MONIQUE BERTRAND

Algèbres non associatives et algèbres génétiques

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 162 (1966)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1966__162__1_0>

M^me^ Monique BERTRAND
Agrégée de Mathématiques

ALGÈBRES NON ASSOCIATIVES
ET
ALGÈBRES GÉNÉTIQUES

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
Directeur : H. VILLAT
FASCICULE CLXII

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
1966

ALGÈBRES NON ASSOCIATIVES ET ALGÈBRES GÉNÉTIQUES

Par M^{me} Monique BERTRAND,

Agrégée de Mathématiques.

Ce travail comprend trois parties :

— une partie purement algébrique;
— une partie donnant quelques notions de génétique;
— une partie intitulée : Algèbres génétiques.

En effet les lois de la génétique ont donné à plusieurs mathématiciens l'idée de construire certains types d'algèbres, désignées sous le vocable général d' « algèbres génétiques ». Ces algèbres ne sont pas associatives, et leur étude théorique fait appel à certaines notions générales de la théorie des algèbres non associatives.

C'est pourquoi l'on s'est attaché, dans la première partie, à développer surtout les parties de l'étude des algèbres non associatives qui seront directement utilisées dans la théorie des algèbres génétiques.

La deuxième partie développe succinctement les notions de génétique nécessaires à la compréhension de la troisième partie, qui étudie la construction et la structure des algèbres génétiques. L'étude des idempotents, en particulier, se trouve avoir un rôle privilégié, car ceux-ci représentent en génétique des populations ayant atteint un état d'équilibre, et il est intéressant de savoir si un tel état peut être atteint, et de quelle manière.

Étude des ensembles munis d'une loi non associative :
Définition et propriétés des formes.

INTRODUCTION.

Considérons un ensemble E, non vide, et supposons-le muni d'une loi de composition. Soit L : à tout couple d'éléments A, B $\in$ E, pris dans cet ordre, nous faisons donc correspondre un élément P bien défini de E, soit P = ALB.

Rappelons les définitions suivantes : L est dite associative si et seulement si :

$$\forall\, A, B, C \in E, \quad AL(BLC) = (ALB)\,LC,$$

L est dite commutative, si et seulement si :

$$\forall\, A, B \in E, \quad ALB = BLA.$$

Prenons quelques exemples :

Exemple I : considérons l'ensemble $\mathcal{D}$ des déplacements plans de la géométrie euclidienne, et prenons pour loi L la composition de ces déplacements.

L est associative et non commutative.

Exemple II : considérons l'ensemble $\mathcal{N}$ des entiers arithmétiques, et prenons pour L le produit ordinaire.

L est associative et commutative.

Exemple III : prenons pour E l'ensemble $\mathcal{N}$ et pour loi L la loi ainsi définie :

$$\forall\, A, B \in \mathcal{N}, \quad P = ALB = A^{B}.$$

cette loi n'est ni commutative, ni associative : en effet

$$(ALB)\,LC = (A^{B})^{C} = A^{BC}; \qquad AL(BLC) = A^{B^{C}};$$
$$ALB = A^{B}; \qquad BLA = B^{A}.$$

Exemple IV : prenons pour E l'ensemble Q des rationnels et pour L la loi ainsi définie :

$$\forall\, A \in Q, \quad ALA = A,$$

$$\forall\, A, B \in Q, \quad A \neq B, \qquad ALB = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B,$$

L est commutative et non associative : en effet

$$AL(ALB) = \frac{3}{4}A + \frac{1}{4}B; \qquad (ALA)\,LB = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B.$$

Nous allons donc nous donner un ensemble E, muni d'une loi non associative, notée : P = AB.

La commutativité du produit n'est pas supposée au départ.

Tout d'abord, une convention : pour alléger l'écriture, nous remplacerons les parenthèses par des groupes de points, ainsi :

$$\{[(AB)C]D\}E = AB.C : D :.E.$$

Considérons un produit d'éléments de E, soit P, formé d'un nombre fini quelconque de facteurs.

Nous allons définir ce que Etherington appelle la « forme » d'un produit non associatif.

Forme d'un produit non associatif.

1° Définition. — Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des entiers arithmétiques. $\mathcal{N}$ est engendré par l'élément 1, en effet :

$$\forall\, n \in \mathcal{N}, \quad n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}}.$$

Supposons la loi d'addition dans $\mathcal{N}$ non associative et non commutative, et notons n' tout « entier non associatif », dont la valeur habituelle est n.

$$n' = [(1+1)+1] + (1+1) + \ldots$$

par exemple. Ainsi :

$$4' = (1+1) + (1+1) \qquad \text{ou} \qquad 4' = 1 + [(1+1)+1].$$

Soit donc $\mathcal{N}' = \{n';\, n \in \mathcal{N}\}$.

Nous allons définir un homomorphisme h :

$$h : \quad \mathcal{P} = \{\mathrm{P};\ \mathrm{P}, \text{ produit d'éléments de E}\} \to \mathcal{N}'$$

de la façon suivante :

Soit P un produit non associatif et non commutatif de δ éléments de E. Alors h(P) est l'élément de $\mathcal{N}'$ dont la valeur arithmétique est δ et dont l'écriture respecte l'association des facteurs de P. Exemples :

soit

P = A;	$h(\mathrm{P}) = 1,$
P = AB;	$h(\mathrm{P}) = 1+1,$
P = AB.CD;	$h(\mathrm{P}) = (1+1)+(1+1),$
P = AB.C : D :.E;	$h(\mathrm{P}) = \{[(1+1)+1]+1\}+1.$

Nous noterons S = h(P). S est appelée « forme du produit P ».

L'application h est un homomorphisme : on voit facilement, en effet, que si

$$S_1 = h(P_1); \qquad S_2 = h(P_2); \qquad P = P_1 P_2;$$

on a

$$S = h(P) = S_1 + S_2.$$

On voit également que h est un homomorphisme sur $\mathfrak{N}'$; en effet, si l'on se donne n'importe quel élément, soit S, de $\mathfrak{N}'$, il est facile de construire un produit P ayant pour forme S.

Regardons de plus près les classes d'équivalence définies par cet homomorphisme :

$$P \sim P' \iff S(P) = S(P').$$

Ainsi, $P = AA.BC$ est équivalent à $P' = AB.CD$, car

$$S(P) = S(P') = (1+1) + (1+1).$$

Il nous sera commode de prendre, dans chaque classe d'équivalence, un représentant ainsi défini :

Soit $X \in E$. Comme représentant de l'ensemble des produits de forme S, nous choisirons le produit dont tous les facteurs sont identiques à $X \in E$, et nous le noterons X^S.

Ainsi, soit $S = 1 + (1+1)$; $P = X.XX = X^{1+(1+1)}$. Nous avons défini la forme, et l'addition des formes; nous allons maintenant étudier le produit $S_1 S_2$ de deux formes S_1 et S_2.

En effet, supposons que nous ayons X^{S_1} et X^{S_2}. Nous voulons calculer la forme du produit obtenu en remplaçant chaque facteur X, dans X^{S_2}, par X^{S_1}, c'est-à-dire $(X^{S_1})^{S_2}$. Nécessairement, la forme de $(X^{S_1})^{S_2}$, s'écrira en remplaçant par S_1 chaque terme 1 figurant dans l'expression de S_2; ce qu'il est logique de noter $S_1 S_2$: $(X^{S_1})^{S_2} = X^{S_1 S_2}$.

De façon plus générale, nous voyons que $S_1 S_2$ est la forme obtenue en substituant P_1, de forme S_1, à chaque facteur de P_2, de forme S_2.

2° Propriétés de ces opérations.

— L'addition, rendant compte du produit dans E, est non associative et non commutative.

— Le produit est associatif et non commutatif, en effet :

$$X^{S_1 S_2 . S_3} = [(X^{S_1})^{S_2}]^{S_3} = X^{S_1 . S_2 S_3} = X^{S_1 S_2 S_3},$$
$$X^{S_1 S_2} = (X^{S_1})^{S_2} \neq (X^{S_2})^{S_1} = X^{S_2 S_1}.$$

— Le produit est prédistributif par rapport à l'addition :

$$X^{S_1(S_2+S_3)} = (X^{S_1})^{S_2+S_3} = (X^{S_1})^{S_2}(X^{S_1})^{S_3} = X^{S_1 S_2} X^{S_1 S_3} = X^{S_1 S_2 + S_1 S_3}.$$

— Le produit n'est pas postdistributif par rapport à l'addition :

$$X^{(S_2+S_3)S_1} = (X^{S_2 S_3})^{S_1} = (X^{S_2}X^{S_3})^{S_1} = \underbrace{\underbrace{X^{S_2}X^{S_3}}\ldots\underbrace{X^{S_2}X^{S_3}}}_{S_1\text{ fois}},$$

alors que

$$X^{S_2 S_1+S_3 S_1} = (X^{S_2})^{S_1}(X^{S_3})^{S_1} = \underbrace{(X^{S_2}\ldots X^{S_2})}_{S_1\text{ fois}}\underbrace{(X^{S_3}\ldots X^{S_3})}_{S_1\text{ fois}}.$$

Il n'y a pas postdistributivité à cause de la non-associativité.

Donc :

$$a+b\neq b+a;\qquad ab\neq ba;\qquad a(b+c)=ab+ac,$$
$$(a+b)+c\neq a+(b+c);\qquad ab.c=a.bc;\qquad (b+c)a\neq ba+ca.$$

Dans le cas ou le produit dans E serait commutatif, on aurait les mêmes conclusions, en transformant seulement :

$$a+b\neq b+a\qquad\text{en}\quad a+b=b+a.$$

3° Calcul du nombre de puissances distinctes de degré n d'un élément de E. — Nous allons calculer le nombre a_n de formes dont la valeur arithmétique est n, ce qui est bien la réponse à la question posée. Dans le cas non commutatif, il est manifeste que :

$$a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \ldots + a_{n-1} a_1;\qquad \text{avec } a_1 = 1;\qquad a_2 = 1.$$

Pour calculer a , considérons la série formelle :

$$a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Si cette série converge pour au moins un $x = 0$, appelons $f(x)$ sa somme; alors d'après la relation de récurrence :

$$[f(x)]^2 = f(x) + x = 0,\qquad \text{d'où}\quad f(x) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4x},$$

et ici :

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x}.$$

Le développement de $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ donne

$$a_n = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,n!}$$

ou encore

$$a_n = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}.$$

Classification des formes.

1° Définitions.

a. Degré δ d'une forme. — C'est le nombre de facteurs du produit, c'est-à-dire l'évaluation de S en tant qu'entier arithmétique.

b. Formes conformes. — Deux formes sont dites conformes lorsqu'elles satisfont à la définition suivante : deux formes non commutatives S_1 et S_2 qui se transforment en une même forme S quand la loi est considérée comme commutative sont dites conformes. « S_1 conforme à S_2 » se note $S_1 \sim S_2$. Il est facile de voir qu'il y a effectivement relation d'équivalence.

Exemple :

$$[(1+1)+1]+1\,; \qquad [1+(1+1)]+1\,;$$
$$1+[(1+1)+1]\,; \qquad 1+[1+(1+1)]\,;$$

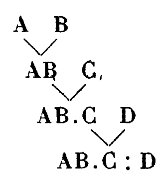
ces quatre formes sont conformes.

c. Attitude α d'une forme. — Tout produit non associatif peut être représenté par un arbre généalogique. L'attitude est le nombre de générations donnant naissance au produit, — ou encore le nombre de couples de parenthèses, crochets, etc., figurant dans l'écriture de la forme, augmenté éventuellement de 1.

Exemples :

AB.C : D s'écrit :

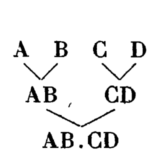
$$S = [(1+1)+1]+1$$



d'où $\alpha = 3$.

AB.CD s'écrit

$$S = (1+1)+(1+1)$$



d'où $\alpha = 2$.

d. Nœud. — Dans un produit, c'est le point de rencontre de deux ramifications; dans une forme, c'est le nombre de signe $+$.

Il y a $\delta - 1$ nœuds.

e. Nœud équilibré. — Un nœud sera dit équilibré si les deux formes dont il exprime l'addition sont conformes.

f. Mutabilité μ *d'une forme.* — C'est le nombre de nœuds non équilibrés figurant dans l'écriture de la forme.

Nous allons maintenant donner, sans les démontrer (*voir* Etherington) les conséquences et résultats relatifs à ces dernières définitions.

2° CONSÉQUENCES.

a. Nombre de formes conformes à une forme donnée S_1 *de multabilité* μ. — On démontre par récurrence que ce nombre est 2^μ.

b. Propriétés de deux formes conformes. — Soient deux formes S_1 et S_2 conformes. Alors :

$$\delta(S_1) = \delta(S_2); \qquad \alpha(S_1) = \alpha(S_2); \qquad \mu(S_1) = \mu(S_2).$$

c. Addition et produit des formes. — Nous avons les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
\delta(r+s) &= \delta(r) + \delta(s),\\
\delta(rs) &= \delta(r)\,\delta(s);\\
\alpha(r+s) &= \begin{cases} 1+\alpha(r) & \text{si } \alpha(r) \geqq \alpha(s),\\ 1+\alpha(s) & \text{si } \alpha(s) \geqq \alpha(r),\end{cases}\\
\alpha(rs) &= \alpha(r) + \alpha(s);\\
\mu(r+s) &= \begin{cases} 2\mu(s) & \text{si } r \sim s,\\ 1+\mu(r)+\mu(s) & \text{si } r \not\sim s,\end{cases}\\
\mu(rs) &= \delta(s)\,\mu(r) + \mu(s).
\end{aligned}$$

d. Exemple : Début de la table des formes commutatives.

α.	δ	μ.	S	Exemples
0	1	0	1	A
1	2	0	$1+1$	AB
2	3	1	$1+(1+1)$	A.BC
2	4	0	$(1+1)+(1+1)$	AB.CD
3	4	2	$[(1+1)+1]+1$	A : B.CD
3	5	1	$[(1+1)+(1+)]+1$	AB.CD : E
3	5	2	$[1+(1+1)]+(1+1)$	A.BC : DE
3	6	1	$[(1+1)+(1+1)]+(1+1)$	AB.CD : EF
3	7	2	$[1+(1+1)]+[(1+1)+(1+1)]$	A.BC : DE.FG
3	8	0	$[(1+1)+(1+1)]+[(1+1)+(1+1)]$	AB.CD : EF.GH

Comme le suggère cette table, on ne peut construire une forme pour laquelle α, δ, μ seraient donnés arbitrairement.

Donnons donc quelques-unes des relations reliant α, δ, μ.

e. Relations entre α, δ, μ :

— $\alpha + 1 \leqq \delta \leqq 2^{\alpha}$.

L'égalité $\delta = \alpha + 1$ est atteinte pour les « formes principales ».
L'égalité $\delta = 2^{\alpha}$ est atteinte pour les « puissances pleines ».

— $\delta \geqq \mu + 2$ sauf pour $\delta = 1$.

L'égalité est atteinte pour les formes principales.

— δ est la somme de $\mu + 1$ puissances non identiques de 2.

Ce qui s'exprime ainsi autrement :

Soit n_{δ} le nombre de termes de la décomposition de δ dans le système de base 2; alors $n_{\delta} - 1 \leqq \mu$.

— $\mu \leqq 3 . 2^{\alpha-3} - 1$.

Il est facile de voir que d'autres inégalités doivent exister entre ces nombres, en effet, nous pouvons choisir α, δ, μ vérifiant les inégalités précédentes, sans qu'il existe pour autant de forme possédant ces caractéristiques : en effet, prenons par exemple : $\alpha = 4$; $\delta = 5$; $\mu = 1$; il n'existe pas de forme répondant à la question, en effet :

$\delta = 5 = 2^2 + 1$;	pour $\mu = 1$:	AB.CD : E;	$\alpha = 3$,
$\delta = 5$;	pour $\alpha = 4$:	AB.C : D :.E;	$\mu = 3$.

PREMIÈRE PARTIE.

ALGÈBRES NON ASSOCIATIVES.

CHAPITRE I.

DÉFINITIONS. GÉNÉRALITÉS.

A. — Anneaux non associatifs.

Définitions.

Un anneau non associatif A est un ensemble E où sont définies deux opérations : nous les désignerons par les signes + (addition) et × (multiplication), avec les conventions suivantes :

— les éléments de E forment un groupe abélien par rapport à l'addition;

— les éléments de E forment un groupoïde par rapport à la multiplication. Nous écrirons $a \times b = ab$;

— la multiplication est distributive bilatéralement par rapport à l'addition.

Si A contient un élément e tel que :

$$\forall x \in A, \quad ex = xe = x,$$

e est dit élément unité bilatère.

L'existence de e entraîne son unicité, en effet un autre élément unité e' vérifierait les égalités

$$ee' = e' = e.$$

Puissances d'un élément.

1° DÉFINITIONS. — Les puissances finies d'un élément a sont :

— *les puissances principales :*

à droite :

$$a^1 = a; \qquad a^n = a^{n-1}a;$$

à gauche :

$$a^{\cdot n} = aa^{\cdot (n-1)};$$

— *les puissances pleines :*

$$a, \quad aa = a^2, \quad a^2 a^2 = a^4, \quad \ldots, \quad a^{2^n}, \quad \ldots;$$

— *les puissances mixtes :*

Le produit d'un nombre fini de puissances principales est une puissance mixte. Le degré de a^n et de $a^{\cdot n}$ est n; le degré d'une puissance mixte est la somme des degrés des puissances principales de a qui y figurent. Dans un anneau quelconque, le nombre des puissances distinctes de degré n d'un élément quelconque est, en général :

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,n!},$$

ce qui prouve que l'ensemble des puissances finies d'un élément est dénombrable.

2° Anneau monogène. — Soit $a \in A$. Nous appelons anneau monogène $[a]$ le sous-anneau de A engendré par a et par e si A contient un élément unité bilatère. On pose alors $a^0 = e$.

Conséquences :

— si $b \in [a]$, on a $[b] \subseteq [a]$;

— si $b \in [a]$ et $a \in [b]$, on a $[b] = [a]$.

3° Anneaux particuliers. — Un anneau sera dit *à puissances associatives* si pour tout x de A, l'anneau monogène $[x]$ est associatif.

De même, un anneau sera dit *à puissances commutatives* si pour tout x de A, l'anneau monogène $[x]$ est commutatif. Un anneau à puissances associatives est nécessairement à puissances commutatives, mais la réciproque n'est pas vraie.

Nous allons donner, à titre d'exemple, quelques propriétés des anneaux à puissances commutatives.

Anneaux à puissances commutatives.

1° Anneau flexible. — Un anneau A est dit flexible si, pour tout couple x, y d'éléments de A :

$$(xy)x = x(yx),$$

A est dit à puissances flexibles si tout anneau monogène $[x]$ est flexible.

2° CAS D'UN ANNEAU DE CARACTÉRISTIQUE PREMIÈRE A 2. — Soit $C(a, b)$ le commutateur de a et de b, éléments quelconques de A :

$$C(a, b) = ab - ba.$$

Supposons que A est flexible, et que A contient trois éléments x, y, z qui commutent entre eux. Nous allons alors démontrer la relation

$$2C[(x, y), z] = 0$$

Tout d'abord :

$$C[(x, y), z] = C[x, (yz)],$$

relation obtenue en remplaçant, dans la relation de définition d'un anneau flexible, l'élément x par l'élément $x + z$. Ou encore :

$$C[(x, y) z] + C[(y, z), x] = 0.$$

Par permutation circulaire et addition :

$$2C[(x, y), z] + 2C[(y, z), x] + 2C[(z, x), y] = 0.$$

En ajoutant à cette dernière équation la précédente multipliée par — 2, et en permutant, on obtient :

$$2C[(x, y), z] = 0.$$

D'où, par récurrence, les deux résultats suivants :

— Dans tout anneau flexible de caractéristique première à 2 tout sous-anneau engendré par n éléments quelconques qui commutent entre eux est commutatif.

— Pour qu'un anneau de caractéristique première à 2 soit un anneau à puissances commutatives, il faut et il suffit qu'il soit à puissances flexibles.

3° CAS D'UN ANNEAU DE CARACTÉRISTIQUE NON PREMIÈRE A 2. — Nous allons démontrer le résultat suivant : *Tout anneau à puissances flexibles est à puissances principales commutatives.*

En effet, d'après la définition

$$xx^2 = x^2x$$

Supposant que : $xx^{n-1} = x^{n-1}x$, on obtient

$$xx^n = x(x^{n-1}x) = (xx^{n-1})x = x^n x.$$

Prouvons maintenant que pour tout couple d'entiers (p, q), on a

$$x^p x^q = x^q x^p,$$

utilisant la relation

$$C[(x, y), z] = C[x, (y, z)]$$

on obtient

$$C[x^{p+q-1}, x] = C[(x^{p+q-2}, x), x] = C[x^{p+q-2}, x^2] = \dots$$
$$= C[x^{p+q-1-r}, x^{r+1}] = C[x^p, x^q],$$

or

$$C[x^{p+q-1}, x] = 0.$$

D'où

$$x^p x^q = x^q x^p.$$

Nous allons maintenant donner quelques propriétés générales des anneaux non associatifs. La démonstration et les applications de ces propriétés se trouvent dans la thèse de Raffin.

Quelques propriétés des anneaux non associatifs.

1° Identités générales. — Soient $x_1, \dots, x_n \in A$.

Posons

$$S_d(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_2 x_1;$$

$$S_d(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} S_d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)\, x_i$$

De même, $S_g(x_1, \dots, x_n)$ est défini par des multiplications successives à gauche. S_d et S_g sont symétriques par rapport aux x_i.

Nous utiliserons la forme des produits non associatifs, posant $y = x^{s_n}$, s_n étant de degré n.

Nous énonçons alors le résultat suivant : *Soit* $x_1, \dots, x_n \in A$. *Soit* p_n *le coefficient du produit* $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ *dans le développement de* $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)^{s_n}$, *où les* λ_i *appartiennent à un anneau* B *associatif, commutatif et unitaire. Alors :*

$$P_n = \sum_{q=1} \left[(-1)^{n-q} \sum_{C_n^q} \left(\sum_q x_i \right)^{s_n} \right].$$

Exemple :

$s_n = n$: c'est le cas d'une forme principale; alors P_n est, soit $S_d(x_1, \dots, x_n)$, soit $S_g\, x_1, \dots, x_n)$.

2° Linéarisations. — Soit F une transformation de l'anneau A en lui-même

$$F : \quad x \in A \to y = F(x) \in A.$$

Supposons, d'autre part, que pour tout $x \in A$, on ait

$$F(x) = 0,$$

on appelle *linéarisation de l'identité* $F(x) = 0$, toute relation — si elle existe —

$$H(x_1 \ldots, x_k) = 0,$$

telle que :

— H soit un polynome du premier degré, à coefficients dans B par rapport à chaque x_i ;

— H soit symétrique par rapport aux x_i;

— Dans tout anneau non associatif, la relation $F(x) = 0$ entraîne la relation $H(x_1, \ldots, x_k) = 0$, pour tout ensemble d'éléments $(x_1, \ldots, x_k)$ de l'anneau;

— enfin

$$H(x_1, \ldots, x_k) = k!\, F(x) \quad \text{si} \quad x_1 = \ldots = x_k = x.$$

Les deux identités sont donc équivalentes si la caractéristique de A est première à $k!$

Exemples :

a. $x^n = x'^n$.

La linéarisation de cette relation est

$$S_d(x_1, \ldots, x_n) - S_g(x_1, \ldots, x_n) = 0;$$

b. $x^p x^q = x^q x^p$.

La linéarisation de cette relation est

$$\sum_{C_{p+q}^p} \Big[\underbrace{S_d(x_k, \ldots, x_i)}_{p} \; \underbrace{S_d(x_j, \ldots, x_k)}_{q} \Big] = 0.$$

B. — Algèbres non associatives.

Définitions.

1° Axiomes. — Une algèbre non associative A est :

— un anneau non associatif;

— un B-module unitaire, c'est-à-dire : B étant un anneau associatif, commutatif et unitaire, on a défini une loi de composition externe telle que, si

$$x, y \in A \qquad \text{et} \qquad \alpha, \beta \in \beta,$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y; \qquad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x; \qquad \alpha(xy) = (\alpha x) = x(\alpha y).$$

Nous nous bornerons aux *algèbres d'ordre fini*, dont nous rappelons la définition : on a pu trouver, dans A, n éléments $e_1, \ldots, e_n$, formant une base, c'est-à-dire :

— pour tout $x \in A$, il existe $\xi_1, \ldots, \xi_n$, éléments de B, tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i;$$

— si

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i,$$

l'égalité $x = y$ entraîne $\xi_i = \eta_i$ pour tout i.

D'autre part, il résulte des axiomes de définition qu'il existe des éléments γ_{ijk} de A, avec $i, j, k = 1, \ldots, n$, tels que $e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} e_k$ pour tout i et tout j. On a ainsi écrit une table de multiplication de A.

2° Transformations R_a et L_a. — Soit $a \in A$. Nous pouvons définir, à partir de cet élément a, deux transformations :

La transformation R_a, ou multiplication à droite par a :

$$\forall y \in A, \quad y' = y R_a = y a,$$

sa matrice par rapport à la base choisie est F_a.

La transformation L_a, ou multiplication à gauche par a :

$$\forall y \in A, \quad y'' = L_a y = a y,$$

sa matrice par rapport à la base choisie est D_a.

L'ensemble R(A) engendré par toutes les multiplications à droite de A est un sous-espace, d'ordre n au plus, de l'espace des transformations linéaires de A, qui est d'ordre n^2. De même pour L(A).

Nous appellerons *algèbre des transformations de* A, l'algèbre des polynomes en R_{a_i}, L_{b_j}, I, dont les coefficients sont dans B; et nous la noterons T(A). (I est l'application identique dans A.)

De ceci, une conséquence immédiate : considérons l'ensemble R(A) :

$$xa = x\Gamma_a, \qquad (xa)b = (x\Gamma_a)\Gamma_b = x(\Gamma_a\Gamma_b)$$

puisque la multiplication des matrices est associative.

Donc A *est associative si et seulement si :* $\Gamma_a\Gamma_b = \Gamma_{ab}$ *pour tout* $(a, b) \in A$.

Sous-ensembles de A.

1° SOUS-ALGÈBRES. — Soit A_1 un sous-espace vectoriel de A; l'ensemble des R_{a_1}, pour $a_1 \in A_1$, sera noté $R(A_1, A)$; celui des L_{a_1}, $a_1 \in A$, sera noté $L(A_1, A)$; et ces sous-espaces engendrent avec I une sous-algèbre de $T(A)$, soit $T(A_1, A)$.

Soit m l'ordre de A_1; on peut écrire : $A = A_1 + A'_1$, où A_1 est un supplémentaire de A_1.

Soit E la transformation de A définie par la projection dans A_1 :

$$\text{si} \quad a = a_1 + a'_1 \qquad E(a) = a_1$$

E est une transformation idempotente, c'est-à-dire $E^2 = E$. Sa matrice est de rang m.

Nous en déduisons deux résultats :

a. A_1 *est sous-algèbre de* A *si et seulement si*

$$E[R(A_1, A)] = E[R(A_1, A)E;$$

b. A_1 *est sous-algèbre de* A *si et seulement si*

$$E[T(A_1 A)] = E[T(A_1, A)]E;$$

2° IDÉAUX. — B sous-espace de A est idéal à droite de A si et seulement si $ba \in B$ pour tout $b \in B$ et tout $a \in A$.

Même définition à gauche.

Définissant la projection E de A sur B, nous avons les résultats :

a. B *est idéal à droite de* A *si et seulement si*

$$E\,R(A) = E\,R(A)E.$$

De même à gauche.

b. B *est idéal bilatère de* A *si et seulement si*

$$E\,T(A) = E\,T(A)E$$

CHAPITRE II.

ALGÈBRES DE DEGRÉS FINIS.

Équations satisfaites par un élément d'une algèbre admettant une base finie.

1° ALGÈBRE AYANT UN ÉLÉMENT UNITÉ e. — Soit $e_1 = e, e_2, \ldots, e_n$ une base de A.

a. Équations caractéristiques. — Considérons, comme plus haut, les transformations R_x et L_x.

Formons l'équation caractéristique de R_x, par exemple :

$$|\lambda I - R_x| = 0$$

qui s'écrit :

$$\lambda^n - t_1 \lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det R_x = 0,$$

où les t_i sont des polynomes homogènes en $\xi_1, \ldots, \xi_n$, coordonnées de x, de degré i au plus, et cela, d'après la définition même de l'équation caractéristique, or

$$x = ex = eR_x \qquad \text{et} \qquad x^p = eR_x^p$$

(en notant x^p la puissance principale à droite de degré p de x).

Donc si $C_d(x)$ désigne le polynome obtenu en remplaçant, dans le premier membre de l'équation caractéristique, λ par x, on a

$$c_d(x) = ec_d(R_x) = 0,$$

puisque R_x est racine de son équation caractéristique.

D'où le résultat :

L'élément général $x \in A$, A *étant une algèbre non associative ayant une base finie sur un anneau* B, *est racine de son équation caractéristique.*

Mêmes résultats en considérant L_x.

b. Équation principale. — Il résulte de ce qui précède, qu'il existe une équation à droite :

$$\Delta_x x^p - \Delta_{x,x} x^{p-1} - \ldots - \Delta_{\underbrace{x \ldots x}_{p+1}} e = 0; \qquad x \in A,$$

telle que p soit minimal.

C'est l'équation minimale à droite de x, ou équation principale à droite de A, ou équation au rang à droite de A. p est le degré à droite de A.

De même à gauche.

Remarque 1. — S'il existe une autre équation principale, son degré est nécessairement p.

Soit donc :

$$\Delta_x x^p - \Delta_{x,x} x^{p-1} - \ldots - \Delta_{x \ldots x} e = 0,$$
$$\Delta'_x x^p - \Delta'_{x,x} x^{p-1} - \ldots - \Delta'_{x \ldots x} e = 0.$$

On en déduit :

$$(\Delta'_x \Delta_{xx} - \Delta_x \Delta'_{xx}) x^{p-1} + \ldots + (\Delta'_x \Delta_{x \ldots x} - \Delta_x \Delta'_{x \ldots x}) e = 0,$$

p étant minimal, on a

$$\Delta'_x \Delta_{x.x} = \Delta_x \Delta'_{x.x}; \quad \dots \quad ; \Delta'_x \Delta_{x..x} - \Delta_x \Delta'_{x...x},$$

ou encore, si $\vec{\Delta}$ et $\vec{\Delta}'$ désignent les vecteurs dont les composantes ont les coefficients des équations, éventuellement changés de signe, on a

$$\Delta'_x \vec{\Delta} = \Delta_x \vec{\Delta}'.$$

Remarque 2. — Remplaçons x par λx :

$$\lambda^p \Delta_{\lambda x} x^p - \lambda^{p-1} \Delta_{\lambda x, \lambda x} x^{p-1} - \dots - \Delta_{\lambda x, \dots, \lambda x} e = 0.$$

Si B est un anneau d'intégrité, utilisons l'égalité

$$\Delta'_x \vec{\Delta} = \Delta_x \vec{\Delta}',$$

nous avons

$$\Delta_x \Delta_{\lambda x, \lambda x} = \lambda \Delta_{\lambda x} \Delta_{x,x},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\Delta_x \Delta_{\lambda x, \quad, \lambda x} = \lambda^p \Delta_{\lambda x} \Delta_{x,..,x},$$

supposons donc B d'intégrité et supposons de plus qu'on puisse prendre $\Delta_x = 1$. Alors les remarques précédentes montrent que l'équation principale est unique et que les coefficients des x^q sont des polynomes homogènes en ξ_i de degré q ou sont identiquement nuls.

Cas où B est un corps F. — C'est *a fortiori* un domaine d'intégrité, et l'on y définit l'équation principale comme l'équation de plus petit degré à droite, dont le premier coefficient est 1, et dont les autres coefficients sont des fractions rationnelles en $\xi_1, \dots, \xi_n$. Le lemme de Gauss permet alors de montrer que ces coefficients sont en fait des polynomes.

Théorème : *Le polynome principal à droite $\Phi(\lambda)$ de x divise tout polynome $\Psi(\lambda)$ tel que $\Psi_R(x) = 0$, et en particulier le polynome caractéristique*

En effet :

$$\Psi(\lambda) = \Phi(\lambda)\,\rho(\lambda) + \sigma(\lambda),$$
$$\Psi_R(x) = e\,\Psi(R_x) = e[\Phi(R_x)\,\rho(R_x) + \sigma(R_x)],$$

d'où

$$\Psi_R(x) = \sigma_R(x).$$

Le degré de $\sigma(\lambda)$ étant inférieur à celui de $\Phi(\lambda)$, on a $\sigma(\lambda) = 0$.

Nous avons ainsi défini et étudié une équation minimale à droite (et une à gauche) pour l'élément général x. Cette équation est vérifiée par tout élément $x \in A$.

Nous allons maintenant introduire, de la même façon, l'équation minimale d'un élément particulier.

c. Équations minimales. — Considérons un élément particulier $a \in A$. L'existence de l'équation caractéristique et de l'équation principale (à droite) nous démontre l'existence d'une équation de la forme

$$\delta_1 a^m - \delta_2 a^{m-1} - \ldots - \delta_{p+1} e = 0, \qquad \text{avec} \quad m \leqq p \quad \text{et} \quad \delta_q \in B.$$

m, degré de a, est le plus petit possible.

De même à gauche.

On a ainsi les équations minimales à droite et à gauche de l'élément a.

2° Algèbre sans élément unité. — On se ramène au cas précédent, en considérant l'algèbre A^+, déduite de A en ajoutant $e = e_0$, élément neutre, à A. On complète la base et la loi de multiplication avec :

$$e = e_0, e_1, \ldots, e_n,$$
$$\gamma_{ij0} = 0, \quad \forall (i, j); \qquad \gamma_{0jk} = \delta_{jk}; \; \gamma_{i0k} = \delta_{ik};$$
$$x^+ = x + \xi_0 e.$$

On écrit comme au 1° :

$$c_d^+(x^+) = x^{+(n+1)} - t_1^+ x^{+(n)} \ldots = 0,$$

équation caractéristique de x^+.

Si l'on fait, dans cette équation $\xi_0 = 0$, on trouve que x satisfait à

$$x c_d(x) = 0,$$

on obtient donc des résultats analogues à ceux du 1°.

3° Remarque. — Les considérations précédentes ont été faites dans le cas des puissances principales.

Des calculs en tous points analogues peuvent être développés pour des puissances non principales.

Ainsi, pour les puissances pleines :

$$x^{2}, \quad x^{4}, \quad \ldots, \quad x^{2^n},$$

on peut considérer l'opérateur S_r qui associe à tout $x \in A$ l'élément $x^2 \in A$. Cet opérateur possède une matrice. On peut écrire l'équation caractéristique et déterminer des équations analogues aux équations principales.

Généralisations et conséquences immédiates.

1° GÉNÉRALISATIONS. — Si l'algèbre considérée ne contient pas d'élément unité, on doit supprimer les termes en λe dans les formules.

a. Équations minimales. — Soit un élément a d'une algèbre A. S'il existe dans B des éléments $\varepsilon_q (q = 1, \ldots, p + 1)$ tels qu'une équation minimale de a soit satisfaite et qu'il n'existe pas d'équation analogue de plus faible degré, cette équation est alors l'équation minimale à droite de a et que a est de degré m à droite.

Si l'on peut choisir $\varepsilon_1 = 1$, on dit que a est de $m^{\text{ième}}$ degré à droite. L'équation est alors unique.

D'où la conséquence :

Si a est de degré n à droite, tout élément $b = a + \beta e (\beta \in B)$ est de degré n à droite.

DÉFINITION. — *a, de degré n à droite, est dit canonique si* $\varepsilon_2 = 0$.

Conséquence : Pourvu que l'algèbre contienne un élément unité et que l'équation $\varepsilon_1 n - \varepsilon_2 = 0$ soit résoluble dans B, il existe un élément $B = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 n}$ tel que $b = a + \beta e$ soit canonique; b existe toujours si B est un corps de caractéristique première à n.

b. Définitions :

— Une algèbre A est dite de *degré finis à droite* si tout élément a de A a un degré m_a (fini) à droite.

— Une algèbre A est dite *de degré principal d (fini) à droite* si :

— elle est de degrés finis à droite;

— l'ensemble des m_a est borné et le plus grand des nombres m_a est d.

— une algèbre A est dite *du $p^{\text{ième}}$ degré à droite* si à tout élément x de A on peut faire correspondre des éléments $\delta_{(q)}x$ de $B (q = 1, \ldots, p)$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

— l'équation

$$x^e - \delta_x x^{p-1} - \ldots, \delta_{(p)} x e = 0$$

est vérifiée (*cf* plus haut);

— la fonction $\delta_{(q)} x$ satisfait aux propriétés combinatoires formelles communes aux polynomes homogènes de degré q (à plus de $p - 1$ variables) sur un domaine d'intégrité D quelconque.

On dira que cette fonction est un « coefficient de degré q »;

— il n'existe pas d'équation minimale à droite de degré inférieur à p. Cette relation, dite équation principale à droite de A, est alors unique.

2° CONSÉQUENCES IMMÉDIATES.

a. Si un élément a est du $n^{\text{ième}}$ degré à droite et si les puissances principales de a coïncident jusqu'au degré n inclus, alors elles coïncident pour tout degré.

b. Si un élément a est du $n^{\text{ième}}$ degré à droite et si $a^p a^q = a^{p+q}$, p et q étant des entiers rationnels quelconques, de (0, n) bornes exclues, alors $[a]$ est associatif et commutatif.

c. — Toute algèbre de degré 2 est à puissances associatives.

— Pour qu'une algèbre de degré 3 à droite soit à puissances associatives, il faut et il suffit qu'on ait

$$xx^2 = x^2x \qquad \text{et} \qquad x^2x^2 = x^4 \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{A}$$

— Dans une algèbre de degré 4 à droite, pour que $[a]$ soit associative, il faut et il suffit qu'on ait

$$aa^2 = a^2a; \qquad aa^3 = a^3a; \qquad a^2a^2 = a^4;$$
$$a^2a^3 = a^3a^2 = a^5; \qquad a^3a^3 = a^6.$$

d. Pour qu'une algèbre de degré 4 à droite et de caractéristique première à 6 soit à puissances associatives, il faut et il suffit qu'on ait

$$x^2x = xx^2 \qquad \text{et} \qquad x^2x^2 = x^4 \quad \text{pour tout de A.}$$

Linéarisation et base canonique.

1° LINÉARISATION DE L'ÉQUATION PRINCIPALE. — Soit A une algèbre du $n^{\text{ième}}$ degré à droite. D'après la définition d'une telle algèbre, pour tout $x \in \mathrm{A}$, nous pouvons écrire

$$(\mathrm{E}_n) \qquad x^n = \delta_x x^{n-1} + \delta_{x,x} x^{n-2} + \ldots + \delta_{x\ldots x} e;$$

Alors Raffin (Thèse) démontre le résultat suivant :

Dans une algèbre A du $n^{\text{ième}}$ degré sur un anneau B, n éléments arbitraires satisfont à la linéarisation (L_n) de l'équation principale. Les coefficients de (L_n) sont linéaires et symétriques par rapport à leurs indices; si q des indices d'un coefficient deviennent égaux, $q\,!$ se met en facteur dans ce coefficient.

Inversement, si, dans B, la division par $n!$ est toujours possible, une relation de la forme (L_n) suffit pour entraîner une relation de la forme (E_n) — Mêmes résultats pour des puissances non principales.

2° Base canonique. — Si au lieu de prendre les éléments x_i arbitraires, on les choisit tels que $\delta_{x_i} = 0$, (on les appellera encore canoniques, par extension), alors au second membre de (L_n), les n premiers termes sont nuls. Cela est toujours possible si e existe et si B est un corps de caractéristique première à n; de plus, nous avons le résultat suivant :

Pourvu que dans (E_n) δ_x soit linéaire en x, toute combinaison linéaire, sur B*i* d'éléments canonique de A est un élément canonique de A.

Ces résultats permettent alors de démontrer le théorème suivant :

Dans une algèbre avec élément unité e, de degré principal à droite n, d'ordre $m > 2$ *sur un corps* F *de caractéristique première à n, il existe une base* $e, e_1, \ldots, e_{m-1}$, *telle que :*

$$\delta_{e_i} = 0, \qquad \delta_{e_i, e_j} = 0 \qquad (i \neq j),$$

c'est ce qu'on appelle la base canonique de A.

Exemples :

$n = 2$: dans une algèbre de degré 2 sur $B = F$, avec élément unité et caractéristique différente de 2, il existe une base $\{ e, e_i \}$ telle que :

$$e_i^2, = \beta_i e; \qquad e_i e_j + e_j e_i = 0.$$

$n = 3$: alors,

$$e_i^3 = \alpha_i e_i' + \beta_i e; \qquad e_i^2 e_j + (e_i e_j + e_j e_i) e_i = \alpha_i e_j + \gamma_{ij} e;$$

3° Exemple de détermination effective d'une base canonique. — Soit une algèbre du second degré sur un corps de caractéristique différente de 2. Soit a_1 un élément canonique donné (les hypothèses faites entraînent l'existence de a_1).

Donc

$$a_1^2 = \beta_1 e \neq 0, \qquad \beta_1 \in F.$$

Soit $e_1 = a_1$, et prenons un autre élément canonique a_2 tel que $a_2 \notin (a_1)$.

Alors

$$e_1 a_2 + a_2 e_1 = 2\gamma_{21} e, \quad \gamma_{21} \in F.$$

Soit

$$e_2 = -\beta_1^{-1}\gamma_{21}e_1 + a_2,$$

d'où

$$e_1e_2 + e_2e_1 = 0.$$

Supposons qu'on ait trouvé $p-1$ éléments indépendants $e_1, \ldots, e_{p-1}$, tels que :

$$e_ie_j + e_je_i = 0 \qquad (i < j = 2, \ldots, p-1).$$

Soit $a_p \notin (e_1, \ldots, e_{p-1})$, a_p étant canonique.

Alors

$$e_ia_p + a_pe_i = 2\gamma_{pi}e \qquad (i < p;\ \gamma_{pi} \in \mathrm{F}).$$

Comme $e_i^2 = \beta_i e$, on pose

$$e_p = -\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\gamma_{pi}}{\beta_i}e_i + a_p \qquad \text{et} \qquad e_ie_p + e_pe_i = 0.$$

D'où la base cherchée.

CHAPITRE III.

Algèbres isotopes.

Nous allons maintenant étudier la notion d'algèbres isotopes (*cf.* Mémoire d'Albert).

Cette notion est intéressante, en particulier elle permet de trouver certains critères d'associativité.

Définitions et généralités.

Considérons deux algèbres d'ordre n sur un corps F, soient A et A_0.

Ces deux algèbres étant en particulier deux espaces vectoriels de dimension n. Sur F, soient E et E_0, nous pouvons identifier par isomorphisme les éléments de E et ceux de E_0.

Nous désignerons donc par les mêmes symboles les éléments de A et ceux de A_0; nous écrirons :

$$ax = a\mathrm{R}_x \qquad \text{dans A},$$
$$(a, x) = a\mathrm{R}_x^{(0)} \qquad \text{dans } \mathrm{A}_0.$$

Nous dirons que A *est une isotope de* A_0 *s'il existe trois transformations linéaires non singulières* P, Q, C *telles que :*

$$R_x^{(0)} = PR_{xQ}C,$$

xQ désignant le transformé par Q de l'élément x.

L'isotopie est une relation d'équivalence : elle est réflexive : pour le prouver, il suffit de prendre

$$P = Q = C = I.$$

Elle est symétrique :

Si

$$R_x^{(0)} = PR_{xQ}C, \qquad \text{alors} \quad R_{xQ^{-1}}^{(0)} = PR_x C$$

ou encore

$$R_x = P^{-1} R_{xQ^{-1}} C^{-1}.$$

Elle est transitive :

Si

$$R_x^{(1)} = P_1 R_{xQ_1}^{(0)} C_1 \qquad \text{et} \qquad R_x^{(0)} = PR_{xQ}C,$$

alors

$$R_x^{(1)} = P_2 R_{xQ_2} C_2,$$

avec $P_2 = P_1 P$, $Q_2 = Q_1 Q$, $C_2 = CC_1$;

Nous pouvons donc dire que A et A_0 sont isotopes l'une de l'autre.

Nous avons défini l'isotopie à partir des multiplications à droite R_x.

Nous allons voir quelles conséquences l'isotopie entraîne vis-à-vis des multiplications à gauche L_x.

Nous avons :

dans A :

$$ax = aR_x = xL_a,$$
$$xa = aL_x = xR_a;$$

dans A_0 :

$$(a_1 x) = aR_x^{(0)} = xL_a^{(0)}$$
$$(x_1 a) = aL_x^{(0)} = xR_a^{(0)},$$

Posons $b = aQ$ et $z = xP$.

$$aL_x^{(0)} = xR_a^{(0)} = xPR_b C = zR_b C = (zb)C = bL_z C.$$

D'où

$$aL_x^{(0)} = aQL_z C, \qquad \forall a, \qquad x \in E.$$

Donc la relation de définition de l'isotopie :

$$R_x^{(0)} = PR_{xQ}C$$

est équivalente à la relation

$$L_x^{(0)} = QL_{xP}C.$$

Les multiplications à droite et à gauche jouent donc des rôles symétriques vis-à-vis de l'isotopie.

Deux algèbres équivalentes sont isotopes : En effet, deux algèbres sont dites équivalentes s'il existe une transformation linéaire H non singulière telle que :

$$(a, x)\,H = aH\,x.H, \quad \text{c'est à dire} \quad R_x^{(0)} = HR_{xH}H^{-1},$$

ici l'on a donc $P = Q = H$, $C = H^{-1}$. Il est souvent plus commode de remplacer A_0 par une algèbre équivalente.

Il en résulte que toutes les isotopes de A sontéquivalentes à l'isotope de A définie par

$$R_x^{(0)} = PR_xC, \qquad L_x^{(0)} = L_{xP}C,$$

P et C étant non singulières.

Cette forme est intéressante, mais il est souvent préférable de définir *l'isotopie principale* ds la façon suivante :

Toutes les isotopes d'une algèbre A sont équivalentes à une isotope principale A_0, définie par :

$$R_x^{(0)} = PR_{xQ}, \qquad L_x^{(0)} = QL_{xP},$$

P et Q étant non singulières.

Cette définition a l'avantage d'être symétrique à la fois par rapport à la multiplication à droite, et par rapport à la multiplication à gauche.

Il est facile de voir que l'isotopie principale est une relation d'équivalence, donc A et A_0 sont dites isotopes principales l'une de l'autre.

Enfin tout automorphisme de A est une équivalence de A avec ellemême; on a alors :

$$(a, x) = a.x, \qquad R_x^{(0)} = R_x; \qquad L_x^{(0)} = L_x.$$

Il en résulte que :

Une transformation linéaire H sur une algèbre A définit un automorphisme de A si et seulement si H n'est pas singulière et si :

$$R_{xH} = H^{-1}R_xH, \qquad L_{xH} = H^{-1}L_xH$$

(chacune de ces deux relations entraînant l'autre).

Isotopes avec élément unité.

Soit une algèbre A avec élément unité e; soit f un élément non nul de A; il existe une transformation linéaire non singulière H, telle que $e = f\mathrm{H}$.

Alors, puisque : $\mathrm{R}_e = \mathrm{L}_e = \mathrm{I}$, on obtient

$$\mathrm{R}_f^{(0)} = \mathrm{HR}_e\mathrm{H}^{-1} = \mathrm{L}_f^{(0)} = \mathrm{HL}_e\mathrm{H}^{-1} = \mathrm{I},$$

A est donc équivalente à une algèbre A_0 possédant f comme élément unité. Nous somme donc amenés à prouver le résultat suivant :

Soit g un élément non singulier à gauche de A, soit h un élément non singulier à droite de A; ces hypothèses entraînent l'existence des transformations linéaires non singulières :

$$\mathrm{P} = (\mathrm{R}_h)^{-1}, \qquad \mathrm{Q} = (\mathrm{L}_g)^{-1}.$$

Alors l'isotope principale de A définie par

$$\mathrm{R}_x^{(0)} = \mathrm{PR}_{x\mathrm{Q}}; \qquad \mathrm{L}_x^{(0)} = \mathrm{QL}_{x\mathrm{P}}$$

a pour élément unité $f = g.h$.

Réciproquement, toute isotope de A ayant f pour unité est équivalente à une isotope principale définie comme plus haut avec $f = g.h$.

En effet si $f = g.h$:

$$f = g\mathrm{R}_h = h\mathrm{L}_g; \qquad g = f\mathrm{P}; \qquad h = f\mathrm{Q}.$$

Alors

$$\mathrm{R}_f^{(0)} = \mathrm{PR}_h = \mathrm{L}_f^{(0)} = \mathrm{QL}_g = \mathrm{I},$$

f est donc l'unité de A_0.

Réciproquement définissons une isotope de A, ayant f pour unité, par

$$\mathrm{R}_x^{(0)} = \mathrm{PR}_{x\mathrm{Q}}, \qquad \mathrm{L}_x^{(0)} = \mathrm{QL}_{x\mathrm{P}},$$

d'où, avec

$$g = f\mathrm{P}, \qquad h = f\mathrm{Q},$$

nous obtenons

$$\mathrm{R}_f^{(0)} = \mathrm{I} = \mathrm{PR}_h, \qquad \mathrm{L}_f^{(0)} = \mathrm{I} = \mathrm{QL}_g.$$

Alors h est non singulier à droite, g est non singulier à gauche et

$$f = g\mathrm{P}^{-1} = g\mathrm{R}_h = g.h.$$

Considérons maintenant deux isotopes principales A et A_θ ayant chacune un élément unité.

Alors, soit

$$P = (R_h)^{-1}, \qquad Q = (L_g)^{-1}$$

comme précédemment.

P et Q appartiennent alors à T(A); $R_x^{(0)}$ et $L_x^{(0)}$ appartiennent à T(A); donc T(A_0) est contenue dans T(A), et par raison de symétrie, T(A_0) = T(A). Les algèbres de transformation de A et de A_0 sont donc identiques.

Isotopie et associativité.

Nous allons utiliser la notion d'isotopie pour en déduire certains critères d'associativité.

Nous savons (*cf.* Albert, *Structure of Algebras*) que si A est une algèbre associative avec élément unité, R(A) est une algèbre et la transformation $x \to R_x$ est une équivalence de A et de R(A).

a. Premier critère d'associativité. — Soient R(A) et L(A) les espaces de multiplication à droite et à gauche de A. A est associative si et seulement si :

$$RL = LR$$

pour tout $R \in R(A)$ et tout $L \in L(A)$. En effet :

L'égalité de définition de l'associativité étant :

$$(x.a).y = x.(a.y),$$

quels que soient x, a, $y \in A$, elle équivaut à

$$(aL_x)R_y = x(aR_y) = aR_y L_x, \quad \text{c'est-à dire } L_x R_y = R_y L_x$$

b. Théorème fondamental. — *Une algèbre* A *possédant un élément unité est associative si et seulement si toute isotope de* A *possédant un élément unité est associative et équivalente à* A.

Démonstration. — Supposons A associative : alors

$$R_x R_y = R_{xy}, \qquad L_x L_y = L_{yx} \quad \text{pour tout } x, y \in A.$$

Un élément x de A est non singulier à droite si et seulement s'il a un inverse dans A, ce qui entraîne que x est également non singulier à gauche.

Alors

$$R_{x^{-1}} = (R_x)^{-1}, \qquad L_{x^{-1}} = (L_x)^{-1}.$$

Soit A_0 une isotope principale de A, et supposons que A_0 a un élément unité. Reprenant les notations du paragraphe précédent :

$$P = R_{h^{-1}}; \qquad Q = L_{g^{-1}};$$
$$xQ = xL_{g^{-1}} = g^{-1}.x,$$
$$PR_{yQ} = R_{h^{-1}} R_{yQ} = R_{h^{-1}g^{-1}y}.$$

D'autre part $f^{-1} = (g.h)^{-1} = h^{-1}.g^{-1}$.
Donc

$$R_x^{(0)} = R_{f^{-1}.x}.$$

De même,

$$L_x^{(0)} = L_{g^{-1}} L_{xP} = L_{g^{-1}} L_{x\,h^{-1}} = L_{x\,h^{-1}\,g^{-1}} \qquad \text{et} \qquad L_x^{(0)} = L_{x\,f^{-1}}.$$

Donc

$$R(A_0) = R(A); \qquad L(A_0) = L(A),$$
$$R_x^{(0)} L_y^{(0)} = L_y^{(0)} R_x^{(0)} \quad \text{pour tout } x, y \in A.$$

A_0 est donc associative; puisque A_0 a un élément unité, A_0 est équivalente à $R(A_0)$; comme $R(A_0) = R(A)$ et puisque $R(A)$ est équivalente à A, A et A_0 sont équivalentes.

La réciproque du théorème est immédiate d'après la partie directe.

c'. R(A) PEUT-ELLE ÊTRE UNE ALGÈBRE SANS QUE A SOIT ASSOCIATIVE ?

Il est logique de se demander si, lorsque R(A) est une algèbre, A est nécessairement associative.

Nous avons alors les résultats suivants :

— *Une algèbre* A *ayant un élément unité à gauche est associative si et seulement si* R(A) *est une algèbre. De plus, la représentation* $x \to R_x$ *est alors une équivalence de* A *et* R(A).

En effet,

$$e.x = eR_x = x;$$
$$(e.x).y = x.y = eR_x R_y = e.(x.y) = eR_{xy} \qquad \text{et} \qquad R_{xy} \in R(A).$$

D'où $R_{xy} = R_x R_y$, A est équivalente à R(A) et est associative.

La réciproque est déjà connue.

— *Supposons que* A *et* R(A) *soient des algèbres et que* A *ait un élément non singulier à gauche. Alors* A *possède une isotope principale associative* A_0, *qui est équivalente à* R(A), *et dont f est élément unité à gauche.*

En effet, définissons A_0 :

$$R_x^{(0)} = R_{xQ}, \qquad Q = (L_f)^{-1}.$$

Alors

$$L_x^{(0)} = QL_x = (L_f)^{-1} L_x,$$

d'où

$$L_f^{(0)} = I; \qquad (f, x) = x L_f^{(0)} = x.$$

A_0 a donc f pour élément unité à gauche. Mais $R(A) = R(A_0)$, et le théorème précédent démontre le résultat cherché.

— Soit A une algèbre associative d'ordre $n > 1$ sur un corps infini F, et supposons que A ait un élément unité e; alors $R(A)$ est une algèbre.

Nous allons prouver qu'il existe, dans ces conditions, une isotope non associative A_0 de A telle que $R(A_0) = R(A)$, ce qui répond au problème soulevé.

En effet, d'après un résultat d'Albert (*Structure of Algebras*), il existe une transformation linéaire U n'appartenant pas à $L(A)$ et un élément $a \in A$ tels que :

$$UR_a - R_a U \neq 0.$$

Toute transformation linéaire pouvant s'écrire

$$U = \sum_1^{n^2} \xi_i S_i$$

(S_i) étant une base de $(F)_n$, il existe alors $(\eta_i) \in F$ tels que $Q = \sum \eta_i S_i$ soit non singulière et $QR_a \neq R_a Q$.

Définissons A_0 par $R_x^{(0)} = R_{xQ}$. Alors $R(A_0) = R(A)$;

D'autre part : $L_x^{(0)} = QL_x$; $L_e^{(0)} = Q$ ne commute pas avec $R_{aQ^{-1}}^{(0)}$. Donc A_0 n'est pas associative.

Isotopie et commutativité.

Une algèbre A est dite commutative si et seulement si

$$a.x = aR_x = x.a = aL_x,$$

c'est-à-dire $R_x = L_x$ pour tout $x \in A$. Soit donc A_0 une isotope principale de l'algèbre A supposée quelconque; alors A_0 est commutative si et seulement si :

$$PR_{xQ} = QL_{xP} \quad \text{pour tout } x \in A.$$

Soit $y = x\mathrm{P}$ et $x\mathrm{Q} = y\mathrm{P}^{-1}\mathrm{Q} = y\mathrm{S}$, avec $\mathrm{S} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Q}$. La commutativité de A_0 s'écrit alors :

$$\mathrm{R}_{y\mathrm{S}} = \mathrm{SL}_y \quad \text{pour tout } y \in \mathrm{A}.$$

Nous avons le résultat suivant :

Soit A une algèbre avec élément unité à gauche, ayant de plus un élément f non singulier à droite, tel que :

$$x.(y.f) = y.(x.f) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathrm{A}.$$

Considérons les isotopes principales de A définies par

$$\mathrm{R}_x^{(0)} = \mathrm{PR}_{x\mathrm{PR}_f},$$

P étant une transformation linéaire non singulière.

Les hypothèses faites entraînent la commutativité de ces isotopes principales, et toute isotope commutative de A leur est équivalente. En effet, posons $\mathrm{Q} = \mathrm{PR}_f$, $\mathrm{S} = \mathrm{R}_f = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Q}$. La relation

$$x.(y.f) = y.(x.f) \qquad \text{entraîne} \quad x(y\mathrm{S}) = x\mathrm{R}_f\mathrm{L}_y,$$

qui est équivalente à $\mathrm{R}_{y\mathrm{S}} = \mathrm{SL}_y$ puisque l'existence de e entraîne $\mathrm{S} = \mathrm{R}_f$, A_0 est commutative.

Isotopie et algèbres à division.

Une algèbre A est dite algèbre à division s'il n'y a pas dans A de diviseurs de o. Alors tout élément non nul de A est à la fois non singulier à droite et à gauche. D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que :

Toute algèbre à division est l'isotope d'une algèbre à division possédant un élément unité.

D'autre part :

Si A est une algèbre à division, toute R_x définie pour $x \neq 0$ est non singulière et $f\mathrm{R}_x = 0$ est équivalent à $f = 0$. La représentation $\mathrm{R} \rightarrow f\mathrm{R}$ de $\mathrm{R}(\mathrm{A})$ sur A est non singulière pour tout $f \neq 0$. Il en est de même pour

$$\mathrm{PRC} \rightarrow f\mathrm{PRC}$$

si P et C sont non singulières.

Nous avons alors le théorème suivant :

Soit f un élément non nul de A, *algèbre à division, et soient* P *et* Q *des transformations linéaires non singulières telles qu'il existe* $R \in R(A)$ *vérifiant :*

$$PRQ = I.$$

Alors l'algèbre A_0 *définie par* $(a, fS) = aS$ *pour tout* S *de* $P\,R(A)\,Q$ *est isotope de* A *et possède f comme élément unité.* Les algèbres à division non associatives ne vérifient pas la plupart des propriétés des algèbres associatives à division.

Ainsi le polynome minimal à droite d'un élément peut être réductible dans une algèbre à division non associative.

Nous avons cependant les résultats suivants :

— Soit $\Phi(\lambda)$ le polynome minimal à droite de $b \in A$, A étant une algèbre à division avec élément unité e. Si $\Phi(\lambda)$ est réductible de degré $t > 1$, il ne peut avoir de facteur linéaire.

S'il n'en était pas ainsi, on aurait

$$\Phi(\lambda) = \Psi(\lambda)\,(\lambda - \alpha)$$

et

$$\Phi_R(b) = e\,\Phi(R_b) = [e\,\Psi(R_b)]\,(R_b - \alpha I) = \Psi_R(b)\,(b - \alpha e) = 0,$$

ce qui est impossible puisque $\Psi_R(b) \neq 0$ et $b - \alpha e \neq 0$.

— Soit A une algèbre à division sur F ayant un élément unité e, et soit $b \in A$, n'appartenant pas à F. Il existe alors une isotope A_0 de A telle que : A_0 ait un élément unité, $R(A_0) = R(A)$, et le polynome minimal à droite de b soit irréductible.

En effet, soit $\Phi(\lambda) = \Pi(\lambda)\,\Psi(\lambda)$ avec $\Psi(\lambda)$ irréductible de degré $t > 1$. Alors

$$\Phi_R(b) = e\,\Phi(R_b) = e\,\Pi(R_b)\,\Psi(R_b) = f\,\Psi(R_b) = 0,$$

où $f = e\,\Pi(R_b) = \Pi_R(b) \neq 0$.

Considérons l'isotope A_0 de A définie dans le théorème page 26 avec $P = Q = I$, $R(A_0) = R(A)$, f étant l'élément unité de A_0. Alors

$$f\,\Psi(R_b) = \Psi_R(b) = 0 \quad \text{dans } A_0.$$

Dans A_0, le polynome minimal à droite de b divise alors $\Psi(\lambda)$ et est donc identique à ce polynome irréductible.

CHAPITRE IV.

DUPLICATION DES ALGÈBRES LINÉAIRES.

Définition de la duplication.

Soit une algèbre A d'ordre n sur un corps F, dont la base est

$$e_1, \ldots, e_n,$$

avec la table :

$$e_i e_j = \sum \gamma_{ij}^k e_k.$$

Définissons A′ de la façon suivante : A′ est une algèbre dont les éléments de base sont notés g_{ij} ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$), avec pour loi de multiplication :

$$g_{ij} g_{rs} = \sum_{k,l} \gamma_{ijk} \gamma_{rsl} g_{kl},$$

A′ est donc définie sur le même corps f et engendrée par les (f_{ij}). A′ est dite déduite par duplication de A.

Si A est commutative on ne distingue pas g_{ij} et g_{ji}; A′ est alors d'ordre $\frac{n(n+1)}{2}$, et est commutative.

Si A n'est pas commutative, A′ ne l'est pas non plus et a pour ordre n^2.

Il est possible cependant d'obtenir à partir d'une algèbre A commutative une algèbre A′ non commutative, ou « partiellement commutative », et cela par des distinctions formelles : on distingue formellement g_{ij} et g_{ji}, quels que soient i et j, ou, par exemple, on pose $g_{12} = g_{21}$ et $g_{ij} \neq g_{ji}$ pour tout autre couple (i, j). On obtient alors des algèbres A′ de tous ordres compris entre n^2 et $\frac{1}{2} n(n+1)$.

Propriétés de la duplication.

Définissons maintenant deux correspondances entre A′ et A.

Soit donc

$$x' \in A' : \quad x' = \sum_{i,j} \xi_{ij} g_{ij}.$$

Dans une première correspondance, nous associons à x' l'élément x de A qui s'écrit

$$x = \sum_{i,j} \xi_{ij} e_i e_j.$$

Il est facile de voir que cette correspondance est un isomorphisme.

Dans une seconde correspondance, nous associons à x' l'élément x ainsi défini :

$$g_{ij} \in A' \to H(g_{ij}) = e_i e_j = \sum_k \gamma_{ijk} e_k \in A,$$

$$x' \to H(x') = \sum_{i,j} \xi_{ij} \left(\sum_k \gamma_{ijk} e_k \right),$$

$$x = H(x') = \sum_k \left(\sum_{i,j} \xi_{ij} \gamma_{ijk} \right) e_k.$$

Cette correspondance est un homomorphisme, mais, n'étant pas bijective, n'est pas un isomorphisme.

En fait H est un homomorphisme de A' sur A^2 puisque les $e_i e_j$ engendrent A^2. Nous appellerons Ω' le noyau de H. Nous en déduisons deux théorèmes.

PREMIER THÉORÈME. — *Pour former un produit, une puissance, ou une suite de produits dans* A', *on peut effectuer ces opérations sur les homomorphes dans* A, *en repassant à la fin à l'isomorphe du résultat dans* A'.

Exemple :

$$x' = \sum_{i,j} \xi_{ij} e_{ij}, \qquad y' = \sum_{r,s} \eta_{rs} e_{rs},$$

$$x'y' = \sum \xi_{ij} \gamma_{ijk} e_k \sum \eta_{rs} \gamma_{rsl} e_l,$$

$$x'y' = \sum \xi_{ij} \eta_{rs} \gamma_{ijk} \gamma_{rsl} g_{kl}.$$

DEUXIÈME THÉORÈME. — *Pourvu que n soit* > 1 *le noyau* Ω' *est* $\neq \{0\}$. *D'autre part,* Ω' *est une sous-algèbre invariante de* A', *et* $A' - \Omega'$ *est isomorphe à* A^2. *Enfin,* $\Omega' A' = 0$.

En effet, pour $n > 1$ les éléments $\sum \gamma_{ijk} a_k$ sont en nombre plus grand que n, donc ne sont pas linéairement indépendants. D'après les propriétés générales des homomorphismes Ω' est invariante et $A' - \Omega'$ est isomorphe à A^2.

Soit $\omega' \in \Omega'$

$$\omega' = \sum_{i,j} \xi_{ij} g_{ij},$$

$$H(\omega') = \sum_k \left(\sum_{i,j} \xi_{ij} \gamma_{ijk} \right) e_k.$$

Comme $H(\omega') = o$, on a

$$\sum_{i,j} \xi_{ij} \gamma_{ijk} = o, \quad \forall\, k.$$

Soit g_{rs} un élément de la base de A' :

$$\omega' g_{rs} = \sum_{i,j} \xi_{ij} g_{ij}\, g_{rs} = \sum_{i,j} \xi_{ij} \left(\sum_{k,t} \gamma_{ijk} \gamma_{rst} g_{kt} \right)$$

$$\omega' g_{rs} = \sum_{k,t} \left(\sum_{i,j} \xi_{ij} \gamma_{ijk} \right) \gamma_{rst} g_{kt} = o,$$

d'où $\Omega' A' = o$.

TROISIÈME THÉORÈME. — *Si tout élément x de A $x = \sum_i \xi_i e_i$ satisfait à une identité de la forme $f(x, \xi_i) = o$, tout élément $x' = \sum_{i,j} \xi_{ij} g_{ij}$ de A' satisfait à*

$$x' f\left(x', \sum \xi_{ij} \gamma_{ijk}\right) = o; \qquad f\left(x', \sum \xi_{ij} \gamma_{ijk}\right) x' = o.$$

Si la multiplication est associative ou commutative dans A et non dans A′, cette dernière fonction f est susceptible de plusieurs interprétations.

Supposons donc que $x \in A$ vérifie :

$$f(x, \xi_i) = o,$$

où f est un polynome en x dont les coefficients sont des fonctions des coordonnées de x. Formons $f\left(x', \sum \xi_{ij} \gamma_{ijk}\right)$ de la même façon que $f(x, \xi_i)$ à partir de x' et des coordonnées de son homomorphe. L'homomorphe de l'élément $f\left(x', \sum \xi_{ij} \gamma_{ijk}\right) \in A'$ est alors o. Donc,

$$x' f\left(x', \sum \xi_{ij} \gamma_{ijk}\right) = o,$$

$$f\left(x', \sum \xi_{ij} \gamma_{ijk}\right) \cdot x' = o.$$

Exemples de polynomes :

a. quand le produit est associatif

$$\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \ldots ;$$

b. quand le produit est commutatif et non associatif :

$$\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^{2.2} + \ldots.$$

c. quand le produit n'est ni associatif ni commutatif :

$$\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^{2+1} + \delta x^{1+2} + \varepsilon x^{(2+1)+1} + \ldots.$$

Conservation des propriétés par duplication.

Premier théorème. — *En excluant les « algèbres partiellement commutatives », effectuons sur* A *une transformation linéaire donnant une algèbre* A_1 ; *alors* A'_1 (*déduite par duplication de* A_1) *est une transformée linéaire de* A'.

En particulier si A *et* A_1 *sont isomorphes,* A'_1 *et* A' *sont isomorphes.*

Deuxième théorème. — *Formons le produit direct* B *de deux algèbres* A *et* A_1; *l'algèbre* B' *déduite par duplication est le produit direct de* A' *et de* A'_1.

Nous verrons dans la partie « Algèbres génétiques », d'autres propriétés conservées par la duplication, et l'utilisation de cette notion.

CHAPITRE V.

Éléments idempotents et nilpotents. Ensembles nilpotents. Radical.

Nous allons d'abord rappeler sur ce sujet les définitions et propriétés générales des algèbres associatives, et voir ensuite ce qu'on a pu définir et étudier dans les algèbres non associatives quelconques.

Cas des algèbres associatives.

Donnons d'abord la définition d'une zéro-algèbre : une algèbre A sur F est dite zéro-algèbre si $ab = 0$ pour tout a, $b \in A$. On sait qu'une algèbre d'ordre 1 sur F est soit équivalente à F, soit zéro-algèbre sur F.

1° Éléments idempotents.

a. Un élément e de A est dit *idempotent* si $e \neq 0$ et si $e^2 = e$.

Deux éléments idempotents sont dits *orthogonaux* lorsque $eu = ue = 0$

Nous avons alors les propriétés suivantes :

— Soit e et u deux idempotents distincts tels que $eu = ue = u$. Alors nous avons : $e = u + v$, où v est un idempotent orthogonal à u, et l'on a $ev = ve = v$.

— Soit A une algèbre à élément unité e. Si A s'écrit sous la forme

$$A = B_1 + \ldots + B_l,$$

où B_i est un idéal à gauche, nous avons

$$e = e_1 + \ldots + e_l, \qquad e_i \in B_i,$$

avec $B_i = A\, e_i$ et les e_i sont des idempotents deux à deux orthogonaux. Réciproquement si e peut s'écrire sous la forme ci-dessus d'une somme d'idempotents deux à deux orthogonaux, A est alors la somme directe des idéaux à gauche $B_i = A\, e_i$

— Décomposition de Peirce relative à un idempotent e :

Si e est un idempotent de A_1 nous pouvons écrire A sous la forme d'une somme directe :

$$A = e\,A\,e + e\,L_e + R_e\,e + S_e,$$

où

$$\begin{aligned} L_e &= \{ x ;\ xe = 0 \}, && \text{idéal à gauche;} \\ R_e &= \{ x ;\ ex = 0 \}, && \text{idéal à droite;} \\ S_e &= L_e \cap R_e, && \text{idéal bilatère.} \end{aligned}$$

b. Idempotents principaux. — Un idempotent $e \in A$ est dit principal s'il n'existe pas dans A d'idempotent orthogonal à e.

c. Idempotents primitifs. — Un idempotent $e \in A$ est dit primitif si et seulement si A ne contient pas d'idempotent $u \neq e$ tel que $eu = ue = u$, c'est-à-dire que e est le seul idempotent de eAe.

2: Éléments nilpotents, Algèbres nilpotentes.

a. Définitions. — Soit $x \in A$. *L'élément x est dit nilpotent* s'il existe un entier p tel que $x^p = 0$. L'entier minimal est appelé l'index de x. Soit une algèbre N. N *est dite nilpotente d'index p* si $N^p = 0$ avec $N^{p-1} = 0$; c'est-à-dire que pour tout $y_i \in N$: $y_1 \ldots y_p = 0$ et qu'il existe $x_1, \ldots, x_{p-1}$ tels que $x_1, \ldots, x_{p-1} \neq 0$.

Nous en déduisons que toutes les sous-algèbres d'une algèbre nilpotente sont nilpotentes. Et que cette algèbre possède un idéal propre non nul si et seulement si elle n'est pas un zéro-algèbre d'ordre 1. Tous les idéaux d'une algèbre nilpotente sont nilpotents.

Existence et définition du radical.

Tout idéal nilpotent à gauche, à droite, ou bilatère d'une algèbre A est contenu dans un idéal nilpotent maximal unique N; N est le radical de A.

b. Propriétés.

— Toute algèbre A non nilpotente possède un élément idempotent.

— Soit N le radical de A. Alors le radical de eAe est $eNe = N \cap eAe$, le radical de S_e est $N \cap S_e$.

— Un idempotent e est principal dans A si et seulement si S_e est nul ou nilpotent.

— Si u est un idempotent non principal de A, il existe un idempotent principal $e = u + v$ tel que : $eu = ue = u$ et $uv = 0$.

— Il en résulte que toute algèbre non nilpotente contient un idempotent principal.

— Si e est principal dans A, l'ensemble $eL_e + R_e e + S_e$ est contenu dans le radical de A.

— Tout idempotent non primitif e de A est la somme d'un nombre fini d'idempotents deux à deux orthogonaux, primitifs de A, tels que $ee_i = e_i e = e_i$.

— Soit u un idempotent non principal de A. Alors il existe un idempotent principal e tel que $e = e_1 + \ldots + e_t$ pour des idempotents primitifs deux à deux orthogonaux, avec $u = e_1 + \ldots + e_S$ $(S \subset t)$.

3° Algèbres semi-simples. — *Une algèbre* A *est dite semi-simple si son radical* N *est l'idéal zéro.*

Une telle algèbre n'est manifestement pas nilpotente, elle a donc un idempotent principal, et d'après ce qui précède, $A = eAe$; donc e est élément unité de A. Une algèbre semi-simple possède donc un élément unité.

D'autre part soit N un idéal propre nilpotent de A. Alors A — N est semi-simple si et seulement si N est le radical de A. *Une algèbre* A *est dite simple si le seul idéal propre de* A *est l'idéal zéro et si* A *n'est pas une zéro-algèbre d'ordre* 1. Une algèbre simple est donc semi-simple. De plus une algèbre semi-simple peut être mise sous la forme d'une somme directe de sous-algèbres si et seulement si elle n'est pas simple.

Enfin une algèbre A est semi-simple si et seulement si A est ou simple, ou exprimable sous la forme d'une somme directe de composantes simples; celles-ci sont uniques.

Cas des algèbres non associatives.

1° ÉLÉMENTS IDEMPOTENTS. — Les idempotents, idempotents principaux, idempotents primitifs se définissent comme dans le cas associatif. Cependant une grande partie des propriétés valables dans le cas associatif ne le sont pas dans le cas général. Nous verrons dans le prochain chapitre le cas particulier des algèbres de Jordan, pour lesquelles on peut démontrer de nombreuses propriétés pour les idempotents.

Nous pouvons voir par exemple, que si une algèbre associative non nilpotente possède toujours un idempotent, il n'en est pas de même pour une algèbre quelconque.

2° ÉLÉMENTS NILPOTENTS. — Dans le cas associatif, il est facile de définir la notion d'élément nilpotent d'index k.

Dans le cas général, cette notion est ambiguë.

Nous dirons qu'un élément $x \in A$ est nilpotent principal à droite d'index k lorsque $x^k = 0$, x^k étant la puissance principale à droite de degré k, k étant minimal.

De même, nous pouvons définir la notion d'élément nilpotent principal à gauche. Plus généralement, nous pourrons dire que x est nilpotent de forme S lorsque nous aurons $x^S = 0$ et $x^{S_{\delta-1}} \neq 0$, en désignant par $S_{\delta-1}$ toutes les formes de degré $\delta - 1$, S ayant pour degré δ.

3° ALGÈBRES NILPOTENTES. — Albert a défini, dans l'étude des algèbres non associatives, les notions de solvabilité, nilpotence, et nilpotence au sens fort.

a. Solvabilité. — Considérons une algèbre A, et construisons les sous-algèbres ainsi définies :

$$A^{(0)} = A; \qquad A^{(1)} = A^{\cdot 2}; \qquad \ldots, \qquad A^{(k)} = [A^{(k-1)}]^{\cdot 2}, \qquad \ldots;$$

$A^{\cdot 2}$ désignant le sous-espace engendré par les produits de deux éléments quelconques de A.

Nous dirons que A est solvable d'index k s'il existe un entier $k > 0$ tel que $A^{(k-1)} \neq 0$, $A^{(k)} = 0$.

Un idéal de A sera dit solvable si c'est l'idéal zéro ou une algèbre solvable.

b. Nilpotence. — Considérons une suite $a_1, \ldots, a_k$ de k éléments de A. Toute suite de cette forme définit un produit d'ordre k noté $a^{(k)}$ par : $a^{(i)} = a^{(i-1)} a_i$ ou $a^{(i)} = a_i a^{(i-1)}$. Nous dirons que A est nilpotente d'index k si tous les produits d'ordre k de cette forme sont nuls et s'il en existe un d'ordre $k - 1$ différent de zéro.

c. Nilpotence au sens fort. — Une algèbre A est dite fortement nilpotente si et seulement si : il existe un entier k tel que tous les produits de k éléments de A, de quelque manière qu'on les associe, sont nuls.

Il est manifeste qu'une algèbre nilpotente au sens fort est à la fois nilpotente et solvable.

D'autre part, nous allons voir qu'en fait l'introduction de la nilpotence au sens fort est inutile, et que cette notion est équivalente à la notion de nilpotence.

d. Une algèbre nilpotente est nilpotente au sens fort. — Pour le prouver, introduisons deux notations : notons A^{δ} l'ensemble des combinaisons linéaires des produits de δ éléments de A; notons $A^{[\alpha]}$ l'ensemble des combinaisons linéaires des produits d'attitude α formés d'éléments de A.

Nous avons :

$$A^{\delta} = AA^{\delta-1} + A^{2}A^{\delta-2} + \ldots + A^{-1}A$$
$$A^{[\alpha]} = AA^{[\alpha-1]} + A^{[\alpha-1]}A.$$

D'autre part :

$$A^{\delta} \subseteq A^{\delta-1} \subseteq \ldots \subseteq A^{2} \subseteq A,$$
$$A^{[\alpha]} \subseteq A^{[\alpha-1]} \subseteq \ldots \subseteq A^{[1]} \subseteq A.$$

Comme l'on a

$$AA^{\delta} \subseteq A^{\delta} \qquad A^{\delta}A \subseteq A^{\delta},$$
$$AA^{[\alpha]} \subseteq A^{[\alpha]}; \qquad A^{[\alpha]}A \subseteq A^{[\alpha]};$$

on en déduit que tous ces sous-ensembles sont des idéaux de A.

Nous dirons que A est nilpotente de degré δ si

$$A^{\delta} = 0, \qquad A^{\delta-1} \neq 0.$$

Nous dirons que A est nilpotente d'attitude α si

$$A^{[\alpha]} = 0, \qquad A^{[\alpha-1]} \neq 0.$$

Si A est nilpotente de degré δ, tout produit de n éléments, $n \geqq \delta$, est nul. Considérons un produit d'altitude $\alpha' = \delta - 1$. Son degré est tel que $\delta' \geqq \alpha + 1$, c'est-à-dire $\delta' \geqq \delta$. A est donc nilpotente d'altitude $\delta - 1$ au plus. Inversement, si A est nilpotente d'altitude α, considérons un produit de degré $\delta = 2^{\alpha}$; son altitude α' est telle que $\alpha' \geqq \mathrm{Log}_2 \delta'$, c'est-à-dire $\alpha' \geqq \alpha$. A est donc nilpotente de degré 2^{α} au plus.

Revenant aux définitions d'Albert, ce que nous venons d'établir montre que si tout produit d'index k est nul, alors tout produit de 2^k éléments, associés de n'importe quelle manière, est nul. Ce qui signifie qu'une algèbre nilpotente d'index k est nilpotente au sens fort.

4° PROPRIÉTÉS,

a. Solvabilité.

— *Soit* B *un idéal solvable de* A; *supposons que* A — B *soit solvable; alors* A *est solvable.*

En effet, si A — B est solvable, il existe un entier k tel que $(A - B)^{(k)} = 0$, c'est-à-dire $A^{(k)} \subseteq B$. D'autre part, il existe S tel que $B^{(S)} = 0$; donc $A^{(k+s)} \subseteq B^{(s)} = 0$. A est solvable.

COROLLAIRE. — *Toute sous-algèbre d'une algèbre solvable est solvable.*

— *Tout idéal solvable d'une algèbre* A *quelconque est contenu dans l'idéal solvable maximal unique* S *de* A. *Le seul idéal solvable de* A — S *est l'idéal zéro.*

En effet, la somme $\sum$ de deux idéaux B et C de A est évidemment un idéal de A. La représentation de A sur A — B représente de façon homomorphe B + C sur une sous-algèbre $\Sigma - B$ de A — B, et C est homomorphe à $\Sigma - B$. Alors $\Sigma - B$ est solvable. Il en résulte que $\sum$ est solvable. La somme de deux idéaux solvables est donc un idéal solvable. et le résultat annoncé s'en déduit.

b. Nilpotence. — Considérons l'algèbre T(A) déjà définie; soit B un sous-espace vectoriel de A; nous noterons B* l'algèbre des polynomes de multiplications à droite ou à gauche de A qui correspondent aux éléments de B. Nous avons alors le résultat suivant :

Un idéal B *de* A *est nilpotent si et seulement si* B* *est nilpotent.*

Tout produit $a^{(k+1)}$ défini par une suite $a_1, \ldots, a_{k+1}$, où $a_2, \ldots, a_{k+1} \in B$ est aussi le produit d'ordre k des éléments : $b_1 = a_1 a_2$ ou $a_2 a_1$; $b_2 = a_3, \ldots, b_k = a_{k+1}$ de B.

Alors $a^{(k+1)} = 0$ pour tout $x = a_1$ de A; mais $a^{(k+1)} = x S_1 \ldots S_k$ où $S_1 \ldots S_k$ sont des éléments de B*; donc $S_1 \ldots S_k = 0$ et B* est nilpotent d'index k au plus.

Réciproquement, si B* est nilpotent, tous les produits d'ordre $k+1$ définis pour les éléments de B sont nuls, et B est nilpotent.

Nous en déduisons la propriété :

Une algèbre nilpotente est solvable :

Les éléments de $A^{(1)}$ sont les sommes finies de produits $ax = aR_x$. Les éléments de $A^{(k+1)}$ sont les sommes finies de produits $a_k b_k$ où $a_k = a S_1 \ldots S_k$, où chaque S_i est une multiplication à droite, et $b_k \in A^{(k)}$;

$$a_k b_k = a S_1 \ldots S_k, \qquad R(b_k) = a S_1 \ldots S_{k+1}.$$

Si A est nilpotente, il existe un entier t tel que tout produit de t multiplications de A soit nul, et $aS_1 \ldots S_t = 0$; donc $A^{(t)}$ est nul et A est solvable.

Nous allons maintenant définir les notions d'algèbre semi-simple et de radical.

Dans le cas associatif, en effet, nous avions établi l'existence du racial en tant qu'idéal nilpotent maximal unique, et nous avions donné la définition d'une algèbre semi-simple à partir de la notion de radical. Il était ensuite démontré qu'une algèbre associative A est semi-simple, si et seulement si A est simple ou exprimable sous la forme d'une somme directe de composantes simples. Dans le cas général, il sera commode de définir la notion d'algèbre semi-simple par la condition ci-dessus, et de définir ensuite, à partir de cela, le radical d'une algèbre non associative.

Algèbres semi-simples. Radical.

Nous dirons donc qu'une algèbre non associative quelconque est simple si son unique idéal propre est l'idéal zéro et si A n'est pas une zéro-algèbre d'ordre 1. Une algèbre quelconque est semi-simple si elle est somme directe d'algèbres simples.

Nous allons voir qu'une algèbre homomorphe à une algèbre semi-simple possède un idéal N que nous appellerons son radical, et qui est tel que A — N soit semi-simple; N est alors contenu dans tout idéal B de A pour lequel A — B est semi-simple.

Nous verrons à quelle condition une algèbre quelconque est homomorphe à une algèbre semi-simple, et de plus, nous démontrerons que l'idéal solvable maximal de A est contenu dans son radical.

1° Lemmes fondamentaux. — Considérons l'algèbre T(A) déjà définie. Notons Σ un ensemble quelconque de transformations linéaires S sur A; $A\Sigma$ est le sous-espace vectoriel de A engendré par les images aS des éléments a de A. Soit $\mathfrak{N}$ le radical de T (A) — cette algèbre est en effet associative; l'ensemble $A\mathfrak{N}$ est un idéal propre de A, et $A\mathfrak{N} = 0$ si et seulement si $\mathfrak{N} = 0$.

Ces notations étant définies, considérons un sous-espace vectoriel B de A; supposons B d'ordre m; il existe donc un idempotent E de rang m dans l'algèbre des transformations linéaires sur A tel que :

$$B = AE,$$

B est idéal de A si et seulement si :

$$E\,T(A) = E\,T(A)E,$$

soit

$$\Sigma = T(A)E \cap T(A).$$

Alors Σ est un idéal de T(A), et nous considérons l'algèbre $T(A) - \Sigma$.

LEMME 1. — *L'algèbre* $T(A - B)$ *est équivalente à* $T(A) - \Sigma$.

En effet, soit $a \in A$, et notons $\{a\} = a + B$. Soit $T \in T(A)$; alors $\{aT\} = aT + B$ est un ensemble qui ne dépend pas de A. Considérons alors l'application :

$$a \rightarrow \{aT\} = \{a\}T_0,$$

c'est par conséquent une transformation T_0 de $A - B$ déterminée de façon unique pour tout $T \in T(A)$; de plus, elle est linéaire. Nous avons alors défini une correspondance $T \rightarrow T_0$ de $T(A)$ sur un ensemble L_0 de transformations linéaires T_0 sur $A - B$. Il est facile de voir que cette correspondance est un homomorphisme, d'après sa définition même.

On voit également que $T(A - B) \subset L_0$, et que Σ est l'idéal formé de toutes les transformations T de T(A) telles que $T_0 = 0$.

Il en résulte que $T(A) - \Sigma$ est équivalente à $T(A - B)$.

LEMME 2. — *L'algèbre* T(A) *est semi-simple si et seulement si* A *est soit semi-simple, soit zéro-algèbre, soit somme directe d'une algèbre semi-simple et d'une zéro-algèbre.*

Pour la démonstration, voir les articles d'Albert.

2° RADICAL D'UNE ALGÈBRE HOMOMORPHE A UNE ALGÈBRE SEMI-SIMPLE. — Toute algèbre A homomorphe à une algèbre semi-simple possède un idéal N tel que $A - N$ soit semi-simple, et tel que N soit contenu dans tout idéal B de A pour lequel $A - B$ est semi-simple.

En effet il y a deux possibilités : ou $A - A\mathfrak{N}$ est semi-simple, et $A\mathfrak{N}$ est le radical de A; ou $A - A\mathfrak{N}$ est somme directe d'une algèbre semi-simple et d'une zéro-algèbre $N_1 = N - A\mathfrak{N}$, et N est le radical de A.

Voyons la démonstration de ces résultats.

Puisque A est homomorphe à une algèbre semi-simple A_0, il existe un idéal B de A qui a pour image O dans l'homomorphisme envisagé. Alors A — B est équivalente à A_0. Si A — B est semi-simple, T(A — B) l'est aussi d'après le lemme 2, et T(A) — Σ est simple également d'après le lemme 1. Alors Σ contient $\mathfrak{N}$. De plus,

$$B = AE; \quad \Sigma = T(A)E = \Sigma E;$$
$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}E \quad \text{et} \quad A\mathfrak{N} = A\mathfrak{N}E \subset A\Sigma = A\Sigma E \quad \text{et} \quad A\mathfrak{N} \subset B.$$

$A\mathfrak{N}$ est donc contenu dans tout idéal B de A tel que A — B soit semi-simple. Donc le radical N de A contient $A\mathfrak{N}$; d'autre part, A — B est équivalente à $(A - A\mathfrak{N}) - (B - A\mathfrak{N})$ et $A - A\mathfrak{N}$ n'est pas une zéro-algèbre.

Si $A - A\mathfrak{N}$ est semi-simple, alors $A\mathfrak{N} = N$. Si $A - A\mathfrak{N}$ n'est pas semi-simple, posons $A_1 = A - A\mathfrak{N}$; alors $A_1 = C + N_1$, où C est semi-simple et N_1 est une zéro-algèbre; de plus $B - A\mathfrak{N} = B$, est un idéal de A, tel que $A_1 - B_1$ est semi-simple.

D'après les hypothèses faites, $B_1 \supset N_1$, et B contient N défini par $N_1 = N - A\mathfrak{N}$. N est le radical de A.

3° Cas ou $A - A\mathfrak{N}$ est une zéro-algèbre.

a. Théorème. — *Pour que* A *soit homomorphe à une algèbre semi-simple, il faut et il suffit que* $A - A\mathfrak{N}$ *ne soit pas une zéro-algèbre.*

En effet, d'après le paragraphe précédent, pour que A — B soit équivalente à $(A - A\mathfrak{N}) - (B - A\mathfrak{N})$, il faut et il suffit que $A - A\mathfrak{N}$ ne soit pas une zéro-algèbre.

b. Cas où $A - A\mathfrak{N}$ *est une zéro-algèbre.*

Si $A - A\mathfrak{N}$ *est une zéro-algèbre, et si* B *est un idéal de* A, *l'algèbre* A—B *est zéro-algèbre si et seulement si* B *contient* $A\mathfrak{N}$.

Si $A - A\mathfrak{N}$ est une zéro-algèbre, la condition « A — B est zéro-algèbre » est équivalente à $T(A - B) = T(A) - \Sigma$ pour un idéal Σ de T(A). Alors, d'après le lemme 2, T(A) — Σ est semi-simple, Σ contient $\mathfrak{N}$, $A\Sigma$ contient $A\mathfrak{N}$, et est contenu dans B.

Radical et idéal solvable maximal.

a. L'idéal solvable maximal d'une algèbre semi-simple est l'idéal zéro.

Considérons le carré de A, déjà noté $A^{\cdot\cdot}$; c'est un idéal de A; si A est simple, ce n'est pas une zéro-algèbre, et par suite $A^{\cdot\cdot} = A$.

Si A est semi-simple, nous avons $A = A_1 + .. + A_l$, où les A_i sont simples; $A^{\cdot\cdot} \supseteq A_i^{\cdot\cdot} = A_i$, donc $A^{\cdot\cdot} \supseteq A$ et $A^{\cdot\cdot} = A$. Si donc A est semi-simple, tout idéal B de A est semi-simple, et $B^2 = B$. B ne peut alors être solvable, et l'idéal solvable maximal de A est zéro.

b. L'idéal solvable maximal de toute algèbre A *est contenu dans son radical.*

Si S est un idéal solvable de A et N le radical de A, l'application de A sur A — N représente S de façon homomorphe sur un sous-espace S_0 de A — N. Alors S_0 est solvable dans A — N, qui est semi-simple, donc $S_0 = 0$ et S est contenu dans N. En général le radical de A et son idéal solvable maximal ne sont pas confondus et l'inclusion est stricte.

Nous avons cependant le résultat suivant :

c. Soient A *une algèbre homomorphe à une algèbre semi-simple,* $\mathfrak{N}$ *le radical de* T(A), *et supposons que* T(A) — $\mathfrak{N}$ *soit simple. Alors* N, *radical de* A, *est un idéal nilpotent de* A; N *est l'ensemble de tous les éléments* y *de* A *tels que* R_y *et* L_y *soient dans* $\mathfrak{N}$, A — N *est simple.*

Pour cette démonstration, *voir* Albert.

Nous voyons donc que les notions de solvabilité et de nilpotence ne sont pas équivalents dans le cas général. Nous allons traiter dans le prochain chapitre le cas particulier des algèbres de Jordan, qui ne sont pas associatives, mais pour lesquelles cependant la solvabilité entraîne la nilpotence, et l'idéal solvable maximal est identique au radical.

CHAPITRE VI.

ALGÈBRES DE JORDAN.

Définitions et identités fondamentales.

1° DÉFINITION. — Une algèbre A sur un corps F est dite « algèbre de Jordan » lorsque A est commutative, et si pour tout couple (a, u) d'éléments de A :

$$a^2(ua) = (a^2u)a.$$

2° IDENTITÉS FONDAMENTALES. — La définition entraîne immédiatement les relations

$$R_x = L_x; \qquad R_{x^2}R_x = R_xR_{x^2}.$$

Il est facile d'en déduire également :

$$2(R_{xy}R_x - R_x R_{xy}) + R_{x^2}R_y - R_y R_{x^2} = 0,$$
$$R_{xy}R_z + R_{xz}R_y + R_{yz}R_x = R_x R_{yz} + R_y R_{xz} + R_z R_{xy},$$
$$R_{(xy)z} = R_x R_{yz} + R_y R_{xz} + R_z R_{xy} - (R_x R_z R_y + R_y R_z R_x),$$
$$R_{(xy)z} = R_{yz} R_x + R_{xz} R_y + R_{xy} R_z - (R_x R_z R_y + R_y R_z R_x)$$

et enfin

$$R_{(xy)z} - R_{x(yz)} = (R_z R_x - R_x R_z) R_y - R_y (R_z R_x - R_x R_z).$$

3° CONSÉQUENCES.

a. Une algèbre de Jordan est à puissances associatives.

Nous allons prouver que toute algèbre $[x]$ est associative.

Les transformations R_x et R_{xx} engendrent une algèbre commutative et associative. Notons $x^{t+1} = x^t x$ les puissances principales à droite. L'avant-dernière identité du 2° nous donne

$$R(x^{t+1}) = 2R(x^t)R(x) + R(x^2)R(x^{t-1}) - [R(x^{t-1})R(x^2) + R(x)^2 R(x^{t-1})]$$

pour tout $t \geqq 2$

Pour $t = 2$:

$$R(x^3) = 3R(x^2)R(x) - 2R(x^3).$$

Il en résulte que R_{x^3} appartient à l'algèbre engendrée par R_x et R_{xx}, donc, de proche en proche, tout R_{x^t} lui appartient. Donc

$$R(x^s)R(x^t) = R(x^t)R(x^s)$$

pour tout couple d'entiers positifs s et t.

Pour $t > 1$: $x^s x^t = x^s x^{t-1} x$, d'où

$$x^s x^t = x R(x^{t-1}) R(x^s) = x R(x^s) R(x^{t-1}) = x^{s+1} x^{t-1}.$$

D'où $x^{s+t-1} x = x^{s+t}$ pour s, t entiers positifs. Ce qui signifie que tout « produit non associatif de degré m » est égal à x^m.

L'algèbre $[x]$ est donc associative.

En particulier, l'expression « x est nilpotent » ne prête plus à confusion.

b. Idempotents d'une algèbre de Jordan. — Une algèbre associative non nilpotente possédant toujours un idempotent, nous en déduisons le résultat suivant : *Si une algèbre de Jordan possède un élément non nilpotent, elle possède un idempotent.*

L'identité

$$R(x^3) = 3R(x^2)R(x) - 2R(x^3),$$

où l'on fait $x = e$ idempotent entraîne

$$2R_e^3 - 3R_e^2 + R_e = 0.$$

Les racines de l'équation caractéristique de R_e sont donc 0, $\frac{1}{2}$, 1,

Algèbres de Jordan solvables nilpotentes. Radical.

1° UNE ALGÈBRE DE JORDAN SOLVABLE EST NILPOTENTE.

Nous avons donné dans le chapitre précédent les définitions des différentes notions introduites par Albert : solvabilité, nilpotence, nilpotence au sens fort, et nous avons vu les relations qui existent dans le cas général entre ces notions. Il se trouve qu'ici, dans le cas d'une algèbre de Jordan, toutes ces notions se réduisent à une seule.

Albert démontre en effet le théorème suivant :

Soit B *une sous-algèbre solvable d'une algèbre de Jordan sur un corps* F *de caractéristique différente de* 2. *Alors* B^* *est nilpotente.*

Il est en effet facile de voir par récurrence que l'algèbre B^* est nilpotente, et par conséquent B est nilpotente. Il en résulte que *toute algèbre de Jordan solvable est nilpotente.*

D'autre part, nous savons que toute algèbre associative formée d'éléments nilpotents est nilpotente.

Il est possible de démontrer un résultat analogue pour les algèbres de Jordan.

2° UNE ALGÈBRE DE JORDAN CONSTITUÉE D'ÉLÉMENTS NILPOTENTS EST NILPOTENTE.

Pour démontrer cela, nous utilisons une suite de lemmes.

Soit B *une sous-algèbre de* A, *algèbre de Jordan. Soit* $B = AE$, *où* E *est un élément idempotent dont le rang est l'ordre de* B. *Considérons l'ensemble des transformations linéaires sur* A *telles que* $EL = ELE$. *Soit* $\mathcal{L}_B$ *cet ensemble : c'est une algèbre associative.*

Nous avons alors les résultats suivants :

— Soit $a \in A$; pour que aB^* soit contenu dans B (aB^* désignant l'ensemble des transformés de a par les éléments de B^*) il faut et il suffit que R_a appartienne à L_E.

— Soit $R_a \in L_B$. Alors $R_{a^k} R_b$, $R_b R_{a^k}$, et $R_{a^k b}$ appartiennent à L_B quels que soient $b \in B$ et k entier positif.

Ce résultat se démontre par récurrence sur k, et en utilisant les identités valables dans une algèbre de Jordan.

— Soit $R_a \in L_B$, $b \in B$, $c = a' b$. Alors R_c et $R_{cc} \in L_B$.

— Enfin, soit R_c et $R_{cc} \in L_B$. Alors $R_{c^k} \in L_B$ pour tout entier positif k.

Nous en déduisons le résultat cherché :

Soit une algèbre de Jordan A *sur un corps* F *de caractéristique différente de* 2. *Alors si tous les éléments de* A *sont nilpotents,* A *est nilpotente.*

En effet, nous allons démontrer que A est solvable, donc nilpotente.

Le résultat est évident pour les algèbres d'ordre 1 ; supposons donc que le théorème est vrai pour les algèbres d'ordre $< n$.

Si l'algèbre A considérée est engendrée par un seul élément, la nilpotence de cet élément entraîne la solvabilité de A. Dans le cas contraire, il existe dans A une sous-algèbre propre maximale B. Les éléments de B sont nilpotents, et puisque B est d'ordre inférieur à n, ordre de A, l'hypothèse de récurrence entraîne la solvabilité de B.

Si $AB \subseteq B$, B est un idéal de A, B est solvable, $A - B$ également, et A est solvable. Si AB n'est pas contenu dans B, considérons l'algèbre B^* ; B étant solvable, B^* est nilpotente, et il existe un entier k tel que $B^{*k} = 0$. Alors $AB^{*k} = 0$, $AB^{*k} \subseteq B$, AB^* n'est pas contenu dans B, et il existe un entier l tel que $0 < l < k$,, et AB^{*l} ne soit pas contenu dans B et $AB^{*(l+1)}$ le soit. Il existe alors un élément x de AB^{*l} n'appartenant pas à B tel que $xB^* \subseteq B$. Si $x'B$ n'est pas contenu dans B, il existe un élément $b \in B$ tel que $y = x' b$ n'appartient pas à B. Les lemmes précédents nous disent alors que $yB^* \subseteq B$, $y'B^* \subseteq B$. Il existe donc un élément z' n'appartenant pas à B, tel que $zB \subseteq B$; $z'B \subseteq B$. Alors $z^k B^* \subseteq B$ quel que soit k entier positif.

L'algèbre engendrée par z et B a B pour idéal, elle est contenue dans A et contient strictement B, donc pour hypothèse, c'est A elle-même. B est donc un idéal de A, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3° Trace d'un élément. — Pour utiliser la notion de trace dans l'étude de la solvabilité, il faut supposer que la caractéristique du corps de base est telle que la transformation identique n'ait pas pour trace zéro. Nous supposerons donc que F n'est pas modulaire, ce qui nous permettra de ne pas nous préoccuper de la caractéristique. Soit donc x

un élément de A; nous noterons $\tau(x) = \tau(R_x)$ la trace de x, c'est-à-dire la trace de la matrice de R_x.

Nous avons alors le résultat suivant :

Soit N_0 *l'ensemble des éléments* x *d'une algèbre de Jordan tels que* $\tau(xa) = 0$ *pour tout* $a \in A$. *Alors* N_0 *est l'idéal solvable maximal de* A.

Tout d'abord, cet ensemble n'est pas vide. De plus, $\tau(R_x)$ est une fonction linéaire et si x, $y \in N_0$, $z = \lambda x + \mu y \in N_0$ avec λ, $\mu \in F$.

D'autre part, si $x \in N_0$, $b \in A$, alors $xb \in N_0$. En effet, $\tau(x.ab) = 0$.

De plus, en nous reportant aux identités fondamentales, nous voyons que :

$$R_{(xa)b} - R_{x(ab)} = ST - TS,$$

et donc que

$$\tau(R_{xa.b}) = \tau(R_{x.ab}),$$

N_0 est donc un idéal de A.

Si N_0 n'était pas solvable, il existerait un élément idempotent e tel que $e \in N_0$ et $\tau(ee) = \tau(e) = 0$, ce qui est impossible d'après l'étude des idempotents d'une algèbre de Jordan.

Enfin si N est un idéal solvable de A, N est contenu dans N_0; en effet, soit $x \in N$ et $a \in A$; alors $xa \in N$, R_{xa} est nilpotent et $\tau(xa) = 0$; donc $x \in N_0$.

4° Radical d'une algèbre de Jordan. — Nous avons défini au chapitre précédent le radical d'une algèbre non associative comme l'idéal minimal N, tel que A — N, soit somme directe d'algèbres simples. Il nous sera ici utile pour ce qui va suivre de définir différemment le radical d'une algèbre de Jordan, et nous identifierons par la suite les deux définitions dans ce cas particulier.

Nous appellerons *radical de* A *l'idéal solvable maximal* N *de* A, et nous dirons que A est semi-simple quand N = 0. Nous avons alors le résultat suivant : *si* N *est le radical de* A, A — N *est semi-simple.*

En effet, si N_0 est le radical de $A_0 = A - N$, il existe un idéal M correspondant dans A tel que $M \supseteq N$, et $M - N = N_0$. Puisque N_0 est solvable, et N également, il en est de même de M; donc M = N, et $N_0 = 0$.

Nous allons voir maintenant une étude plus détaillée des idempotents et des sous-algèbres qu'on définit à partir d'eux. Les algèbres de Jordan, en effet, ont de nombreuses propriétés relatives aux idempotents, que ne possèdent pas les algèbres non associatives quelconques.

Idempotentes d'une algèbre de Jordan. Étude des décompositions possibles.

1° Décomposition relative a un idempotent. — Nous avons écrit plus haut la décomposition de A sous la forme :

$$A = A_e(1) + A_e\left(\frac{1}{2}\right) + A_e(0),$$

ce qui signifie que pour tout $a \in A$:

$$a = a_e(1) + a_e\left(\frac{1}{2}\right) + a_e(0),$$

avec, en utilisant les identités valables dans une algèbre de Jordan :

$$\begin{aligned} a_e\left(\frac{1}{2}\right) &= 4ea - 4e(ea) &&= 4a(R_e - R_e^2), \\ a_e(1) &= ea - \frac{1}{2}a_e\left(\frac{1}{2}\right) &&= a(2R_e^2 - R_e), \\ a_e(0) &= a - a_e\left(\frac{1}{2}\right) - a_e(1) &&= a(I - 3R_e + 2R_e^2). \end{aligned}$$

a. Étude des sous-espaces $A_e(1)$, $A_e\left(\frac{1}{2}\right)$, $A_e(0)$. — Nous allons démontrer les résultats suivants : $A_e(1)$ et $A_e(0)$ sont des sous-algèbres orthogonales de A :

$$A_e\left(\frac{1}{2}\right)^2 \subseteq A_e(1) + A_e(0),$$

$$A_e(1)\, A_e\left(\frac{1}{2}\right) \subseteq A_e\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$A_e(0)\, A_e\left(\frac{1}{2}\right) \subseteq A_e\left(\frac{1}{2}\right).$$

En effet :

Démontrons que $A_e\left(\frac{1}{2}\right)^2 \subseteq A_e(1) + A_e(0)$.

Si a, $b \in A_e\left(\frac{1}{2}\right)$, alors $ea = \frac{1}{2}a$; $eb = \frac{1}{2}b$, et en utilisant :

$$R_{(ab)e} = R_{a(be)} + (R_e R_a - R_a R_e) R_b - R_b (R_e R_a - R_a R_e),$$

nous avons

$$(ab) R_e^2 = \frac{1}{2} e(ab) + \frac{1}{2} ab - \frac{1}{4} ab + \frac{1}{2} e(ab),$$

d'où

$$(ab) R_e^2 = (ab) R_e,$$

c'est-à-dire que $ab\,(\mathrm{R}_e^2 - \mathrm{R}_e) = 0$, ce qui entraîne l'inclusion cherchée :

Démontrons maintenant que $\mathrm{A}_e(0)$ *et* $\mathrm{A}_e(1)$ *sont des sous-algèbres.*

Soit $a,\ b \in \mathrm{A}_e(0)$; alors $(ab)\,\mathrm{R}_e^2 = 0$; soit

$$c = ab: \quad c_e(1) = -c\,\mathrm{R}_e; \qquad c_e\left(\frac{1}{2}\right) = -4c_e(1);$$

comme l'intersection de $\mathrm{A}_e(1)$ et de $\mathrm{A}_e\left(\frac{1}{2}\right)$ est zéro, nous avons

$$c_e(1) = c_e\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad c = ab \in \mathrm{A}_e(0).$$

Soit $a,\ b \in \mathrm{A}_e(1)$; alors :

$$\begin{aligned}
(ab)\,\mathrm{R}_e^2 &= (ab)\,e + ab - ab - ba + (ab)\,e,\\
(ab)\,\mathrm{R}_e^2 &= (ab)\,e - ab,\\
2\,(ab)\,\mathrm{R}_e^3 &= 4\,(ab)\,\mathrm{R}_e^2 - 2\,(ab)\,\mathrm{R}_e\\
&= (ab)\,(3\,\mathrm{R}_e^2 - \mathrm{R}_e),
\end{aligned}$$

d'où $(ab)\,\mathrm{R}_e^2 = (ab)\,\mathrm{R}_e$, et enfin :

$$ab = (ab)\,\mathrm{R}_e \qquad \text{et} \qquad ab \in \mathrm{A}_e(1).$$

$\mathrm{A}_e(0)$ *et* $\mathrm{A}_e(1)$ *sont des sous-algèbres orthogonales.*

Soient donc $a \in \mathrm{A}_e(1)$ et $b \in \mathrm{A}_e(0)$. Nous avons

$$\mathrm{R}_a\,\mathrm{R}_{ee} + \mathrm{R}_{ae}\,\mathrm{R}_e = \mathrm{R}_{ee}\,\mathrm{R}_a + \mathrm{R}_e\,\mathrm{R}_{ae} + \mathrm{R}_e\,\mathrm{R}_{ae}.$$

D'où $\mathrm{R}_a\,\mathrm{R}_e = \mathrm{R}_e\,\mathrm{R}_a$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_{(ae)e} &= \mathrm{R}_{ae}\,\mathrm{R}_e + \mathrm{R}_{ae}\,\mathrm{R}_e + \mathrm{R}_{ee}\,\mathrm{R}_a - \mathrm{R}_a\,\mathrm{R}_e\,\mathrm{R}_e - \mathrm{R}_e\,\mathrm{R}_e\,\mathrm{R}_a\\
&= 3\,\mathrm{R}_a\,\mathrm{R}_e - \mathrm{R}_a\,\mathrm{R}_e^2 - \mathrm{R}_e^2\,\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_e\,(3\,\mathrm{R}_a - 2\,\mathrm{R}_a\,\mathrm{R}_e).
\end{aligned}$$

Mais $be = b\,\mathrm{R}_e = 0$.

D'où

$$ba = b\,\mathrm{R}_e\,(3\,\mathrm{R}_a - 2\,\mathrm{R}_a\,\mathrm{R}_e) = 0.$$

Enfin

$$\mathrm{A}_e(1)\,\mathrm{A}_e\left(\frac{1}{2}\right) \subseteq \mathrm{A}_e\left(\frac{1}{2}\right); \qquad \mathrm{A}_e(0)\,\mathrm{A}_e\left(\frac{1}{2}\right) \subseteq \mathrm{A}_e\left(\frac{1}{2}\right).$$

Soient

$$a \in \mathrm{A}_e(1) \qquad b \in \mathrm{A}_e\left(\frac{1}{2}\right);$$

Alors

$$ea = a; \qquad eb = \frac{1}{2}\,b$$

et

$$(ab)\,R_e^2 = \frac{1}{2}(ab)\,R_e + ab - ab - \frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}(ab)e$$
$$= (ab)\,R_e - \frac{1}{4}ab,$$
$$(ab) \quad = 4(ab)\,(R_e - R_e^2), \qquad \text{donc} \quad ab \in A_e\left(\frac{1}{2}\right).$$

Soit

$$a \in A_e(0)\,; \qquad b \in A_e\left(\frac{1}{2}\right); \qquad ea = 0\,; \qquad eb = \frac{1}{2}b\,;$$

alors

$$(ab)\,R_e^2 = \frac{1}{2}(ab)\,R_e - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}(ab)\,R_e$$

et

$$ab = 4ab\,(R_e - R_e^2)\,; \qquad ab \in A_e\left(\frac{1}{2}\right).$$

b. Étude du radical de ces sous-espaces. — Nous avons d'abord le résultat suivant : *Soit* $a \in A_e\left(\frac{1}{2}\right)$. *Alors* $\tau(a) = 0$. *De plus, Soit* $b \in A_e\left(\frac{1}{2}\right)$; *posons* $c = ab$; *alors*

$$c = c_e(1) + c_e(0)\,; \qquad \tau[c_e(1)] = \tau[c_e(0)].$$

En effet : $ae = \frac{1}{2}a$ entraîne

$$\tau(a) \quad = \tau(2ae) = \tau[4(ae)\,e] = \tau(4ae^2) = \tau(4ae)\,;$$
$$\tau(a) \quad = 2\tau(a) = 0.$$
$$\tau(ab) = 2\tau[(ae)\,b] = 2\tau[e\,(ab)] = 2\tau[c_e(1)]\,;$$
$$\tau(ab) = \tau(c) = \tau[c_e(1)] + \tau[c_e(0)].$$

D'autre part :

Soit $y \in A_e\left(\frac{1}{2}\right)$, avec

$$ya = c = c_e(1) + c_e(0) \quad \text{pour tout } a \in A_e\left(\frac{1}{2}\right),$$

alors y appartient au radical de A si et seulement si

$$\tau[c_e(0)] = 0 \qquad \text{ou} \qquad \tau[c_e(1)] = 0 \quad \text{pour tout } a \in A_e\left(\frac{1}{2}\right).$$

Ce résultat vient du précédent, et du fait que y appartient au radical de A si et seulement si $\tau\left[a_e\left(\frac{1}{2}\right)\cdot y\right] = 0$. Enfin nous établissons le théorème suivant :

Le radical $N_e(\lambda)$ *de* $A_e(\lambda)$ *est l'intersection de* N *et de* $A_e(\lambda)$ *pour* $\lambda = 0, 1$.

Soient donc $a \in A_e(1) + A_e(0)$, et $b \in A$.

$$b = b_e(1) + b_e\left(\frac{1}{a}\right) + b_e(0),$$

$$\tau(ab) = \tau[ab_e(1)] + \tau[ab_e(0)],$$

puisque

$$a \in A_e(1) + A_e(0).$$

Si $a \in A_e(1)$, $ab_e(0) = 0$ et pour que $\tau(ab) = 0$ il faut et il suffit que $\tau[ab_e(1)] = 0$; ce qui exprime que $a \in N$ si et seulement si $a \in N_e(1)$.

De même, pour le cas où $a \in A_e(0)$.

2° Idempotents principaux.

a. Propriétés. — Dire qu'un idempotent d'une algèbre de Jordan est principal, c'est dire que $A_e(0)$ ne possède pas d'idempotent.

Toute algèbre de Jordan non nilpotente contient un idempotent principal.

En effet, si e n'est pas principal, l'élément $w = e + u$ où u est orthogonal à e est un idempotent tel que $A_w(0) \subset A_e(0)$. Nécessairement, en répétant le procédé on rencontrera un idempotent principal.

Soit e *un idempotent principal dans une algèbre de Jordan définie sur un corps non modulaire. Alors* $A_e\left(\frac{1}{2}\right) + A_e(0)$ *est contenu dans* N.

En effet, $A_e(0)$ n'ayant pas d'idempotent est nilpotent et est donc contenu dans N d'après ce qui précède.

Également d'après ce qui précède, puisque tout $c_e(0) \in N$ et a donc pour trace 0, $A_e\left(\frac{1}{2}\right) \subseteq N$.

b. Algèbres semi-simples. — L'étude des idempotents principaux va nous permettre de justifier la définition précédente du radical d'une algèbre de Jordan, et d'identifier les deux définitions possibles. Nous avons en effet :

— *Soit* A *une algèbre de Jordan semi-simple sur un corps non modulaire. Alors* A *possède un idempotent principal unique qui est l'élément unité de* A.

A étant semi-simple, $N = 0$; d'après ce qui précède, $A = A_e(1)$ et $ea = ae = a$ pour tout $a \in A$; e est donc l'élément neutre de A.

— *Tout idéal* D *d'une algèbre semi-simple* A *est semi-simple, et, si* e *est l'élément unité de* D, *alors* $D = A_e(1)$ *et* $A = D + A_e(0)$.

Aucun idéal de A ne peut être solvable puisque N est l'idéal solvable maximal et que $N = 0$; donc D est semi-simple; D possède alors un idempotent principal unique e.

Nous avons

$$A = A_e(1) + A_e\left(\frac{1}{2}\right) + A_e(0).$$

Si $a \in A_e(\lambda)$, alors $ae = \lambda a \in D$.

Donc

$$D \supseteq A_e(1) + A_e\left(\frac{1}{2}\right);$$

En fait

$$D = A_e(1) + A_e\left(\frac{1}{2}\right) + D_e(0).$$

Et $A_e\left(\frac{1}{2}\right) + D_e(0)$ est contenu dans le radical de D, et $D_e(0)$ est solvable.

Nous avons $\tau(by) = 0$ pour tout y, $b \in A_e\left(\frac{1}{2}\right)$. Mais alors $A_e\left(\frac{1}{2}\right)$ est dans le radical de A, et $A_e\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

D'autre part

$$D_e(0) \subseteq A_e(0); \qquad D_e(0)\, A_e(0) \subseteq A_e(0)$$

et

$$D_e(0)\, A_e(0) \subseteq D_e(0).$$

Donc, $D_e(0)$ est un idéal solvable de $A_e(0)$, et $D_e(0) = 0$ puisque le radical de $A_e(0)$ est nul.

Donc $D = A_e(1)$, D est semi-simple et

$$A = D + A_e(0).$$

Il en résulte que :

Toute algèbre de Jordan semi-simple sur un corps non modulaire s'écrit de façon unique sous la forme d'une somme directe d'algèbres simples.

Or nous avions défini le radical d'une algèbre A : c'est l'idéal minimal N_1 tel que $A - N_1$ soit somme directe d'algèbres simples; de plus N_1 contient l'idéal solvable maximal N, et si $A - N$ est somme directe d'algèbres simples, alors $N = N_1$.

3° IDEMPOTENTS PRIMITIFS. — *Un idempotent u d'une algèbre de Jordan est dit primitif lorsque u est le seul idempotent de* $A_u(1)$.

Si u n'est pas primitif, il existe un autre idempotent $v \in A_u(1)$ et $w = u - v$ est un idempotent orthogonal à v. Nous avons ici des résultats analogues à ceux qu'on peut établir dans l'étude des algèbres associatives.

Ainsi : tout idempotent non primitif u d'une algèbre de Jordan peut s'écrire sous la forme $u = u_1 + \ldots + u_t$ ou les $u_t \in A_u(1)$ sont des idempotents primitifs orthogonaux deux à deux.

Soit un idempotent u non principal de A. Il existe alors un idempotent principal e dans A et des idempotents primitifs deux à deux orthogonaux $e_1, \ldots, e_s, \ldots, e_t$ tels que :

$$e = e_1 + \ldots + e_t, \qquad u = e_1 + \ldots + e_s.$$

4° ÉTUDE SIMULTANÉE DES DIVERS IDEMPOTENTS.

a. Idempotents orthogonaux. — Soit $u, v \in A$ algèbre de Jordan.

Nous avons

$$2 R_u R_{uv} + R_v R_{uu} = 2 R_{uv} R_u + R_{uu} + R_v.$$

Si $u^2 = u$ et $uv = 0$,

$$R_u R_v = R_v R_u \qquad \text{et} \qquad (au)v = (au)u \quad \text{pour tout } a \in A.$$

Si

$$a = a_u(1) + a_u\left(\frac{1}{2}\right) + a_u(0),$$

$$au = a_u(1) + \frac{1}{2} a_u\left(\frac{1}{2}\right).$$

Comme $v \in A_u(0)$,

$$a_u(1)v = 0 \qquad \text{et} \qquad (au)v = \frac{1}{2} v\, a_u\left(\frac{1}{2}\right).$$

D'où

$$[(au)v]u = \frac{1}{2} a_u\left(\frac{1}{2}\right) R_v R_u = \frac{1}{2} a_u\left(\frac{1}{2}\right) R_u R_v = \frac{1}{2}[(au)v]u.$$

Si d'autre part $v' = v$, $[(au)v]v = \frac{1}{2}(au)v$ par raison de symétrie.

D'où le résultat :

Soient u et v deux idempotents orthogonaux de A. *Alors* $(au)v = (av)u$ *appartient à* $A_u\left(\frac{1}{2}\right)$ *et à* $A_v\left(\frac{1}{2}\right)$ *pour tout* $a \in A$.

Soient maintenant u, v, w idempotents orthogonaux deux à deux. On en déduit :

$$[(au)v]w = 0 \quad \text{pour tout } a \in A.$$

b. Cas d'une algèbre de Jordan à élément unité. — Posons alors $e = e_1 + \ldots + e_l$, les e_i étant des idempotents orthogonaux.

Nous allons étudier les sous-algèbres $A_{e_i}\left(\frac{1}{2}\right)$; et les sous-espaces A_{ij} définis par

$$A_{ii} = A_{e_i}(1); \qquad A_{ij} = A_{e_i}\left(\frac{1}{2}\right) \cap A_{e_j}\left(\frac{1}{2}\right);$$

Pour cela, écrivons :

$$a = (2ae)\,e - ae = a(2R_e^2 - R_e),$$

$$a \doteq a\sum_{i=1}^{l}(2R_{e_i}^2 - R_{e_i}) + 4a\sum_{i<j} R_{e_i} R_{e_j}.$$

Posons

$$a_{ii} = 2(ae_i)\,e_i - ae_i,$$
$$a_{ij} = a_{ji} = 4(ae_i)\,e_j \qquad (i \neq j).$$

Cela d'après l'égalité $(au)\,v = (av)\,u$. D'après l'étude de la décomposition relative à un idempotent, lorsque a décrit A, a_{ii} décrit $A_{e_i}(1)$. D'autre part, $e_i a_{ij} = e_j a_{ij} = \frac{1}{2} a_{ij}$ et a_{ij} appartient à

$$A_{e_i}\left(\frac{1}{2}\right) \cap A_{e_j}\left(\frac{1}{2}\right) = A_{ij}.$$

Enfin $a_{ij} e_k = 0$ pour $i \neq j$ et $i = j \neq k$. Il en résulte que tout $a \in A$ s'écrit

$$a = \sum_{i \leq j} a_{ij}.$$

De plus : $\sum_{i \leq j} a_{ij} = 0$ si et seulement si tous les a_{ij} sont nuls, en effet, en multipliant par e_i, nous obtenons

$$a_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{j>1} a_{ij} = 0,$$

$$e_i\left(a_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{j>i} a_{ij}\right) = a_{ii} + \frac{1}{4}\sum_{j>i} a_{ij} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j>i} a_{ij} = 0; \qquad a_{ii} = 0; \qquad e_k \sum_{j>i} a_{ij} = \frac{1}{2} a_{ik} = 0.$$

Donc tous les a_{ij} sont nuls.

Il en résulte que A *est la somme directe des sous-espaces vectoriels* A_{ij} *pour* $i \leq j$ *et* $i, j = 1, \ldots, t$.

Nous allons démontrer un autre résultat :

Les sous-espaces vectoriels A_{ij} *vérifient les relations :*

$$A_{ii}^2 \subseteq A_{ii}; \qquad A_{ii}A_{ij} \subseteq A_{ij}; \qquad A_{ii}A_{jj} = A_{ij}A_{kq} = 0;$$
$$A_{ij}A_{jk} \subseteq A_{ik}; \qquad A_{ij}^2 \subseteq A_{ii} + A_{jj};$$

avec i, j, k, q distincts et appartenant à $\{1, \ldots, t\}$.

Démonstration. — Les sous-espaces A_{ii} sont deux à deux orthogonaux. Donc si $u = e_i + e_j$, nous avons

$$A_u(1) = A_{ii} + A_{jj} + A_{ij},$$

d'où

$$A_{ii}A_{ij} \subseteq A_{ij}; \qquad A_{ij}^2 \subseteq A_{ii} + A_{jj};$$

Si $u = e_i + e_j$ et $v = e_k + e_q$, alors

$$A_{ij} \subset A_u(1) \qquad \text{et} \qquad A_{kq} \subset A_v(1).$$

Ces algèbres sont orthogonales puisque u et v sont des idempotents orthogonaux

$$v \in A_u(0) \qquad \text{et} \qquad A_v(1) \subseteq A_u(0).$$

Posons maintenant $w = e_i + e_j + e_k$; alors

$$B = A_w(1) = A_{ii} + A_{jj} + A_{kk} + A_{jk} + A_{ij} + A_{ik}.$$

Si

$$u = e_i + e_j, \qquad B_u(1) = A_{ii} + A_{ij} + A_{jj},$$
$$B_u\left(\frac{1}{2}\right) = A_{ik} + A_{jk}; \qquad B_u(0) = A_{kk}.$$

D'après un résultat précédent,

$$B_u(1)\,B_u\left(\frac{1}{2}\right) \subseteq B_u\left(\frac{1}{2}\right),$$

donc

$$A_{ij}A_{jk} \subseteq A_{ik} + A_{jk}.$$

Par raison de symétrie :

$$A_{ij}A_{jk} \subseteq A_{ij} + A_{ik} \qquad \text{et} \qquad A_{ij}A_{jk} \subseteq A_{ik}$$

BIBLIOGRAPHIE.

ALBERT, *Structure of algebras* (*Amer. Math. Soc.*, Colloquium publications, 1939).

ALBERT, *Non associative algebras*, (*Ann. Math.*, t. 43, p. 685-707).

ALBERT, *On Jordan of linear transformations* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 59, p. 524-555).

ALBERT, *A structure theory for Jordan algebras* (*Ann. Math.*, t. 48, p. 546-567).

ALBERT, *The radical of a non associative algebra* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 48, p. 891-897).

ETHERINGTON, *Non associative combinations* (*Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, t. 59, 1939, p. 153).

ETHERINGTON, *Duplication of linear algebras*, (*Proc. Math. Soc. Edinburgh*, (2), t. 6, p. 222-230).

RAFFIN, *Thèse doctorat*, soutenue le 30 mai 1951, Faculté des Sciences de Paris.

SECONDE PARTIE.

NOTIONS DE GÉNÉTIQUE.

CHAPITRE I.

CARACTÈRES HÉRÉDITAIRES, GÈNES ET LOIS DE MENDEL.

Gènes et caractères.

Les caractères héréditaires — ou génétiques — sont déterminés par de petites particules matérielles, les gènes, qui se trouvent dans toutes les cellules du corps. En général, les gènes se transmettent sans altération de génération en génération. D'autre part, on les trouve le plus souvent par paires. Si une paire donnée est formée de deux gènes identiques, l'individu est « homozygote » relativement au caractère considéré; si les gènes ne sont pas les mêmes, l'individu est « hétérozygote ».

Soit donc un caractère déterminé — par exemple la couleur d'une fleur, celle des yeux, etc. qui puisse présenter deux modalités : foncé et clair, ou rouge et blanc, etc.

La paire de gènes correspondant à ce caractère pourra être alors :

$$\mathrm{AA}, \qquad aa \qquad \text{ou} \quad \mathrm{A}a,$$

AA et aa étant homozygotes, Aa étant hétérozygote.

A et a sont dits gènes allèles, Aa, AA et aa sont les trois génotypes possibles.

Le génotype donne donc l'expression de la constitution génétique de l'individu. Mais il faut tenir compte également de son phénotype, c'est-à-dire de son apparence relativement au caractère considéré, La relation entre génotype et phénotype dépend alors des caractéristiques des gènes qui déterminent le caractère.

Exemples :

Prenons comme caractère étudié la couleur des belles de nuit. Cette couleur est déterminée par une paire de gènes pouvant être :

RR,	BB,	RB,
rouge,	blanc,	rose.

Les homozygotes sont rouges ou blancs, les hétérozygotes sont roses.

Il y a dans ce cas identité entre génotype et phénotype.

Prenons au contraire la couleur du pelage chez les souris. Les génotypes sont :

GG, GB, BB,

les phénotypes sont respectivement :

gris, gris, blanc.

L'homozygote gris présente le même phénotype que l'hétérozygote.

Les gènes tels que G sont dt « dominants » tandis que les gènes tels que B sont dits « récessifs ».

Lois de Mendel.

1° Première loi de Mendel. — Comme nous l'avons dit précédemment, les gènes se trouvent par paires dans toutes les cellules d'un organisme adulte. Cela à une exception près : les cellules reproductrices, ou « gamètes » n'ont chacune que l'un des gènes d'une paire donnée. Ainsi considérons un individu AA : Tous les gamètes qu'il fournit contiennent le gène A. De même, tous les gamètes fournis par un individu *aa* contiennent le gène *a*. Mais dans le cas d'un individu A*a*, les gamètes contiennent soit le gène *a*, soit le gène A_1 et ceux-ci en proportions égales généralement.

Au moment de la reproduction, un spermatozoïde porteur de l'un des gènes du parent mâle s'unit à un ovule porteur de l'un des gènes du parent femelle, pour donner un œuf, ou zygote, qui possède alors une paire de gènes. Cet œuf se développera pour donner un individu dont les cellules contiendront un gène provenant de l'un des parents, et un gène de l'autre parent.

C'est ce qui exprime la première loi de Mendel.

Prenons maintenant quelques exemples de croisement, de manière à voir ce qui se passe.

Croisons, par exemple, un individu AA et un individu *aa*.

Tous les gamètes libérés par le premier contiendront le gène A, tous ceux libérés par le second contiendront *a*.

Tous les individus produits seront alors du même génotype : A*a*.

Si le couple de gènes considéré est tel que A soit dominant et *a* récessif, tous les enfants présenteront le même phénotype que le parent AA; le phénotype *aa* aura disparu, seulement momentanément d'ailleurs, ce qu'il est facile de voir en croisant deux individus A*a*. Chaque hétérozygote produit les gènes A, et *a*, en même nombre. Les individus produits pourront alors être AA, A*a* ou *aa* et dans les proportions : $\frac{1}{4}$ pour AA, $\frac{1}{2}$ pour A*a*, et $\frac{1}{4}$ pour *aa*. Le phénotype *aa*, qui avait disparu, reparaît lors de ce croisement. Les individus AA et A*a* auront le même phénotype.

D'autres types de croisements peuvent être intéressants, ainsi le croisement $Aa \times aa$. Nous n'avons considéré jusqu'ici que des caractères pour lesquels les deux parents jouent des rôles symétriques. Il n'est alors pas nécessaire de préciser quel est le parent mâle et quel est le parent femelle.

Il en existe cependant qui sont directement liés au sexe, et pour lesquels cette précision est indispensable.

Nous regarderons ce cas de plus près dans quelques paragraphes.

2° Deuxième loi de Mendel. — Considérons maintenant simultanément deux ou plusieurs caractères héréditaires.

La deuxième loi de Mendel dit que, lors de la reproduction, les paires de gènes considérées sont transmises indépendamment les unes des autres.

Ainsi, soit deux paires de gènes A, *a* et B, *b* : croisons un individu AA BB avec un individu *aa bb*. Les produits de ce croisement seront alors tous de formule génotypique A*a* B*b*.

Si nous croisons ensuite deux individus A*a* B*b*, la loi de Mendel nous dit que chacun produira quatre sortes de gamètes — AB, *ab*, A*b*, *a*B — en nombres égaux, ce qui donne neuf génotypes distincts :

$$
\begin{array}{llll}
AABB, & AaBb, & AABb, & AaBB, \\
aabb, & Aabb, & aaBb, & \\
AAbb, & aaBB; & &
\end{array}
$$

Dans certains cas, la deuxième loi de Mendel se vérifie bien, mais il existe de nombreuses exceptions. Et ces exceptions s'expliquent grâce aux notions que nous allons exposer dans le chapitre suivant, et en particulier grâce à la représentation chromosomique.

CHAPITRE II.

Chromosomes, linkage et représentation chromosomique.

Chromosomes et linkage.

Dans le chapitre précédent, nous avons expliqué l'hérédité grâce à la présence des gènes, et cela d'une façon assez abstraite, sans trop nous préoccuper de la façon dont ceux-ci étaient répartis dans la cellule vivante.

Les gènes sont donc de petites particules matérielles, très nombreuses, situées à l'intérieur du noyau de la cellule, et y sont alignées le long de corpuscules appelés chromosomes. Les chromosomes sont présents par paires, et le nombre de paires est généralement constant pour une espèce donnée. Ainsi l'homme a 23 paires de chromosomes, la drosophile 4 paires, la souris 20.

Les deux gènes d'une paire déterminant les modalités d'un caractère donné, se trouvent localisés en deux endroits précis d'une paire de chromosomes bien déterminée, et ces « endroits » sont appelés les loci.

Ce sont donc les loci qui sont alignés sur les chromosomes; un locus donné peut être occupé par l'un ou l'autre des allèles déterminant un facteur particulier.

La seconde loi de Mendel s'applique bien aux chromosomes. Il en résulte que les gènes dont les loci se trouvent sur des chromosomes différents seront transmis de façon indépendante. Mais les gènes dont les loci se trouvent sur le même chromosome ne se comporteront pas suivant la loi de Mendel. Et leur comportement dépendra de la proximité des loci sur le chromosome. C'est ce qu'on appelle le phénomène du « linkage ».

Voyons sur un exemple ce que signifie le linkage; soit un individu A*a*B*b*, et supposons que les loci considérés se trouvent sur la même paire de chromosomes. On peut avoir, soit A et B sur un chromosome et *a* et *b* sur l'autre — ce qu'on appelle « coupling » AB/*ab* — Soit A et *b* sur un chromosome et *a* et B sur l'autre — ce qu'on appelle « répulsion » A*b*/*a*B.

Les phénomènes qui constituent la reproduction sont assez complexes. La production des gamètes s'effectue suivant le mécanisme de la meiose : un seul chromosome de chaque paire passe dans chaque gamète; ce qui entraîne bien que chaque gamète ne possède que l'un des deux gènes homologues d'une paire. Et pendant la méiose, il y a des échanges entre les deux chromosomes d'une paire.

Ainsi :

Fig. 1.

C'est ce qu'on appelle le « crossing-over », ou recombinaison.

Si ce nombre de points d'échange entre A et B est pair, le résultat final sera identique à la situation de départ en ce qui concerne AB *ab*. Mais si ce nombre est impair, nous pouvons obtenir les combinaisons A*b*/*a*B, en étant partis de AB/*ab*, et inversement.

Nous allons donc définir la fraction de recombinaison, y qui est la proportion des gamètes ayant subi le crossing-over; $1 - y$ est alors la proportion des gamètes qui sont restés ceux des parents.

Ainsi, si nous effectuons un croisement $AB/ab \times ab/ab$, avec absence de linkage, nous aurons les quatre sortes de gamètes AB, Ab, aB et ab, en proportions égales. Et s'il y a dominance de A sur a et de B sur b, les produits du croisement seront répartis également en quatre classes de phénotypes.

Mais s'il y a linkage, les quatre classes de phénotypes n'auront plus le même nombre d'individus : nous aurons les proportions :

$$\begin{array}{cccc} AB, & Ab, & aB & ab, \\ \frac{1}{2}(1-y), & \frac{1}{2}y, & \frac{1}{2}y, & \frac{1}{2}(1-y). \end{array}$$

L'absence de linkage correspond donc à la valeur $y = \frac{1}{2}$.

La valeur de y est variable suivant la proximité des loci considérés sur le chromosome : si les deux loci sont éloignés, y sera important, car il n'y aura pas de grande différence entre ce cas et l'absence de linkage. Au contraire, si les deux loci sont proches, le linkage sera important et la valeur de y faible.

Carte chromosomique.

La notion de fraction de recombinaison a été utilisée pour mesurer la distance des loci sur un chromosome. En effet, sa valeur peut être déterminée expérimentalement, et l'on en déduit alors la « distance » des loci considérés. Mais ce calcul n'est valable en fait que si les loci sont suffisamment proches, donc si y est faible. En effet c'est dans ce cas seulement que la propriété d'addition est vérifiée : si l'on considère trois loci ABC, pris dans cet ordre, y_{AC} est égale à la somme de y_{AB} et de y_{BC} seulement si ces valeurs sont faibles.

On a alors voulu définir la distance entre deux loci comme la valeur moyenne du nombre de points d'échange sur le segment joignant ces deux loci; cette définition respecte évidemment la propriété d'additivité. On suppose que les points d'échange sont des événements aléatoires, leur densité moyenne étant constante, lorsqu'on utilise une échelle de mesure convenable. Cela signifie que le nombre de points d'échange entre A et B pour une seule méiose s'écrit suivant une distribution de Poisson, dont le paramètre est la distance x entre A et B.

La probabilité pour qu'il y ait exactement r points d'échange est :

$$\Pr(x) = \frac{x^r e^{-x}}{r!}.$$

D'où

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} p_{2r+1}(x) = e^{-x} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}),$$

ce qui est la formule de Haldane. On retrouve bien dans cette formule le fait que pour des loci proches, x et y sont équivalents.

On mesure ces distances en morgans, ou centimorgans.

Cependant cette étude n'est satisfaisante que dans les cas où les crossing-over sont eux-mêmes des événements aléatoires et indépendants les uns des autres. Dans les cas d' « interférence », c'est-à-dire lorsque l'existence d'un crossing-over en un point déterminé tend à influencer l'existence d'autres crossing-over dans le voisinage, la distance définie plus haut ne convient plus.

Il faut alors faire appel à des métriques spéciales, comme celle de Kosambi, par exemple. Elles permettent de tenir compte avec plus de fidélité des phénomènes qui interviennent en réalité.

Nous pouvons maintenant traiter un cas que nous avions laissé de côté, c'est celui de la transmission du sexe et des caractères liés au sexe.

Transmission du sexe et des caractères liés au sexe.

La transmission du sexe se trouve déterminée par une paire de chromosomes, les chromosomes « hétérosomaux », ainsi désignés par opposition aux autres, les chromosomes « autosomaux ». Les chromosomes « hétérosomaux » sont de deux sortes, les X et les Y. Le sexe homogamétique a pour formule XX, le sexe hétérogamétique a pour formule XY. Chez les mammifères, le mâle est XY et la femelle XX; chez les oiseaux, chez certains poissons, c'est le contraire.

Au moment de la reproduction, l'individu XX libère le gamète X, tandis que l'individu XY libère X et Y en quantités égales. L'œuf produit aura donc pour formule XX ou XY et appartiendra donc à l'un ou l'autre sexe.

D'autre part, ces chromosomes X ou Y ne déterminent pas que le sexe. Ils portent en général un grand nombre de gènes déterminant d'autres caractères. Ces caractères sont dits liés au sexe. Considérons alors les chromosomes hétérosomaux et voyons quelle est leur constitution. Les parties des chromosomes qui sont noircies sur la figure forment une paire, et se comportent comme les chromosomes autosomaux; tandis que les autres segments, représentés différemment sur X et sur Y, se comportement d'une autre façon : par exemple, il ne peut y avoir entre eux aucun crossing-over dans le cas XY, alors que dans le cas XX, il peut s'en produire. Il en résulte que nous pouvons distinguer trois sortes de caractères liés au sexe.

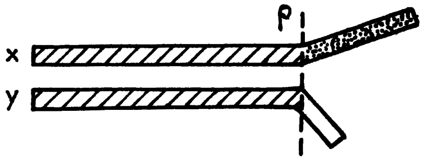


Fig. 2.

Premier cas. — Les loci se trouvent sur les segments identiques. Nous avons comme individus possibles :

$$\mathrm{X}a/\mathrm{X}a; \quad \mathrm{XA}/\mathrm{X}a; \quad \mathrm{XA}/\mathrm{XA};$$
$$\mathrm{YA}/\mathrm{X}a; \quad \mathrm{Y}a/\mathrm{XA}; \quad \mathrm{YA}/\mathrm{XA}; \quad \mathrm{Y}a/\mathrm{X}a;$$

En effectuant des croisements appropriés à la mesure des coefficients de recombinaison, nous déterminerons en fait si le locus considéré est près ou loin du point limite P; y indique alors le nombre de points d'échange entre le locus et le point P.

On désigne ces caractères par l'expression : « caractères liés partiellement au sexe ».

Deuxième cas. — Supposons que le locus se trouve sur le deuxième segment du chromosome X, et que le chromosome Y ne joue pas de rôle vis-à-vis du caractère considéré. C'est le cas du daltonisme, par exemple. Dans ce cas, il n'y a pas de recombinaison et l'on dit dans ce cas que le caractère est « totalement lié au chromosome X.

Troisième cas. — Il peut y avoir enfin « liaison totale avec le chromosome Y ». Ces cas sont assez rares et ces caractères ne se transmettent alors qu'aux individus XY. On peut enfin considérer le cas du linkage entre deux caractères ordinaires, situés sur les chromosomes hétérosomaux. Nous avons en effet considéré ci-dessus le linkage entre le sexe et un autre caractère. La même étude peut être faite, en tenant compte de la position relative des loci par rapport au point P.

Conclusion.

Dans cette étude schématique, nous n'avons pas mentionné de nombreux phénomènes qui sont susceptibles d'altérer la vérification des lois de Mendel, et dont il faut tenir compte. Ce sont en particulier la mutation, la sélection — naturelle ou provoquée —, et l'existence de certains phénomènes anormaux : par exemple la polyploïdie, c'est-à-dire la présence, non pas de deux chromosomes homologues, mais de quatre ou plus; nous verrons ce cas en détail plus loin.

Cependant nous ne nous étendrons pas davantage sur ces notions, les développements que nous en avons donnés étant largement suffisants pour la compréhension de la troisième partie.

TROISIÈME PARTIE.

ALGÈBRES GÉNÉTIQUES.

CHAPITRE I.

DÉFINITION DES DIVERSES SORTES D'ALGÈBRES UTILISÉES EN GÉNÉTIQUE.

A partir de maintenant, les algèbres qu'on considérera seront toujours définies sur un corps F.

Algèbre pondérée et base génétique.

1° ALGÈBRE PONDÉRÉE. — L'algèbre A est dite pondérée sur F, s'il existe un homomorphisme $\omega : A \rightarrow F$ tel que :

(i) il existe $x_0 \in F$ tel que $\omega(x_0) \neq 0$;

(ii) $$\begin{cases} \omega(x+y) = \omega(x) + \omega(y), \\ \omega(xy) = \omega(x)\,\omega(y), \\ \omega(\alpha x) = \alpha\,\omega(x), \end{cases}$$

avec x, $y \in A$, $\alpha \in F$.

L'homomorphisme ω est appelé fonction poids. Il résulte de la définition de ω que cette fonction est un homomorphisme de A *sur* F. En effet soit $\alpha \in G$; nous avons

$$\omega\left[\frac{\alpha x_0}{\omega(x_0)}\right] = \alpha.$$

Donc si N est le noyau de ω, c'est-à-dire :

$$N = \{ n \in A;\ \omega(n) = 0 \},$$

$A - N$ est de même dimension que F, c'est-à-dire 1.

2° BASE GÉNÉTIQUE. — Parmi toutes les bases de A, on appelle base génétique de A, s'il en existe, toute base $\{ c_i \}$ telle que si :

$$c_i c_j = \sum_k \gamma_{ijk} c_k \qquad \text{pour} \quad c_{ij} = 1, 2, \ldots, n$$

on ait

$$\sum_k \gamma_{ij\,k} = 1 \quad \text{pour tout } (i, j).$$

3° THÉORÈME. — *Pour que* A *soit pondérée dans* F, *il faut et il suffit que* A *possède une base génétique.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe une base génétique $\{c_i\}$, alors, nous disons que la fonction ω, définie par

$$\omega(x) = \omega\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i c_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

convient.

En effet, d'abord, $\omega(c_i) = 1$.

De plus, ω est un homomorphisme :

$$\omega(x+y) = \omega(x) + \omega(y),$$
$$\omega(\alpha x) = \alpha\,\omega(x).$$

Ceci de façon évidente.

Calculons $\omega(xy)$.

$$xy = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j c_i c_j = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \left(\sum_k \gamma_{ij\,k} c_k\right),$$
$$xy = \sum_k \left(\sum_{i,j} \xi_i \eta_j \gamma_{ij\,k}\right) c_k,$$

d'où

$$\omega(xy) = \sum_{ijk} \gamma_{ij\,k}\, \xi_i \eta_j,$$
$$\omega(xy) = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \left(\sum_k \gamma_{ij\,k}\right).$$

Comme $\sum_k \gamma_{ij\,k} = 1$,

$$\omega(xy) = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j.$$

Nous voyons d'autre part que

$$\omega(x)\,\omega(y) = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j.$$

Donc $\omega(xy) = \omega(x)\,\omega(y)$.

Et ω convient.

— Réciproquement, supposons qu'il existe ω, fonction poids de A sur F.

Soit N son noyau, et soit $b_\circ, \ldots, b_n$ une base de N.

Il existe $b \in A$ tel que $\omega(b) = 1$; en effet puisqu'il existe x_0 tel que $\omega(x_0) = \alpha_0 \neq 0$, l'élément $b = \frac{x_0}{\alpha_0}$ a pour poids 1. Formons donc une base $\{c_i\}$ de A, définie de la façon suivante :

$$c_1 = b; \qquad c_i = b + b_i \qquad \text{pour} \quad i = 2, \ldots, n;$$

Alors $\omega(c_i) = 1$ pour $i = 1, \ldots, n$, d'où

$$\omega(c_i c_j) = \omega(c_i)\,\omega(c_j) = 1.$$

D'autre part :

$$\omega(c_i c_j) = \sum_k \gamma_{ijk}.$$

D'où

$$\sum_k \gamma_{ijk} = 1 \quad \text{pour tout } (i, j).$$

Et la base $\{c_i\}$ est une base génétique de A.

Algèbre génétique.

1° Définition. — Une algèbre A commutative, pondérée sur F, sera dite génétique, si elle satisfait à la condition suivante :

Soit, comme plus haut, R_x la transformation multiplication à droite de $x \in A$.

Soit T un élément de l'algèbre des transformations de A :

$$T = \alpha I + f(R_{x_1}, \ldots, R_{x_p}),$$

où $\alpha \in F$, $x_i \in A$, où I est la transformation identique, et f un polynome. Dire que A est algèbre génétique, c'est dire qu'il existe une fonction poids ω telle que, pour tout T de cette forme, les coefficients du polynome caractéristique de T, dans la mesure où ils dépendent des x_i, ne dépendent que des $\omega(x_i)$.

2° Conséquence. — Soit A une algèbre génétique et N le noyau de la fonction poids ω considérée au 1°. Considérons un élément de l'algèbre des transformations de A :

$$T = f(R_{n_1}, \ldots, R_{n_m}), \qquad \text{où} \quad n_i \in N \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Nous allons prouver que $T^n = 0$.

En effet :

$$| \lambda I - T | = \lambda^n + t_1 \lambda^{n-1} - \ldots - t_n.$$

Les t_j étant des polynomes dont les termes constants sont notés t_{j_0}. D'abord, $t_{j_0} = 0$ pour tout j.

En effet, si l'on fait $n_i = 0$, $\forall\, i$

$$(\lambda I - T) = \lambda^n - t_{1_0} \lambda^{n-1} - \ldots - t_{n_0} \quad \text{et} \quad | \lambda I - T | = \lambda^n,$$

puisque alors $T = 0$, donc $t_{j_0} = 0$ pour tout j.

D'autre part, A étant algèbre génétique, les t_j ne dépendent que des $\omega(n_i)$; comme $n_i \in N$, $\omega(n_i) = 0$, et comme, de plus, $t_{j_0} = 0$, il en résulte que $| \lambda I - T | = \lambda^n$, quels que soient les $n_i \in N$.

Donc l'équation caractéristique de T est :

$$\lambda^n = 0, \qquad \text{donc} \quad T^n = 0.$$

3° Théorème fondamental. — Nous allons nous intéresser à la duplication d'une algèbre génétique, et voir ce qu'on peut conclure sur l'algèbre A′ déduite par duplication d'une algèbre A génétique.

a. Lemme préliminaire. — *Considérons une algèbre* A *commutative, et sa transformée commutative* A′ *par duplication.*

Soit

$$T' = \alpha I' + f(R'_{a'_1}, \ldots, R'_{a'_p})$$

un élément de l'algèbre des transformations de A′.

Soit

$$T = \alpha I + f(R_{a_1}, \ldots, R_{a_p})$$

l'élément de l'algèbre des transformations de A tel que $a_i = H(a'_i)$ pour tout i. La fonction H, suivant la notation d'un précédent chapitre, est l'homomorphisme étudié plus haut, appliquant A′ dans A. Nous allons prouver le résultat :

$$| \lambda I' - T' | = (\lambda - \alpha)^{\frac{n(n-1)}{2}} | \lambda I - T |.$$

Démonstration. — Soient Ω' le noyau de H, et m son ordre. On peut écrire :

$$A' = \Omega' + \Omega'_1 ;$$

l'ordre de Ω'_1, étant :

$$P = \frac{1}{2}(n+1)n - m.$$

Si l'on écrit A′ sous cette forme, en se souvenant que $\Omega' A' = 0$, la matrice $\Gamma'_{a'}$ de $R'_{a'}$ s'écrit

$$\Gamma'_{a'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M_{a'} & N_{a'} \end{pmatrix},$$

$M_{a'}$ et $N_{a'}$ étant des matrices $p \times m$ et $p \times p$ respectivement.

Comme $A' - \Omega'$ est isomorphe à A^2, on peut considérer $N_{a'}$ comme la matrice de multiplication à droite correspondant à $H(a')$ dans A^2.

$$N_{a'} = \Gamma^{\star}_{H(a')} \qquad \text{avec} \quad a = H(a') \in A^2$$

et

$$\Gamma'_{a'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \star & \Gamma^{\star}_{a} \end{pmatrix}.$$

Alors $f(R'_{a'_1}, \ldots, R'_{a'_p})$ a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \star & \text{matrice de } f(R^{\star}_{a_1}, \ldots, R^{\star}_{a_p}) \end{pmatrix}.$$

D'autre part, $f(R_{a_1}, \ldots, R_{a_p})$ a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} f(R^{\star}_{a_1}, \ldots, R^{\star}_{a_p}) & 0 \\ \star & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$|\lambda I - T'| = (\lambda - \alpha)^{m} \quad [(\lambda - \alpha) I_p - \text{matrice de } f(R^{\star}_{a_1}, \ldots, R^{\star}_{a_p})],$$
$$|\lambda I - T| = (\lambda - \alpha)^{n-p} [(\lambda - \alpha) I_p - \text{matrice de } f(R^{\star}_{a_1}, \ldots, R^{\star}_{a_p})],$$

d'où

$$|\lambda I' - T'| = (\lambda - \alpha)^{m-(n-p)} |\lambda I - T|.$$

Et

$$|\lambda I' - T'| = (\lambda - \alpha)^{\frac{n(n-1)}{2}} |\lambda I - T|.$$

b. Théorème. — *L'algèbre* A′ *déduite par duplication d'une algèbre* A *génétique est génétique.*

En effet, si A admet comme fonction poids la fonction ω, posons, dans A′ :

$$\omega'(\alpha') = \omega'[H(\alpha')].$$

D'après le lemme précédent, les coefficients de $|\lambda I' - T'|$ dépendent seulement des $\omega(a_i)$, c'est-à-dire des $\omega[H(a'_i)]$, c'est-à-dire des $\omega'(a'_i)$.

A′ est donc une algèbre génétique.

Cette notion d'algèbre génétique est une généralisation de la notion introduite par Etherington de « train algebra ».

« **Train algebra** ».

1° Définition. — Une algèbre commutative pondérée est dite « train algebra », si les coefficients de l'équation principale dépendent seulement des $\omega(\xi_i)$; $\left(x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right)$; c'est-à-dire qu'il existe $\beta_1, \ldots, \beta_{r-1} \in F$, tels que l'équation principale s'écrive :

$$x^r + \beta_1\,\omega(x)\,x^{r-1} + \ldots + \beta_{r-1}[\omega(x)]^{r-1}x = 0.$$

Ceçi d'après l'étude de l'équation principale faite plus haut.

2° Théorème. — *Une algèbre génétique sur* F *est « train algebra » sur* F.

En effet, soit A une algèbre génétique sur F, et prenons $T = R_x$.

$$\Phi(\lambda) = |\lambda I - R_x| = \lambda^n + \gamma_1\,\omega(x)\,\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n[\omega(x)]^n, \qquad \text{avec} \quad \gamma_i \in F.$$

En faisant une extension finie de F

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1\omega)\ldots(\lambda - \lambda_n\omega), \qquad \lambda_i \in F,$$

soit l'équation principale : $\Psi(\lambda) = 0$

$$\Psi(\lambda) = \lambda^r + \Psi_1\lambda^{r-1} + \ldots + \Psi_{r-1}\lambda.$$

D'après les résultats établis sur l'équation principale, le polynome $\Psi(\lambda)$ divise $\lambda\,\varphi(\lambda)$, et l'on peut écrire :

$$\lambda^r + \ldots + \Psi_{r-1}\lambda = \lambda(\lambda - \lambda_1\omega)\ldots(\lambda - \lambda_{r-1}\omega),$$

d'où

$$\Psi_j = (-1)^j\,\omega^j\,\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_j}$$

et A est train algebra.

« **Special train algebra** ».

Nous allons nous borner pour l'instant à donner la définition d'une « special train algebra ». Nous verrons ensuite, dans un chapitre qui sera consacré à ce type d'algèbre, quelles en sont les propriétés. Une algèbre pondérée commutative est dite « special train algebra » lorsque :

— N est nilpotent d'altitude α, c'est-à-dire tous les produits (d'éléments quelconques de N) d'altitude α sont nuls.

— $N, N^1, \ldots, N^k, \ldots, N^{\alpha-1}$ sont des idéaux de A. N^k désigne l'ensemble des combinaisons linéaires des produits d'altitude k.

Exemples d'application à la génétique.

1° ALGÈBRE GAMÉTIQUE. — Considérons une population formée d'individus

$$DD \text{ (ou } D^2), \qquad DR, \qquad RR \text{ (ou } R^2),$$

ces individus sont capables de fournir des gamètes portant D, et R, dans une certaine proportion. (Les notations D et R, employées habituellement, viennent des notions de dominance et récessivité.) C'est ce que va exprimer la définition de l'algèbre gamétique.

Considérons donc un corps F, de caractéristique différente de 2, et, sur F, l'algèbre commutative A engendrée par les éléments u_1 et u_2, avec pour loi de multiplication :

$$u_1^2 = u_1\,; \qquad u_1 u_2 = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_2\,; \qquad u_2^2 = u_2.$$

Il est facile de voir que ce produit n'est pas associatif :

$$u_1(u_2^2) = u_1 u_2 = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_2,$$
$$(u_1 u_2)\, u_2 = \frac{1}{4} u_1 + \frac{3}{4} u_2.$$

On voit facilement, que, d'après ces définitions, la base (D, R) est une base génétique, donc que l'algèbre est pondérée.

D'autre part, un changement de base :

$$u = \frac{u_1 + u_2}{2}; \qquad z = u_1 - u_2$$

donne $A = (u, z)$, avec

$$u^2 = u\,; \qquad uz = \frac{1}{2} z\,; \qquad z^2 = 0.$$

Alors, soit $x = \xi u + \eta z$; on voit que la fonction poids ω définie par $\omega(x) = \xi$ convient. Le noyau N est (z). On a $N^2 = 0$, on voit que A est « special train algebra ». D'autre part soit $\Gamma_x = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ \frac{1}{2}\eta & \frac{1}{2}\xi \end{pmatrix}$.

Dans $T = \alpha I + f(R_{x_1}, \ldots, R_{x_p})$, quelle que soit la forme du polynome f, on voit que parmi ces termes ne figureront que des matrices carrées avec les 0 en première ligne deuxième colonne, donc que les coefficients de $|\lambda I - T|$ ne dépendront que des ξ_i, c'est-à-dire des $\omega(x_i)$.

On voit donc que A est aussi algèbre génétique, donc « train algebra ».

Dans un prochain chapitre, nous démontrerons qu'une « special train algebra » est nécessairement génétique, ce qui dispense de démontrer les deux propriétés.

Pour revenir aux notations D, R annoncées en début de paragraphe, prenons pour F le corps des réels, et considérons la même algèbre, engendrée sur le corps des réels par $u_1 = D$, $u_2 = R$.

Un élément de cette algèbre s'écrira : $P = \alpha D + \beta R$, et si $\alpha + \beta = 1$, P représentera une population capable de fournir D dans la proportion α, et R dans la proportion β.

La loi de multiplication :

$$D^2 = DD = D; \qquad DR = \frac{1}{2} D + \frac{1}{2} R; \qquad R^2 = RR = R$$

rend bien compte des lois de l'hérédité, puisque les individus DD libèrent le gamète portant D, les DR, une proportion égale de D et de R, et RR le gamète R. Nous avons donc construit et étudié l'algèbre gamétique de l'hérédité mendélienne.

2° Algèbre zygotique. — Considérons un corps F de caractéristique différente de 2, et sur F, l'algèbre A′ engendrée par les éléments (a, b, c) avec pour loi de multiplication :

$$a^2 = a; \qquad b^2 = \frac{1}{4} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{4} c; \qquad c^2 = c,$$

$$bc = \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c; \qquad ca = b; \qquad ab = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b.$$

Faisons un changement de base, pour avoir $A' = (u, v, w)$, avec

$$u^2 = a; \qquad uv = \frac{1}{2} v; \qquad v^2 = \frac{1}{4} w; \qquad uw = vw = w^2 = 0.$$

Il est facile de trouver un tel changement de base.

Posant alors $x = \xi u + \eta v + \zeta w$, on peut prendre pour fonction poids la fonction ω définie par $\omega(x) = \xi$, et le noyau N est l'ensemble (v, w). Alors

$$N^2 = (w); \qquad N^3 = 0.$$

A′ est « special train algebra ».

On voit que les deux exemples d'algèbres considérés ne sont pas indépendants, en effet il est facile de voir que celle-ci se déduit par duplication de l'algèbre gamétique du paragraphe précédent. Puisque nous avons démontré que la transformée par duplication d'une algèbre génétique est une algèbre génétique, l'algèbre A′ est génétique.

Prenant maintenant pour corps F le corps des réels et considérons la même algèbre engendrée sur le corps des réels par $a = \mathrm{DD}$; $b = \mathrm{DR}$; $c = \mathrm{RR}$. Avec la même addition qu'au 1° un élément $\mathrm{P} = \alpha a + \beta b + \gamma c$ représentera une population contenant les individus DD, DR, RR suivant les proportions α, β, γ, pourvu que $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

La loi de multiplication :

$$a^2 = (\mathrm{DD})(\mathrm{DD}) = a = \mathrm{DD},$$

$$b^2 = (\mathrm{DR})(\mathrm{DR}) = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c = \frac{1}{4}\mathrm{DD} + \frac{1}{2}\mathrm{DR} + \frac{1}{4}\mathrm{RR},$$

$$c^2 = (\mathrm{RR})(\mathrm{RR}) = c = \mathrm{RR},$$

$$bc = (\mathrm{DR})(\mathrm{RR}) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\mathrm{DR} + \frac{1}{2}\mathrm{RR},$$

$$ca = (\mathrm{RR})(\mathrm{DD}) = b = \mathrm{DR},$$

$$ab = (\mathrm{DD})(\mathrm{DR}) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}\mathrm{DD} + \frac{1}{2}\mathrm{DR},$$

rend bien compte des lois de l'hérédité.

En effet, l'union de deux individus DD, par exemple, fournit uniquement des individus DD (sans tenir compte, bien sûr, de mutations éventuelles), tandis que l'union de deux individus, l'un DR et l'autre RR, fournit une proportion égale d'individus DR et RR.

L'algèbre A′ ainsi définie et étudiée est l'algèbre zygotique de l'hérédité mendélienne. Elle se déduit par duplication de l'algèbre gamétique, comme nous l'avons vu plus haut.

3° Autre exemple. — Considérons l'algèbre sur F déduite par duplication de l'algèbre zygotique. C'est l'algèbre A″ engendrée par :

$$\mathrm{E} = aa; \quad \mathrm{F} = bb; \quad \mathrm{G} = cc; \quad \mathrm{H} = bc; \quad \mathrm{I} = ca; \quad \mathrm{J} = ab,$$

avec pour table :

$$\mathrm{E}^2 = \mathrm{E}; \qquad \mathrm{F}^2 = \frac{1}{16}\mathrm{E} + \frac{1}{4}\mathrm{F} + \frac{1}{16}\mathrm{G} + \frac{1}{4}\mathrm{H} + \frac{1}{8}\mathrm{I} + \frac{1}{4}\mathrm{J},$$

et les égalités suivantes déduites du 2°, suivant les méthodes de la duplication. Par changement de base, nous aurons :

$$\mathrm{A}'' = (v, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5),$$

avec

$$v^2 = v; \qquad vp_1 = \frac{1}{2}p_1; \qquad vp_2 = \frac{1}{4}p_3; \qquad p_1^2 = \frac{1}{4}p_2;$$
$$p_1 p_2 = \frac{1}{8}p_4; \qquad p_2^2 = \frac{1}{16}p_5;$$
$$vp_j = p_1 p_j = 0 \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, 5 \text{ et } j = 3, 4, 5.$$

En posant $x = \xi v + \sum_i \eta_i p_i$, nous voyons que, comme précédemment, la fonction poids $\omega(x) = \xi$ convient. Alors

$$N = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5),$$
$$N^2 = (p_2, p_4, p_5); \qquad N^3 = (p_4, p_5); \quad N^4 = 0.$$

Cependant, A″ n'est pas « special train algebra », car A″N² n'est pas identique à N², en effet :

$vp_2 = \frac{1}{4}p_3$ n'est pas un élément de N², et N² n'est pas un idéal de A″.

Cependant A″ est une algèbre génétique puisque A′ est génétique.

4° Crossing-over. — Considérons deux caractères héréditaires A et B, A ayant m modalités et B ayant p modalités. Supposons que ces caractères correspondent à des loci de la même paire de chromosomes. Nous exprimerons la recombinaison possible par la loi de multiplication :

$$(A_i B_k) \times (A_j B_l) = \frac{1}{2}(1-y)(A_i B_k + A_j B_l) + \frac{1}{2}y(A_i B_l + A_j B_k),$$

y étant la fréquence de recombinaison. Considérons donc l'algèbre engendrée sur un corps F de caractéristique différente de 2 par les mp éléments $A_i B_l$.

$x = \sum_{i,l} \alpha_{il} A_i B_l$ est un élément quelconque de l'algèbre et :

$$A_i B_l . A_j B_k = \frac{1}{2}(1-y)(A_i B_l + A_j B_k) + \frac{y}{2}(A_i B_k + A_j B_l).$$

Étudions cette algèbre.

Pour cela, posons :

$$A_0 B_0 = I,$$
$$u_j = A_0 B_j - A_0 B_0 \qquad (j = 1, \ldots, p-1),$$
$$v_i = A_i B_0 - A_0 B_0 \qquad (i = 1, \ldots, m-1),$$
$$w_{ij} = (A_0 B_j - A_0 B_0)(A_i B_0 - A_0 B_0);$$

A_0B_0 est un élément choisi au hasard et définitivement fixé; il y a $(p-1)$ éléments u_j, $(m-1)$ éléments v_i, et $(m-1)(p-1)$ éléments w_{ij}; avec I, cela fait :

$$1+(m-1)+(p-1)+(m-1)(p-1)=mp \quad \text{éléments.}$$

Exprimons :

$$w_{ij}=u_i v_j; \qquad w_{ij}=(A_0B_j-A_0B_0)(A_iB_0-A_0B_0).$$

Tous calculs effectués :

$$w_{ij}=\frac{y}{2}[A_iB_j-A_0B_0-(v_i+u_j)],$$

ce qui prouve que les I, u_j, v_i, w_{ij}, sont indépendants. Étant au nombre de mp, ils forment une base de A.

D'autre part, en prenant pour fonction poids la somme des coordonnées :

$$\omega(I)=1; \qquad \omega(u_j)=\omega(v_i)=\omega(w_{ij})=0.$$

Donc le noyau de A est

$$N=(u_j, v_i, w_{ij}) \qquad (i=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,m).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} Iu_j &= A_0B_0(A_0B_j-A_0B_0)\\ &= \frac{1}{2}(1-y)(A_0B_0+A_0B_j)+\frac{y}{2}(A_0B_j+A_0B_0)-A_0B_0,\end{aligned}$$

$$Iu_j=\frac{1}{2}(A_0B_j-A_0B_0), \qquad \text{d'où} \quad Iu_j=\frac{1}{2}u_j.$$

De même :

$$Iv_j=\frac{1}{2}v_j.$$

Enfin :

$$u_j^2=0; \qquad v_i^2=0,$$

$$u_iu_j=w_{ij}; \qquad u_jw_{ij}=\left(\frac{y}{2}-1\right)w_{ij};$$

$$Iw_{ij}=\frac{(1-y)y}{2}w_{ij}; \qquad w_{ij}^2=0,$$

Il en résulte que A est « special train algebra », avec :

$$N=(u_j, v_i, w_{ij}); \qquad N^1=(w_{ij}); \qquad N^2=(0).$$

Nous allons en déduire l'équation principale de A.

Soit

$$x = \xi \mathrm{I} + \sum_i \alpha_i v_i + \sum \beta_j u_j + \sum_{ij} \gamma_{ij} w_{ij}.$$

on a alors

$$x(x - \xi) = x^2 - \xi x,$$

$$x^2 = \xi^2 \mathrm{I} + \sum \xi \alpha_i v_i + \sum \xi \beta_j u_j + \text{termes en } w_{ij},$$

$$x^2 - \xi x \quad = \text{termes en } w_{ij} = \lambda w_{ij},$$

$$(x^2 - \xi x)\, x = \text{termes en } w_{ij} = \lambda \times \frac{\xi(1-y)}{2} w_{ij},$$

$$(x^2 - \xi x)\left(x - \frac{\xi(1-y)}{2}\right) = 0,$$

C'est l'équation de plus faible degré vérifiée par l'élément général $x \in \mathrm{A}$, c'est donc l'équation principale de A. On voit que ses coefficients ne dépendent que de ξ.

Ayant donné ces quelques exemples, nous allons étudier plus particulièrement chacun des types d'algèbres introduits.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES « TRAIN ALGEBRAS » DE RANG 2 ET 3, SUPPOSÉES COMMUTATIVES.

Généralités.

Nous considérons tout d'abord une algèbre A commutative et pondérée.

1° Produit de poids nul. — Soit $x, y \in \mathrm{A}$, avec $\omega(x) = \xi$, $\omega(y) = \eta$. Leur produit de poids nul est défini par :

$$x^{\cdot}y = xy - \frac{1}{2}\xi y - \frac{1}{2}\eta x,$$

on voit bien que $\omega(x^{\cdot}y) = 0$.

On a les propriétés :

$$x^{\cdot}y = y^{\cdot}x; \qquad x^{\cdot}(y + z) = x^{\cdot}y + x^{\cdot}z; \qquad (\alpha x)^{\cdot}(\beta y) = \alpha\beta(x^{\cdot}y).$$

Le carré de poids nul $x^2 - \xi x = x^{\cdot}x$ s'écrira $x^{\cdot\cdot}$. Pour $n, n' \in \mathrm{N}$, $n^{\cdot}n = nn'$.

Nous allons définir un sous-ensemble P, dont les éléments seront appelés « p-éléments », ces p-éléments seront les carrés de poids nul des éléments de poids 1, et leurs combinaisons linéaires.

a. L'ensemble P *est l'ensemble des produits de poids nul.*

En effet tout élément de P est un produit de poids nul.

Réciproquement, considérons deux éléments x et y de A, dont les poids sont ξ et η, et posons :

$$x = \xi X; \qquad y = \eta Y,$$

en supposant $\xi \neq 0$ et $\eta \neq 0$. Alors

$$x^{\cdot}y = \frac{1}{2}\xi\eta\left\{4\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y\right)^{\cdot\cdot} - X^{\cdot\cdot} - Y^{\cdot\cdot}\right\},$$

ce qui prouve que $x^{\cdot}y$ appartient à P. Supposons maintenant $\xi.\eta = 0$.

Tout élément de poids nul peut s'écrire sous la forme : $n = x_1 - x_2$, avec

$$\omega(x_1) = \omega(x_2) = \mu \neq 0.$$

Et le théorème est par conséquent vrai pour les produits de la forme $x^{\cdot}n$ et $n^{\cdot}_1 n_2$. Il en résulte la double inclusion :

$$N^2 \subseteq P \subseteq N.$$

En effet, $n_1 n_2 = n^{\cdot}_1 n_2 \in P$, d'où $N^2 \subseteq P$ et $P \subseteq N$ par définition.

b. P *est sous-algèbre invariante de* A *et de* N, *et l'algèbre* A — P *est « train algebra ».*

P est sous-algèbre de A, en effet, c'est par définition un sous-espace vectoriel de A, et de plus le produit de deux éléments quelconques de P est un élément de P : en effet, considérons $(x^{\cdot}x)(y^{\cdot}y)$ et posons

$$\begin{aligned} x = \xi X; \qquad y &= \eta Y; \qquad \text{avec} \quad \omega(x) = \xi;\ \omega(y) = \eta, \\ (x^{\cdot}x)(y^{\cdot}y) &= \xi^2\eta^2 (X^{\cdot}X)(Y^{\cdot}Y) \\ &= \xi^2\eta^2 (X^2Y^2 - XY^2 - X^2Y + XY), \end{aligned}$$

écrivant :

$$X^2Y^2 - XY^2 - X^2Y + XY = (X^2Y^2 - XY) - (XY^2 + X^2Y - 2XY)$$

nous avons

$$(X^{\cdot}X)(Y^{\cdot}Y) = XY^{\cdot\cdot} - XY^{\cdot}(X + Y).$$

Donc, P est sous-algèbre de A.

P est invariante car $xp = x^{\cdot}p + \frac{1}{2}\xi p \in P$. Considérons maintenant l'algèbre A — P. Tout élément $x \in A - P$ est tel que $x^2 - \xi x = 0$, d'après ce qui précède, donc A — P est train algebra d'équation principale $x^2 - \xi x = 0$.

2° Conséquences. — Deux conséquences immédiates :

— La table de multiplication d'une algèbre commutative pondérée est nécessairement de la forme

$$e_i e_j = \frac{1}{2}\xi_i e_j + \frac{1}{2}\xi_j e_i + \sum \gamma_{ijk} e_k, \qquad \text{avec} \quad \gamma_{ijk} = \gamma_{jik},$$

où ξ_i et ξ_j sont les poids de e_j et e_i, et où $\sum \gamma_{ijk} e_k$ est un p-élément. De plus :

$$\sum \gamma_{ijk} \xi_k = 0.$$

Réciproquement, toute table vérifiant ces conditions est la table d'une algèbre pondérée commutative telle que le poids de tout e_i soit ξ_i.

— Les conditions d'idempotence d'un élément $x = \sum_i x_i e_i$ sont : soit

$$\sum_{i,j} x_i x_j \gamma_{ijk} = x_k,$$

c'est alors un élément de poids nul.

Soit

$$\sum_{i,j} x_i x_j \gamma_{ijk} = 0, \qquad \sum_i x_i \xi_i = 1,$$

c'est alors un élément de poids 1.

3° Produit de poids nul pour trois éléments. — Choisissons un élément λ de F et fixons-le.

Posons

$$\lambda_{x^{\cdot}y^{\cdot}z} = \frac{1}{3}[x.yz + y.zx + z.xy - (1+\lambda)(\xi yz + \eta zx + \xi xy) + \lambda(x\eta\zeta + y\zeta\xi + z\xi\eta)],$$

ou encore :

$$x^{\cdot}y^{\cdot}z = \frac{1}{3}(x - \lambda\xi)(y^{\cdot}z) + \frac{1}{3}(y - \lambda\eta)(z^{\cdot}x) + \frac{1}{3}(z - \lambda\zeta)(x^{\cdot}y),$$

ξ, η, ζ étant les poids de x, y, z.

On a les propriétés :

$$x^{\cdot}y^{\cdot}z = x^{\cdot}z^{\cdot}y = \ldots,$$
$$x^{\cdot}y^{\cdot}(z + z') = x^{\cdot}y^{\cdot}z + x^{\cdot}y^{\cdot}z', \ldots,$$
$$(\alpha x)^{\cdot}(\beta y)^{\cdot}(\gamma z) = \alpha\beta\gamma(x^{\cdot}y^{\cdot}z).$$

Pour un élément de poids 1 :

$$X^{\cdot\cdot\cdot} = X^3 - (1 + \lambda) X^2 + \lambda X = X (X - 1) (X - \lambda)$$

ou

$$X^{\cdot\cdot\cdot} = (X - \lambda) X^{\cdot\cdot}.$$

Pour les éléments du noyau :

$$\eta_2^{\bullet} \eta_2^{\bullet} \eta_3 = \frac{1}{3} (\eta_1 . \eta_2\eta_3 + \eta_2 . \eta_3\eta_1 + \eta_3 . \eta_1\eta_2).$$

Les cubes de poids nul des éléments de poids 1, et leurs combinaisons linéaires, seront appelés *q*-éléments; leur ensemble sera noté Q_λ ou Q.

a. Les produits de poids nul pour trois éléments appartiennent à Q.

Cela en vertu de l'identité :

$$6X^{\cdot}Y^{\cdot}Z = (X + Y + Z)^{\cdot\cdot\cdot} - (Y + Z)^{\cdot\cdot\cdot} - (Z + X)^{\cdot\cdot\cdot} - (X + Y)^{\cdot\cdot\cdot} + X^{\cdot\cdot\cdot} + Y^{\cdot\cdot\cdot} + Z^{\cdot\cdot\cdot}.$$

X, Y et Z étant des éléments de poids 1.

D'autre part $P \supseteq Q$, puisque

$$X^{\cdot\cdot\cdot} = (X - \lambda) X^{\cdot\cdot}.$$

Considérons maintenant deux valeurs distinctes du nombre fixe λ, et intéressons-nous à $Q_{\lambda'}$ et $Q_{\lambda''}$.

b. Si $\lambda' \neq \lambda''$, *alors* $Q_{\lambda'} + Q_{\lambda''} = P$.

En effet :

$$(\lambda' - \lambda'') X^{\cdot\cdot} = X^{\cdot\cdot\cdot\lambda'} - X^{\cdot\cdot\cdot\lambda''}.$$

Donc,

$$P \subseteq Q_{\lambda'} + Q_{\lambda''}.$$

Comme

$$Q_{\lambda'} \supseteq P \text{ et } Q_{\lambda''} \supseteq P.$$

on en déduit que $Q_{\lambda'} + Q_{\lambda''} \supseteq P$.

Donc,

$$P = Q_{\lambda'} + Q_{\lambda''}.$$

c. Si Q_λ *est sous-algèbre invariante de* A, *l'algèbre* $A - Q_\lambda$ *est train algebra, et son équation principale est* $x(x - \zeta)(x - \lambda\xi) = 0$ se démontre de la même façon qu'au 1°.

Nous allons maintenant tirer de ces généralités quelques conséquences relatives aux train algebras de rang 2 et 3.

Train algebras de rang 2.

D'après ce qui précède, une train algebra de rang 2 a nécessairement pour équation principale l'équation :

$$x(x-\xi)=0$$

Et, toujours d'après ce qui précède :

$$P=N^2=\{0\}.$$

D'autre part, en prenant pour base une base de N complétée par un élément de poids 1, la table de multiplication s'écrit :

$$I^2=I; \qquad Iu_i=\frac{1}{2}u_i; \qquad u_iu_j=0,$$

la base étant $(I, u, \ldots, u_{n-1})$. Nous en déduisons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Une train algebra commutative de rang 2 est à puissances associatives.*

En effet $x^2=\xi x$ pour tout $x\in A$. Donc la valeur de toute puissance de x de degré n est $\xi^{n-1}x$, ce qui signifie que r et s désignant deux formes de degré n, $x^r=x^s$.

Train algebras de rang 3.

D'après les généralités établies, l'équation principale est

$$x(x-\xi)(x-\lambda\xi)=0.$$

λ étant bien déterminée.

Alors l'ensemble Q_λ qui lui correspond est tel que $Q_\lambda=0$.

a. Équation au rang pour les puissances pleines. — Du fait que $Q_\lambda=0$, nous déduisons

$$X.YZ+Y.ZX+Z.XY-(1+\lambda)(YZ+ZX+XY)+\lambda(X+Y+Z)=0.$$

Posant $X=Y$; $X^2=Z$; on obtient

$$2X^4+X^{2.2}-(1+\lambda)(2X^3+X^2)+\lambda(2X+X^2)=0.$$

Mais d'après l'équation principale :

$$x^{2.2}-(1+2\lambda)X^2+2\lambda X=0.$$

L'équation au rang pour les puissances pleines est donc :

$$X^{[2],2} - (1 + 2\lambda)\,\xi^{2} x^2 + 2\lambda\xi^3 x = 0.$$

Nous indiquons encore deux autres propriétés :

b. Sous-algèbres engendrées par les éléments de poids 1. — Tout élément $X \in A$ de poids 1 et son carré engendrent une sous-algèbre de A. Il est alors facile de voir que, pourvu que X ne soit pas idempotent, toutes ces sous-algèbres sont isomorphes et ont les mêmes équations pleines et principales.

c. Règle de formation des puissances. — Les propriétés spéciales aux train algebras de rang 3 entraînent l'existence des règles suivantes pour le calcul des puissances :

$$a + b = b + a; \qquad ab = ba; \qquad a(b + c) = ab + ac;$$
$$(a + b) + c \neq a + (b + c); \qquad ab.c = a.bc; \qquad (b + c)\,a = ba + ca.$$

Exemples.

Nous allons donner quelques exemples d'équations au rang pour les algèbres rencontrées au chapitre précédent. Nous les écrirons pour un élément de poids 1, que nous noterons P; l'interprétation génétique de P est claire : P représente une population possédant une certaine répartition de gamètes, ou de génotypes, suivant les cas, et qui se reproduit.

1° ALGÈBRE GAMÉTIQUE. — L'algèbre gamétique est de rang 2. Son équation principale est pour P :

$$P(P - 1) = 0.$$

2° ALGÈBRE ZYGOTIQUE. — L'algèbre zygotique est de rang 3. Pour les puissances principales, nous avons l'équation

$$P^2(P - 1) = 0.$$

Pour les puissances pleines :

$$P^{[2],2} - P^2 = 0$$

3° CAS DU CROSSING-OVER. — Nous avons vu que l'algèbre étudiée dans ce cas était une train algebra de rang 3, avec l'équation principale :

$$x^3 - \frac{1}{2}(3 - y)\,\xi x^2 - \frac{1}{2}(1 - y)\,\xi^2 x = 0.$$

D'où l'équation pleine :

$$x^{2,2} - (2-y)\xi^2 x^2 + (1-y)\xi^3 x = 0.$$

Et pour l'élément P :

$$P^3 - \frac{1}{2}(1-y)P^2 + \frac{1}{2}(1-y)P = 0,$$

ou encore

$$P(P-1)\left(P - \frac{1-y}{2}\right) = 0.$$

Et

$$P^{2,2} - (2-y)P^2 + (1-y)P = 0.$$

Nous verrons plus loin d'autres calculs de racines pour les équations au rang, en particulier dans le cas de la polyploïdie.

CHAPITRE III.

Algèbres génétiques et « Special train algebras ».

Algèbres génétiques.

1° Quelques précisions de structure. — Nous avons vu au chapitre I que si

$$T = f(R_{n_1}, \ldots, R_{n_m}) \qquad n_i \in N),$$

alors $T^n = 0$.

L'élément T est donc nilpotent. L'algèbre des transformations correspondant aux éléments de N est une algèbre associative formée d'éléments nilpotents, elle est donc nilpotente. N est donc un idéal nilpotent de A, et est contenu dans le radical R de A. D'autre part, d'après la définition même du noyau, A — N étant isomorphe à F, R est contenu dans N. Donc R = N.

Le noyau de la fonction poids est alors le radical de A.

Nous avions démontré au chapitre I que toute algèbre génétique est « train algebra ». La réciproque n'est pas vraie, considérons en effet un corps F de caractéristique 2, et l'algèbre engendrée sur F par (I, v_1, v_2, v_3) avec pour table :

$$I v_i = v_i \quad \text{pour tout } i; \qquad I^2 = I; \qquad v_i^2 = 0 \quad \text{pour tout } i;$$
$$v_1 v_2 = v_3; \qquad v_2 v_3 = v_1; \qquad v_{31} = v_2.$$

Posons

$$x \in \mathrm{A}, \qquad x = \xi \mathrm{I} + z, \qquad z \in (v_1, v_2, v_3),$$

A est « train algebra », car $\omega(x) = \xi$ est une fonction poids de A, et d'autre part, puisque $z^2 = 0$ pour tout z de $\mathrm{N} = (v_1, v_2, v_3)$, $z^2 = (x - \xi \mathrm{I})^2 = 0$. L'équation principale est donc

$$x^3 + \xi^2 x = 0.$$

Cependant $\mathrm{N}^2 = \mathrm{N}$, N n'est pas nilpotent et A n'est pas une algèbre génétique.

Nous avons vu d'autre part que pour étudier la structure d'une algèbre, il est important de savoir si elle a ou non des idempotents. Il est facile de construire un exemple d'algèbre génétique n'ayant pas d'idempotents.

Il suffit pour cela que l'équation principale de cette algèbre génétique soit telle que si l'on y fait $x^2 = x$, $(x \neq 0)$, l'équation en ξ obtenue n'admette pas pour racine 1.

Une algèbre génétique — ou même une « train algebra » — contient un idempotent *i*, si et seulement s'il existe une sous-algèbre associative de A qui n'est pas contenue dans N.

2° Algèbres génétiques et algèbres de Jordan. — Il est facile de voir que les algèbres gamétiques et zygotiques sont des algèbres de Jordan; tandis que l'algèbre A″ déduite par duplication de l'algèbre zygotique ne l'est pas : en effet, une algèbre de Jordan est toujours à puissances associatives; or, dans A″ : $p_1^4 = 0$ tandis que $p_1^2 p_1^2 = 2^{-8} p_5 \neq 0$.

D'autre part, l'étude faite au chapitre précédent, sur les train algebras commutatives de rang 2 montre aisément que celles-ci sont des algèbres de Jordan; nous avions d'ailleurs vu qu'elles sont à puissances associatives.

Cela nous amène à considérer le cas des algèbres génétiques qui sont en même temps des algèbres de Jordan, sur un corps F de caractéristique différente de 2.

Ces algèbres, étant de Jordan, possèdent au moins un idempotent, qui est d'ailleurs contenu dans l'algèbre engendrée par un élément quelconque de poids 1. Nous avons vu que les valeurs propres de la transformation R_e, e étant un idempotent, sont les nombres $0, \frac{1}{2}, 1$, et uniquement ceux-ci.

C'est-à-dire que l'équation :

$$xe = \beta x$$

n'a de solutions que pour $\beta = 0, \frac{1}{2}, 1$. Soit $A_e(\beta)$ l'ensemble des $x \in A$ tels que $xe = x\beta$; nous avons alors

$$A = A_e(1) + A_e\left(\frac{1}{2}\right) + A_e(0).$$

L'algèbre T (A) étant une algèbre pondérée, dont la fonction poids θ a pour valeur :

$$\theta(T) = \alpha + f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p), \qquad \xi_i = \omega(x_i),$$

nous pouvons donner l'une des valeurs propres de T. En effet : $\varphi(\lambda) = |\lambda I - T|$ étant le polynome caractéristique, nous avons

$$\varphi(T) = 0 \qquad \text{et} \qquad \theta[\varphi(T)] = \varphi[\theta(T)] = 0,$$

$\theta(T)$ est l'une des racines de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$.

Si A *est de plus une algèbre de Jordan, nous allons démontrer que les valeurs propres de* $T \in T(A)$ *sont au plus au nombre de trois :*

$$\alpha; \quad \theta(T); \quad \alpha + f\left(\frac{1}{2}\xi_1 \frac{1}{2}\xi_2, \ldots, \frac{1}{2}\xi_p\right), \qquad \text{avec } \xi_i = \omega(x_i).$$

Les ordres de multiplicité de ces racines sont les ordres des sous-espaces $A_e(0)$, $A_e(1)$, $A_e\left(\frac{1}{2}\right)$.

En effet :

$$f(R_{\xi_1 e}, R_{\xi_2 e}, \ldots) = \operatorname{diag}\left\{f(\xi_1, \xi_2, \ldots) I_1, f\left(\frac{1}{2}\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \ldots\right) I_{\frac{1}{2}}, 0\right\}$$

où I_β désigne l'opération identique dans $A_e(\beta)$.

A étant une algèbre génétique, nous avons

$$|\lambda I - I| = |(\lambda - \alpha) I - f(R_{x_1}, \ldots)| = |(\lambda - \alpha) I - f(R_{\xi_1 e}, R_{\xi_2 e}, \ldots)|$$

La fonction caractéristique de T est donc

$$(\lambda - \alpha)^{t_0}[\lambda - \theta(T)]^{t_1}\left[\lambda - \left\{\alpha + f\left(\frac{1}{2}\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \ldots\right)\right\}\right]^{t_{\frac{1}{2}}},$$

t_0, t_1, $t_{\frac{1}{2}}$ étant les ordres de A_e (0), A_e (1) et $A_e\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ce qui nous donne bien le résultat cherché.

« **Special train algebras** ».

Nous allons considérer une special train algebra commutative. Il est possible de mettre une telle algèbre A sous une forme qu'on appellera canonique, et nous allons voir de quelle façon. Cela nous permettra alors de démontrer le résultat annoncé plus haut : une « special train algebra » est une algèbre génétique.

1° FORME CANONIQUE DE A. — Nous allons exploiter les hypothèses de définition.

— A est pondérée : nous allons donc prendre pour base :

$$(A_0, u_1, \dots, u_{n-1}),$$

A_0 étant de poids 1 et $(u_1, \dots, u_{n-1})$ formant une base du noyau N.

Nous écrivons alors la table de multiplication sous la forme

$$\begin{aligned} A_0^2 &= A_0 + (u_k), \\ A_0 u_i &= (u_k), \\ u_i u_j &= (u_k). \end{aligned}$$

La notation (u_k) désignant une combinaison linéaire des u_k.

— N est nilpotent d'altitude α : c'est-à-dire :

$$0 = N^{(\alpha)} \subset N^{(\alpha-1)} \subset \dots \subset N^{(1)} \subset N.$$

Nous pouvons alors répartir les éléments de la base de N en ensembles de U_0-éléments, U_1-éléments, etc., de sorte que les U_0-éléments appartiennent à N et non à $N^{(1)}$, les U_k-éléments à $N^{(k)}$ et non à $N^{(k+1)}$.

Il en résulte que le produit de deux U_0-éléments appartient à $N^{(1)}$, etc.

— Enfin les sous-ensembles N, $N^{(1)}, \dots, N^{(\alpha-1)}$ sont des idéaux de A.

Il en résulte que

$$\begin{aligned} A_0(U_0) &= (U_0, U_1, \dots), \\ A_0(U_1) &= (U_1, U_2, \dots), \\ A_0(U_\theta) &= (U_\theta, U_{\theta+1}, \dots). \end{aligned}$$

Considérons maintenant chaque ensemble U_θ d'éléments de la base comme formant un vecteur dont les composantes sont les éléments de U_θ.

Alors

$$A_0 U_\theta = p_\theta U_\theta + q_\theta U_{\theta+1} + \dots,$$

où P_θ est une matrice carrée et où p_θ, r_θ, ..., sont des matrices rectangulaires en général.

Une transformation linéaire de A sur les U_θ, soit H, donne $V_\theta = H(U_\theta)$, et $U_\theta = H^{-1}(V_\theta)$

$$A_0 V_\theta = H_{p_\theta} H^{-1}(V_\theta) + H_{q_\theta} U_{\theta+1} + \ldots.$$

Si H est la matrice qui transforme p_θ en matrice diagonale, et si cette opération a été effectuée pour chaque U_θ, on dira que A a été ramenée à sa forme canonique. Pour la suite, il suffira que chaque matrice p_θ ait été réduite à sa forme jacobienne, c'est-à-dire qu'elle ait ses valeurs propres sur la diagonale et des o en dessous. Alors, en notant λ_i les valeurs propres des matrices p_θ (il y a n nombres λ_i en tout), si nous posons

$$x = \xi A_0 + \sum_{1}^{n-1} \alpha_i u_i,$$

ce qui entraîne $\xi = \omega(x)$.

La matrice de multiplication Γ_x prend la forme

$$\Gamma_x = \begin{pmatrix} \xi\lambda_1 & \star & \star & \star \\ 0 & \xi\lambda_2 & & \star \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \xi\lambda_n \end{pmatrix}.$$

Nous allons en déduire le résultat annoncé.

2° Une « special train algebra » est une algèbre génétique. — Posons, comme plus haut,

$$T = \alpha T + f(R_{x_1}, \ldots, R_{x_p}).$$

Alors, d'après la forme de Γ_x :

$$f(\Gamma_{x_1}, \ldots, \Gamma_{x_p}) = \begin{pmatrix} f(\xi_1\lambda_1, \xi_2\lambda_1, \ldots) & \ldots & \ldots \\ 0 & f(\xi_1\lambda_2, \xi_2\lambda_2, \ldots) & \ldots \\ 0 & 0 & f(\xi_1\lambda_n, \ldots) \end{pmatrix}$$

d'où l'équation caractéristique de T.

$$|\lambda I - T| = |(\lambda - \alpha)I - f(R_{x_1}, \ldots, R_{x_p})|,$$
$$|\lambda I - T| = |(\lambda - \alpha - \eta_1)(\lambda - \alpha - \eta_2)\ldots(\lambda - \alpha - \eta_n),$$

avec

$$\eta_i = f(\xi_1\lambda_i, \xi_2\lambda_i, \ldots, (\xi_p\lambda_i).$$

Donc les coefficients de $|\lambda I - T|$ ne dépendent que des $\omega(x_i)$ puisqu'ils ne dépendent que des $\xi_i = \omega(x_i)$, et des λ_i, qui sont déterminés par la donnée de A. A est donc une algèbre génétique.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE PLUS PARTICULIÈRE DES SPECIAL TRAIN ALGEBRAS RENCONTRÉES EN GÉNÉTIQUE.

Nous allons nous intéresser tout spécialement dans ce chapitre aux algèbres rencontrées en génétique et à leurs idempotents. Comme nous l'avons dit plus haut, en effet, les idempotents jouent un rôle important en génétique, car ils représentent des populations stables.

Étude des idempotents.

Nous prenons comme base de A :

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n) = (A_0, u_1, \ldots; u_{n-1}),$$

comme nous l'avions fait au chapitre précédent, avec $\omega(A_0) = 1$ et $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ étant une base du noyau N.

La table de multiplication s'écrit

$$e_i e_j = \sum_k \gamma_{ijk} e_k,$$

avec

$$\gamma_{111} = 1; \qquad \gamma_{1jk} = 0 \quad \text{pour} \quad k < j;$$

et

$$\gamma_{ijk} = 0 \quad \text{pour} \quad i, j > 1 \quad \text{et} \quad k \leq \max(i, j).$$

D'autre part, on voit que les γ_{1jj} sont les éléments de F notés λ au chapitre précédent, c'est-à-dire les valeurs propres de R_{A_0}. On a nécessairement $\lambda_1 = 1$. Nous pouvons alors démontrer le premier théorème.

1° THÉORÈME 1. — *Toute special train algebra possède un idempotent non nul unique, pourvu que* $2\lambda_i$ *soit différent de* 1 *pour tout* i.

Nous allons donc construire un idempotent $x = \sum_1^n x_i e_i$, et le mode de construction prouvera en même temps existence et unicité.

Dire que x est idempotent, c'est dire qué :

$$\left(\sum_1^n x_i e_i\right)^2 = \sum_1^n x_i e_i.$$

Nécessairement, $x_1 = 1$.

Nous avons

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)^2 = \sum_1^n x_i^2 e_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i x_j e_i e_j.$$

Nous allons considérer un élément de base déterminé, soit e_m, et chercher la forme de son coefficient dans ce développement.

Le coefficient de e_m est

$$\sum_i x_i^2 \gamma_{iim} + \sum_{i \neq j} x_i x_j \gamma_{ijm},$$

or l'étude de la table de multiplication de A nous montre aisément que ce coefficient est de la forme

$$2\lambda_m x_m + \mathrm{P}(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}),$$

P étant un polynome dont les coefficients dépendent des γ_{ijk}.

Nous avons donc à résoudre :

$$2\lambda_m x_m + \mathrm{P}(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}) = x_m.$$

Cette équation montre que le calcul des x_i s'effectue de proche en proche :

Sachant que $x_1 = 1$, nous en déduisons x_2, puis x_3, ..., x_n; ce calcul est toujours, possible puisque nous avons supposé $2\lambda_m \neq 1$ pour tout m; et son résultat est unique.

2° Corollaires.

a. Cas où $2\lambda_2 = 1$; $2\lambda_i \neq 1$ *pour* $i > 2$. — Nous avons toujours $x_1 = 1$.

L'équation qui donne x_2 est

$$2\lambda_2 x_2 + \gamma_{112} x_1^2 = x_2.$$

Puisque $2\lambda_2 = 1$, cette équation est une identité, pourvu que $\gamma_{112} = 0$.

Donc si $\gamma_{112} \neq 0$ il n'existe pas d'idempotent non nul dans A.

Si $\gamma_{112} = 0$, le nombre x_2 est arbitraire; on calcule ensuite x_3, ..., x_n de façon unique, comme au 1°, si x_2 est donné; il y a donc une famille d'idempotents à un paramètre; ce paramètre est la coordonnée correspondante à celui des λ_i qui vaut $\frac{1}{2}$ (dans un corps F de caractéristique différente de 2).

b. Cas où r des nombres λ_i exactement valent $\frac{1}{2}$. — Pourvu que la table de multiplication de A vérifie certaines conditions que nous n'expliciterons pas, A possède alors une famille d'idempotents à r paramètres. Si toutes ces conditions ne sont pas vérifiées, il n'y aura pas en général d'idempotent non nul.

Nous allons nous placer maintenant dans le cas où F est le corps des réels.

Nous pouvons alors parler de convergence: une suite d'éléments $y_i \in A$ tend vers $y \in A$ si et seulement si, en posant :

$$y_i = \sum_{m=0}^{n} x_{mi} e_m, \qquad y = \sum_{m=0}^{n} x_m e_m,$$

on a

$$x_{mi} \to x_m \quad \text{pour tout } m.$$

La convergence ainsi définie est nécessairement indépendante de la base choisie.

3° Théorème 2. — *Dans une special train algebra, la suite des puissances pleines d'un élément de poids* 1, *tend vers un idempotent, pourvu que les nombres λ_i pour $i > 1$ aient une valeur absolue inférieure à $\frac{1}{2}$.*

Démonstration. — Soit a un élément de poids 1. La suite des puissances pleines de a s'écrit

$$a_0 = a, \qquad \dots, \qquad a_{n+1} = a_n^2, \qquad \dots.$$

Posons

$$a_i = \sum_{m=0}^{n} x_{mi} e_m.$$

Il faut prouver que la suite des x_{mi} tend vers la valeur de x_m trouvée au 1° dans le calcul des composantes de l'idempotent, et cela pour tout m.

Nous avons $x_{1i} = 1$ pour tout i, donc la suite x_{1i} tend bien vers $x_1 = 1$.

Nous allons faire une démonstration par récurrence : supposant que $x_{1i} \to x_1$, ..., $x_{mi} \to x_m$, nous allons montrer que $x_{m+1,i} \to x_{m+1}$. D'après la construction de la suite a_i, nous avons la relation :

$$x_{m+1,i+1} = 2\lambda_{m+1} x_{m+1,i} + P(x_{1i}, \dots, x_{mi}),$$

où P est un polynome de degré 2 dépendant de la table de multiplication de A.

Alors

$$P(x_{1i}, \ldots, x_{mi}) \to P(x_1, \ldots, x_m).$$

Les théorèmes sur les limites nous disent que $x_{m+1,i+1}$ a une limite donnée par $2\lambda_{m+1}x_{m+1} + P(x_1, \ldots, x_m)$ pourvu que $|2\lambda_{m+1}| < 1$.

Comme nous nous plaçons dans cette hypothèse, et puisque le polynome P est le polynome introduit au 1°, la suite $x_{m+1,i+1}$ a une limite qui est précisément x_m.

Le théorème s'étend aux cas où plusieurs des λ_i valent $\frac{1}{2}$, pourvu que la table de multiplication vérifie certaines conditions. Ainsi lorsque seul λ_1 vaut $\frac{1}{2}$, le théorème est vrai pourvu que $\gamma_{11} = 0$; autrement la suite x_{1i} est une progression arithmétique qui n'a pas de limite.

Nous allons utiliser ces théorèmes dans l'étude des algèbres construites à partir des phénomènes de mutation, de sex-linkage, et de polyploïdie.

Algèbres de mutation.

1° Algèbre gamétique. — Nous considérons toujours un caractère présentant deux gènes allèles D et R, mais nous tenons compte cette fois des phénomènes de mutation, c'est-à-dire qu'une proportion r de gamètes D se transforme en gamètes R et une proportion S de gamètes R se transforme en gamètes D.

Nous avons donc pour l'algèbre gamétique la table de multiplication suivante :

$$D^2 = (1 - r)D + rR; \qquad R^2 = sD + (1 - s)R,$$

$$DR = \frac{1}{2}[(1 - r)D + rR] + \frac{1}{2}[sD + (1 - s)R]$$

ou

$$DR = \frac{1}{2}(1 - r + s)D + \frac{1}{2}(1 - s + r)R.$$

Faisons un changement de base, posant :

$$u = D, \qquad v = D - R.$$

Alors la table devient :

$$u^2 = u - rv; \qquad v^2 = 0; \qquad uv = \frac{1}{2}(1 - r - s)v;$$

Nous voyons alors sous cette forme que l'algèbre ainsi construite est « special train algebra ».

Et l'on voit immédiatement que l'une des valeurs propres λ_i n'est égale à $\frac{1}{2}$ que si $r + s = 0$.

Il y a donc un idempotent unique si $r + s \neq 0$ et les puissances pleines d'un élément de poids 1 ont cet idempotent pour limite pourvu que $0 < r + s < 2$.

L'interprétation génétique n'est évidemment valable que pour $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$. Donc la condition $r + s \neq 0$ est toujours réalisée sauf dans le cas $r = 0$, $s = 0$ (absence de mutation) pour lequel on sait que $P' = P$, c'est-à-dire que la stabilité est atteinte à la seconde génération. Et la condition $0 < r + s < 2$ est toujours réalisée, sauf pour $r = 1$, $s = 1$: les puissances pleines d'un élément de poids 1, soit $P = \alpha D + PR$ avec $\alpha + \beta = 1$, oscillent alors entre $\alpha D + \beta R$ et $\beta D + \alpha R$, il y a instabilité.

2° Algèbre zygotique. — Sa table de multiplication s'écrit :

$$A^2 = (1-r)^2 A + 2(1-r)rB + r^2 C,$$

$$B^2 = \frac{1}{4}(1-r+s)^2 A + \frac{1}{2}(1-r+s)(1+r-s)B + \frac{1}{4}(1+r-s)^2 C,$$

$$C^2 = S^2 A + 2(1-s)sB + (1-s)^2 C,$$

$$AB = \frac{1}{2}(1-r)(1-r+s)A + \frac{1}{2}[1+(1-2r)(r-s)B + \frac{1}{2}r(1+r-s)C,$$

$$BC = \frac{1}{2}s(1-r+s)A + \frac{1}{2}[1+(1-2s)(s-r)]B + \frac{1}{2}(1-s)(1+r-s)C,$$

$$AC = (1-r)sA + (1-r+2rs-s)B + (1-s)rC,$$

où nous avons posé :

$$A = D^2, \qquad B = DR, \qquad C = R^2.$$

Par un changement de base :

$$a = A; \qquad b = A - B; \qquad c = A - 2B + C.$$

Nous obtenons la nouvelle table :

$$a^2 = a - 2rb + r^2 c; \qquad b^2 = \frac{1}{4}(1-r-s)^2 C,$$

$$ab = \frac{1}{2}(1-r-s)(b-rc); \qquad ac = bc = c^2 = 0.$$

Nous avons donc encore une « special train algebra ».

Hérédité liée au sexe.

Nous allons étudier dans ce paragraphe l'algèbre zygotique qu'on peut construire dans les cas où l'on doit distinguer les deux sexes.

Supposons toujours que le caractère dont nous considérons la transmission héréditaire possède deux gènes allèles, mais nous supposons cette fois que ce sont les chromosomes X qui portent les loci correspondants.

Nous avons alors cinq génotypes : deux pour les individus XY (les mâles en général) : $A_1 = D$; $C_1 = R$; trois pour les individus XX (les femelles) :

$$A_2 = DD; \qquad B_2 = DR; \qquad C_2 = RR;$$

L'algèbre considérée est donc d'ordre 5; étant donné que deux individus de même sexe ne donnent pas de progéniture, nous aurons pour table :

$$A_1^2 = 0; \qquad C_1^2 = 0; \qquad A_2^2 = 0; \qquad B_2^2 = 0; \qquad C_2^2 = 0;$$

$$A_1 A_2 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2); \qquad C_1 C_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2);$$

$$A_1 B_2 = \frac{1}{4}(A_1 + C_1 + A_2 + B_2),$$

$$A_1 C_2 = \frac{1}{2}(C_1 + B_2),$$

$$A_2 C_1 = \frac{1}{2}(A_1 + B_2),$$

$$B_2 C_1 = \frac{1}{4}(A_1 + C_1 + B_2 + C_2).$$

Nous voyons donc que cette algèbre possède une base dont tous les éléments sont nilpotents; elle n'est donc pas pondérée et *a fortiori* n'est pas spécial train algebra.

Nous allons voir cependant que A contient une sous-algèbre qui est special train algebra; et cette sous-algèbre n'est autre que le sous-ensemble A^2, qui contient tous les éléments représentant des populations.

Pour le voir, nous allons poser comme nouvelle base de A :

$$a = A_1; \qquad u = A_1 + A_2; \qquad v = A_1 - C_1; \qquad w = A_1 - C_1 + A_2 - C_2;$$
$$z = A_2 - 2B_2 + C_2.$$

La table devient alors :

$$a^2 = 0; \quad ua = \frac{1}{2}u; \quad va = 0;$$

$$wa = \frac{1}{2}w + \frac{1}{4}z; \quad za = 0;$$

$$u^2 = u; \quad uv = \frac{1}{4}w - \frac{1}{4}v + \frac{1}{4}z;$$

$$uw = \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}z; \quad uz = 0;$$

$$v^2 = 0; \quad vw = \frac{1}{2}z; \quad vz = 0;$$

$$w^2 = z; \quad wz = z^2 = 0.$$

Le sous-ensemble A^2 est alors engendré par les éléments (u, v, w, z), qui en forment une base. En prenant pour fonction poids dans A^2 la fonction w définie par :

$$w(x) = \xi_1.$$

Si

$$x = \xi_1 u + \xi_2 v + \xi_3 w + \xi_4 z,$$

On voit que l'algèbre A^2 est pondérée; d'autre part u a alors pour poids 1, et le sous-ensemble (v, w, z), qui est l'idéal N, est tel que :

$$(v, w, z)^2 = z; \quad (v, w, v)^3 = 0.$$

A° est bien special train algebra.

Recherchons les idempotents de A, en appliquant la méthode vue précédemment :

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -\frac{1}{4}; \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}; \quad \lambda_4 = 0,$$

soit

$$e = \xi_1 u + \xi_2 v + \xi_3 w + \xi_4 z$$

l'idempotent cherché :

$\xi_1 = 1$; comme $\gamma_{112} = 0$, $\xi_2 = 0$; pour le calcul de ξ_3, nous obtenons : $\xi_3 = \xi_3$, équation indéterminée, enfin $\xi_4 = \xi_3^2 + \xi_3$.

Nous obtenons donc une famille d'idempotents à un paramètre :

$$e = u + \xi w + (\xi + \xi^2) z.$$

De même, les puissances pleines d'un élément de poids 1 tendent vers l'un des idempotents trouvés.

En revenant à la base introduite génétiquement, les idempotents s'écrivent :

$$(1+\xi)\,A_1+(1+\xi)^2 A_2-\xi C_1+\xi^2 C_2-2\xi(1+\xi)\,B_2.$$

Pour homogénéiser, posons :

$$\xi+1=\alpha; \qquad \xi=-\beta;$$

alors

$$e=\alpha A_1+\beta C_1+\alpha^2 A_2+2\alpha\beta B_2+\beta^2 C_2, \qquad \text{avec} \quad \alpha+\beta=1.$$

Nous allons maintenant considérer les mutations dans le cas d'hérédité liée au sexe.

Sex-linkage avec mutations.

Avec les mêmes notations que précédemment :

$$A_1 A_2=\frac{1}{2}[(1-r)\,A_1+rC_1+(1-r)^2 A_2+2r(1-r)\,B_2+r^2 C_2],$$

$$C_1 C_2=\frac{1}{2}[sA_1+(1-s)\,C_1+2s(1-s)\,B_2+s^2 A_2+(1-s)^2 C_2],$$

$$\begin{aligned} C_1 A_2=\frac{1}{2}\{&(1-r)\,A_1+rC_1+s(1-r)\,A_2\\ &+[rs+(1-r)(1-s)]B_2+r(1-s)\,C_2\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 C_2=\frac{1}{2}\{&sA_1+(1-s)\,C_1+s(1-r)\,A_2\\ &+[rs+(1-r)(1-s)]B_2+r(1-s)\,C_2\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 B_2=\frac{1}{4}\{&(1-r+s)\,A_1+(1-r+s)\,C_1+(1-r)(1-r+s)\,A_2\\ &+[1+(1-2r)(r-s)]B_2+r(1+r-s)\,C_2\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 B_2=\frac{1}{4}\{&(1-r+s)\,A_1+(1+r-s)\,C_1+s(1+s-r)\,A_2\\ &+[1+(1-2s)(s-r)]B_2+(1-s)(1+r-s)\,C_2\}.\end{aligned}$$

Comme au paragraphe précédent nous posons :

$$a=A_1; \qquad u=A_1+A_2; \qquad v=A_1-C_1;$$
$$w=A_1-C_1+A_2-C_2; \qquad z=A_2-2B_2+C_2.$$

Et nous en déduisons la table :

$$a^2 = 0; \qquad ua = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}rw - \frac{1}{2}r(1-r)z; \qquad va = 0;$$

$$wa = \frac{1}{4}(1-r-s)v + \frac{1}{4}(1-r-s)w + \frac{1}{4}(1-2r)(1-r-s)z; \qquad za = 0;$$

$$u^2 = u - rw - r(1-r)z;$$

$$uv = \frac{1}{4}(1-r-s)w - \frac{1}{4}(1-r-s)v + \frac{1}{4}(1-2r)(1-r-s)z;$$

$$uw = \frac{1}{2}(1-r-s)w + \frac{1}{4}(1-2r)(1-r-s)z;$$

$$uz = 0; \qquad v^2 = 0; \qquad vw = \frac{1}{2}(1-r-s)^2 z; \qquad vz = 0;$$

$$w^2 = (1-r-s)^2 z; \qquad wz = 0; \qquad z^2 = 0.$$

De même que plus haut, le sous-ensemble A' est special train algebra, et nous pouvons prendre pour base (u, v, w, z). Pour en connaître les idempotents, nous calculons les λ_i :

$$\lambda_1 = 1; \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{4}(1-r-s); \qquad \lambda_3 = \frac{1}{2}(1-r-s); \qquad \lambda_4 = 0.$$

Nous voyons que, pourvu que $r + s \neq 0$, il existe un idempotent unique non nul. La distribution génotypique tend vers une distribution stable pourvu que $r = s \neq 1$.

Polyploïdie.

Nous avons jusqu'à présent considéré des cas de diploïdie, c'est-à-dire les cas où les cellules contiennent exactement deux représentants de chaque sorte de chromosome. C'est le cas le plus courant, mais il arrive que chez certaines espèces il y ait plus de deux représentants pour chaque sorte de chromosome. C'est ce qu'on appelle la polyploïdie. Ainsi les tétraploïdes ont quatre ensembles de chromosomes homologues, et les hexaploïdes en ont six. Nous allons considérer la transmission héréditaire d'un caractère présentant deux modalités, se traduisant par les deux gènes allèles A et a.

Dans le cas de la tétraploïdie, un individu aura pour formule, par exemple, le type AA Aa; il libérera alors deux sortes de gamètes, AA et Aa; si on le croise avec un individu aa aa, on obtiendra une progéniture de deux types différents : AA aa et Aa aa. Nous allons étudier le cas général ou les cellules d'un individu contiennent $2n$ ensembles de chromosomes homologues. Nous en déduirons l'étude de l'algèbre gamétique, puis de l'algèbre zygotique dans le cas de la polyploïdie.

1° ALGÈBRE GAMÉTIQUE. — Nous noterons $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_i, \ldots, A_0$ les diverses possibilités que peut présenter une suite de n chromosomes : ainsi A_i désignera la suite comprenant i gènes A et $n-i$ gènes a. La formule d'un individu s'écrit alors :

$$A_i A_j, \qquad \text{avec} \quad i = 0, 1, \ldots, n; \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

La loi de multiplication de l'algèbre gamétique, dont la base est constituée par les A_i, exprime les proportions des différents gamètes que peut libérer un individu $A_i A_j$:

$$A_i A_j = \frac{1}{C_{2n}^n} \sum_{k=0}^{n} C_{i+j}^k \, C_{2n-i-j}^{n-k} \, A_k,$$

avec la convention suivante :

$$C_n^r = 0 \qquad \text{pour} \quad r < 0 \quad \text{ou} \quad r > n.$$

Pour prouver que cette algèbre est special train algebra, nous allons effectuer un changement de base, en posant

$$B_p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i A_{n-i}$$

et nous allons chercher la table de multiplication de cette base.

Pour cela, utilisant les propriétés des combinaisons, nous allons démontrer deux résultats :

$$a. \quad \left\{ \begin{array}{lll} \displaystyle\sum_{r=0}^{s} (-1)^r C_s^r P_{2n-r} & & \\ = C_n^s (C_{2n}^s)^{-1} \left[\displaystyle\sum_{r=0}^{s} (-1)^r C_s^r A_{n-r} \right] & & \text{pour} \quad 0 \leqq s \leqq n, \\ = \qquad 0 & & \text{pour} \quad n < s \leqq 2n, \end{array} \right.$$

avec

$$P_t = (C_{2n}^n)^{-1} \sum_{i=0}^{n} C_t^i \, C_{2n-t}^{n-i} \, A_i, \qquad 0 \leqq t \leqq 2n,$$

en fait, $P_t = A_i A_j$ avec $i + j = t$.

En effet :

$$\sum_{r=0}^{s} (-1)^r C_s^r P_{2n-r} = (C_{2n}^2)^{-1} \sum_{r=0}^{s} \sum_{t=0}^{n} (-1)^r C_s^r C_{2n-r}^t \, C_r^{n-t} A_t,$$

or

$$C_s^r\, C_r^p = C_s^p\, C_{s-p}^{r-p} \qquad \text{et} \qquad C_n^t - C_{n-1}^t = C_{n-1}^{t-1},$$

d'où :

$$\sum_{t=0}^{s} (-1)^t C_s^t\, C_{n-t}^t = C_{n-s}^{t-s},$$

ou encore

$$\sum_{t=0}^{s-(n-t)} (-1)^t C_{s-(n-t)}^t\, C_{n+t-t}^t = C_{2n-s}^{n-s}.$$

En sommant par rapport à r :

$$\sum_{r=n-t}^{s} (-1)^{r-(n-t)} C_{s-(n-t)}^{r-(n-t)}\, C_{n-r}^t = C_{2n-r}^{n-s}.$$

Nous obtenons donc l'expression :

$$(C_{2n}^n)^{-1}\sum_{t=0}^{n}(-1)^{n-t}C_{n-t}^s\, C_{2n-s}^{n-s}\, A_t = (C_{2n}^n)^{-1}\sum_{t=0}^{n}(-1)^t C_s^t\, C_{2n-s}^{n-s}\, A_{n-t}$$

ou encore

$$\sum_{r=0}^{s}(-1)^r C_s^r P_{2n-r} = C_n^s (C_{2n}^s)^{-1}\left[\sum_{r=0}^{s}(-1)^r C_s^r A_{n-r}\right]$$

qui est la relation cherchée.

$b.$
$$\begin{cases} B_i B_j = (C_{2n}^{i+j})^{-1} C_n^{i+j} B_{i+j} & \text{pour } i+j \leq n, \\ B_i B_j = \qquad 0 & \text{pour } i+j > n. \end{cases}$$

En effet :

$$\left[\sum_{t=0}^{s}(-1)^t C_s^t A_{n-t}\right]\left[\sum_{t=0}^{t}(-1)^t C_t^t A_{n-t}\right] = \sum_{t=0}^{s+t}(-1)^t C_{s+t}^t P_{2n-t}.$$

D'autre part, nous pouvons utiliser le résultat a, et nous en déduisons immédiatement que :

$$\begin{aligned} B_i B_j &= (C_{2n}^{i+j})^{-1} C_n^{i+j} B_{i+j} && \text{pour } i+j \leq n, \\ B_i B_j &= \qquad 0 && \text{pour } i+j > n. \end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé la table de multiplication de la base B_p.

La forme même de cette table prouve le résultat cherché : l'algèbre gamétique rencontrée dans le cas de polyploïdie est special train algebra, et l'ensemble des λ_i est

$$\lambda_i = (C_{2n}^i)^{-1} C_n^i, \qquad 0 \leq i \leq n.$$

Nous avons bien $\lambda_0 = 1$; d'autre part, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, et les autres valeurs de λ_i sont inférieures à $\frac{1}{2}$.

Nous allons étudier la forme des idempotents de cette algèbre, et pour cela expliciter la formule de changement de base entre la base $\{A_i\}$ et la base $\{B_p\}$.

Un élément de l'algèbre a pour expression par rapport à la base A_i :

$$x = \sum_{i=0}^{n} x_i A_{n-i}.$$

D'autre part,

$$B_p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i A_{n-i}.$$

Posons

$$x = \sum_{p=0}^{n} y_p B_p.$$

Remplaçant B_p par son expression de définition :

$$x = \sum_{p=0}^{n} y_p \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i A_{n-i}.$$

D'où, par identification,

$$x_i = (-1)^i \sum_{p=i}^{n} y_p C_p^i.$$

Et enfin inversement :

$$\sum_{i=0}^{n} x_i A_{n-i} = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \left[\sum_{s=p}^{n} C_s^p x_s \right] B_p.$$

Un élément de cette algèbre représente une population pourvu qu'on ait $x_i \geq 0$ pour tout i et $\sum_{i=0}^{n} x_i = 1$.

La composante x_i représente la proportion des types ayant i gènes a. Pour interpréter génétiquement les composantes y_p, remarquons que si z_p est la proportion d'individus ayant au moins P gènes a, nous avons :

$$z_p = (C_n^p)^{-1} \sum_{s=p}^{n} C_s^p x_s.$$

Alors :

$$\sum_{i=0}^{n} x_i A_{n-i} = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \left[\sum_{s=p}^{n} C_s^p x_s \right] B_p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p z_p B_p.$$

Donc

$$y_p = (-1)^p C_n^p z_p.$$

Nous allons en déduire le théorème suivant :

Pour qu'un élément non nul $z = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p z_p B_p$ *soit idempotent, il faut et il suffit qu'on ait* $z_p = z_1^p$ *pour tout* $p \geqq 1$.

Si ces conditions ne sont pas vérifiées, aucune puissance pleine de l'élément z n'est idempotente.

Démonstration. — Supposons que $z_p = z_1^p$, $p \geqq 1$,

$$\left[\sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p z_p B_p \right]^2 = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} (-1)^{p+q} C_n^p C_n^q z_p z_q B_p B_q.$$

Puisque

$$B_p B_q = (C_{2n}^{p+q})^{-1} C_n^{p+q} B_{p+q},$$

le coefficient de B_r dans le développement du carré devient :

$$(-1)^r (C_{2n}^r)^{-1} C_n^r \sum_{i=0}^{r} C_n^i C_n^{r-i} z_i z_{r-i}.$$

Si donc par hypothèse :

$$z_i = z_1^i ; \qquad z_{r-i} = z_1^{r-i} ;$$

alors,

$$z_i z_{r-i} = z_1^r = z_r.$$

Et comme

$$\sum_{i=0}^{r} C_n^i C_n^{r-i} = C_{2n}^r,$$

le coefficient de B_r dans le développement du carré est bien :

$$(-1)^r C_n^r z_r,$$

l'élément est idempotent, et la condition est suffisante.

Réciproquement, tout élément

$$z = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p z_p B_p,$$

où $z_0 = 1$; z_1 arbitraire; $z_p = z_1^p$ pour $p \geqq 1$ est idempotent.

En effet, il résulte de la partie directe qu'il existe des idempotents, or nous nous trouvons dans le cas où $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, tous les autres λ_i étant inférieurs à $\frac{1}{2}$. Les idempotents de l'algèbre forment donc une famille de paramètre z_1, qui est la famille considérée.

D'autre part aucune des puissances pleines d'un élément non idempotent n'est idempotente. Cela résulte de la démonstration du théorème 2 établie dans les généralités : si pour $\lambda \neq 0$, $a_1 \neq a_2$, alors $a_n \neq a_{n+1}$ pour tout n.

2° Algèbre zygotique. — Les bases de l'algèbre zygotique ont $2n$ éléments.

Si l'on appelle a_i le génotype possédant i gènes A, l'ensemble des $\{a_i\}$ $i = 0, 1, \ldots, 2n$, forme une base de l'algèbre.

Comme précédemment, si l'on pose

$$b_p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i a_{2n-i}.$$

On a une nouvelle base, dont la table s'écrit

$$\begin{aligned} b_p b_q &= (C_{2n}^p)^{-1} (C_{2n}^q)^{-1} (C_n^p) C_n^q b_{p+q}, \qquad & p, q \leqq n, \\ &= 0, & p \text{ ou } q > n. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne le résultat suivant :

L'algèbre zygotique, dans le cas de la polyploïdie, est une « special train algebra » dont la table de multiplication donne les nombres λ_i.

Comme pour l'algèbre gamétique, nous étudions l'existence d'idempotents. Nous avons :

$$x = \sum_{i=0}^{2n} x_i a_{2n-i} = \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p C_{2n}^p z_p b_p.$$

Et, de même que précédemment :

Pour qu'un élément non nul soit idempotent, il faut et il suffit que $z_p = z_1^p$ pour tout $0 \leqq p \leqq 2n$.

Mais ici, nous pouvons démontrer un résultat supplémentaire; en effet la base b_p est telle que $b_p\, b_q = 0$ si l'un des deux nombres p et q est supérieur à n. Considérons donc un élément z tel que $z_p = z_1^p$ pour $0 \leqq p \leqq n$. Il en résulte que dans z et dans z°, les coefficients de b_p pour $p \leqq n$ seront identiques.

Puisque $b_p\, b_q = 0$ pour $p > n$, les coefficients dans z^2 dépendent uniquement des coefficients des b_p pour $p \leqq n$ dans z. Par suite, $(z^2)^\circ = z^2$.

Si donc $z_p = z_1^p$ pour $0 \leqq p \leqq n$, z° est idempotent.

Nous allons maintenant introduire des mutations dans le cas de la polyploïdie.

Polyploïdie avec mutations.

Nous supposons donc toujours que nous sommes dans le cas de la polyploïdie. L'algèbre obtenue dans le cas où l'on introduit des mutations se déduit de l'algèbre gamétique étudiée ci-dessous par une transformation linéaire T. Appelons en effet r et s les taux de mutation respectifs des deux gènes.

Alors, nous avons :

$$\mathrm{T}(\mathrm{A}_l) = \sum_{t=0}^{n} \left[\sum_{u+v=t} \mathrm{C}_l^u\, \mathrm{C}_{n-l}^v (1-r)^u r^{l-u} (1-s)^{n-l-v} s^v \right] \mathrm{A}_t.$$

Nous allons en déduire les éléments transformés des B_p.

Si

$$\mathrm{T}(\mathrm{A}_l) = \sum_{t=0}^{n} a_{lt}\, \mathrm{A}_t,$$

nous avons

$$\mathrm{T}(\mathrm{A}_l) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \left[\sum_{t=0}^{n-p} \mathrm{C}_{n-p}^p\, a_{lt}\, \mathrm{B}_p \right]$$

En utilisant des développements de binome et les hypothèses de définition, on obtient $\mathrm{T}(\mathrm{B}_p)$:

$$\mathrm{T}(\mathrm{B}_p) = (1-r-s)^p \sum_{q=p}^{n} (-1)^{q-p}\, \mathrm{C}_{n-p}^{q-p}\, r^{q-p}\, \mathrm{B}_q.$$

Si l'on écrit alors $T(B_i)\,T(B_j)$; on voit que :

$$T(B_i B_j) = T(B_i)\,T(B_j).$$

D'où la table de multiplication de la base $\{t_i = T(B_i)\}$:

Pour $i + j \leqq n$:

$$t_i t_j = (C_{2n}^{i+j})^{-1} C_n^{i+j} (1 - r - s)^{i+j} \sum_{k=0}^{n-i-j} (-1)^k C_{n-i-j}^k t_{i+j+k} r^k,$$

$$= 0 \qquad i + j > n.$$

Il en résulte que l'algèbre gamétique ainsi construite est special train algebra. Et

$$\lambda_i = (C_{2n}^i)^{-1} C_n^i (1 - r - s)^i.$$

Il existe un idempotent non nul unique pourvu que $0 < r + s \leqq 2$.

Il y a stabilité si $r \neq s = 1$.

Lorsque $r = s = 1$, la stabilité est atteinte en une génération.

Mêmes résultats pour l'algèbre zygotique : c'est une special train algebra, ce qu'on voit en prenant pour éléments de base les $\theta_i = T(b_i)$:

$$\theta_i \theta_j = (C_{2n}^i)^{-1} (C_{2n}^j)^{-1} C_n^i C_n^j (1 - r - s)^{i+j}$$

$$\times \sum_{k=0}^{2n-i-j} (-1)^k C_{n-i-j}^k r^k \theta_{i+j+k} \qquad \text{pour} \quad i, j \leqq n,$$

$$\theta_i \theta_j = \qquad 0 \qquad \text{pour} \quad i \text{ ou } j > n.$$

BIBLIOGRAPHIE.

ETHERINGTON, *Genetic algebras* (*Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, t. 59, p. 242-258).

ETHERINGTON, *Commutative train algebras of rank* 2 *and* 3 (*J. London Math. Soc.*, t. 15, p. 136-149).

ETHERINGTON, *Special train algebras* (*Quart. J. Maths*, t. 12, p. 1-8).

ETHERINGTON, *Non associative algebras and the symbolism of genetics* (*Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, (B), t. 61, p. 24-42).

SCHAFER, *Structure of genetic algebras* (*Amer. J. Math.*, t. 71, p. 121-135).

GONSHOR, *Special train algebras arising in genetics* (*Proc. Edinburgh Math. Soc.*, (2), t. 12, p. 41-53).