel. à } q) \quad \text{sur } \rho'',$$

e.g. pour tout r (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset \rho''$. Or en vertu de (7.1 *b*), il existe un ρ_1 (de $\mathfrak{M}^s) \subset \rho''$, joint à q, tel que

$$\overline{\int_r}^s \Phi_{(q)} \text{ (rel. à } q) \leqq (\mathrm{L}) \int_{rq} f\, d\varphi \quad \text{sur } \rho_1;$$

puis dans ρ_1 on trouve un ρ_2 (de $\mathfrak{M}^s$), $\rho_2 q \neq 0$, de sorte que

$$\underline{\int_r}^s \Psi_{(q)} \text{ (rel. à } q) \geqq (\mathrm{L}) \int_{rq} f\, d\varphi \quad \text{sur } \rho_2;$$

ainsi

$$\overline{\int}^s \Phi_{(q)} \text{ (rel. à } q) \leqq \underline{\int}^s \Psi_{(q)} \text{ (rel. à } q) \quad \text{sur } \rho_2 (\subset \rho''). \tag{4°}$$

Soit un r (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset \rho_2$; en se rapportant à (4.14)-(4.15), envisageons un système fini $\mathrm{S} = \{ s_j \}$ (rel. à q) dans r; $\mathrm{S} = \mathrm{S}' + \mathrm{S}''$, où S' consiste des s_j dont les centres sont sur q et S'' est formé des s_j disjointes de q; d'après (2°), $\Psi(\mathrm{S}'') - \Phi(\mathrm{S}'') \geqq 0$. Par conséquent,

$$\Psi(\mathrm{S}) - \Phi(\mathrm{S}) \geqq \Psi(\mathrm{S}') - \Phi(\mathrm{S}') = \Psi_{(q)}(\mathrm{S}) - \Phi_{(q)}(\mathrm{S}).$$

En laissant $\mathrm{N}(r, \mathrm{S})$ (4.14 *b*) $\to 0$, il vient

$$\underline{\lim}\, [\Psi(\mathrm{S}) - \Phi(\mathrm{S})] \geqq \underline{\lim}\, \Psi_{(q)}(\mathrm{S}) - \overline{\lim}\, \Phi_{(q)}(\mathrm{S}).$$

D'après (3°), la $\underline{\lim}$ au premier membre est la limite unique et vaut $\Psi(r) - \Phi(r)$; par suite,

$$\Psi(r) - \Phi(r) \geqq \underline{\int_r}^s \Psi_{(q)} \text{ (rel. à } q) - \overline{\int_r}^s \Phi_{(q)} \text{ (rel. à } q) \quad \text{sur } \rho_2.$$

Enfin (4°) mène à l'inégalité $\Psi(r) - \Phi(r) \geqq 0$ pour tout r de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset \rho_2$. Ainsi ρ_2 (joint à $q) \in \mathfrak{N}$; ρ_2 est non couvert par $\mathfrak{N}_1$, e.g. [T; (13.6, 4_0)] *a lieu au cas où q est parfait-s dans* H.

Le cas où q contient un point x_0 isolé-s ($\in$ S). — Il y a un r_0 (de $\mathfrak{M}^s$) tel que $\mathrm{H} \supset r_0 \ni x_0$, $r_0 q \subset g$, où g est la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}^s$. On note que

$$\tilde{r} = r_0 - r_0 q \in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s \qquad \text{et} \qquad \tilde{r} \subset \sum (\mathfrak{N}_1)\, \rho;$$

en raison de (2°) : $\tilde{r} \in \mathfrak{N}$. Il vient $r_0 = \tilde{r} + r_0 q$; si r (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset r_0$, $r = r\tilde{r} + e$, avec $r\tilde{r} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s$ et $e \subset g$; en tant que $r\tilde{r} \subset \tilde{r}\, (\mathfrak{N})$, selon [T; (13.6, 3_0)], on obtient $r\tilde{r} \in \mathfrak{N}$; par là,

$$\Phi(r) = \Phi(r\tilde{r}) \leqq \Psi(r\tilde{r}) = \Psi(r) \qquad \text{d'où} \qquad r_0 \in \mathfrak{N}.$$

r_0 contient un point x_0 de q, donc r_0 (de $\mathfrak{N}$) est non couvert par $\mathfrak{N}_1$. *La propriété* [T; (13.6, 4_0)] *est établie.* Le lemme (T; 13.6) s'applique, ce qui donne $H \in \mathfrak{N}$; *le théorème* 7.3 *est vérifié.*

DÉFINITION 7.4. — *Soit $f(x)$ définie sur une plénitude de* H (*de* $\mathfrak{M}_0^s$). *Nous dirons que le nombre* $\hat{S}(f, H)$ *existe, si pour tout* $\varepsilon > 0$ f *possède sur* H *une* $\hat{S}$*-minorante* Φ *et une* $\hat{S}$*-majorante* Ψ, *telles que* $\Psi(H) - \Phi(H) < \varepsilon$. *Par définition,*

$$\hat{S}(f, H) = \sup_{\Phi} \Phi(H) = \inf_{\Psi} \Psi(H).$$

(7.5) Supposons que $\hat{S}(f, H)$ existe. Alors $\hat{S}(f, r)$ est définie pour tout r (de $\mathfrak{M}^s$) $\subset$ H et représente une fonction complètement additive dans $\mathfrak{M}^s$ sur H, A. S. G. (4.35), et satisfait à (4.41, I, II); si k est une constante,

$$\hat{S}(kf, H) = k\,\hat{S}(f, H).$$

Cet énoncé se démontre comme la proposition (5.8) analogue, qui est pour $P^s(f, \ldots)$.

(7.6) *Si la* S*-totale* F *de* f *existe dans* H *et* F *satisfait à* (4.41, I, II), *il s'ensuit que* $\hat{S}(f, H)$ *existe et vaut* (S) $\int_H f\,d\varphi$.

En tenant compte de la définition (4.18) de la S-totale et de la définition 7.1, on observe que F est à la fois une $\hat{S}$-minorante et une $\hat{S}$-majorante de f, ce qui vérifie la constatation.

(7.6 *a*) *Si* f *est sommable sur* H,

$$(L)\int_H f\,d\varphi = \hat{S}(f, H).$$

En effet, $F = (L)\int f\,d\varphi = (S)\int f\,d\varphi$ (dans H), d'après (4.19 *e*); F satisfait à (4.41, I, II), comme une intégrale de Lebesgue; l'énoncé suit de (7.6).

(7.6 *b*) $\hat{S}(f_1 + f_2, H) = \hat{S}(f_1, H) + \hat{S}(f_2, H)$, si les $\hat{S}(f_i, H)$ existent.

(7.6 *c*) *L'inégalité* $f \geqq 0$ *sur* H *et l'existence de* $\hat{S}(f, H)$ *entraînent*

$$\hat{S}(f, H) = (L)\int_H f\,d\varphi \quad (\textit{finie}).$$

En raison de (7.2), f est mesurable sur H; posons

$$f_n = f \quad (\text{où } f \leqq n), \qquad = n \quad (\text{où } f > n);$$

$\hat{S}(f, H)$ est fini. Si f est non sommable, en prenant n_1 suffisamment grand et en tenant compte de (7.6 *a*) (pour f_{n_1}), il vient

$$\hat{S}(f, H) < (L)\int_H f_{n_1}\, d\varphi = \hat{S}(f_{n_1}, H),$$

contrairement à $f_{n_1} \leqq f$.

(7.7) Une fonction $f(x)$ sera dite *prétotalisable*-S sur un H (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$), si pour tout p parfait-s dans H et tout r (de $\mathfrak{M}^s$) $\subset$ H et joint à p, il existe un ρ (de $\mathfrak{M}^s$), $\subset r$ et joint à p, tel que $f(x)$ soit sommable sur ρp.

THÉORÈME 7.8. — *Supposons que* $f(x)$ *est prétotalisable*-S *sur* H *et que* $R^s(f, H)$ *existe. En admettant la condition* (4.29), *il suivra que* $\hat{S}(f, H)$ *existe et vaut* $R^s(f, H)$.

Envisageons sur H une R^s-minorante Φ et une R^s-majorante Ψ de f. Selon la définition 6.7 : Φ, Ψ sont sur H complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$, A. S. G. et satisfont à (4.41, I, II); de plus, Φ est A. C$^\sigma$. G. S. et Ψ est A. C$^\sigma$. G. I., tandis que

$$(1_1) \qquad \overline{D}^s\Phi \leqq f \leqq \underline{D}^s\Psi \quad \text{sur une plénitude de H.}$$

Φ^+ et Ψ^- sont A. C$^\sigma$. G. (6.1″). Soient

$$(2_1) \qquad \text{un } p \text{ parfait-s dans H}, \quad \text{un } r \text{ (de } \mathfrak{M}^s) \subset \text{H}, \qquad rp \neq 0.$$

Il existe un r_2 (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$), $\subset r$ et joint à p, tel que $\Phi^+ \in$ A. C$^\sigma$. sur p dans r_2; dans r_2 on trouve un r_1 (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$), $r_1 p \neq 0$, de sorte que $\Psi^- \in$ A. C$^\sigma$. sur p dans r_1. f étant prétotalisable-S (7.7), il y a un ρ tel que

$$(3_1) \quad \rho \in \mathfrak{M}^s, \qquad \rho \subset r_1 \quad (\subset r_2 \subset r), \qquad \rho p \neq 0, \qquad (D)\int_{\rho p} f\, d\varphi \quad \text{(finie) existe.}$$

Or, selon (6.2), A. C$^\sigma$. G. entraîne A. C^s. G., A. C$^\sigma$. sur p dans ρ implique A. C^s. sur p dans ρ; ainsi Φ^+ et Ψ^- sont A. C^s. sur p dans ρ, e. g.

$$\Phi^+_{(p)} \in \text{A. C}^s., \qquad \Psi^-_{(p)} \in \text{A. C}^s. \quad \text{sur } \rho \text{ (dans } \rho);$$

d'après (4.25), cela veut dire

$$\Phi_{(p)} \in \text{A. C}^s\ \text{S.}, \qquad \Psi_{(p)} \in \text{A. C}^s\ \text{I.} \quad \text{sur } \rho \text{ (dans } \rho).$$

A cause du théorème 4.30 et de (1_1), pour tout λ (de $\mathfrak{M}_0^s$)$\subset\rho$ on obtient

$$(4_1)\qquad \overline{\int_\lambda^s}\Phi_{(p)}\leqq\int_\lambda \overline{D}^s\Phi_{(p)}\,d\varphi=\int_{\lambda p}\overline{D}^s\Phi\,d\varphi\leqq\int_{\lambda p}f\,d\varphi\quad(\text{finie})$$
$$\leqq\int_{\lambda p}\underline{D}^s\Psi\,d\varphi=\int_\lambda \underline{D}^s\Psi_{(p)}\,d\varphi\leqq\underline{\int_\lambda^s}\Psi_{(p)}$$

[ici les intégrales de Burkill sont (rel. à p)]. En résumé, (2_1) entraîne l'existence d'un ρ satisfaisant à (3_1) et à (4_1). D'après la définition 7.1, sur H, Φ est une $\hat{S}$-minorante et Ψ est une $\hat{S}$-majorante de f. *La conclusion du théorème en découle.*

THÉORÈME 7.9. — *Supposons que* $\hat{S}(f, H)$ *existe et que la condition* (4.29) *a lieu; posons* $F(r)=\hat{S}(f, r)$ *pour tout* r (*de* $\mathfrak{M}^s$)$\subset H$. *Alors* $D^sF(x)\doteq f(x)$ *sur une plénitude de* H.

Nous procédons en quelque sorte comme dans (R; p. 99-101), mais avec des modifications considérables. Soient sur H, Φ une $\hat{S}$-minorante et Ψ une $\hat{S}$-majorante de f (7.1). Envisageons une situation suivante.

(1_0) E *est fermé dans* H, *un* r (*de* $\mathfrak{M}^s$)$\subset H$, f *est sommable sur* rE (supposé non vide) *et*

$$\nu(q)\equiv\overline{\int_q^s}\Phi_{(E)}\leqq\int_{qE}f\,d\varphi\leqq\underline{\int_q^s}\Psi_{(E)}\quad \textit{pour tout } q \ (\textit{de } \mathfrak{M}^s)\subset r.$$

Ici et dans la suite les intégrales de Burkill, avec l'indice inférieur (E), sont rel. à E. Rappelons-nous la notation : si Q est définie au moins pour les sphères et $S=\{s_n\}$ est un système fini (de sphères fermées) s_n, on écrit $Q(S)=\sum Q(s_n)$. Si $S=\{s_n\}$ est un système fini dans r, il vient

$$(2_0)\qquad \nu(S)=\overline{\int_S^s}\Phi_{(E)}\leqq\int_{SE}f\,d\varphi\leqq\underline{\int_S^s}\Psi_{(E)};$$

$$(3_0)\qquad \begin{cases}\displaystyle\overline{\int_S^s}\Psi_{(E)}\leqq\int_{SE}f\,d\varphi+\Gamma(r),\\[2ex] \displaystyle\underline{\int_S^s}\Phi_{(E)}\geqq\int_{SE}f\,d\varphi-\Gamma(r),\qquad \text{où}\quad \Gamma=\Psi-\Phi.\end{cases}$$

On note que (2_0) est immédiat. Démontrons (3_0). Soit $\sigma' = \{\sigma_\iota\}$ un système fini (rel. à E) dans un s_n (de S); pour $N(s_n, \sigma')$ (4.14 *b*) $\to 0$, n étant fixe et x_ι désignant le centre de σ_ι, on obtient

$$(4_0)\quad \overline{\int}_{s_n}^{s} \Gamma_{(E)} = \overline{\lim}\, \Gamma_{(E)}(\sigma')$$

$$= \overline{\lim} \sum_\iota (x_\iota \in E)\, \Gamma(\sigma_\iota) \leqq \Gamma(s_n) \qquad \left(\text{car } \Gamma \geqq 0, \sum \sigma_\iota \subset s_n\right);$$

$$\Psi = \Phi + \Gamma, \qquad \text{donc} \quad \overline{\int}_{s_n}^{s} \Psi_{(E)} \leqq \overline{\int}_{s_n}^{s} \Phi_{(E)} + \overline{\int}_{s_n}^{s} \Gamma_{(E)} \leqq \overline{\int}_{s_n}^{s} \Phi_{(E)} + \Gamma(s_n);$$

ainsi, en tant que $\sum s_n \subset r$, d'après (2_0),

$$\overline{\int}_{S}^{s} \Psi_{(E)} \leqq \overline{\int}_{S}^{s} \Phi_{(E)} + \Gamma(S) \leqq \int_{SE} f\, d\varphi + \Gamma(r);$$

la première partie de (3_0) est vérifiée. $\Phi = \Psi - \Gamma$; en raison de (4_0),

$$\underline{\int}_{s_n}^{s} \Phi_{(E)} \geqq \underline{\int}_{s_n}^{s} \Psi_{(E)} - \overline{\int}_{s_n}^{s} \Gamma_{(E)} \geqq \underline{\int}_{s_n}^{s} \Psi_{(E)} - \Gamma(s_n);$$

par conséquent, à cause de (2_0),

$$\underline{\int}_{S}^{s} \Phi_{(E)} \geqq \underline{\int}_{S}^{s} \Psi_{(E)} - \Gamma(S) \geqq \int_{SE} f\, d\varphi - \Gamma(r);$$

le tout de (3_0) *est démontré.* Or

$$\Phi \leqq F \leqq \Psi \qquad \text{et} \qquad \Phi_{(E)} \leqq F_{(E)} \leqq \Psi_{(E)},$$

donc de (3_0) il suit que

$$(5_0)\qquad \int_{SE} f\, d\varphi - \Gamma(r) \leqq \underline{\int}_{S}^{s} F_{(E)} \leqq \overline{\int}_{S}^{s} F_{(E)} \leqq \int_{SE} f\, d\varphi + \Gamma(r)$$

(S étant un système fini dans r). D'après (7.2), $f(x)$ est finie sur une plénitude de H et mesurable. Avec un $\eta > 0$, *soit e l'ensemble des points* x, $\in r$E, *où* $f(x)$ *est finie et* $\overline{D}^s F(x) > f(x) + \eta$. Vu (4.29), $\overline{D}^s F(x)$ est mesurable, donc e l'est. Un théorème de Lusin s'applique dans la théorie actuelle, de sorte qu'il existe un ensemble fermé e' (qui peut être non compact), contenu dans e, tel que :

(6_0) $\varphi(e - e')$ est arbitrairement petit, $f(x)$ bornée sur e' est continue sur e'.

Selon le théorème de Denjoy-Vitali (4.13) pour les sphères on trouve un système fini $S_m = \{s_{m,\iota}\}_\iota$ dans r, tel que

$$(7_0)\quad \begin{cases} \varphi(\sigma_m - \sigma_m e') < \dfrac{1}{m}, \qquad \varphi(e' - \sigma_m e') < \dfrac{1}{m}, \\ \sigma_m = \sum_\iota s_{m\,\iota}, \qquad \varphi(s_{m,\iota}) < \dfrac{1}{m}, \quad F(s_{m,\iota}) > [f(x) + \eta]\,\varphi(s_{m,\iota}), \end{cases}$$

$x = x(s_{m,\iota}) = x_{m,\iota}$ au dernier membre étant le centre de $s_{m,\iota}$, $x \in e'$. Puisque f est continue sur e', il vient

$$(8_0)\qquad \lim_m \sum_\iota [f(x_{m,\iota}) + \eta]\,\varphi(s_{m,\iota}) = \int_{e'} f\,d\varphi + \eta\,\varphi(e').$$

En effet, avec $|f(x)| < B < +\infty$ sur e', il vient

$$\sum_\iota f(x_{m\,\iota})\,\varphi(s_{m,\iota}) = a_m + b_m,$$

$$a_m = \sum_\iota f(x_{m,\iota})\,\varphi(s_{m,\iota}e'), \qquad b_m = \sum_\iota f(x_{m,\iota})\,g_{m,\iota},$$

où

$$g_{m,\iota} = \varphi(s_{m,\iota} - s_{m,\iota}e'), \qquad |b_m| \leqq B\,\varphi(\sigma_m - \sigma_m e') < \frac{B}{m};$$

$$b_m \to 0, \quad a_m \to \int_{e'} f\,d\varphi.$$

Soit $S_m^1 = \{s_{m,\iota}^1\} = S_{m'} = \{s_{m',\iota}\}$ un système fini dans r, construit comme plus haut, avec $m' = m + n_m$, où n_m ($\geqq 0$) est suffisamment grand de sorte que [(1_0) étant toujours admis]

$$(9_0)\quad \begin{cases} F(S_m^1) = F(\sigma_{m'}) > \displaystyle\int_{\sigma_{m'}E} f\,d\varphi + \eta\,\varphi(e') - \frac{1}{m}, \\ M(S_m^1) < \dfrac{1}{m}, \qquad \sigma_{m'} = \sum_\iota s_{m',\iota} = \sum_\iota s_{m,\iota}^1 = \sigma_m^1. \end{cases}$$

Pour vérifier, posons

$$\alpha_{m'} = \sigma_{m'} - \sigma_{m'}e', \qquad \beta_{m'} = e' - \sigma_{m'}e', \qquad \gamma_{m'} = \sigma_{m'}E - \sigma_{m'}e'$$

et notons que (7_0)

$$(10_0)\quad \sigma_{m'}E = e' - \beta_{m'} + \gamma_{m'}, \qquad \gamma_{m'} \subset \alpha_{m'}, \qquad \varphi(\beta_{m'}) < \frac{1}{m'}, \qquad \varphi(\gamma_{m'}) < \frac{1}{m'},$$

$$\int_{\sigma_{m'}E} f\,d\varphi = \left[\int_{e'} - \int_{\beta_{m'}} + \int_{\gamma_{m'}}\right] f\,d\varphi \to \int_{e'} f\,d\varphi,$$

f étant sommable sur les ensembles qui interviennent; or

$$F(\sigma_m) > \sum_i [f(x_{m',i}) + \eta]\,\varphi(s_{m',i}) = \lambda_{m'} = \lambda_{m+n_m};$$

pour m *fixe*, on peut choisir n_m tel que

$$\lambda_m > \int_{e'} f\,d\varphi + \eta\,\varphi(e') - \frac{1}{2m} \quad (8_0)$$

et que $\int_{\sigma_{m'}E} f\,d\varphi$ soit suffisamment proche de $\int_{e'} f\,d\varphi$ (10_0), afin que (9_0) *ait lieu*.

Procédons avec $S_m^1 = S_{m'}$, introduit plus haut. Soit $S^m = \{s_i^m\}$ $(i = 1, 2, \ldots, l_m)$ un système fini dans r, dont les sphères sont disjointes des sphères de S_m^1. Dans chaque s_i^m prenons un système fini (rel. à E) $S_i^m = \{s_{i,k}^m\}$, tel que $N(s_i^m, S_i^m)$ (4.14 *b*), $< \frac{1}{m}$, soit suffisamment petit, de sorte que (4.15 *b*) :

$$(11_0) \qquad F_{(E)}(S_i^m)\left[= \sum_k F_{(E)}(s_{i,k}^m)\right] > \underline{\int}_{s_i^m} F_{(E)} - \frac{1}{ml_m},$$

où l'intégrale inférieure de Burkill est (rel. à E). Posons

$$(12_0) \qquad S_m^2 = \{s_{m,j}^2\} \sum_{i=1}^{l_m} \dot{S}_i^m,$$

où $\dot{S}_i^m$ est formé des $s_{i,k}^m$ dont les centres sont sur E; alors $F_{(E)}(S_i^m) = F_{(E)}(\dot{S}_i^m)$; d'après (11_0),

$$F(S_m^2) = F_{(E)}(S_m^2) > \sum_i \underline{\int}_{s_i^m}^{\mathfrak{s}} F_{(E)} - \frac{1}{m} = \underline{\int}_{S^m}^{\mathfrak{s}} F_{(E)} - \frac{1}{m}.$$

Puisque $F_{(E)} \geqq \Phi_{(E)}$, en raison de (3_0) et (12_0), il vient

$$(13_0) \quad F(S_m^2) > \underline{\int}_{S^m} \Phi_{(E)} - \frac{1}{m} \geqq \int_{\sigma^m E} f\,d\varphi - \Gamma(r) - \frac{1}{m}, \qquad \sigma^m = \sum_i s_i^m.$$

L'ensemble $\sigma_{m'} + \sigma^m = \sigma_m^1 + \sigma^m$ [(9_0), (13_0)] réunit les sphères du système fini $S_m^1 + S^m$ dans r; choisissons d'abord S^m [$= \{s_i^m\}$ $(i = 1, \ldots, l_m)$] de sorte que $\varphi(r - \sigma_m^1 - \gamma^m)$ soit suffisamment petite; puis prenons S_i^m (rel. à E) dans chacune s_i^m de sorte que

$\varphi\left(\sigma^m - \sum_{i\,k} s_{i,k}^m\right)$ soit suffisamment petite; ainsi on peut faire en sorte que la mesure de

$$\tau_m = r - \sigma_m^1 - \sum_{i\,k} s_{i,k}^m \left[= r - \sigma_m^1 - \sigma^m + \left(\sigma^m - \sum_{i\,k} s_{i,k}^m\right)\right]$$

soit aussi petite qu'on veut; les $s_{i,k}^m$ étant (rel. à E), il vient

$$E\sum_{i\,k} s_{i,k}^m = E\sum_{j} s_{m,j}^2 = E\sigma_m^2, \qquad \text{d'où} \qquad \tau_m E \doteq rE - (\sigma_m^1 + \sigma_m^2)\,E,$$

$\varphi(\tau_m E)$ est arbitrairement petite (tenant m fixe); conséquemment, f étant sommable sur rE (1_0), S^m et les S_i^m ($i = 1, \ldots, l_m$) peuvent être choisis de façon que

$$(14_0) \qquad \int_{r\,E} f\,d\varphi - \frac{1}{m} < \int_{(\sigma_m^1 + \sigma_m^2)E} f\,d\varphi < \int_{r\,E} f\,d\varphi + \frac{1}{m},$$

et de même avec σ^m au lieu de σ_m^2.

En raison de (9_0), (13_0), il résulte

$$(15_0) \qquad F(S_m^1 + S_m^2) > \int_{r\,E} f\,d\varphi + \eta\,\varphi(e) - \Gamma(r) - \frac{3}{m}.$$

Les centres des sphères de S_m^1 [$= S_{m'}(7_0)$] sont sur $e' \subset E$; ainsi (12_0), les centres des sphères du système fini $\nu_m = S_m^1 + S_m^2$ sont sur E; on a

$$F(\nu_m) = F_{(E)}(\nu_m), \qquad M(\nu_m) < \frac{1}{m} \quad (4.14\,a);$$

en outre, d'après une adaptation convenable de (4.16) [*voir* la démonstration dans (T; p. 90-91)], il vient

$$F_{(E)}(\nu_m) < \overline{\int_{\nu_m}}^{s} F_{(E)} + \varepsilon_m, \qquad \lim_m \varepsilon_m = 0.$$

$F_{(E)} \leqq \Psi_{(E)}$, donc (3_0)

$$F(\nu_m) < \overline{\int_{\nu_m}}^{s} \Psi_{(E)} + \varepsilon_m \leqq \int_{\nu_m E} f\,d\varphi + \Gamma(r) + \varepsilon_m.$$

L'ensemble réunissant les sphères de ν_m étant $\sigma_m^1 + \sigma_m^2$, d'après (14^0) on déduit

$$(16_0) \qquad F(S_m^1 + S_m^2) < \int_{r\,E} f\,d\varphi + \Gamma(r) + \varepsilon_m + \frac{1}{m}.$$

En vertu de (15_0), (16_0),

$$\eta\,\varphi(e') < 2\Gamma(r) + \varepsilon_m + \frac{4}{m};$$

donc (6_0) $\eta\,\varphi(e) \leqq 2\Gamma(r)$ [e introduit à la suite de (5_0)]. Posons

$$e_1 = \{ x \in r\mathrm{E},\ f(x) \text{ finie},\ \underline{\mathrm{D}}^s\mathrm{F}(x) < f(x) - \eta \};$$

comme pour e on établit que $\eta\,\varphi(e_1) \leqq 2\Gamma(r)$. Rappelons-nous que $f(x)$ est finie sur une plénitude de r (de H). On obtient

$$(17_0) \qquad f(x) - \eta \leqq \underline{\mathrm{D}}^s\mathrm{F}(x) \leqq \overline{\mathrm{D}}^s\mathrm{F}(x) \leqq f(x) + \eta$$

sur rE, sauf sur un ensemble de mesure $\varphi(e + e_1) \leqq \dfrac{4\Gamma(r)}{\eta}$. En résumé, (1_0)-(17_0) mènent à la proposition suivante :

LEMME 7.9′. — *La condition* (1_0) *pour* Φ, Ψ, E, r *entraîne l'existence d'un ensemble* λ, $\subset r$E, *tel que*

$$\text{(i)} \qquad \varphi(\lambda) \leqq \frac{4}{\eta}\Gamma(r), \qquad |\overline{\underline{\mathrm{D}}}^s\mathrm{F}(x) - f(x)| \leqq \eta \quad \text{sur } r\mathrm{E} - \lambda.$$

Nous procédons à la façon de (R; p. 100-101), avec certaines modifications. On définit une suite transfinie d'ensembles e_α ($\subset$ H), fermés dans H, comme il suit. $e_0 = \mathrm{H}$; si α (> 0) est de première espèce et $e_{\alpha-1}$ possède un point $x_{\alpha-1}$ isolé-s, il y a un $r_{\alpha-1}$ (de $\mathfrak{M}^s$) $\ni x_{\alpha-1}$, $\varphi(r_{\alpha-1}e_{\alpha-1}) = 0$, et l'on pose $e_\alpha = e_{\alpha-1} - r_{\alpha-1}e_{\alpha-1}$; si α est de première espèce et $e_{\alpha-1}$ est parfait-s dans H, au moyen de la définition 7.1 on trouve un $r_{\alpha-1}$ (de $\mathfrak{M}^s$) dans H, tel que $f(x)$ soit sommable sur $e_{\alpha-1}r_{\alpha-1} \neq 0$,

$$\overline{\int_\rho}^{s} \Phi_{(e_{\alpha-1})} \text{ (rel. à } e_{\alpha-1}) \leqq (\mathrm{L})\int_{\rho e_{\alpha-1}} f\,d\varphi \leqq \underline{\int_\rho}^{s} \Psi_{(e_{\alpha-1})} \text{ (rel. à } e_{\alpha-1})$$

pour tout ρ (de $\mathfrak{M}^s$) $\subset r_{\alpha-1}$, auquel cas on pose

$$e_\alpha = e_{\alpha-1} - r_{\alpha-1}e_{\alpha-1};$$

pour α de seconde espèce : $e_\alpha = \prod(\beta < \alpha)e_\beta$. Selon (T; section 4), il y a un α_0 minimal (des classes I, II) tel que $e_{\alpha_0-1} \neq 0$, $e_{\alpha_0} = 0$. Les ensembles épais parmi les $e_{\alpha-1}\bar{r}_{\alpha-1}$ ($\alpha < \alpha_0$), fermés dans H, couvrent $\overline{\mathrm{H}}$ sauf pour un ensemble mince; énumérons-les en une suite

$$\nu^m = e^m\bar{r}^m \qquad [m = 1, 2, \ldots;\ r^m \text{ (de } \mathfrak{M}^s) \subset \mathrm{H}];$$

on a

$$(18_0)\qquad \overline{\int_\rho^s} \Phi_{(e^m)}\ (\text{rel. a } e^m) \leqq (\mathrm{L})\int_{\rho e^m} f\,d\varphi \leqq \underline{\int_\rho^s} \Psi_{(e^m)}\ (\text{rel. à } e^m)$$

pour tout ρ (de $\mathfrak{M}^s$)$\subset r^m$.

Ainsi (1_0) a lieu avec $\mathrm{E}=e^m$ et $r=r^m$; en raison du lemme 7.9, il existe un λ^m, $\subset e^m \bar{r}^m$, tel que

$$(19_0)\quad \varphi(\lambda^m) \leqq \frac{4}{\eta}\Gamma(r^m) \leqq \frac{4}{\eta}\Gamma(\mathrm{H}), \qquad |\overline{\underline{\mathrm{D}}}{}^s \mathrm{F}(x) - f(x)| \leqq \eta \quad \text{sur } \nu^m - \lambda^m.$$

On trouve des ensembles ν_m fermés, disjoints, $\nu_m \subset \nu^m$, tels que $\varphi(\nu_1 + \ldots + \nu_n) > \varphi(\mathrm{H}) - \varepsilon$ pour un $n = n(\varepsilon)$. Formons des systèmes finis $\mathrm{S}_m = \{s_{m\,i}\}$ $(i = 1, \ldots, l_m)$ (de sphères fermées) pour $m \leqq n$, tels que

$$\mathrm{S}^m \subset r^m, \quad \text{les } \sigma_m = \sum_i s_{m,i} (m \leqq n) \text{ sont disjoints}, \qquad \varphi(\nu_m - \sigma_m \nu_m) < \varepsilon 2^{-m};$$

on a

$$\nu_m = \sigma_m \nu_m + \theta_m, \qquad \varphi(\theta_m) < \varepsilon 2^{-m}.$$

En vertu de (18_0), (19_0) des ensembles $\delta_{m,i}$ ($\subset s_{m,i}\nu^m$) existent de sorte que

$$(20_0)\quad |\overline{\underline{\mathrm{D}}}\,\mathrm{F}(x) - f(x)| \leqq \eta \quad \text{sur } s_{m,i}\nu^m - \delta_{m,i}, \quad \varphi(\delta_{m,i}) \leqq \frac{4}{\eta}\Gamma(s_{m,i}) \quad (m \leqq n).$$

Dans les sommes ci-après $m \leqq n = n(\varepsilon)$; posons

$$\gamma = \sum_{m,i} s_{m,i}\nu^m;$$

or $\sigma_m \supset \sigma_m \nu_m = \nu_m - \theta_m$ et

$$\gamma_n = \sum \nu^m \sigma_m \supset \sum \nu^m (\nu_m - \theta_m) = \sum \nu_m - \Lambda_n, \qquad \varphi(\Lambda_n) = \varphi\Big(\sum \theta_m\Big) < \varepsilon.$$

Ainsi $\varphi(\gamma_n) > \varphi(\mathrm{H}) - 2\varepsilon$; soit $\delta = \sum_{m,i} \delta_{m,i}$; en raison de ($20_0$) $\varphi(\delta) \leqq \frac{4}{\eta}\Gamma(\mathrm{H})$ et

$$|\overline{\underline{\mathrm{D}}}{}^s \mathrm{F}(x) - f(x)| \leqq \eta \qquad \text{sur} \quad \gamma_n - \delta = \sum_{m\,i} (s_{m,i}\nu^m - \delta_{m,i}).$$

On peut faire en sorte que

$$\Gamma(\mathrm{H})\ (= \Psi(\mathrm{H}) - \Phi(\mathrm{H})) < \eta^2, \qquad \text{alors} \quad \varphi(\delta) < 4\eta;$$

η et ε étant arbitrairement petits, *la conclusion du théorème* 7.9 *en découle.*

8. Succession transfinie des calculs pour la totale-S. — *Soit* $f(x)$ *une fonction totalisable*-S (4.18) *sur un* H *de* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$. Si $\varphi(\mathrm{H}) = 0$, la totale-S de f sur H sera nulle. Admettons donc que H soit épais. il existe une fonction unique F (d'ensemble de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$), qui est la totale-S de f sur H; F *possède les propriétés indiquées à* (4.18). A présent *notre objet est de calculer la totale*-S F *à partir de la fonction* f *totalisable*-S. Si p est fermé dans H, on définit $\mathrm{F}^{(p)}$ [(4.38 a), (4.13 a)] :

$$(8.1)\quad \begin{cases} \mathrm{F}^{(p)}(s(x)) = \mathrm{F}(s(x)) - \mathrm{F}_{(p)}(s(x)) = \mathrm{F}(s(x)) \quad (\text{si } x \notin p), \\ \qquad\qquad = 0 \quad (\text{si } x \in p), \end{cases}$$

où $s(x)$ est une sphère fermée de centre x, $s(x) \subset \mathrm{H}$.

Si p est parfait-s dans H^0 (la partie intérieure de H) *et* r (de $\mathfrak{M}^s$), $\subset \mathrm{H}^0$, *est joint à* p, *il existe un* r' (de $\mathfrak{M}^s$), $\subset r$, $r'p \neq 0$, *de sorte que* (4.18) *pour tout* r_1 (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset r'$ *on ait*

$$(\mathrm{I})\qquad \mathrm{F}(r_1) = \int_{r_1}^{s} \mathrm{F}\,(\text{rel. à } p);$$

$$(\mathrm{II})\qquad \int_{r_1}^{s} \mathrm{F}_{(p)}\,(\text{rel. à } p) = (\mathrm{L})\int_{r_1 p} f\,d\varphi,$$

f étant sommable sur $r'p$; d'après (8.1) et (I),

$$\int_{r_1}^{s} \mathrm{F}_{(p)}\,(\text{rel. à } p) = \int_{r_1}^{s} (\mathrm{F} - \mathrm{F}^{(p)})\,(\text{rel. à } p) = \mathrm{F}(r_1) - \int_{r_1}^{s} \mathrm{F}^{(p)}\,(\text{rel. à } p);$$

$$(8.2)\quad \mathrm{F}(r_1) = (\mathrm{L})\int_{r_1 p} f\,d\varphi + \int_{r_1}^{s} \mathrm{F}^{(p)}\,(\text{rel. à } p) \quad \text{pour tout } r_1\ (\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset r';$$

ici on a (4.38 b)

$$(8.2\,a)\quad \int_{r_1}^{s} \mathrm{F}^{(p)}\,(\text{rel. à } p) = \Gamma(r_1 - r_1 p) = \lim \sum_{\iota} (x_\iota \notin p)\, \mathrm{F}(s_\iota(x_\iota)),$$

pour $\mathrm{N}(r_1^0, \mathrm{S})$ (4.14 b) $\to 0$, $\mathrm{S} = \{s_\iota(x_\iota)\}$ désignant un système variable fini (rel. à p), $\mathrm{S} \subset r_1^0$, les x_ι étant les centres des sphères fermées s_ι [les $s_\iota(x_\iota)$, $\subset r_1^0$, sont disjointes; $x_\iota \notin p$ entraîne $s_\iota(x_\iota)\,p = 0$]. On note que *la totale*-S F *sera calculée à partir de f sur r', moyennant les formules* (8.2), (8.2 a), dès *qu'on a obtenu* F(s) *à partir de* f *pour toute sphère fermée* $s \subset r' - r'p$.

Or H^0 est parfait-s dans H^0; en vertu de ce qui précède, tout r (de $\mathfrak{M}^s$), $\subset \mathrm{H}^0$, contient un r' de $\mathfrak{M}^s$, tel que [(8.2), (8.2 a)] f soit sommable sur r' et qu'on ait

$$(8.2')\qquad \mathrm{F}(r_1) = (\mathrm{L})\int_{r_1} f\,d\varphi \quad \text{pour tout } r_1\ (\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset r'.$$

(8.3) Dans la théorie actuelle (T; p. 86-87) il existe *une famille* $G^s = \{ S_k \}$, $S_k = S_k(x_k, r_k)$, *dénombrable de sphères ouvertes*, qui couvre H [en effet, $F = \Delta(G^s)$] indéfiniment au sens de mesure-φ, ainsi qu'au sens du pseudo-diamètre [les centres x_k sont partout denses sur H (sur F), $r_k > 0$].

G^s est une sous-famille de $\mathfrak{M}^s$ [(4.6), (4.6 *a*)].

Avec p parfait-s dans H^0, soit $\mathfrak{N} = \{ s_i \}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ la famille des sphères de G^s telles que

$$(1_0) \qquad s_i \subset H^0, \qquad s_i p \neq 0, \qquad F(\rho) = (L)\int_{\rho p} f\, d\varphi + \int_{\rho}^{s} F^{(p)} \text{ (rel. à } p)$$

pour tout ρ (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) $\subset s_i$. D'après le texte qui mène à (8.2), on s'aperçoit que tout r (de $\mathfrak{M}^s$), contenu dans H^0 et joint à p, contient une sphère s' de G^s, tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} s' \subset H^0, \quad s'p \neq 0, \\ F(\rho) = (L)\int_{\rho p} f\, d\varphi + \int_{\rho}^{s} F^{(p)} \text{ (rel. à } p) \qquad [\text{tout } \rho \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset s']; \end{array} \right.$$

nécessairement, $s' \in \mathfrak{N}$; ainsi l'ensemble

$$(2_0) \quad p_1 = H^0 p - \sum_{1} s_i p \quad \textit{est fermé dans } H^0, \textit{ non dense sur } H^0 p; \qquad p_1 \subset H^0.$$

(8.4) *Si p est parfait-s dans H^0 et si la totale $F(s)$ est connue pour toute sphère $s \subset H^0$, avec $\bar{s}p = 0$, $F(s_0)$ sera connue pour toute sphère ouverte $s_0 \subset H^0 - H^0 p$.*

Cela s'ensuit en raison de la continuïté de F relativement aux sphères [*voir* (4.7 *a*) pour F; noter aussi la convention survenant à la définition 4.9]. Le calcul de $F(s_0)$ pour une s_0 (ouverte) $\subset H^0 - H^0 p$, à partir des valeurs de F pour les sphères $s \subset H^0$, avec $\bar{s}p = 0$, provient moyennant une opération qui traduit la propriété (4.7 *a*) de F.

Remarque (8.4'). — *Dans la présente section, dire que* F *est connue pour un ensemble r (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) signifie que* F *est effectivement connue pour tout sous-ensemble, dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$, de r.*

Continuons avec la situation décrite dans (8.4). p_1 étant défini selon (2_0), on a

$$(3_0) \qquad H^0 - p_1 \text{(ouvert)} = (H^0 - H^0 p) + \sum_{1} s_i p.$$

Si $x \in H^0 - p_1$,

$$(\text{i}) \qquad x \in H^0 - H^0 p,$$

ou bien

$$(\text{ii}) \qquad x \in \sum s_i p [= H^0 p - p_1].$$

Au premier cas il existe une s de G^s, telle que $s \ni x$, $s \subset H^0 - H^0 p$ et $F(s)$ est connue; au cas (ii) une $s_i \ni x$ et la totale $F(s_i)$ sera connue d'accord avec (1_0). Introduisons la famille $\mathfrak{N}' = \{ s^k \}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ des sphères de G^s contenues dans $H^0 - H^0 p$. La sphère s mentionnée plus haut est dans $\mathfrak{N}'$. La famille $\mathfrak{N}'$ couvre $H^0 - H^0 p$; en effet, $\sum s^k = H^0 - H^0 p$; *les* $F(s^k)$ *sont connues* (8.4). En outre, d'après (2_0), $\mathfrak{N}$ couvre $H^0 p - p_1$; enfin, en vertu de (3_0),

$$(4_0) \qquad \mathfrak{N} + \mathfrak{N}' (\subset G^s) \quad \text{couvre } H^0 - p_1.$$

(8.5) *Soit p parfait-s dans* H^0; *dans* $H^0 p$ *il y a un ensemble* p_1 (2_0) *fermé dans* H^0, *non dense sur* $H^0 p$. *Supposons* F *connue pour les sphères* $s \subset H^0$, *avec* $\bar{p} = 0$. *Alors le problème contigu à* p_1 *peut être. résolu; e. g.* F *est calculable pour tout r de* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ *contenu dans* $H^0 - p_1$.

Or $G^s \subset \mathfrak{M}^s \subset \tilde{\mathfrak{M}}^s_0$. Si un r de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ est dans $H^0 - p_1$, on aura $r^0 \in \tilde{\mathfrak{M}}^s_0$ (si $r^0 \neq 0$), et r^0 sera couvert par $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ (4_0). La proposition (4.12 *b*) (avec $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ pour $\mathfrak{N}$) s'applique de sorte que des ρ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ existent, tels que

$$(5_0) \quad r^0 = \sum \rho_\nu, \qquad \rho_\nu \ (\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}^s) \text{ disjoints}, \quad \rho_\nu \subset \text{un } s^i \quad \text{ou bien} \quad \rho_\nu \subset \text{un } s_k.$$

L'ensemble $r - r_0$ (si non vide) $\in (\stackrel{*}{*})$ (4.12) et $F(r - r^0) = 0$; donc en vertu de l'additivité complète dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ de F, il vient

$$(6_0) \quad F(r) = F(r^0) = \sum_1^\infty F(\rho_\nu) \qquad [\text{les } F(\rho_\nu) \text{ effectivement connues}].$$

Ici toute $F(\rho_\nu)$, pour laquelle ρ_ν est dans un s_k, est donnée selon (1_0). *L'énoncé* (8.5) *est vérifié.*

Procédons dans l'hypothèse de (8.5). Si p_1 (2_0) a un point isolé-s x_0 dans H^0, il existe une s_0 (de G^s) telle que $s_0 \subset H^0$, $s_0 \ni x_0$, $s_0 p_1 \subset g_0$ g_0 étant la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}^s$. Désignons par $\mathfrak{N} = \{ \sigma_i \}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ la famille des ensembles de G^s pour lesquels

$$(1_0) \qquad \begin{cases} \sigma_i \subset H^0, \quad \sigma_i p_1 \neq 0, \quad \sigma_i p_1 \subset g_i, \\ g_i \text{ est la frontière d'un } r_i \text{ de } \mathfrak{M}^s, \quad r_i \subset H^0; \end{cases}$$

cette famille couvre *l'ensemble* e_1 *des points isolés-s dans* p_1. On a $\sigma_\iota p_1 \in \tilde{\mathfrak{M}}^s$ et $F(\sigma_\iota p_1) = 0$; $\sigma_\iota - \sigma_\iota p_1 (\subset H^0)$ est dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ et est disjoint de p_1; d'après (8.5), *les totales* $F(\sigma_\iota) = F(\sigma_\iota - \sigma_\iota p_1)$ *sont connues*. Posons

$$(2^o) \qquad p_2 = p_1 - e_1 \quad \text{et un } r \left(\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset H^0 - p_2.$$

e_1 est contenu dans $\sum \sigma_\iota p_1$; en outre, tout point de $\sigma_\iota p_1$ est isolé-s dans p_1 [*cf.* (1°)], d'où $e_1 = \sum \sigma_\iota p_1$; par là, p_2 *est fermé dans* H^0.

(8.6) *Dans l'hypothèse survenant à* (8.5) *le problème contigu à* p_2 (2°) *peut être résolu.*

On envisage la famille $\mathfrak{N}' = \{\sigma^k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ des ensembles de G^s contenus dans $H^0 - p_1$; $\sum \sigma^k = H^0 - p_1$; $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ couvre $H^0 - p_2$, e. g. $H - p_2 \subset \sum \sigma_\iota + \sum \sigma^k$; les totales $F(\sigma_\iota)$, $F(\sigma^k)$ sont connues (8.5). Soit un r (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) contenu dans $H^0 - p_2$. En procédant comme à la suite de (8.5) jusqu'à (6_0), mais avec $\mathfrak{N}$ au sens de (1°) et $\mathfrak{N}'$ comme on vient de spécifier, on trouve que

$$(3^o) \qquad \left\{ \begin{array}{c} F(r) = \sum_{1}^{\infty} F(\rho_\nu), \\ \rho_\nu \left(\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}\right) \text{ disjoints}, \quad \rho_\nu \subset \text{un } \sigma^i \quad \text{ou bien} \quad \rho_\nu \subset \text{un } \sigma_k, \end{array} \right.$$

les $F(\rho_\nu)$ étant effectivement connues; *l'énoncé* (8.6) *est établi.*

En continuant, à partir de p (8.5), on obtient une suite transfinie d'ensembles p_β de la façon suivante :

(4°) β *est de première espèce :* Alors on pose $p_\beta = p_{\beta-1} - e_{\beta-1}$, $e\beta$ désignant l'ensemble des points isolés-s dans $p_{\beta-1}$, *le problème contigu à* $p_{\beta-1}$ *supposé déjà résolu.* Dans ce cas, on procède comme dans les développements (1°)-(3°), avec $p_{\beta-1}$, $e_{\beta-1}$, p_β au lieu de p_1, e_1, p_2 et en prenant pour $\mathfrak{N} = \{\sigma_\iota\}$ la sous-famille des sphères de G^s, telles que $\sigma_\iota \subset H^0$, $\sigma_\iota p_{\beta-1} \neq 0$, $\sigma_\iota p_{\beta-1}$ étant contenu dans la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}^s$, tandis que $\mathfrak{N}' = \{\sigma^k\}$ dénote les sphères de G^s contenues dans $H^0 - p_{\beta-1}\left(e_{\beta-1} = \sum \sigma_\iota p_{\beta-1}\right)$. *Au cas* (4°) *le problème contigu à* p_β *est résolu, en obtenant* F *pour* r (*de* $\tilde{\mathfrak{M}}^0$) $\subset H^0 - p_\beta$ *d'accord avec* (3°), *où* $\mathfrak{N}$ *et* $\mathfrak{N}'$ *ont le sens qu'on vient d'indiquer.*

(5°) β *est de seconde espèce :* On pose $p_\beta = \prod (\alpha < \beta) p_\alpha$; les p_α et p_β sont contenus dans H^0, fermés dans H^0; $p_\alpha > p_{\alpha+1}$; *le problème* *contigu à* p_α $(\alpha < \beta)$ *est supposé résolu.* Soit $\mathfrak{N} = \{s_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ la famille des sphères de G^s, chaque s_i étant contenue dans $H^0 - p_\alpha$ pour un $\alpha < \beta$.

La totale F *est connue pour* s_i $(i = 1, 2, \ldots)$. *Soit un* $x \in H - p_\beta$; il y aura des s (de G^s) de diamètre arbitrairement petit, telles que $s \ni x$ et $s \subset H^0 - p_\beta$. On aura

(I) une s_i (de $\mathfrak{N}$) $\ni x$ [s_i contenue dans $H^0 - p_\alpha$ pour un $\alpha < \beta$].

En effet, si (I) est en défaut, les relations

$$(1) \qquad s \text{ (de } G^s) \ni x, \qquad s \subset H^0 - p_\beta$$

entraîneront

$$(2) \qquad s \notin \mathfrak{N}, \qquad \text{e. g. } s p_\alpha \neq 0 \text{ pour tout } \alpha < \beta;$$

on note que, pour $\alpha (< \beta)$ fixe, toute s (de G^s) contenant x est jointe à p_α, d'où $x (\in H^0)$ est point d'accumulation de p_α (fermé dans H^0); ainsi $x \in p_\alpha$; cela étant pour tout $\alpha < \beta$, il vient $x \in p_\beta$, ce qui est une impossibilité. La constatation (I) est vérifiée; conséquemment, $\mathfrak{N}$ *couvre* $H^0 - p_\beta$. On conclut comme il suit. *Au cas* (5°), *le problème contigu à chacun des* p_α $(\alpha < \beta)$ *supposé déjà résolu, le problème contigu à* p_β *est résolu moyennant la famille* $\mathfrak{N} = \{s_i\}$ *spécifiée plus haut, en tant que les totales* $F(s_i)$ *sont connues*; si r (de $\mathfrak{M}^s$) $\subset H^0 - p_\beta$, on obtient [pareillement à (3°)] :

$$(6°) \qquad F(r) = \sum_1^\infty F(\rho_\nu), \qquad \rho_\nu \text{ (de } \mathfrak{M}^s) \text{ disjoints}, \quad \rho_\nu \subset \text{une } s_i.$$

D'accord avec (4°), (5°) et à partir de p (8.5), on obtient la suite transfinie

$$(7°) \qquad p \supset p_1 \supset p_2 \supset \ldots \supset p_\alpha \supset \ldots;$$

ici $p_\alpha \supset p_{\alpha'}$ pour $\alpha < \alpha'$, les p_α $(\subset H^0)$ sont fermés dans H^0; p_1 est non dense sur $H^0 p$. Pour le premier α_0 (des classes I, II) pour lequel cette suite se stabilise (T; section 4), l'ensemble

$$(8.7) \qquad p^* = p_{\alpha_0} (\subset H^0 p) \quad \textit{est parfait-s dans } R.$$

Il nous conviendra d'employer une définition analogue à la définition 3.17 de notre Mémoire (T^s) [celle-ci concernant la totalisation-$\mathfrak{D}$].

Définition 8.8. — *Soit un p parfait-s dans* $H^0 (\in \mathfrak{M}_0^s)$. *On notera par* (*) *l'opération dont l'application à p, ou bien à* $p_1 (2_0)$, *mène d'accord* *avec* (1_0)-(6_0)-(7^0) *à l'ensemble* p^* (8.7), *parfait-s dans* H^0 *et non dense sur* $H^0 p$:

(8.8 *a*) $$p^* = (p)^*,$$

(8.8 *b*) $$p^* = (p_1)^*.$$

(8.9) *Si la totale-*S *est connue pour* [*voir* (8.4')] *toute sphère s,* $\subset H^0$, *dont la fermeture est disjointe de p, les procédés* (1_0)-(7^0) *fournissent les moyens pour la résolution effective du problème de totalisation-*S *contigu à*

$$p^* = (p)^* = (p_1)^* \quad (2_0).$$

Prenons $p = H^0$ et faisons usage de la constatation (8.2'). Soit $\mathfrak{N}_{0,1} = \{ s_i \}$ la famille des sphères s_i de G^s, telles que

(a_1) $$s_i \subset H^0, \qquad F(\rho) = (L)\int_\rho f\,d\varphi \quad \text{pour tout } \rho \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset s_i;$$

l'ensemble

(a_2) $$P_{0,1} = H^0 - \sum s_i \text{ est fermé dans } H^0, \text{ non dense sur } H^0.$$

$H^0 - P_{0,1}$ est la réunion des ensembles de $\mathfrak{N}_{0,1}$. Si r (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) $\subset H^0 - P_{0,1}$, r^0 (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s_0$) sera couvert par $\mathfrak{N}_{0,1}$; d'après (4.12 *b*), des ρ_ν (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) disjoints existent, tout ρ_ν étant dans une s_i, tels que $r^0 = \sum_1^\infty \rho_\nu$, et il vient ($a_1$) :

(a_3) $$F(r) = F(r^0) = \sum_1^\infty (L)\int_{\rho_\nu} f\,d\varphi.$$

C'est le premier pas dans le calcul de la totale F; (a_3) représente la résolution du problème contigu à $P_{0,1}$. A partir de (a_3) et en laissant $P_{0,1}$ jouer le rôle de p_1 (2_0), on obtient $P_1 = (P_{0,1})^*$, d'accord avec (8.8 *b*); P_1 est le noyau parfait-*s* dans H^0 de $P_{0,1}$; P_1 est non dense sur $P_0 = H^0$. Selon (8.9), *on sait résoudre le problème contigu à* P_1. Comme on l'a vu, à partir du problème déjà résolu contigûment à $P_{0,1}$, cela fait intervenir une suite transfinie (s'arrêtant à un nombre transfini des classes I, II) d'opérations dont chacune traduit le caractère de l'additivité complète dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ de F.

On obtient une suite transfinie d'ensembles :

(8.10) $$H^0 = P_0 > P_{0,1} \geqq P_1 > P_{1,1} \geqq \ldots \geqq P_{\alpha,1} \geqq P_{\alpha+1} > P_{\alpha+1,1} \geqq \ldots,$$

où les $P_{\alpha,1}$ *sont fermés dans* H^0; $P_{\alpha+1}(\alpha \geqq 0)$ *est le noyau parfait-s dans* H^0 *de* $P_{\alpha,1}$; $P_{\alpha+1,1}$ *est non dense sur* $P_{\alpha+1}$; $P_{\alpha+1} = (P_{\alpha,1})^*$ [définition (8.8 *b*)]. Si α est de première espèce,

$$(8.10\,a) \qquad P_{\alpha+1} = (P_\alpha)^* \quad [\text{définition } (8.8\,a)];$$

si α est de seconde espèce,

$$(8.10\,b) \qquad P_{\alpha,1} = \prod (\gamma < \alpha)\, P_{\gamma,1} = \prod (\gamma < \alpha)\, P_\gamma$$

[au troisième membre, aucun γ n'est de seconde espèce]. Pour α de première espèce [*cf.* (2_0)],

$$P_{\alpha,1} = P_\alpha - \sum s_i P_\alpha,$$

où $\mathfrak{N}' = \{ s_i \}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ est la famille des sphères de G^s telles que

$$(8.10\,c) \qquad \left\{ \begin{array}{l} s_i \subset H^0, \quad s_i P_\alpha \neq 0, \\ F(\rho) = (L) \displaystyle\int_{\rho P_\alpha}^{\prime} f\, d\varphi + \int_\rho^s F^{(P_\alpha)} \text{ (rel. à } P_\alpha) \\ \left[\text{tout } \rho \left(\text{de } \mathfrak{M}^s\right) \subset s_i\right]. \end{array} \right.$$

En tant que $P_{0,1} > P_{1,1} > \ldots > P_{\alpha,1} > P_{\alpha+1,1} > \ldots$, les inclusions pour ces ensembles fermés dans H^0 étant au sens strict, (T; section 4) s'applique et *l'on obtient* $P_{\alpha_0\,1} = 0$, *avec un* α_0 (des classes I, II) *minimal et de première espèce.*

Si α est de *première espace* et F est connue contigûment à $P_{\alpha-1,1}$, F sera calculable dans $H^0 - P_\alpha$, e. g. contigûment au noyau parfait-*s* P_α de $P_{\alpha-1,1}$; cela se fait d'accord avec la proposition (8.9) [en tant que $P_\alpha = (P_{\alpha-1,1})^*$ (8.8 *b*)]. Une remarque, comme celle qui précède (8.10), s'applique avec $P_{\alpha-1,1}$ au lieu de $P_{0,1}$.

Considérons le cas où α est de *seconde espèce* et F est connue contigûment à $P_{\gamma,1}$ pour tout $\gamma < \alpha$. On obtient F dans $H^0 - P_{\alpha,1}$, avec $P_{\alpha,1}$ défini selon (8.10 *b*), en procédant comme il suit. Désignons par $\mathfrak{N} = \{ s_i \}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ les sphères de G^s, chacune dans $H^0 - P_{\gamma,1}$ pour un $\gamma < \alpha$. La totale F est connue pour (ainsi que sur) toute s_i. Le raisonnement qui de (5^0) mène à (6^0) entraîne que la famille $\mathfrak{N}$ couvre $H^0 - P_{\alpha,1}$ et que pour tout r (de $\mathfrak{M}^s$) contenu dans $H^0 - P_{\alpha,1}$ il vient

$$F(r) = \sum_1^\infty F(\rho_\nu), \quad \text{les } \rho_\nu \left(\text{de } \mathfrak{M}^s\right) \text{ disjoints}, \quad \rho_\nu \subset \text{un } s_i,$$

où les $F(\rho_\nu)$ sont connues. Ainsi le problème contigu à $P_{\alpha,1}$ (α de seconde espèce) est résolu.

Le calcul de la totale F sur H^0 [donc sur H (de $\mathfrak{M}^s$), car $F(H) = F(H^0)$] s'effectue en commençant d'accord avec (a_1)-(a_3) et en procédant progressivement, d'accord avec ce que nous venons d'indiquer plus haut, jusqu'à ce que le problème contigu à $P_{\alpha_0 1}$ (qui est vide) soit résolu, c'est-à-dire que la totale soit obtenue sur H.

Ce calcul est indépendant de l'hypothèse (4.29). Au fond il dépend sur les intégrales de Lebesgue de f sur certains sous-ensembles de H, soit directement, comme dans (a_1)-(a_3), soit indirectement au moyen des intégrales (au sens symétrique relativisé) de Burkill, comme à (8.10 c). *Cette possibilité de calcul effectif justifie l'appellation « totale*-S ».

9. **Préliminaires pour la totalisation-S des séries.** — D'abord démontrons un complément à la proposition (4.16) [*voir* (T; (13.8'))].

(9.1) *Soit* F *définie et finie pour toute sphère fermée s contenue dans un* H *de* $\mathfrak{M}_0^s$; *p désignant un ensemble parfait-s dans* H, *supposons que* $\int_H^s$ F (*rel. à p*) (définition 4.15) *finie existe. Alors* $\int_r^s$ F (*rel. à p*) *finie existe pour tout r* (*de* $\mathfrak{M}^s$) $\subset$ H.

Dans la preuve les intégrales de Burkill $\left(\text{au sens} \int^s \ldots\right)$ et les systèmes finis (de sphères fermées) sont tous relativement à p. Notons d'abord que $\int_r^s F = \int_{r_0}^s F$, si $r \in \mathfrak{M}^s$ et l'intégrale existe. Si l'énoncé (9.1) est en défaut, il y a un r de $\mathfrak{M}_0^s$, $r \subset H$, $H - r \neq 0$, pour lequel l'intégrale finie n'existe pas. Alors il y a un nombre $\varepsilon_0 > 0$ de sorte que, *pour tout* $\eta > 0$, un couple de systèmes finis dans r, $S_k = \{s_{k,i}\}$ ($k = 1, 2$), existe de sorte que

$$(1_0) \qquad N(r, S_k) < \eta \quad (4.14\,b), \qquad |F(S_1) - F(S_2)| > \varepsilon_0.$$

Désignons par $S^* = \{s_i^*\}$ un système fini dans $H - r$, avec $N(H - r, S^*) < \eta$. Posons

$$(2_0) \qquad S_k^* = \{s_{k,i}^*\} = S_k + S^* \qquad (k = 1, 2);$$

ce sont des systèmes finis dans H, avec $N(H, S_k^*) < 2\eta$. On obtient

$$F(S_k^*) = F(S_k) + F(S^*)$$

et (1_0)

$$|F(S_1^*) - F(S_2^*)| = |F(S_1) - F(S_2)| > \varepsilon_0.$$

Or le premier membre ici devrait tendre vers zéro avec η, puisque $\int_{\mathrm{H}}^{s} \mathrm{F}$ finie existe. Il y a une contradiction; *l'énoncé* (9.1) *est établi.* On peut déduire un fait qui va plus loin.

(9.2) *Les ensembles* p, H *et la fonction* F *étant comme à* (9.1), *supposons encore que* $\int_{\mathrm{H}}^{s} \mathrm{F}$ *(rel. à* p*) finie existe. Alors* $\Gamma(r) = \int_{r}^{s} \mathrm{F}$ *(rel. à* p*) est complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$, r *(de* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$*) variant dans* H.

Soient un r (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) épais, $r \subset \mathrm{H}$, et des r_n (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) ($n = 1, 2, \ldots$) tels que $r_n \uparrow r$. Parce que $\int_{r_n}^{s} \mathrm{F}$ (rel. à p) existe, on peut trouver un système fini $\mathrm{S}_n = \{ s_{n,i} \}$ (rel. à p) dans r_n, tel que

$$(3_0) \qquad \begin{cases} \varphi(s_{n,i}) < \dfrac{1}{n}, \qquad \varphi\left(r_n - \sum_i s_{n,i}\right) < \dfrac{1}{n}, \\ \left| \displaystyle\int_{r_n}^{s} \mathrm{F} \text{ (rel. à } p) - \mathrm{F}(\mathrm{S}_n) \right| < \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

$\left[\text{on a } \mathrm{N}(r_n, \mathrm{S}_n) < \frac{1}{n}\right]$. S_n peut être considéré comme un système fini (rel. à p) dans r; on remarque que

$$\varphi\left(r - \sum_i s_{n,i}\right) = \varphi(r - r_n) + \varphi\left(r_n - \sum_i s_{n,i}\right) < \varphi(r - r_n) + \frac{1}{n} = \eta_n,$$

donc $\mathrm{N}(r, \mathrm{S}_n) < \eta_n$. On sait (9.1) que $\int_{r}^{s} \mathrm{F}$ (rel. à p) finie existe; $\mathrm{N}(r, \mathrm{S}_n) \to 0$ (avec η_n), d'où

$$\int_{r}^{s} \mathrm{F} \text{ (rel. à } p) = \lim_n \mathrm{F}(\mathrm{S}_n)$$

et, d'après (3_0),

$$\int_{r}^{s} \mathrm{F} \text{ (rel. à } p) = \lim_n \int_{r_n}^{s} \mathrm{F} \text{ (rel. à } p),$$

ce qui vérifie la constatation (9.2).

Définition 9.3. — *Soit* F *une fonction définie (et finie) additive pour les ensembles de* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$, *contenus dans un* H *de* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$; *on admet que* F(e) *peut être distincte de zéro pour des ensembles* $e \in (\overset{*}{*})$ (4.12). On dira qu'une telle fonction est *complètement additive dans* $\mathfrak{M}^s$ (dans H), si les relations

$$\begin{cases} & r \in \mathfrak{M}^s, \\ r \subset \mathrm{H}, \quad r_n \in \mathfrak{M}^s \quad (n = 1, 2, \ldots), & \text{les } r_n \text{ disjoints}, \quad \sum_1^\infty r_n = r \end{cases}$$

entraînent $\mathrm{F}(r) = \sum \mathrm{F}(r_n)$.

Dans les sections précédentes on a inclu la propriété de la continuité, relativement aux sphères, dans la définition 4.9 de l'additivité complète dans $\mathfrak{M}^s$. *Dorénavant nous ne le ferons pas.*

Soient un r épais de $\mathfrak{M}^s$ et $\mathfrak{N}$ une sous-famille de $\mathfrak{M}^s$ dont les ensembles sont épais; on dira que r possède une *décomposition* (finie) *dans* $\mathfrak{M}^s$ *avec composants dans* $\mathfrak{N}$, *si*

$$(9.4) \qquad r = \sum_1^\nu q_i + e, \qquad q_i \in \mathfrak{N}, \qquad e \in (\ast) \quad (4.12),$$

les ensembles au second membre étant disjoints.

(9.5) Soient un $r \in \mathfrak{M}^s$ (non vide) et $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}^s$, la famille $\mathfrak{N}$ couvrant r; alors des $r_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ de $\mathfrak{N}$ existent tels que $r_\nu r = 0$ et

$$r = \sum_1^\infty \rho_\nu, \quad \rho_\nu \text{ disjoints}, \quad \rho_\nu \in \mathfrak{M}^s, \qquad \rho_\nu \subset r_\nu.$$

L'intérêt de cette décomposition (qui peut être infinie) est pour le cas où r et les ensembles de $\mathfrak{N}$ sont épais.

On établit cela en notant que, d'après la séparabilité, $\mathfrak{N}$ contient une sous-famille finie ou dénombrable $\{ r_\nu \}$ couvrant r; on pose

$$\rho_1 = r r_1, \qquad \rho_\nu = r r_\nu - r r_\nu (\rho_1 + \ldots + \rho_{\nu-1}) \qquad (\nu > 1).$$

(9.6) F définie (finie) dans $\mathfrak{M}^s$ est dite *s. a.* (additive au sens sphérique), *relativement à un p fermé, pour un r* épais de $\mathfrak{M}^s$, si $\mathrm{F}(r^0) = \int_r^s \mathrm{F}$ (rel. à p) [au sens indiqué $\mathrm{F}(r^0)$ sera connue à partir des valeurs de F pour les sphères fermées $\dot{s}$ (rel. à p), contenues dans r^0]. F est *s. a.* (rel. à p) *sur un r épais de* $\mathfrak{M}^s$, si elle l'est *pour* tout ρ épais de $\mathfrak{M}^s$ contenu dans r.

(9.7) Soit F définie (finie) dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ dans un H (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) épais. D'accord avec (4.35) F est dite A. S. G. (*additive au sens sphérique généralisé*) *sur* H, si à tout p parfait-s dans H^0 et r (de $\mathfrak{M}^s$), contenu dans H et joint à p, il correspond un r_1 (de $\mathfrak{M}^s$), $\subset r$ et joint à p, de sorte que

$$F(\rho) = \int_\rho^s F \text{ (rel. à } p) \quad \text{pour tout } \rho \text{ de } \tilde{\mathfrak{M}}_0^s \text{ contenu dans } r_1;$$

e. g. F est s. a. (rel. à p) *sur* r_1.

Voici une adaptation, qu'il nous faudra, du lemme 13.6 dans (T).

LEMME 9.8. — Soit un H de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$. Désignons par $\mathfrak{N}$ une famille partielle de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$, dont les ensembles sont épais et contenus dans $\overline{H}$, cette famille satisfaisant aux conditions suivantes :

(1°) Si un $\rho \in \mathfrak{N}$, tout ensemble $\rho^0 + e$, où e quelconque (vide ou non) est dans $\bar{\rho} - \rho^0$, appartiendra à $\mathfrak{N}$.

(2°) Si r (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) est épais et $r \subset \overline{H}$, tandis que r possède une décomposition (finie) dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$, dont les composants sont dans $\mathfrak{N}$ (9.4), il suivra que $r \in \mathfrak{N}$.

(3°) On a $r \in \mathfrak{N}$, dès que

$$r \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}) \text{ est épais,} \qquad r^n \in \mathfrak{N} \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad \text{et} \qquad r^n \uparrow r.$$

(4°) Si un $r' \in \mathfrak{N}$ et un r (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) est épais et $r \subset r'$, on aura $r \in \mathfrak{N}$.

(5°) Si une famille $\mathfrak{N}_1$, contenue dans $\mathfrak{N}\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$, ne couvre pas H, il existe un r' de $\mathfrak{N}\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$ qui est non couvert par $\mathfrak{N}_1$.

Dans ces cinq conditions H *appartiendra à* $\mathfrak{N}$ (de même pour $H + e$, si $e \subset \overline{H} - H$).

Démontrons d'abord que

$$(a_1) \qquad \overline{H} = \sum (\mathfrak{N})\, \rho \quad \text{(réunion des ensembles de } \mathfrak{N}).$$

Envisageons la famille $\mathfrak{N}_1$ formée des ensembles $\rho^0 (= (\rho)^0)$, ρ décrivant $\mathfrak{N}$. D'après (1°), les ensembles de $\mathfrak{N}_1$ sont dans $\mathfrak{N}$; $\rho^0 \in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s$, donc $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$; en effet, $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$. Or ρ^0 (de $\mathfrak{N}_1$) $\subset H$, $\sum \rho^0 \subset H$. Si $\mathfrak{N}_1$ ne couvre pas H, en vertu de (5°) on pourra trouver un r' de $\mathfrak{N}\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$ non couvert par $\mathfrak{N}_1$, ce qui est contradictoire. Ainsi $H = \sum \rho^0$.

Or, en conséquence des hypothèses de l'Ouvrage actuel $\overline{H} = \sum \bar{\rho}^0$, en tant que H et les ρ^0 sont dans $\mathfrak{M}_0^s$. Ainsi

$$\overline{H} = \sum (\mathfrak{N}) \bar{\rho}; \quad (a_1) \textit{ suit d'après } (1^o).$$

Soit r un ensemble épais de $\mathfrak{M}^s$ contenu dans $\overline{H}$. Selon (a_1), r est couvert par $\mathfrak{N}$; la proposition (9.5) s'applique, donc des r_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) de $\mathfrak{N}$ existent, joints à r et tels que

$$(a_2) \qquad r = \sum_1^\infty \rho_\nu, \quad \rho_\nu\ (\mathfrak{M}^s) \text{ disjoints}, \quad \rho_\nu \subset r_\nu.$$

En posant $\rho^\nu = \rho_1 + \ldots + \rho_\nu$, il vient

$$(a_3) \qquad \rho^\nu \in \mathfrak{M}^s, \qquad \rho^\nu \uparrow r, \quad \rho^\nu \text{ épais pour } \nu > \nu'.$$

Soient les n_i ($i = 1, 2, \ldots$) les indices pour lesquels ρ_{n_i} est épais; en tant que ρ_{n_i} (de $\mathfrak{M}^s$) épais est contenu dans l'ensemble r_{n_i} de $\mathfrak{N}$, à cause de (4°) ρ_{n_i} appartient à $\mathfrak{N}$. Or (pour $\nu > \nu'$)

$$(a_4) \qquad \rho^\nu = \sum (n_i \leqq \nu)\, \rho_{n_i} + e_\nu, \qquad e_\nu \in (\bm{\ast}) \quad (4.12),$$

les ensembles au second membre étant disjoints. On a ici une décomposition finie dans $\mathfrak{M}^s$ avec composants dans $\mathfrak{N}$, au sens de (9.4). En vertu de (2°) [pour $\rho^\nu(a_4)$, $\nu > \nu'$] on conclut que *les* ρ^ν ($\nu > \nu'$) *sont dans* $\mathfrak{N}$. Les relations (a_3) et la propriété (3°) entraînent $r \in \mathfrak{N}$, comme une conséquence de la supposition : r (de $\mathfrak{M}^s$) épais $\subset \overline{H}$. On observe que tout ensemble $H + e$, où e est un sous-ensemble quelconque (vide ou non) de $\overline{H} - H$, appartient à $\mathfrak{M}^s$ et est épais. D'après ce qu'on vient de prouver, $H + e \in \mathfrak{N}$. *Le lemme est vérifié.*

10. **Totalisation-S des séries.** — Soient u_n ($n = 1, 2, \ldots$) *des nombres possédant* o *comme le seul point d'accumulation.* Un ensemble $\theta = \{\theta_n\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) est formé de points θ_n sur un H de $\mathfrak{M}_0^s$; les θ_n et les u_n sont dans une correspondance biunivoque. On considère la série $\sum u_n$ et l'on va développer une totalisation de $\sum u_n$.

(10.1) Nous supposons que *la série* $\sum (\theta_n \in e)\, u_n$ *est absolument convergente, lorsque e est dans la frontière d'un ensemble de* $\mathfrak{M}^s$.

Ainsi $\sum(\theta_n \in e)\, u_n$ sera absolument convergente pour $e \in (\ast)$ (4.12).

La totale-S *de la série* $\sum u_n$ *sur* ρ (*de* $\tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset$ H, si elle existe, *est une fonction finie* $F(\rho)$, *que nous désignons par*

$$(\rho)\sum \mathrm{S}\, u_n \tag{10.2}$$

et qui satisfait aux conditions ci-après.

Définition 10.3. — On dira que *la série* $\sum_1^\infty u_n$ *est totalisable*-S *sur* H (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$), s'il existe une fonction F avec les propriétés suivantes :

(1°) $F(e) = \sum(\theta_n \in e)\, u_n$, dès que $e \in (\ast)$ (4.12) et $e \subset$ H [la série au second membre est absolument convergente, vu (10.1)].

(2°) F est *complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ *sur* H (définition 9.3).

(3°) Si p est parfait-s dans H et un r (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset$ H et $pr \neq 0$, il existe un r' (de $\mathfrak{M}^s$), contenu dans r et joint à p, tel que

(I) F *est s. a.* (*rel. à p*) *sur* r' (9.6) : $F(\rho) = \int_\rho^s F$ (rel. à p) pour tout ρ (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset r'$;

(II) $\int_{r_1}^s F_{(p)}$ (rel. à $p) = \sum(\theta_n \in r_1 p)\, u_n$ (absolument convergente)

pour tout r_1 (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) contenu dans r', $F_{(p)}$ étant définie selon (4.13 *a*) pour les sphères fermées $s \subset$ H. *Dans ces conditions, on écrira*

$$F(\mathrm{H}) = (\mathrm{H})\sum \mathrm{S}\, u_n \quad \text{(totale-S de la série).} \tag{10.3 a}$$

On note que l'existence de la totale F sur un r (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) entraîne l'existence de la totale sur $r' = r + e$, où e est un ensemble quelconque dans la frontière de r; dans ce cas,

$$F(r') = F(r) + \sum(\theta_n \in e)\, u_n,$$

la série au second membre étant absolument convergente.

Théorème 10.4. — *La totale*-S *des séries* (définition 10.3) *est unique.*

Si la proposition est en défaut, deux fonctions F′ et F″ *distinctes* existent, chacune satisfaisant aux conditions (1°)-(3°) (la dernière étant remplie pour tout p parfait-s dans H). Pour la fonction $F = F' - F''$, on aura :

(1_0) $F(e) = 0$, lorsque e de $(\ast_\ast)$ est contenu dans $\overline{H}$;

(2_0) F est complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ sur H (9.3).

Soit $\mathfrak{N}$ la famille des ρ épais de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$, tels que :

$$(a_1) \qquad \rho \subset \overline{H}, \qquad F(\lambda) = 0 \quad \text{pour tout } \lambda \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset \rho.$$

Avec un $\rho \in \mathfrak{N}$, considérons $\rho_1 = \rho^0 + e$, où e (quelconque) $\subset \bar{\rho} - \rho^0$; alors ρ_1 (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) est épais, $\rho_1 \subset \bar{\rho} \subset \overline{H}$. Si λ (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) $\subset \rho_1$, on a

$$\lambda = \lambda\rho + \lambda(\bar{\rho} - \rho), \qquad \lambda\rho\,(\in \tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset \rho \qquad \text{et} \qquad \lambda(\bar{\rho} - \rho) \in (\ast_\ast);$$

en tenant compte de (a_1) et de (1_0), il vient

$$F(\lambda\rho) = 0, \qquad F(\lambda(\bar{\rho} - \rho)) = 0, \qquad \text{donc} \quad F(\lambda) = 0,$$

e. g. ρ_1 est dans $\mathfrak{N}$. Ainsi, la famille $\mathfrak{N}$ *satisfait à la condition* (1°) *du lemme* 9.8.

Soit un $r' \in \mathfrak{N}$, e. g.

$$(a_2) \quad r' \text{ épais} \in \tilde{\mathfrak{M}}^s, \qquad r' \subset \overline{H}, \qquad F(\lambda) = 0, \quad \text{lorsque } \lambda \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset r';$$

considérons un r (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) épais, $r \subset r'$. Si ρ (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) $\subset r$, d'après (a_2) on aura $F(\rho) = 0$. Ainsi $r \in \mathfrak{N}$, *ce qui vérifie* [9.8, (4°)].

Pour démontrer [9.8, (2°)] envisageons un r (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) épais, $r \subset \overline{H}$, r possédant une décomposition (finie) dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$, avec les composants dans $\mathfrak{N}$ (9.4), e. g.

$$(a_3) \qquad r = \sum_1^{\nu} q_\iota + e, \qquad q_\iota \in \mathfrak{N}, \qquad e \in (\ast_\ast),$$

les ensembles au second membre étant disjoints. Si un λ (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) mince $\subset r$, on aura $\lambda \in (\ast_\ast)$ et, d'après (1_0), $F(\lambda) = 0$. Si un λ (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) épais $\subset r$, il vient (a_3)

$$\lambda = \sum_1^{\nu} q_\iota\lambda + e\lambda, \quad e\lambda \in (\ast_\ast), \qquad q_\iota\lambda \in \tilde{\mathfrak{M}}^s.$$

Vu [9.4, (4°)], déjà établie, tout $q_\iota\lambda\,[\subset q_\iota \in \mathfrak{N}]$ épais est dans $\mathfrak{N}$. Soient i_n ($n = 1, \ldots, \nu'$) les indices pour lesquels $q_{\iota_n}\lambda$ est épais; la réunion des $q_i\lambda$ minces est dans $(\substack{*\\*})$, d'où (les ensembles au second membre étant disjoints) :

$$\lambda = \sum_n q_{i_n}\lambda + e', \quad e' \in (\substack{*\\*}), \qquad F(e') = 0 \quad (1_0), \qquad F(\lambda) = \sum_n F(q_{i_n}\lambda) = 0.$$

Par conséquent (a_1), $r \in \mathfrak{N}$, e. g. *le caractère* [9.8, (2°)] *a lieu.*

Soient un r (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) épais et des r^n (de $\mathfrak{N}$) $\uparrow r$. Considérons un λ (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) $\subset r$; si λ est mince, e. g. $\lambda \in (\substack{*\\*})$, on aura (1_0) $F(\lambda) = 0$; ainsi supposons que λ est épais. On a $\lambda_n = \lambda r^n \uparrow \lambda$, $\lambda_n \in \tilde{\mathfrak{M}}^s$, λ_n épais pour $n \geqq n_1$; λ_n $(n \geqq n_1)$ étant dans r^n de $\mathfrak{N}$, d'après [9.8, (4°)] λ_n appartient à $\mathfrak{N}$, donc $F(\lambda_n) = 0$ (a_1). Enfin, d'après la propriété (2_0) de F, il vient $F(\lambda) = \lim F(\lambda_n) = 0$, e. g. (a_1) $r \in \mathfrak{N}$. Donc $\mathfrak{N}$ *satisfait à* [9.8, (3°)].

Envisageons une famille $\mathfrak{N}_1$, $\subset \mathfrak{N}\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$, *qui ne couvre pas* H. Posons

$$(a_4) \qquad p = H - \sum(\mathfrak{N}_1)\, p;$$

p non vide est fermé dans H (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$). Supposons p contient un point x_0 isolé-s dans H; x_0 est contenu dans un r' de $\mathfrak{M}^s$, de sorte que

$$r' \subset H, \qquad r'p \subset \gamma, \quad \gamma \text{ étant la frontière d'un ensemble de } \mathfrak{M}^s.$$

Nous allons montrer que $r' \in \mathfrak{N}$ [nécessairement r' sera alors dans $\mathfrak{N}\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$]. Si λ mince de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ est contenu dans r', on aura $F(\lambda) = 0$ (1_0) [car $\lambda \in (\substack{*\\*})$]. Considérons un λ (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) épais, $\lambda \subset r'$. il vient que

$$\lambda' = \lambda - \lambda\gamma \quad (\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}^s) \text{ est épais}, \qquad \lambda' \subset H - p = \sum(\mathfrak{N}_1)\, \rho.$$

En vertu de la dernière relation, d'après (9.5) des r_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ de $\mathfrak{N}_1$ existent tels que

$$r_\nu\lambda' \neq 0, \qquad \lambda' = \sum_1^\infty \rho_\nu, \qquad \rho_\nu \text{ disjoints}, \quad \rho_\nu \in \tilde{\mathfrak{M}}^s, \quad \rho_\nu \subset r_\nu.$$

Si un ρ_ν est épais, ρ_ν étant contenu dans un ensemble de $\mathfrak{N}_1$, donc de $\mathfrak{N}$, selon [9.8, (4°)] on aura $F(\rho_\nu) = 0$; pour tout ρ_ν mince aussi $F(\rho_\nu) = 0$ (1_0). Ainsi, en raison de la propriété (2_0) pour F, on obtient

$$F(\lambda) = F\left(\lambda\gamma + \sum_1^\infty \rho_\nu\right) = F(\lambda\gamma) + \sum F(\rho_\nu) = 0.$$

Conséquemment $r' \in \mathfrak{N}$, en effet $r' \in \mathfrak{N}\mathfrak{M}_0^s$. Or r' est non couvert par $\mathfrak{N}_1$, car r' contient le point x_0 de p (a_4). *La propriété* [9.8, (5°)] *est vérifiée au cas où p (a_4) n'est pas parfait-s dans* H. Reste le cas : p (a_4) *est parfait-s dans* H.

Or $F = F' - F''$, où F' et F'' toutes les deux satisfont aux conditions de la définition 10.3, relativement à la même série $\sum u_n$. Soit un r de $\mathfrak{M}^s$ joint à p (a_4), $r \subset H$; r contient un r' de $\mathfrak{M}^s$, $pr' \neq 0$, de sorte que

$$F' = \int^s F \text{ (rel. à } p) \quad \text{dans } r',$$

$$\int_{r_1}^s F'_{(p)} \text{ (rel. à } p) = \sum (\theta_n \in r_1 p)\, u_n \text{ (absolument convergente)}$$

$$\text{pour tout } r_1 \left(\text{de } \mathfrak{M}_0^s\right) \subset r'.$$

Ensuite *dans r' on trouve un ρ' de $\mathfrak{M}^s$, joint à p,* tel que

$$F'' = \int^s F'' \text{ (rel. à } p) \quad \text{dans } \rho',$$

$$\int_{\rho_1}^s F'_{(p)} \text{(rel. à} p) = \sum (\theta_n \in \rho_1 p) u_n \qquad [\text{tout } \rho_1 \left(\in \mathfrak{M}_0^s\right) \subset \rho'].$$

Par conséquent,

$$(a_5) \quad \begin{cases} F(\rho) = \int_\rho F \text{ (rel. à } p), \\ \int_\rho^s F_{(p)} \text{ (rel à } p) = 0 \qquad [\text{tout } \rho \left(\in \mathfrak{M}_0^s\right) \subset \rho']. \end{cases}$$

Soit s_j $(j = 1, \ldots, \nu)$ un système fini (de sphères fermées, *relativement à p*), contenu dans ρ (4.14). On note que $\hat{\rho} = \rho - \sum_1^\nu s_j \in \mathfrak{M}_0^s$;
le système $S = \{ s_j \}$ peut être choisi de sorte que le nombre

$$N(\rho, S) \text{ (4.14}\, b) = \sup(M\{ s_j \}, \varphi(\hat{\rho}))$$

soit arbitrairement petit. Vu la seconde relation (a_5) :

$$(a_6) \qquad \lim \sum (s_j p\ (\neq 0)\ F(s_j) = 0 \qquad \text{lorsque} \quad N(\rho, S) \to 0.$$

On observe que

$$(a_7) \qquad \rho = \hat{\rho} + \sum s_j, \qquad F(\rho) = F(\hat{\rho}) + \sum F(s_j).$$

Soient s_k les sphères de S disjointes de p; toute s_k est couverte par $\mathfrak{N}_1$, donc (9.5), pour k fixe, des r_ν $(=r_{k,\nu})$ de $\mathfrak{N}_1$ existent, $r_\nu s_k \neq$ o, tels que'

$$s_k=\sum_1^\infty \rho_\nu, \qquad \rho_\nu \text{ disjoints}, \quad \rho_\nu \in \tilde{\mathfrak{M}}^s, \quad \rho_\nu \subset r_\nu.$$

Si ρ_ν est mince, $F(\rho_\nu) =$ o (1_0). Si ρ_ν est épais, ρ_ν étant contenu dans un ensemble de $\mathfrak{N}_1$, donc de $\mathfrak{N}$, d'après [9.8, (4°)], on aura $\rho_\nu \in \mathfrak{N}$ et (a_1) $F(\rho_\nu) =$ o. Donc $F(s_k) = \sum F(\rho_\nu) =$ o; d'où, en raison de (a_7),

$$F(\rho) = F(\hat{\rho}) + \sum_{j\neq k} F(s_j) = F(\hat{\rho}) + \sum (s_j p \neq \text{o})\, F(s_j)$$

[au troisième membre les centres des s_j qui surviennent sont sur p]. Or ρ est indépendant du choix de S. En tenant compte de (a_6), il vient

$$(a_8) \qquad F(\rho) = \lim F(\hat{\rho}) \qquad \text{lorsque} \quad N(\rho, S) \to \text{o},$$

cela étant pour tout ρ $(\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset \rho'$. En vertu de (a_7), (a_6),

$$(a_9) \qquad \begin{cases} F(\hat{\rho}) = F(\rho) - F(S), \\ \lim F(\hat{\rho}) = F(\rho) - \lim F(S) = F(\rho) - \displaystyle\int_\rho^s F\,(\text{rel. à } p) = \text{o}, \end{cases}$$

Ainsi (a_8) $F(\rho) =$ o pour tout ρ de la sorte indiquée. Si λ $(\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset \rho$ et λ est mince, e. g. $\lambda \in (^*_*)$, on a $F(\lambda) =$ o; si λ $(\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset \rho'$ et λ est épais, mais $\lambda \notin \tilde{\mathfrak{M}}_0^s$, il suit que

$$\lambda \doteq \lambda^0 + e, \quad e \in (^*_*), \quad \lambda^0 \in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s, \qquad F(\lambda) = F(\lambda^0) + F(e) = \text{o}$$

(d'après le résultat que nous venons d'obtenir). Conséquemment (a_1) :

$$\rho' \ (\text{de } \mathfrak{M}^s), \ \text{joint à } p, \text{ appartient à } \mathfrak{N};$$

de plus, étant ouvert, $\rho' \in \mathfrak{N}\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$. Puisque ρ' contient un point de $p (a_1)$ non couvert par $(\mathfrak{N}_1)$, ρ' est non couvert par $\mathfrak{N}_1$. Nous avons achevé *la vérification de* [9.8, (5°)]. A cause du lemme 9.8 on constate que $H \in \mathfrak{N}$, donc (a_1) :

$$F(\lambda) = \text{o} \qquad \text{et} \qquad F'(\lambda) = F'(\lambda) \quad \text{pour tout } \lambda \ (\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset H.$$

Le théorème 10.4 est prouvé.

(10.5) *L'existence de la totale-*S *de la série* $\sum u_n$ *sur* H *entraîne l'existence de la totale sur tout* r $(de\ \tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset H$; *dans ce cas,* $F(r) = (r) \sum S u_n$

satisfait aux conditions de la définition 10.3. *La classe des séries* $\sum u_n$ *totalisables*-S *est linéaire.*

Cette proposition résulte immédiatement des définitions.

(10.6) *Soient des* q_ι (*de* $\mathfrak{M}^s$) ($i = 1, \ldots, \nu$) *épais disjoints, tels que*

$$H = \sum_1^\nu q_\iota + e, \qquad e q_\iota = 0, \qquad e \in (\substack{*\\*}),$$

tandis que la série $\sum u_n$ *est totalisable*-S *sur chacun des* q_ι. *Alors* $\sum u_n$ *est totalisable*-S *sur* H *et, pour tout* r (*de* $\mathfrak{M}^s$) $\subset$ H, *on aura*

$$(10.6\,a) \qquad (r)\sum \mathrm{S}\, u_n = \sum_{\iota=1} (r q_\iota) \sum \mathrm{S}\, u_n + \sum (\theta_n \in re)\, u_n,$$

la dernière série étant absolument convergente.

Pour démontrer il suffira de considérer le cas où e est vide. D'accord avec la définition 10.3, relativement à la série $\sum u_n$ et à l'ensemble q_ι il correspond la fonction F_ι (qui, selon le théorème 10.4, est unique). Posons

$$(b_1) \quad \Gamma(r) = \sum_{\iota=1}^{n} (r q_\iota) \sum \mathrm{S}\, u_n, \qquad \text{alors} \quad \Gamma(r) = \sum_{\iota=1}^{n} F_\iota(r q_\iota) \qquad [r(\text{de}\, \mathfrak{M}^s) \subset H]$$

Si $e \in (\substack{*\\*})$ et $e' \subset$ H, il vient $e' q_\iota \in (\substack{*\\*})$ et, à cause de [10.3, (1°)],

$$\Gamma(e') = \sum_\iota F_\iota(e' q_\iota) = \sum_\iota \left[\sum (\theta_n \in e' q_\iota)\, u_n \right] = \sum (\theta_n \in e')\, u_n;$$

la série au dernier membre est absolument convergente, d'où Γ satisfait à [10.3, (1°)] *pour* H. De plus, Γ remplit [10.3, (2°)], puisque sur q_ι la fonction F_ι est complètement additive dans $\mathfrak{M}^s$. Soient

$$(b_2) \qquad \text{un } p \text{ parfait-}s \text{ dans H}, \quad \text{un } r \ (\text{de } \mathfrak{M}^s) \subset H, \qquad pr \neq 0.$$

On note que pr est joint à un $q_k^0 (= (q_k)^0)$ [sinon on aurait pr disjoint de $\sum_{\iota=1}^{n} q_\iota^0$ [$=$ H $- e_0$, $e_0 \in (\substack{*\\*})$], d'où il suivrait que $pr \in (\substack{*\\*})$ et que p posséderait un point isolé-s dans r ($\subset$ H)]. Puisque F_k satisfait à [10.3, (3°)], relativement à q_k^0, l'ensemble $q_k^0 r$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) contient un r' (de $\mathfrak{M}^s$), joint à p, tel que

$$(b_3)\quad \begin{cases} F_k(\rho) = \int_\rho^s F_k \text{ (rel. à } p), \\ \int_\rho^s (F_k)_{(p)} \text{ (rel. à } p) = \sum (\theta_n \in \rho p)\, u_n \quad \text{(absolument convergente)} \end{cases}$$

pour tout ρ (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) $\subset r'$ ($\subset q_k^0$). Pour tout ρ de cette sorte $\rho q_i = 0$ ($i \neq k$) et (b_1) :

$$\Gamma(\rho) = \sum_{i=1}^{n} F_i(\rho q_i) = F_k(\rho q_k) = F_k(\rho).$$

En somme : pour tout p et tout r, d'accord avec (b_2), il existe un r' (de $\mathfrak{M}^s$) $r'p \neq 0$, pour lequel les relations (b_3) ont lieu avec F_k remplacée par $\Gamma(\rho)$, e. g. Γ remplit [10.3, (3°)]. relativement à H. *L'énoncé* (10.6) *est démontré.*

(10.7) *Supposons que* $u_n \geqq 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) *et que la série* $\sum u_n$ *soit totalisable*-S *sur un* r_0 (*de* $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) $\subset$ H; *alors* $(r_0)\sum(\mathrm{S})\, u_n \geqq 0$. *Si* $u_n = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$), *on aura*

$$(r)\sum(\mathrm{S})\, u_n = 0 \quad \text{pour tout } r \text{ (de } \mathfrak{M}^s) \subset \mathrm{H}.$$

Soit F fonction qui, d'accord avec la définition 10.3, est associée (uniquement) avec la série $\sum u_n$, relativement à r_0. Désignons par $\mathfrak{N}$ la famille des ensembles ρ (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) épais, $\rho \subset \bar{r}_0$, tels que

$$(c_1)\qquad F(\lambda) \geqq 0 \quad \text{pour tout } \lambda \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}^s) \subset \rho.$$

Considérons un $\rho \in \mathfrak{N}$ et un $\rho_1 = \rho^0 + e$, l'ensemble e (vide ou non) étant contenu dans $\bar{\rho} - \rho^0$. Pour λ (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) $\subset \rho_1$ il vient $\lambda = \lambda\rho + e_0$, $e \in (^*_*)$, d'où (c_1)

$$F(\lambda) = F(\lambda\rho) + F(e_0) \geqq F(e_0) = \sum(\theta_n \in e_0)\, u_n \quad (\text{convergente} \geqq 0,$$

e. g. $p_1 \in \mathfrak{N}$; donc $\mathfrak{N}$ *satisfait à* [9.8, (1°)]. Si un r (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) épais est contenu dans un r' de $\mathfrak{N}$, on aura, d'une part

$$r' \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}) \text{ épais} \subset \bar{r}_0, \qquad F(\lambda) \geqq 0 \quad \text{pour } \lambda \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}) \subset r'$$

et, d'autre part : si ρ (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) $\subset r$, il viendra $F(\rho) \geqq 0$; par conséquent, $r \in \mathfrak{N}$; [9.8, (4°)] *a lieu.*

Envisageons maintenant un r (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) épais, contenu dans $\bar{r}_0$, tel que

$$(c_2) \qquad r = \sum_{1}^{\nu} q_i + e, \qquad q_i \in \mathfrak{N}, \quad e \in (^*_*) \quad \text{(les } q_i,\ e \text{ disjoints).}$$

Si λ (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) mince $\subset r$, on a

$$\lambda \in (^*_*) \qquad \text{et} \qquad F(\lambda) = \sum (\theta_n \in \lambda)\, u_n \text{ (convergente)} \geqq 0.$$

Pour λ (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$) épais, $\subset r$, nous procédons comme à la suite de (a_3); en désignant par $q_{i_n}\lambda$ $(n = 1, \ldots, \nu')$ les $q_{i_n}\lambda$ épais, on note que, d'après [9.8, (4°)], $q_{i_n}\lambda \in \mathfrak{N}$ et $F(q_{i_n}\lambda) \geqq 0$ (c_1); on a

$$\lambda = \sum_n q_{i_n}\lambda + e', \quad e' \in (^*_*), \qquad F(\lambda) \geqq F(e') = \sum (\theta_n \in e') u_n \text{ (convergente)} \geqq 0.$$

Par conséquent, $r \in \mathfrak{N}$; [9.8, (2°)] *est établie. La propriété* [9.8, (3°)] est vérifiée en procédant d'accord avec le texte qui précède (a_4), avec $F(\lambda_n) \geqq 0$ au lieu de $F(\lambda_n) = 0$.

Soit une famille $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}\tilde{\mathfrak{M}}^s_0$ *ne couvrant pas* r_0. On aura

$$(c_3) \qquad p = r_0 - \sum (\mathfrak{N}_1)\, \rho \neq 0 \quad \text{fermé dans } r_0.$$

Supposons que p *possède un point isolé-s dans* r_0. Nous suivons les développements à la suite de (a_4), avec r_0 pour H et en faisant les changements suivants : au lieu de l'égalité $F(\rho_\nu) = 0$, il vient

$$F(\rho_\nu) \geqq 0 \quad \text{si } \rho_\nu \text{ est épais } (c_1),$$

$$F(\rho_\nu) = \sum_n (\theta_n \in \rho_\nu)\, u_n \geqq 0 \quad \text{si } \rho_\nu \text{ est mince;}$$

la relation $F(\lambda) = 0$ est remplacée par

$$F(\lambda) = F(\lambda\gamma) + \sum F(\rho_\nu) \geqq F(\lambda\gamma) = \sum (\theta_n \in \lambda\gamma)\, u_n \text{ (convergente)} \geqq 0,$$

en tant que $\lambda\gamma \subset \gamma$, où γ est la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}^s$. Ainsi r' $[r' \in \mathfrak{M}^s,\ r' \subset r_0,\ r'p \subset \gamma,\ r'$ contient un point de p isolé-s (dans r_0)$] \in \mathfrak{N}$. Par conséquent, *au cas considéré*, [9.8, (5°)] *a lieu.*

Le cas où l'ensemble p (c_3) *est parfait-s dans* r_0. — En raison de la propriété [10.3, (3°)] pour F, relativement à r_0, il existe un ρ' (de $\mathfrak{M}^s$), $\rho' \subset r_0$, $\rho' p \neq 0$ tel que

$$(c_4) \qquad \begin{cases} F(\rho) = \displaystyle\int_\rho^s F \text{ (rel. à } p), \\ \displaystyle\int_\rho^s F_{(p)} \text{ (rel. à } p) = \sum (\theta_n \in \rho p)\, u_n \text{ (absolument convergente)} \geqq 0 \end{cases}$$

pour tout ρ (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset \rho'$. En procédant comme à la suite de (a_5), mais à partir de (c_4), on obtient au lieu de (a_6) :

$$(c_5) \qquad \lim \sum (s_j p \neq 0)\, \mathrm{F}(s_j) \geqq 0 \qquad [\mathrm{S} = \{s_j\} \text{ un système fini, rel. à } p,\ \mathrm{S} \subset \rho],$$

lorsque $\mathrm{N}(\rho, \mathrm{S})$ (4.14 b) $\to 0$. Les relations (a_7) s'appliquent, où $\hat{\rho} = \rho - \sum s_j \in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s$. A la suite de (a_7) il s'agit des s_k (de S) disjointes de p, donc couvertes par $\mathfrak{N}_1$, et des ensembles r_ν $(= r_{k,\nu})$ de $\mathfrak{N}_1$ et des ρ_ν (de $\tilde{\mathfrak{M}}^s$), $\subset r_\nu$, disjoints; $s_k = \sum_\nu \rho_\nu$; on fait les changements suivants :

$$\mathrm{F}(\rho_\nu) = \sum_n (\theta_n \in \rho_\nu)\, u_n \text{ (convergente)} \geqq 0 \quad \text{si } \rho_\nu \text{ est mince};$$

$$\mathrm{F}(\rho_\nu) \geqq 0 \quad \text{si } \rho_\nu \text{ est épais} \quad [\text{car } \rho_\nu \in \mathfrak{N}, \text{ à cause de } (9.8, (4^0))];$$

par conséquent, $\mathrm{F}(s_k) \geqq 0$. Il en découle (a_7) :

$$\mathrm{F}(\rho) \geqq \mathrm{F}(\hat{\rho}) + \sum_{j \neq k} \mathrm{F}(s_j) = \mathrm{F}(\hat{\rho}) + \sum (s_j p \neq 0)\, \mathrm{F}(s_j).$$

L'inégalité (c_5) mène à

$$\mathrm{F}(\rho) \geqq \lim \mathrm{F}(\hat{\rho}) \qquad \text{lorsque} \quad \mathrm{N}(\rho, \mathrm{S}) \to 0 \quad [\text{pour tout } \rho \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset \rho'].$$

La limite au second membre existe; en effet, en tenant compte de (a_7) et de (c_4) on obtient (a_9), e. g. $\lim \mathrm{F}(\hat{\rho}) = 0$; ainsi $\mathrm{F}(\rho) \geqq 0$ pour tout ρ de la sorte indiquée; on conclut (c_1) que $\rho' \in \mathfrak{N}$; or $\rho' \in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s$ (en effet, $\in \mathfrak{M}^s$) et est non couvert par $\mathfrak{N}_1$, puisque ρ' est joint à p. La propriété [9.8, (5^0)] est prouvée au cas actuel. En vertu du lemme 9.8 $r_0 \in \mathfrak{N}$, ce qui veut dire :

$$\mathrm{F}(r_0) = (r_0) \sum \mathrm{S}\, u_n \geqq 0.$$

La seconde partie de (10.7) est immédiate. *La proposition* (10.7) *est établie.*

(10.8) *Supposons que* θ *est tel que pour tout ensemble* p *parfait-s dans* H $(\in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s)$ *et tout* r *de* $\mathfrak{M}^s$, *contenu dans* H *et joint à* p, *il existe un* r' *de* $\mathfrak{M}^s$, $r' \subset r$, $r'p \neq 0$, $r'\theta = 0$. *Dans ce cas, la convergence absolue de la série* $\sum u_n$ *entraîne la totalisabilité-*S *de la série* $\sum u_n$ *sur* H *et la relation*

$$(\mathrm{H}) \sum \mathrm{S}\, u_n = \sum u_n.$$

Formons la fonction d'ensemble $r \subset \mathrm{H}$:

$$(d_1) \qquad \mathrm{F}(r) = \sum (\theta_n \in r)\, u_n.$$

Il suit immédiatement que les conditions [10.3, (1°)], [10.3, (2°)] sont valides pour F. Soit un p parfait-s dans H et un r de $\mathfrak{M}^s$, $r \subset \mathrm{H}$, $rp \neq 0$. D'après l'hypothèse sur θ, il y a un r' (de $\mathfrak{M}^s$)$\subset r$, $r'p \neq 0$, r' étant dépourvu des θ_n. Pour ρ (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$)$\subset r'$, on aura $\mathrm{F}(\rho) = 0$ et $\int_\rho^s \mathrm{F}$ (rel. à p) $= 0$, e. g. [10.3, (3°, I)] a lieu. En plus, $\mathrm{F}_{(p)}(\mathrm{S}) = 0$ pour tout système fini $\mathrm{S} = \{s_j\} \subset \rho$, relativement à p, donc

$$\int_\rho^s \mathrm{F}_{(p)}(\text{rel. à } p) = 0$$

et la propriété [10.3, (3°, II)] survient. *L'énoncé* (10.8) *est vérifié.*

11. **Succession transfinie des calculs d'une totale-S des séries.** — Supposons que la série $\sum u_n$ est totalisable-S sur H de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$, l'ensemble $\theta = \{\theta_n\}$ étant situé dans H. Procédons avec le calcul de la totale-S de cette série sur H. Selon la définition 10.3, il existe une fonction F *complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ *sur* H (définition 9.3), *telle que* $\mathrm{F}(e) = \sum (\theta_n \in e)\, u_n$ (*convergente*) *pour* $e \in (\ast)$ (4.12), *satisfaisant aux conditions* [10.3, (3°, I), 10.3, (3°, II)]. On se rappelle la définition (4.13 a) de $\mathrm{F}_{(p)}(s(x))$, si p est fermé dans H et $s(x)$ est une sphère fermée quelconque, $s(x) \subset \mathrm{H}$, de centre x. Puis on forme

$$\mathrm{F}^{(p)}(s(x)) = \mathrm{F}(s(x)) - \mathrm{F}_{(p)}(s(x)) = \mathrm{F}(s(x)) \ (\text{si } x \notin p), \quad = 0 \ (\text{si } x \in p).$$

Si p est parfait-s dans H *et* r ($\in \mathfrak{M}^s$), $\subset \mathrm{H}$, *est joint à p, il existe dans $\mathfrak{M}^s$ un $r' \subset r$, aussi joint à p, tel que pour tout ρ (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$) contenu dans r'* :

$$(11.1) \qquad \mathrm{F}(\rho) = \int_\rho^s \mathrm{F} \ (\text{rel. à } p),$$

$$(11.1\,a) \qquad \int_\rho^s \mathrm{F}_{(p)} \ (\text{rel. à } p) = \sum (\theta_n \in \rho p)\, u_n,$$

la série indiquée au dernier membre étant absolument convergente pour tout ρ spécifié; en vertu de ce qui précède, *il vient*

$$(11.2) \quad \mathrm{F}(\rho) = \sum (\theta_n \in \rho p)\, u_n + \int_\rho^s \mathrm{F}^{(p)} \ (\text{rel. à } p) \qquad [\rho \ (\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset r'].$$

Ici, au second membre, la série est absolument convergente, tandis que l'intégrale de Burkill est définie d'accord avec (8.2 a) (avec ρ au lieu de r_1). Dans (11.2), $F(\rho)$ est connue à partir des u_n sur ρp et moyennant les valeurs de F pour les sphères fermées s contenues dans $\rho - \rho p (\subset r' - r'p)$.

H étant parfait-s dans H, en tenant compte de l'énoncé (11.1), (11.2), on trouve que *dans tout r (de $\mathfrak{M}^s$), contenu dans* H, *il y a un r' de $\mathfrak{M}^s$, de sorte que la série $\sum(\theta_n \in r') u_n$ soit absolument convergente et*

$$F(\rho) = \sum(\theta_n \in \rho)\, u_n \quad \text{pour tout } \rho \left(\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}_0^s\right) \subset r'. \tag{11.3}$$

Comme on l'a indiqué dans (8.3), il existe une famille

$$G^s = \{S_k\}, \qquad S_k = S_k(x_k, r_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

de sphères *ouvertes* couvrant indéfiniment l'espace considéré (en particulier H); $G^s \subset \mathfrak{M}^s$.

Soient un p parfait-s dans H et $\mathfrak{N} = \{s_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ la famille des sphères de G^s, jointes à p, telles que

$$\left\{\begin{array}{ll} s_i \subset \mathrm{H}, & F(\rho) = \sum(\theta_n \in \rho p) + \displaystyle\int_\rho^s F^{(p)} \text{ (rel. à } p) \\ & \left[\text{tout } \rho \left(\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}_0^s\right) \subset s_i\right]. \end{array}\right. \tag{11.4}$$

En vertu de la constatation (11.1)-(11.2) tout r (de $\mathfrak{M}^s$), tel que $r \subset \mathrm{H}$ et $rp \neq 0$, contient un r' (de $\mathfrak{M}^s$), joint à p, dans lequel (11.2) a lieu; soit x_0 un point de $r'p$; une s' de G^s contient x_0, tandis que $s' \subset r' \subset r$; nécessairement s' est une s_i de $\mathfrak{N}$; par conséquent,

(11.4 a) $\quad p_1 = \mathrm{H}p - \sum s_i p$ *est fermé dans* H, *non dense sur* Hp.

Désignons par $\mathfrak{N}' = \{s^k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ la famille des sphères de G^s contenues dans l'ensemble (ouvert) $\mathrm{H} - \mathrm{H}_p$. En tant que

$$\mathrm{H} - p_1 = (\mathrm{H} - \mathrm{H}p) + \sum s_i p,$$

la sous-famille $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ de G^s couvre $\mathrm{H} - p_1$.

Si e $(\subset \mathrm{H})$ est fermé dans H et F est calculable pour tout ρ de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$ contenu dans $\mathrm{H} - e$, on dira que *le problème contigu à e est résolu.*

(11.5) *p étant parfait-s dans* H, *supposons que* F *est connue pour les sphères ouvertes s, $\subset$ H, disjointes de p. Alors le problème contigu à p_1* (11.4 a) *est résoluble.*

Considérons un r (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset H - p_1$; r est couvert par $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}' (\subset G^s)$. En raison de l'énoncé (9.5), des ρ_ν disjoints existent, tels que

$$r = \sum_1^\infty \rho_\nu, \quad \rho_\nu \in \tilde{\mathfrak{M}}^s, \quad \rho_\nu \subset \text{ un } r_\nu \text{ de } \mathfrak{N} + \mathfrak{N}'.$$

Or $\rho_\nu = \rho_\nu^0 + e_\nu$, où $\rho_\nu^0 \in \tilde{\mathfrak{M}}_0^s$ et e_ν (contenu dans la frontière de ρ_ν) $\in (\overset{*}{*})$, ou bien e_ν est vide. Il vient

$$(1_0) \qquad F(\rho_\nu) = F(\rho_\nu^0) + \sum_n (\theta_n \in e_n)\, u_n,$$

la série étant absolument convergente; ρ_ν^0 est dans un s' (de $\mathfrak{N}'$), ou bien dans un s_k (de $\mathfrak{N}$). Au premier cas, $F(\rho_\nu^0)$ est connue, car $s' \subset H - Hp$ et F est supposée déjà calculée dans toute sphère ouverte contenue dans $H - Hp$. Au second cas (11.4),

$$(2_0) \qquad F(\rho_\nu^0) = \sum_n (\theta_n \in \rho_\nu^0 p)\, u_n + \int_{\rho_\nu^0}^{s} F^{(p)} \text{ (rel. à } p).$$

En posant $\rho_\nu^0 = \rho (\subset r \subset H - p_1)$, il vient

$$(2'_0) \qquad \int_\rho^s F^{(p)} \text{ (rel. à } p) = \lim \sum_l (x_l \notin p)\, F(s_l x)) \qquad [\text{pour } N(\rho, S) \to 0],$$

où $S = \{ s_j(x_j) \}$ $(j = 1, \ldots, \nu)$ dénote un système fini (rel. à p) de sphères fermées $s_j(x_j) \subset \rho$ [x_j étant le centre de $s_j(x_j)$]; les $s_l(x_l)$, qui interviennent au second membre, sont dans $\rho - \rho p \subset H - Hp$; selon l'hypothèse dans (11.5), les totales $F(s_l^o(x_l))$ qui correspondent sont connues, de même pour les

$$F(s_l(x_l)) = F(s_l^o(x_l)) + \sum_n (\theta_n \in \zeta_l)\, u_n,$$

où ζ_l est la frontière de $s_l(x_l)$. Par conséquent, l'intégrale de Burkill dans (2_0) est effectivement obtenue, ainsi que les $F(\rho_\nu)$ (1_0) $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Enfin, d'après l'additivité complète dans $\tilde{\mathfrak{M}}^s$ de F, on obtient

$$(3_0) \qquad F(r) = \sum_{\nu=1}^\infty F(\rho_\nu) \quad \text{pour tout } r \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset H - p_1,$$

ce qui est la conclusion dans la proposition (11.5).

Si p_1 (11.4 *a*) n'est pas parfait-*s* dans H, e. g. si p_1 possède des points isolés-*s*, nous envisageons la famille $\mathfrak{N} = \{ \sigma_i \}$ $(i = 1, 2, \ldots)$,

$\mathfrak{N} \subset G^s$, définie d'accord avec [8, (1°)]; $\mathfrak{N}$ consiste des sphères de G^s, contenues dans H, telles que :

$\sigma_\iota p \neq 0$, $\sigma_\iota p_1 \subset g_\iota$, g_ι étant la frontière d'un r_ι (de $\mathfrak{M}^s) \subset H$; $\sigma_\iota p_1 \in \tilde{\mathfrak{M}}^s$, mais en général $F(\sigma_\iota p_1) \neq 0$; on a

$$F(\sigma_\iota p_1) = \sum_n (\theta_n \in \sigma_\iota p_1)\, u_n \quad \text{(absolument convergente).}$$

L'ensemble e_1 des points isolés-s dans p_1 est couvert par $\mathfrak{N}$; $e_1 = \sum \sigma_\iota p_1$; l'ensemble

(1°) $$p_2 = p_1 - e_1 \quad \text{est fermé dans H.}$$

(11.5 *a*) *Dans les conditions de* (11.5) [donc F étant calculable contigûment à p_1 (11.4 *a*)] *il suit que le problème contigu à p_2 est résoluble.*

Soit $\mathfrak{N}' = \{\sigma^k\}$ ($k = 1, 2, \ldots$) la famille des sphères de G^s dans $H - p_1$; la réunion de ces sphères est $H - p_1$. Il vient

$$H - p_2 \subset \sum \sigma_\iota + \sum \sigma^k.$$

D'après l'énoncé (11.5), la totale-S F est effectivement connue dans chacune des sphères σ^k. De même, F est connue pour tout ρ (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset$ un σ_ι; en effet,

$$\rho = \alpha + \beta, \qquad \alpha = \rho(\sigma_\iota - \sigma_\iota p_1), \qquad \beta = \rho\sigma_\iota p_1 (\subset g_\iota); \qquad \alpha \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset H - p_1,$$

donc $F(\alpha)$ est connue; enfin on calcule

$$F(\rho) = F(\alpha) + F(\beta) = F(\alpha) + \sum_n (\theta_n \in \rho\sigma_\iota p_1)\, u_n.$$

$H - p_2$ étant dans la réunion des σ_ι et des σ^k et F étant connue dans chacune des σ^k et des σ_ι, nous obtenons $F(r)$ pour tout r (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset H - p_2$ moyennant des procédés de la sorte qui mènent à (3_0); ainsi

(2°) $$F(r) = \sum_1^\infty F(\rho_\nu), \qquad \rho_\nu \text{(de } \tilde{\mathfrak{M}}^s) \text{ disjoints}, \quad \rho_\nu \subset \text{un } \sigma^\iota \quad \text{ou bien} \quad \rho_\nu \subset \text{un } \sigma_k;$$

ici les σ^ι, σ_k sont les sphères des familles $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ dont il s'agit à la suite de (3_0). *La constatation* (11.5 *a*) *est vérifiée.*

Nous obtenons une suite transfinie d'ensembles $p_1, p_2, \ldots, p_\beta, \ldots$ fermés dans H comme il suit.

(3°) β (> 1) *est de première espèce et le problème est supposé résolu contigûment à $p_{\beta-1}$.* On procède comme dans [8, (4°)]. Ainsi on obtient des développements analogues à ceux donnés en rapport avec (1°), (2°); $p_{\beta-1}$, $e_{\beta-1}$, $p_\beta = p_{\beta-1} - e_{\beta-1}$ remplacent p_1, e_1, p_2; $\mathfrak{N} = \{\sigma_\iota\}$, $\subset G^s$, sera la famille des sphères de G^s, contenues dans H et jointes à $p_{\beta-1}$, telles que $\sigma_\iota p_{\beta-1}$ soit contenu dans la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}^s$; $\mathfrak{N}' = \{\sigma^k\}$ sera la famille des sphères de G^s contenues dans $H - p_{\beta-1}$; $e_{\beta-1} = \sum \sigma_\iota p_{\beta-1}$. *On calcule* F *contigûment à* p_β, e. g. pour tout r (de $\mathfrak{M}_0^s$) $\subset H - p_\beta$, moyennant une formule comme (2°), $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$ ayant la nouvelle signification [$e_{\beta-1}$ est l'ensemble des points isolés-s dans $p_{\beta-1}$].

(4°) β *est de la seconde espèce;* F *est supposée calculée contigûment à tout* p_α ($\alpha < \beta$). Par définition,

$$p_\beta = \prod (\alpha \lessgtr \beta)\, p_\alpha;$$

$\mathfrak{N} = \{s_\iota\}$ ($i = 1, 2, \ldots$) est la famille des sphères de G^s, telles que toute $s_\iota \subset H - p_\alpha$ pour un $\alpha = \alpha_\iota < \beta$. La démonstration dans [8, (5°)] s'applique et l'on montre que $H - p_\beta \subset \sum s_\iota$. La totale-S est connue pour (et dans) chaque s_ι. Pareillement à (2°) on déduit que

$$(5^\circ) \qquad F(r) = \sum_1^\infty F(\rho_\nu) \quad \text{pour } r \text{ (de } \mathfrak{M}_0^s) \subset H - p_\beta,$$

où les ρ_ν (de $\mathfrak{M}^s$) sont disjoints et tout ρ_ν est contenu dans une s_ι de $\mathfrak{N}$; les $F(\rho_\nu)$ sont déjà connues. Ainsi, dans le cas considéré, (5°) *présente la résolution du problème contigu à* p_β.

A partir de p parfait-s dans H [dont il s'agit dans (11.5)], il y a une suite transfinie d'ensembles fermés dans H :

$$p \supset p_1 \supset p_2 \supset \ldots \supset p_\alpha \supset \ldots, \qquad p_\alpha \subset H \quad (\alpha > 0); \qquad p_1 \text{ non dense sur } Hp.$$

Pour un α_0 (minimal) des classes I, II, la suite se stabilise, de sorte que

$$(11.6) \qquad p^\star = p_{\alpha_0} \textit{ est parfait-s dans } H \textit{ et non dense sur } Hp.$$

Désignons par (*) *l'opération dont l'application à* p, *ou bien à* p_1 (11.4 *a*), *mène à l'ensemble* $p^\star$ (11.6); $p^\star = (p)^\star = (p_1)^\star$. Les développements à la suite de (11.3) jusqu'à (11.6) montrent que *si le problème est résolu contigûment à p* (même si F est seulement connue pour les sphères ouvertes s, $\subset H$, disjointes de p), *ou bien l'est contigûment à* p_1, F *sera effectivement calculable dans* $H - p^\star$.

Commençons avec l'ensemble $p = P_0 = H$, qui est parfait-s dans H. Désignons par $\mathfrak{N}_{0,1} = \{ s_\iota \}$ la famille des sphères de G^s, contenues dans H, telles que dans chacune d'elles :

$$(1_1)\quad F(\rho) = \sum (\theta_n \in \rho) u_n \text{ (absolument convergente)} \quad \text{pour tout } \rho \text{ (de } \mathfrak{M}_0^s) \subset s_\iota.$$

En tenant compte de (11.3), il découle que

$$(2_1)\qquad P_{0,1} = H - \sum s_\iota \quad \text{est fermé dans H, non dense sur H.}$$

Tout r (de $\mathfrak{M}_0^s$) contenu dans $H - P_{0,1}$ est couvert par $\mathfrak{N}_{0,1}$; en raison de (9.5),

$$r = \sum_1^\infty \rho_\nu, \qquad \rho_\nu \text{ (de } \mathfrak{M}^s) \text{ disjoints,} \quad \rho_\nu \subset \text{un } s_k \ (k = k_\nu);$$

en plus (1_1),

$$(3_1)\qquad F(r) = \sum_{\nu=1}^\infty [(\theta_n \in \rho_\nu)\, u_n],$$

avec $[\ldots]$ absolument convergente.

Les développements (1_1)-(3_1) constituent le commencement du calcul de la totale-S de la série $\sum u_n$, en résolvant le problème contigu à $P_{0,1}$; $P_{0,1}$ joue le rôle de p_1 (11.4). Moyennant l'opération $(^*)$, il vient

$$(4_1)\quad P_1 = (P_0)^* = (P_{0,1})^*, \qquad P_1 (\subset H) \text{ est parfait } s \text{ dans H et non dense sur H.}$$

Le problème est résolu contigûment à P_1 de la manière indiquée dans (11.5)-(11.6); dans ce stade du calcul, les intégrales de Burkill n'interviennent pas.

Une suite transfinie d'ensembles $P_{\alpha,1} \geqq P_{\alpha+1}$ *survient satisfaisant à* (8.10) *et à la constatation en italique qui suit.* On a $P_{\alpha+1} = (P_{\alpha,1})^*$; de plus, si α est de première espèce, $P_{\alpha+1} = (P_\alpha)^*$ [ici $(^*)$ est l'opération introduite à la suite de (11.6)]. Pour α de seconde espèce, $P_{\alpha,1} = \prod (\gamma < \alpha) P_{\gamma,1}$. Si α est de première espèce,

$$(a_1)\qquad P_{\alpha,1} = P_\alpha - \sum s_\iota P_\alpha,$$

$\mathfrak{N} = \{ s_\iota \}$ formée des sphères de G^s telles que

$$(a_2)\quad s_\iota \subset H, \qquad s_\iota P_\alpha \neq 0, \qquad F(\rho) = \sum_n (\theta_n \in \rho P_\alpha)\, u_n + \int_\rho^s F^{(P_\alpha)} \text{ (rel. à } P_\alpha)$$

pour tout ρ (de $\mathfrak{M}_0^s) \subset s_\iota$, la série étant absolument convergente [*cf.* (11.4)-(11.4 *a*)].

On a $P_{\alpha,1} > P_{\alpha+1,1}$ ($\alpha \geqq 0$) au sens strict. La suite transfinie des $P_{\alpha,1}$. se stabilise de sorte que pour un α_0 (des classes I, II) minimal $P_{\alpha_0,1} = 0$, Si F a été calculée contigûment à $P_{\alpha-1,1}$ (α de première espèce, $\alpha > 0$). on obtient F dans $H - P_\alpha$ en utilisant le fait que $P_\alpha = (P_{\alpha-1,1})^*$ et en tenant compte de la remarque à la suite de (11.6), où $p_1 = P_{\alpha-1,1}$; pour $\alpha = 1$, les développements ont été donnés dans (1_1)-(4_1); pour α (de première espèce) > 1 on procède d'une manière analogue; dans ce cas, les intégrales de Burkill généralement interviennent. Si α est de *seconde espèce* et F a été calculée dans $H - P_{\gamma,1}$ pour tout $\gamma < \alpha$, nous dénotons par $\mathfrak{N} = \{ s_\iota \}$ les sphères de G^s, telles que toute s_ι est dans un $H - P_{\gamma,1}$ ($\gamma < \alpha$). F est connue pour (et dans) toute s_ι de $\mathfrak{N}$. Moyennant une démonstration comme celle dans [8, (5°)] on établit que la famille $\mathfrak{N}$ couvre $H - P_{\alpha,1}$. De la même façon comme en rapport avec (2°), il résulte que, pour tout r (de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s) \subset H - P_{\alpha,1}$, on a

$$F(r) = \sum_1^\infty F(\rho_\nu), \quad \text{des } \rho_\nu \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}^s) \text{ disjoints,} \quad \text{tout } \rho_\nu \subset \text{un } s_\iota \text{ (de } \mathfrak{N});$$

les $F(\rho_\nu)$ sont connues. Avec α de seconde espèce, on a calculé F contigûment à $P_{\alpha,1}$.

Le calcul de la totale-S, F, sur H de la série $\sum u_n$ se termine, en procédant transfiniment comme on l'a indiqué, au moment où le problème est finalement résolu contigûment à $P_{\alpha_0 1} = 0$ (α_0 de première espèce); e. g. on obtient F(H), ainsi que $F(\rho)$ pour tout ρ [de $\tilde{\mathfrak{M}}_0^s$, conséquemment de $\tilde{\mathfrak{M}}^s] \subset H$.

Les développements que nous venons de présenter justifient l'appellation « *totale*-S *des séries* ».

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. Denjoy, *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique*, Parties I à IV, Paris, 1941-1949, p. 1-714, désigné dans la suite par (D).

[2] A. Denjoy, *Une extension du théorème de Vitali* [*Amer. J. Math.*, vol. 73, 1951, p. 314-356; désigné par (D^*)].

[3] W. J. Trjitzinsky, *Théorie métrique dans les espaces où il y a une mesure* [*Mém. Sc. Math.*, fasc. 143, 1960, p. 1-119; désigné par (T^*)].

[4] W. J. Trjitzinsky, *Totalisations dans les espaces abstraits* [*Mém. Sc. Math.*, fasc. 155, 1963, p. 1-131; désigné dans le texte par (T)].

[5] W. J. Trjitzinsky, *La régularité moyenne dans la théorie métrique* [*Mém. Sc. Math.*, fasc. 157, 1964, p. 1-88; désigné par (T^m)].

[6] W. J. Trjitzinsky, *Totalisation des séries dans les espaces abstraits* [*Mém. Sc. Math.*, fasc. 161, 1965, p. 1-69; désigné par (T^s)].

[7] P. Romanovski, *Intégrale de Denjoy dans les espaces abstraits* [*Math. Sbornik*, t. 9, 1941, p. 67-119; désigné dans le texte par (R)].

TABLE DES MATIÈRES.