MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

E. COMBET

Solutions élémentaires des dalembertiens généralisés

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 160 (1965)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1965__160__1_0>

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
Directeur : H. VILLAT

Fascicule 160

SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES DES DALEMBERTIENS GÉNÉRALISÉS

E. COMBET

1965
GAUTHIER-VILLARS
PARIS

INTRODUCTION [1]

Ce travail concerne la construction des solutions élémentaires scalaires, tensorielles et spinorielles, au sens de L. SCHWARTZ [1] et A. LICHNÉROWICZ [1], du laplacien (ou dalembertien généralisé) d'une varité V_m riemannienne, analytique, de type hyperbolique et orientée. Ce problème, déjà résolu par Mme CHOQUET-BRUHAT [1] est étudié ici par la méhode des séries de HADAMARD [1] et des fonctions holomorphes à valeurs distributions de GUELFAND et CHILOV [1].

Le chapitre I rappelle quelques résultats de géométrie riemannienne et certaines propriétés des distributions $(P \pm i\,0)^\lambda$ d'un espace plat ainsi que leur extension à V_m.

Le chapitre II est consacré au cas hyperbolique de signature $(p +, q -)$ où p et $q > 1$ (ultra-hyperbolique). La généralisation de la méthode à $\Delta + Cte$ et à $\Delta + B^\rho\, \partial_\rho + Cte$ est immédiate. Sur les espaces harmoniques, le problème se ramène à la résolution d'équations différentielles du type de Fuchs, comme dans le cas plat.

Dans le chapitre III, nous envisageons le cas hyperbolique normal où apparaissent les propriétés de support bien connues.

Le chapitre IV généralise ces résultats aux cas tensoriels et spinoriel (sur V_4). Le bi-tenseur de transport de la connexion correspondante joue un rôle fondamental.

Le chapitre V concerne d'abord l'invariance par isométrie des noyaux élémentaires déduits des solutions élémentaires, puis la construction de ces noyaux quand V_m est $\mathcal{C}^\infty$: nous retrouvons ici la méthode utilisée par Mme CHOQUET-BRUHAT ; nous achevons enfin sur le cas hyperbolique normal.

A Monsieur LICHNÉROWICZ et à Madame CHOQUET-BRUHAT, j'exprime ma profonde gratitude pour leurs conseils, leurs encouragements et l'intérêt qu'ils ont bien voulu accorder à ce travail. Je remercie également Monsieur LERAY pour ses conseils et ses remarques.

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie.

CHAPITRE I

PRÉLIMINAIRES

1 Tenseurs-distributions sur une variété riemannienne.

a) Soit V_m une variété riemannienne, orientée, de classe $\mathcal{C}^\infty$, d'élément de volume η, de métrique $g_{\alpha\beta}$, où ∇ désigne les dérivations covariantes pour cette métrique.

Nous désignons par $\mathfrak{D}_\Omega(\otimes p)$ l'espace des p-tenseurs de classe $\mathcal{C}^\infty$, à valeurs complexes, à support compact sur l'ouvert Ω de V_m et par $\mathfrak{D}'_\Omega(\otimes p)$ l'espace des p-tenseurs-distributions au sens de A. Lichnérowicz [1]. Si T est un p-tenseur localement sommable sur Ω, on a $T \in \mathfrak{D}'_\Omega(\otimes p)$ en posant, dans un système de coordonnées locales quelconques sur Ω :

$$\langle T, U \rangle = \int_\Omega T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(x)\, U^{\alpha_1 \dots \alpha_p}(x)\, \eta(x)$$

pour tout $U \in \mathfrak{D}_\Omega(\otimes p)$.

b) Dans le cas scalaire, ces espaces sont désignés par $\mathfrak{D}_\Omega$ et $\mathfrak{D}'_\Omega$. Les dérivations covariantes sont des applications continues $\mathfrak{D}'_\Omega(\otimes p) \to \mathfrak{D}'_\Omega(\otimes p + 1)$:

Pour $T \in \mathfrak{D}'_\Omega$, nous avons :

$$\langle \nabla_\alpha T, U^\alpha \rangle = - \langle T, \nabla_\alpha U^\alpha \rangle = \langle \partial_\alpha T, U^\alpha \rangle$$

pour tout $U \in \mathfrak{D}_\Omega(\otimes 1)$. Avec le laplacien scalaire (dalembertien généralisé) défini par

$$\Delta \equiv - \nabla^\rho \partial_\rho \equiv - g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \partial_\beta$$

il vient :

$$\langle \Delta T, \varphi \rangle = \langle T, \Delta\varphi \rangle$$

pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}_\Omega$.

Les espaces $\mathfrak{D}_\Omega$ et $\mathfrak{D}'_\Omega$ peuvent encore être définis d'une façon purement scalaire à condition de définir spécialement les effets des changements de coordonnées locales et des dérivations (M^{me} Choquet-Bruhat [2]).

c) La mesure $\delta_{x'}$ de Dirac relative au point $x' \in \Omega$ est définie par

$$\langle \delta_{x'}, \varphi \rangle = \varphi(x') \qquad \text{pour toute } \varphi \in \mathfrak{D}_\Omega$$

et une solution élémentaire de Δ pour le point x' est une distribution $E \in \mathfrak{D}'_\Omega$ solution de

$$\Delta T = \delta_{x'} .$$

Sur un espace plat, ce problème peut être résolu par la méthode de Guelfand et Chilov [1] des fonctions holomorphes à valeurs distributions que l'on prolonge analytiquement. Ce sont ces résultats que nous commencerons par rappeler.

2 Distributions de Guelfand et Chilov sur $\mathbf{R}^m$, pour Re $\lambda > -m/2 - 1/2$.

Dans ce paragraphe, les nombres réels x^j ($j = 1, ..., m$) sont les coordonnées d'un point quelconque de $\mathbf{R}^m$ où nous considérons les distributions $\mathfrak{T}^\lambda$, $(P \pm \mathrm{i}\, 0)^\lambda$ et $\delta_{1,2}^{(k)}(P)$ de Guelfand et Chilov ([1], Ch. III, § 2) en donnant exactement leurs définitions et leurs résultats pour Re $\lambda > -m/2 - \frac{1}{2}$.

a) Distributions $\mathfrak{T}^\lambda$:

Soit sur $\mathbf{R}^m$ la forme quadratique $\mathfrak{T}$ à coefficients complexes g_{rs} :

$$\mathfrak{T} = g_{rs}\, x^r x^s = P + \mathrm{i}\, P'$$

où P est une forme quadratique réelle quelconque non dégénérée et P' une forme quadratique définie positive. Pour $\lambda \in \mathbf{C}$, posons

$$\mathfrak{T}^\lambda = \exp[\lambda(\operatorname{Log} |\mathfrak{T}| + \mathrm{i} \operatorname{Arg} \mathfrak{T})] \qquad \text{où} \qquad 0 < \operatorname{Arg} \mathfrak{T} < \pi .$$

Pour Re $\lambda > 0$, et $\varphi \in \mathfrak{D}$, l'intégrale

$$\langle \mathfrak{T}^\lambda, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^m} \mathfrak{T}^\lambda \varphi \, \mathrm{d}x$$

converge et est une fonction analytique des coefficients de $\mathfrak{T}$ et de λ. La distribution $\mathfrak{T}^\lambda \in \mathfrak{D}'$ ainsi définie est donc univoquement déterminée par ses valeurs sur l'ensemble des $\mathfrak{T} = \mathrm{i}\, P'$ pour lesquelles $P = 0$.

Pour $\mathfrak{T} = \mathrm{i}\, P' = \mathrm{i}\, a_{rs}\, x^r x^s$, il vient :

$$\langle \mathfrak{T}^\lambda, \varphi \rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\lambda/2} \int_{\mathbf{R}^m} (a_{rs}\, x^r x^s)^\lambda \varphi \, \mathrm{d}x .$$

On peut trouver un système de coordonnées x'^i où

$$P = (x'^1)^2 + \cdots + (x'^m)^2 = r^2 ;$$

alors :

$$\langle \mathcal{T}^\lambda, \varphi \rangle = \frac{e^{i\pi\lambda/2}}{\sqrt{a}} \int_{\mathbf{R}^m} r^{2\lambda} \varphi \, dx' = \frac{e^{i\pi\lambda/2}}{\sqrt{(-i)^m g}} \int_{\mathbf{R}^m} r^{2\lambda} \varphi \, dx' ,$$

où $a = \text{dét}\,(a_{rs})$ et $g = \text{dét}(g_{rs})$.

Passons aux coordonnées polaires $x'^i = r\omega_i$:

$$\int r^{2\lambda} \varphi \, dx' = \int_0^\infty r^{2\lambda+m-1} \psi(r) \, dr$$

où

$$\psi(r) = \int_{S^m} \varphi(r\omega_i) \, dS , \qquad S_m = \text{sphère unité de } \mathbf{R}^m.$$

On peut écrire

$$\int r^{2\lambda} \varphi \, dx' = \int_0^1 r^{2\lambda+m-1}(\psi(r) - \psi(0)) \, dr + \\ + \int_1^\infty r^{2\lambda+m-1} \psi(r) \, dr + \frac{1}{2} \frac{\psi(0)}{\lambda + m/2}$$

où le second membre est analytique en λ dans le domaine

$$\text{Re } \lambda > - m/2 - \tfrac{1}{2}, \quad \lambda \neq - m/2.$$

On peut ainsi définir le prolongement analytique de $\mathcal{T}^\lambda$ dans ce domaine, $\lambda = - m/2$ étant un pôle simple avec :

$$\underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}} \langle \mathcal{T}^\lambda, \varphi \rangle = \frac{e^{-i\pi m/4}}{2\sqrt{(-i)^m g}} \psi(0) = \frac{e^{-i\pi m/4}}{2\sqrt{(-i)^m g}} \varphi(0) \int_{S^m} dS \\ = \frac{\pi^{m/2} e^{-i\pi m/4}}{\sqrt{(-i)^m g}\, \Gamma(m/2)} \varphi(0) .$$

Finalement :

$$\underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}} \mathcal{T}^\lambda = \frac{\pi^{m/2} e^{-i\pi m/4}}{\Gamma(m/2) \sqrt{(-i)^m g}} \delta \quad (\delta = \text{distribution de Dirac à l'origine}).$$

Dans le cas général où $\mathcal{T} = P + i P'$, la distribution $\mathcal{T}^\lambda$ admet dans le domaine $\text{Re } \lambda > - m/2 - \frac{1}{2}$ le seul pôle (il est simple) $\lambda = - m/2$ où le résidu s'obtient en prolongeant analytiquement l'expression précédente. Prenons en particulier :

$P = (x^1)^2 + \cdots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \cdots - (x^m)^2$ = forme quadratique ultra-hyperbolique de signature $(p+\,,\,q-)$ et $P' = \varepsilon[(x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2]$ où ε est réel positif, on obtient alors

$$\sqrt{(-\mathrm{i})^m g} = \underbrace{(\varepsilon - \mathrm{i})^{1/2} \dots (\varepsilon - \mathrm{i})^{1/2}}_{p \text{ termes}} \underbrace{(\varepsilon + \mathrm{i})^{1/2} \dots (\varepsilon + \mathrm{i})^{1/2}}_{q \text{ termes}}$$

avec $z^{1/2} = |z|^{1/2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg z)/2}\,, \quad -\pi < \arg z < \pi\,.$

Avec ces expressions de P et P', Guelfand et Chilov posent :

$$(P + \mathrm{i}\,0)^\lambda = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{T}^\lambda\,.$$

Cette distribution $(P + \mathrm{i}\,0)^\lambda$ est régulière pour $\operatorname{Re} \lambda > -m/2 - \frac{1}{2}$ sauf au point $\lambda = -m/2$ (pôle simple) où l'on a :

$$\underset{\lambda = -m/2}{\text{résidu}}\, (P + \mathrm{i}\,0)^\lambda = \frac{\pi^{m/2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi q/2}}{\Gamma(m/2)}\, \delta\,.$$

En raisonnant de la même façon sur les formes quadratiques à partie imaginaire définie négative, on obtient $(P - \mathrm{i}\,0)^\lambda$ et :

$$\underset{\lambda = -m/2}{\text{résidu}}\, (P - \mathrm{i}\,0)^\lambda = \frac{\pi^{m/2}\, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\pi q/2}}{\Gamma(m/2)}\, \delta\,.$$

b) Distributions $P_\pm^\lambda$ et $\delta_{1,2}^{(k)}(P)$:

On suppose toujours que

$$P = \sum_{i=1}^{p} (x^i)^2 - \sum_{j=p+1}^{m=p+q} (x^j)^2$$

est ultra-hyperbolique. Pour $\operatorname{Re} \lambda > 0$, considérons les distributions

$$\langle P_+^\lambda, \varphi \rangle = \int_{P>0} P^\lambda\, \varphi\, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \langle P_-^\lambda, \varphi \rangle = \int_{P<0} (-P)^\lambda\, \varphi\, \mathrm{d}x\,.$$

Passons aux coordonnées bipolaires $x^i = \rho\omega_i$ et $x^j = \sigma\omega_j$:

$$\langle P_+^\lambda, \varphi \rangle = \int_{\rho>\sigma} (\rho^2 - \sigma^2)^\lambda\, \varphi(\rho\omega_i, \sigma\omega_j)\, \rho^{p-1}\, \sigma^{q-1}\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}S^{(p)}\, \mathrm{d}S^{(q)}$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\rho (\rho^2 - \sigma^2)^\lambda\, \psi(\rho, \sigma)\, \rho^{p-1}\, \sigma^{q-1}\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\sigma$$

avec

$$\psi(\rho, \sigma) = \int_{S_p \times S_q} \varphi(\rho\omega_i, \sigma\omega_j)\, \mathrm{d}S^{(p)}\, \mathrm{d}S^{(q)} .$$

Posons ensuite $u = \rho^2$, $v = \sigma^2$, $\psi_1(u, v) = \psi(\rho, \sigma)$ et enfin $v = ut$:

$$\langle P_+^\lambda, \varphi \rangle = \frac{1}{4} \int_0^\infty u^{\lambda + m/2 - 1}\, \mathrm{d}u \int_0^1 (1 - t)^\lambda\, t^{(q-2)/2}\, \psi_1(u, tu)\, \mathrm{d}t .$$

Il en résulte que $\langle P_+^\lambda, \varphi \rangle$ a la première série de pôles

$$\lambda = -k \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

qui sont ceux de

$$\Phi(\lambda, u) = \frac{1}{4} \int_0^1 (1 - t)^\lambda\, t^{(q-2)/2}\, \psi_1(u, tu)\, \mathrm{d}t$$

avec

$$\operatorname*{résidu}_{\lambda = -k} \Phi(\lambda, u) = \frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)\,!} \cdot \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \left[t^{(q-2)/2}\, \psi_1(u, tu) \right] \Big|_{t=1} .$$

Ainsi, pour $k > m/2$:

$$\operatorname*{résidu}_{\lambda = -k} \langle P_+^\lambda, \varphi \rangle = \frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)\,!} \int_0^\infty \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \left[t^{(q-2)/2}\, \psi_1(u, tu) \right] \Big|_{t=1} u^{-k+m/2-1} \mathrm{d}u$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)\,!} \int_0^\infty \frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}} \left[v^{(q-2)/2}\, \psi_1(u, v) \right] \Big|_{v=u} u^{(p-2)/2}\, \mathrm{d}u .$$

Ce résidu introduit la distribution $\delta_1^{(k-1)}(P)$ portée par le cône $P = 0$, d'un type primitivement considéré par J. Leray :

$$\langle \delta_1^{(k)}(P), \varphi \rangle = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial v^k} \left[v^{(q-2)/2}\, \psi_1(u, v) \right] \Big|_{v=u} u^{(p-2)/2}\, \mathrm{d}u .$$

Ainsi :

$$\operatorname*{résidu}_{\lambda = -k > -m/2} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)\,!} \delta_1^{(k-1)}(P) .$$

Dans les mêmes conditions, on trouve :

$$\operatorname*{résidu}_{\lambda = -k > -m/2} P_-^\lambda = \frac{1}{(k-1)\,!} \delta_2^{(k-1)}(P)$$

où :

$$\langle \delta_2^{(k)}(P), \varphi \rangle = \frac{(-1)^k}{4} \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial u^k} [u^{(p-2)/2} \psi_1(u, v)] \Big|_{u=v} v^{(q-2)/2} \, dv \; .$$

De l'expression primitive de $\langle P_+^\lambda, \varphi \rangle$ il découle que le point $\lambda = -m/2$ est aussi un pôle pour $P_\pm^\lambda$ (nous nous bornons toujours à

$$\mathrm{Re}\, \lambda > -m/2 - \tfrac{1}{2}).$$

Nous donnerons plus loin l'expression de ces résidus, que l'on trouvera dans l'ouvrage cité de Guelfand et Chilov.

Pour $\mathrm{Re}\, \lambda > 0$, on a les relations :

$$(P \pm i\, 0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{\pm i\pi\lambda} P_-^\lambda$$

qui se prolongent analytiquement pour $\mathrm{Re}\, \lambda > -m/2 - \frac{1}{2}$, $\lambda \neq -m/2$. Ces relations, jointes aux expressions des résidus de $(P \pm i\, 0)^\lambda$ et de $P_\pm^\lambda$ permettent d'obtenir :

$$\delta_1^{(k)}(P) - \delta_2^{(k)}(P) = 0 \qquad \text{pour} \quad k < m/2 - 1$$

$$\delta_1^{(m/2-1)}(P) - \delta_2^{(m/2-1)}(P) =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{p/2} \pi^{m/2} \delta & \text{pour } p \text{ et } q \text{ pairs} \\ (-1)^{(p-1)/2} \pi^{m/2-1} \left[\dfrac{\Gamma'(p/2)}{\Gamma(p/2)} - \dfrac{\Gamma'(q/2)}{\Gamma(q/2)} \right] \delta & \text{pour } p \text{ et } q \text{ impairs} \; . \end{cases}$$

Nous nous proposons d'étendre ces distributions à une variété V_m. Pour cela, nous utiliserons les coordonnées normales et, pour éviter d'introduire sur V_m une métrique à coefficients complexes, nous partirons des définitions ci-dessus des distributions $P_\pm^\lambda$ et $\delta_{1,2}^{(k)}(P)$, nous calculerons les différences $\delta_1^{(k)}(P) - \delta_2^{(k)}(P)$ et nous en déduirons les propriétés des

$$(P \pm i\, 0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{\pm i\pi\lambda} P_-^\lambda \; .$$

Pour plus de simplicité, nous commençons par le cas plat.

3 Les distributions $\delta_{1,2}^{(k)}(P)$ sur un espace plat.

Nous gardons les mêmes notations qu'au n° 2 : M_m est un espace plat, muni d'une métrique

$$P = \sum_{i=1}^{p} (x^i)^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q=m} (x^j)^2$$

de signature ultra-hyperbolique ($p +$, $q -$). Pour $\varphi \in \mathfrak{D}$, on passe aux coordonnées bipolaires $x^i = \rho\omega_i$, $x^j = \sigma\omega_j$; on pose :

$$\psi(\rho, \sigma) = \int_{S_p \times S_q} \varphi(\rho\omega_i, \sigma\omega_j)\, \mathrm{d}S^{(p)}\, \mathrm{d}S^{(q)}$$

puis, en prenant $u = \rho^2$ et $v = \sigma^2$, on définit $\psi_1(u, v) = \psi(\rho, \sigma)$.

a) Pour tout entier $k \geqslant 0$, Guelfand et Chilov ([1], Ch. III, § 2) définissent les distributions $\delta_{1,2}^{(k)}(P)$ par les formules :

$$\langle \delta_1^{(k)}(P), \varphi \rangle = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial v^k} \left(v^{(q-2)/2}\, \psi_1(u, v)\right)\Big|_{v=u} u^{(p-2)/2}\, \mathrm{d}u$$

$$\langle \delta_2^{(k)}(P), \varphi \rangle = \frac{(-1)^k}{4} \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial u^k} \left(u^{(p-2)/2}\, \psi_1(u, v)\right)\Big|_{u=v} v^{(q-2)/2}\mathrm{d}v\,.$$

Pour $k < m/2 - 1$, ces intégrales convergent et on a :

$$\delta_1^{(k)}(P) = \delta_2^{(k)}(P)\,.$$

Pour $k \geqslant m/2 - 1$, on pose :

$$\frac{\partial^k}{\partial v^k} \left(v^{(q-2)/2}\, \psi_1(u, v)\right)\Big|_{v=u} = u^{(q-2)/2-k}\, \Psi(u)\,;$$

$$\frac{\partial^k}{\partial u^k} \left(u^{(p-2)/2}\, \psi_1(u, v)\right)\Big|_{u=v} = v^{(p-2)/2-k}\, \Phi(v)\,;$$

où Ψ et $\Phi \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}$. Il vient alors :

$$\langle \delta_1^{(k)}(P), \varphi \rangle = \underset{\lambda = m/2-2-k}{\text{valeur régularisée}}\, \frac{1}{4} \int_0^\infty u^\lambda\, \Psi(u)\, \mathrm{d}u$$

$$\langle \delta_2^{(k)}(P), \varphi \rangle = \underset{\lambda = m/2-2-k}{\text{valeur régularisée}}\, \frac{(-1)^k}{4} \int_0^\infty v^\lambda\, \Phi(v)\, \mathrm{d}v\,;$$

ces régularisations étant faites au sens de Guelfand et Chilov ([1], Ch. I, § 3).

b) Proposition.

Quand m est pair :

$$\delta_1^{(m/2-1)}(P) - \delta_2^{(m/2-1)}(P) = (-1)^{p/2}\, \pi^{m/2}\, \delta \qquad \text{si } p \text{ et } q \text{ sont pairs}$$

$$\delta_1^{(m/2-1)}(P) - \delta_2^{(m/2-1)}(P) = (-1)^{(p-1)/2}\, \pi^{m/2-1} \left[\frac{\Gamma'(p/2)}{\Gamma(p/2)} - \frac{\Gamma'(q/2)}{\Gamma(q/2)}\right] \delta$$

si p et q sont impairs ([1]).

([1]) On sait que $\dfrac{\Gamma'(k/2)}{\Gamma(k/2)} = -\, C - 2 \operatorname{Log} 2 + 2 \left(1 + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{k-2}\right).$

Démonstration.

Lorsque p et q sont pairs, les intégrales qui définissent $\delta_{1,2}^{(m/2-1)}(P)$ convergent régulièrement. Nous pouvons supposer que $\psi_1(u, v) = f(u).g(v)$ où f et $g \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}$.

Intégrons $m/2 - 1$ fois par parties :

$$\langle \delta_1^{(m/2-1)}(P), \varphi \rangle = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\partial^{m/2-1}}{\partial v^{m/2-1}} \left(v^{(q-2)/2}\, g(v)\right)\bigg|_{v=u} f(u)\, u^{(p-2)/2}\, du$$

$$= \langle \delta_2^{(m/2-1)}(P), \varphi \rangle -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{m/2-2}(-1)^n \left\{ \frac{d^n}{du^n}\left(f(u)\, u^{(p-2)/2}\right)_{u=0} \cdot \frac{d^{m/2-2-n}}{du^{m/2-2-n}}\left(g(u)\, u^{(q-2)/2}\right)_{u=0} \right\}$$

où la dernière somme ne comporte que le terme en $(p - 2)/2$:

$$\langle \delta_1^{(m/2-1)}(P) - \delta_2^{(m/2-1)}(P), \varphi \rangle = \frac{(-1)^{p/2}}{4}\left(\frac{p}{2} - 1\right)!\left(\frac{q}{2} - 1\right)!\, f(0)\, g(0)$$

$$= \frac{(-1)^{p/2}}{4}\left(\frac{p}{2} - 1\right)!\left(\frac{q}{2} - 1\right)!\ \psi_1(0,0),$$

avec

$$\psi_1(0, 0) = \psi(0, 0) = \varphi(0)\int_{S_p \times S_q} dS^{(p)}\, dS^{(q)}$$

$$= \varphi(0)\, \Omega_p\, \Omega_q = \varphi(0)\frac{4\, \pi^{m/2}}{(p/2 - 1)!\,(q/2 - 1)!}.$$

Lorsque p et q sont impairs, il faut régulariser ces intégrales, ce qui donne :

$$\langle \delta_1^{(m/2-1)}(P), \varphi \rangle = \frac{1}{4}\left[\int_0^1 u^{-1}(\Psi(u) - \Psi(0))\, du + \int_1^\infty u^{-1}\, \Psi(u)\, du\right]$$

$$\langle \delta_2^{(m/2-1)}(P), \varphi \rangle =$$

$$= \frac{(-1)^{m/2-1}}{4}\left[\int_0^1 v^{-1}(\Phi(v) - \Phi(0))\, dv + \int_1^\infty v^{-1}\, \Phi(v)\, dv\right].$$

Posons encore $\psi_1(u, v) = f(u)\, g(v)$ où f et $g \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}$:

$$\Psi(u) = u^{p/2} f(u)\, d_{m/2-1}\left(u^{q/2-1}\, g(u)\right)$$

donc

$$\Psi(0) = u^{p/2} f(0)\, d_{m/2-1}\, u^{q/2-1}\, g(0)$$

$$\Phi(u) = u^{q/2}\, g(u)\, d_{m/2-1}\left(u^{p/2-1}\, f(u)\right)$$

donc

$$\Phi(0) = u^{q/2}\, g(0)\, \mathrm{d}_{m/2-1}\, u^{p/2-1} f(0)\,.$$

Nous pouvons écrire :

$$4 \langle \delta_1^{(m/2-1)}(P), \varphi \rangle =$$

$$= \int_0^1 u^{-1}[u^{p/2} f(u)\, \mathrm{d}_{m/2-1}(u^{q/2-1}\, g(u)) - u^{p/2} f(0)\, \mathrm{d}_{m/2-1}(u^{q/2-1} g(0))]\, \mathrm{d}u$$
$$+ \int_1^\infty u^{-1}[u^{p/2} f(u)\, \mathrm{d}_{m/2-1}(u^{q/2-1} g(u))]\, \mathrm{d}u$$

et intégrer $m/2 - 1$ fois par parties :

$$4 \langle \delta_1^{(m/2-1)}(P), \varphi \rangle = 4 \langle \delta_2^{(m/2-1)}(P), \varphi \rangle +$$
$$+ \sum_{n=0}^{m/2-2} (-1)^n [\mathrm{d}_n(u^{p/2-1} f(u)\, \mathrm{d}_{m/2-2-n}(u^{q/2-1}\; g(u)) -$$
$$- \mathrm{d}_n(u^{p/2-1} f(0))\, \mathrm{d}_{m/2-2-n}(u^{q/2-1}\, g(0))]_0^1 +$$
$$+ \sum_{n=0}^{m/2-2} (-1)^n [\mathrm{d}_n(u^{p/2-1} f(u))\, \mathrm{d}_{m/2-2-n}(u^{q/2-1}\, g(u))]_1^\infty .$$

Donc :

$$4 \langle \delta_1^{(m/2-1)}(P) - \delta_2^{(m/2-1)}(P), \varphi \rangle =$$
$$= - f(0)\, g(0) \sum_{n=0}^{m/2-2} (-1)^n\, [\mathrm{d}_n\, u^{p/2-1}\, \mathrm{d}_{m/2-2-n}\, u^{q/2-1}]_{u=1}\, .$$

En développant cette dernière somme, on trouve :

$$\sum_{n=0}^{m/2-2} (-1)^n\, [\mathrm{d}_n\, u^{p/2-1}\, \mathrm{d}_{m/2-2-n}\, u^{q/2-1}]_{u=1} =$$
$$= (-1)^{(p-1)/2} \frac{\Gamma(p/2)\, \Gamma(q/2)}{\pi} \left(2 + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2}{q-2} - 2 - \frac{2}{3} - \cdots - \frac{2}{p-2}\right)$$
$$= (-1)^{(p-1)/2} \frac{\Gamma(p/2)\, \Gamma(q/2)}{\pi} \left[\frac{\Gamma'(q/2)}{\Gamma(q/2)} - \frac{\Gamma'(p/2)}{\Gamma(p/2)}\right] .$$

Ainsi :

$$\langle \delta_1^{(m/2-1)}(P) - \delta_2^{(m/2-1)}(P), \varphi \rangle =$$
$$= \frac{\psi_1(0,0)}{4} \cdot \frac{(-1)^{(p-1)/2}\Gamma(p/2)\, \Gamma(q/2)}{\pi} \left(\frac{\Gamma'(p/2)}{\Gamma(p/2)} - \frac{\Gamma'(q/2)}{\Gamma(q/2)}\right)$$
$$= (-1)^{(p-1)/2}\, \pi^{m/2-1} \left(\frac{\Gamma'(p/2)}{\Gamma(p/2)} - \frac{\Gamma'(q/2)}{\Gamma(q/2)}\right) \varphi(0)\, .$$

C.Q.F.D.

4 Les distributions $P_{\pm}^{\lambda}$ et $(P \pm i\,0)^{\lambda}$ sur un espace plat.

a) Considérons les distributions $P_{\pm}^{\lambda}$ définies par Guelfand et Chilov sur un espace plat (voir le nº 2, *b* de ce chapitre). Ils partent, pour $\operatorname{Re}\lambda > 0$, des intégrales

$$\langle P_{+}^{\lambda}, \varphi \rangle = \int_{P>0} P^{\lambda}\, \varphi \,\mathrm{d}x\,, \qquad \langle P_{-}^{\lambda}, \varphi \rangle = \int_{P<0} (-P)^{\lambda}\, \varphi \,\mathrm{d}x\,.$$

Dans le domaine $\operatorname{Re}\lambda > -m/2 - \frac{1}{2}$ auquel nous nous bornons toujours, ces intégrales peuvent être prolongées analytiquement pour :

$\lambda \neq -m/2\,,\ -l$ où $l = 1, 2, \ldots, (m-1)/2$ lorsque m est impair

$\lambda \neq -m/2\,,\ -l$ où $l = 1, 2, \ldots, m/2 - 1$ lorsque m est pair.

Dans le domaine considéré, les points $\lambda = -m/2$ et $\lambda = -l$ sont des pôles. Voici les résultats de Guelfand et Chilov ([1], Ch. III, § 2, 2) :

Pour m impair :

Tous les pôles sont simples et, en utilisant la proposition du nº 3 :

$$\underset{\lambda=-l}{\text{résidu}}\ P_{+}^{\lambda} = \frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)\,!}\,\delta_1^{(l-1)}(P)\,;$$

$$\underset{\lambda=-l}{\text{résidu}}\ P_{-}^{\lambda} = \frac{1}{(l-1)\,!}\,\delta_2^{(l-1)}(P) = \frac{1}{(l-1)\,!}\,\delta_1^{(l-1)}(P)\,;$$

$$\underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}}\ P_{+}^{\lambda} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{q/2}\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\,\delta & (p \text{ impair, } q \text{ pair}) \\ 0 & (p \text{ pair, } q \text{ impair}) \end{cases}$$

$$\underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}}\ P_{-}^{\lambda} = \begin{cases} 0 & (p \text{ impair, } q \text{ pair}) \\ \dfrac{(-1)^{p/2}\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\,\delta & (p \text{ pair, } q \text{ impair})\,. \end{cases}$$

Pour m pair :

Les pôles $\lambda = -l$ sont simples avec les mêmes résidus que dans le cas où m est impair.

Le pôle $\lambda = -m/2$ est simple si p et q sont pairs :

$$\underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}}\ P_{+}^{\lambda} = \frac{(-1)^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)}\,\delta_1^{(m/2-1)}(P) + \frac{(-1)^{q/2}\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\,\delta$$

$$\underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}}\ P_{-}^{\lambda} = \frac{1}{\Gamma(m/2)}\,\delta_2^{(m/2-1)}(P) + \frac{(-1)^{p/2}\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\,\delta = \frac{1}{\Gamma(m/2)}\,\delta_1^{(m/2-1)}(P)$$

(voir proposition du nº 3).

Le pôle $\lambda = -m/2$ est double si p et q sont impairs ; au voisinage de $\lambda = -m/2$ on a :

$$P_\pm^\lambda = \frac{C_{-2}^\pm}{(\lambda + m/2)^2} + \frac{C_{-1}^\pm}{\lambda + m/2} + \text{partie régulière}$$

avec :

$$C_{-1}^+ = \frac{(-1)^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)}\,\delta_1^{(m/2-1)}(P) + \frac{(-1)^{(q+1)/2}\,\pi^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)}\left[\frac{\Gamma'(p/2)}{\Gamma(p/2)} - \frac{\Gamma'(q/2)}{\Gamma(q/2)}\right]\delta\,;$$

$$C_{-2}^+ = \frac{(-1)^{(q-1)/2}\,\pi^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)}\,\delta$$

$$C_{-1}^- = \frac{1}{\Gamma(m/2)}\,\delta_2^{(m/2-1)}(P) + \frac{(-1)^{(p+1)/2}\,\pi^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)}\left[\frac{\Gamma'(q/2)}{\Gamma(q/2)} - \frac{\Gamma'(p/2)}{\Gamma(p/2)}\right]\delta\,;$$

$$C_{-2}^- = \frac{(-1)^{(p-1)/2}\,\pi^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)}\,\delta\,,$$

et l'on déduit, de la proposition du n° 3 :

$$C_{-1}^- = \frac{1}{\Gamma(m/2)}\,\delta_1^{(m/2-1)}(P) + \frac{(-1)^{(p+1)/2}\,\pi^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)}\left[\frac{\Gamma'(p/2)}{\Gamma(p/2)} - \frac{\Gamma'(m/2)}{\Gamma(m/2)}\right]\delta\,.$$

b) Dans le domaine $\operatorname{Re}\lambda > -m/2 - \frac{1}{2}$, nous posons *par définition* :

$$(P \pm i\,0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{\pm i\pi\lambda}\,P_-^\lambda$$

lorsque $\lambda \neq -m/2$ et $\lambda \neq -l$.

Proposition :

Le point $\lambda = -m/2$ est, dans ce domaine $\operatorname{Re}\lambda > -m/2 - \frac{1}{2}$, le seul pôle de $(P \pm i\,0)^\lambda$. C'est un pôle simple et, quelle que soit la parité de m :

$$\underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}}\,(P \pm i\,0)^\lambda = \frac{e^{\mp i\pi q/2}\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\,\delta\,.$$

Démonstration.

Les pôles éventuels de $(P \pm i\,0)^\lambda$ sont ceux de $P_\pm^\lambda$ avec un ordre au plus égal.

1er cas : pôles $\lambda = -l$ avec $l = 1, 2, 3, \ldots < m/2$:

$$\underset{\lambda=-l}{\text{résidu}}\,(P \pm i\,0)^\lambda = \frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)\,!}\,\delta_1^{(l-1)}(P) + e^{\pm i\pi(-l)}\,\frac{1}{(l-1)\,!}\,\delta_1^{(l-1)}(P) = 0\,.$$

2e cas : pôle $\lambda = -m/2$.

α) m est impair :

$$\underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}} (P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{q/2}\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\,\delta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\pi q/2}\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\,\delta & (p \text{ impair, } q \text{ pair}) \\ \dfrac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi(-m/2)}(-1)^{p/2}\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\,\delta = & \\ \qquad = \dfrac{\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\pi q/2}\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\,\delta & (p \text{ pair, } q \text{ impair}). \end{cases}$$

β) m est pair :

Si p et q sont pairs, la proposition se vérifie immédiatement. Pour p et q impairs, on a, au voisinage de $\lambda = -m/2$,

$$(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda} = \frac{C_{-2}^{+} + \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi m/2}\, C_{-2}^{-}}{(\lambda + m/2)^2} +$$
$$+ \frac{C_{-1}^{+} + \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\pi m/2}\, C_{-1}^{-} \pm \mathrm{i}\,\pi\, \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\pi m/2}\, C_{-2}^{-}}{\lambda + m/2} + \text{partie régulière},$$

où l'on a :

$$C_{-2}^{+} + \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi m/2}\, C_{-2}^{-} = 0 \qquad \text{et} \qquad C_{-1}^{+} + \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi m/2}\, C_{-1}^{-} = 0$$

ce pôle $\lambda = -m/2$ est donc simple, et il vient :

$$\underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}} (P + \mathrm{i}\, 0)^{\lambda} = \frac{\pm\, \mathrm{i}\,\pi\, \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\pi m/2}(-1)^{(p-1)/2}\,\pi^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)}\,\delta = \frac{\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\pi q/2}\,\pi^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)}\,\delta .$$

C.Q.F.D.

A la suite de ces nos 3 et 4, nous avons défini et obtenu, pour $\operatorname{Re} \lambda > -m/2 - \frac{1}{2}$ les propriétés de $(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda}$ sans passer par une métrique complexe : nous pouvons revenir maintenant à une variété V_m.

5 Coordonnées normales sur V_m :

V_m est une variété riemannienne, orientée, de classe $\mathcal{C}^{\infty}$.

a) Soit x' un point fixé de V_m, Ω un voisinage de x' dont chaque point x peut être joint à x' par un arc géodésique $\widehat{x'x}$ unique. A tout vecteur $u_{x'}$ tangent en x' à $\widehat{x'x}$ correspond sur $\widehat{x'x}$ un paramètre géodésique affine s unique tel que $s_{x'} = 0$. Si $T_{x'}$ (espace tangent en x' à V_m) est rapporté à un repère $R^{x'}$ arbitrairement choisi, les m nombres

$$x^{\alpha} = s u_{x'}^{\alpha}$$

sont bien déterminés et définissent sur Ω les coordonnées normales d'origine x' et relatives à $R^{x'}$ (A. Lichnérowicz [2], n° 26, p. 39).

Deux systèmes de coordonnées normales issues de x' sont liés par des relations :

$$x^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\beta}\, x^{\beta}\,; \qquad A^{\alpha'}_{\beta} = Cte\,; \qquad \text{dét}\,(A^{\alpha'}_{\beta}) \neq 0\,.$$

Dans la suite nous rapportons Ω à l'un quelconque de ces systèmes ; en repères naturels pour ces coordonnées, le vecteur tangent en x à la géodésique $x'\,x$ est $u^{\alpha}_{x} = u^{\alpha}_{x'}$ et l'on a $g_{\alpha\beta}(x)\, u^{\alpha}_{x}\, u^{\beta}_{x} = g_{\alpha\beta}(x')\, u^{\alpha}_{x'}\, u^{\beta}_{x'}$ dont on déduit immédiatement :

$$g_{\alpha\beta}(x)\, x^{\alpha}\, x^{\beta} = s^2\, g_{\alpha\beta}(x)\, u^{\alpha}_{x}\, u^{\beta}_{x} = g_{\alpha\beta}(x')\, x^{\alpha}\, x^{\beta}\,.$$

De plus (A. Lichnérowicz, [3], p. 6) :

(I,1) $$g_{\alpha\beta}(x')\, x^{\beta} = g_{\alpha\beta}(x)\, x^{\beta}\,.$$

En effet : le long d'une géodésique non isotrope,

$$g_{\alpha\beta}(x)\, \mathrm{d}x^{\alpha}\, \mathrm{d}x^{\beta} = \mathrm{d}s^2\, g_{\alpha\beta}(x)\, u^{\alpha}_{x}\, u^{\beta}_{x} = \mathrm{d}s^2\, g_{\alpha\beta}(x')\, u^{\alpha}_{x'}\, u^{\beta}_{x'}\,;$$

ainsi :

$$g_{\alpha\beta}(x')\, u^{\alpha}_{x'}\, u^{\beta}_{x'}\, \mathrm{d}s = g_{\alpha\beta}(x)\, u^{\beta}_{x}\, \mathrm{d}x^{\alpha}$$

et :

$$\frac{\partial s}{\partial x^{\alpha}} \cdot g_{\gamma\beta}(x')\, u^{\gamma}_{x'}\, u^{\beta}_{x'} = g_{\alpha\beta}(x)\, u^{\beta}_{x}\,.$$

Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\, (g_{\gamma\beta}(x')\, s u^{\gamma}_{x'}\, s u^{\beta}_{x'}) = 2\, s g_{\alpha\beta}(x)\, u^{\beta}_{x'}\,,$$

soit encore :

$$2\, g_{\alpha\beta}(x')\, x^{\beta} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\, (g_{\gamma\beta}(x')\, x^{\gamma}\, x^{\beta}) = 2\, g_{\alpha\beta}(x)\, x^{\beta}$$

et cette relation se prolonge par continuité aux géodésiques isotropes.

b) Nous pouvons poser

(I,2) $$P(x) = g_{\alpha\beta}(x)\, x^{\alpha}\, x^{\beta} = g_{\alpha\beta}(x')\, x^{\alpha}\, x^{\beta}\,.$$

En particulier, si $R^{x'}$ est orthonormé et si V_m est de signature hyperbolique $(p\,+, q\,-)$,

(I,3) $$P(x) = \sum_{i=1}^{p} (x^i)^2 - \sum_{j=p+1}^{m=p+q} (x^j)^2.$$

Le conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$ du laplacien Δ a pour équation

$$P(x) = 0$$

et cette fonction $P(x)$ permet de définir les distributions de Guelfand et Chilov sur cette variété V_m.

6 Les distributions $\delta^{(k)}_{1,2}(P)$, $P^{\lambda}_{\pm}$ et $(P \pm i\, 0)^{\lambda}$ sur V_m.

V_m est supposée de type ultra-hyperbolique, de signature $(p +, q -)$, p et $q > 1$. x' est un point fixé de V_m. Nous rapportons un voisinage Ω de x' aux coordonnées normales relatives à un repère orthonormé $R^{x'}$ de $T_{x'}$. Dans ces coordonnées (x^{α}), la m forme élément de volume s'écrit :

$$\eta(x) = \sqrt{|\, g(x)\,|}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \qquad \text{où} \qquad g(x) = \text{dét}\,\big(g_{\alpha\beta}(x)\big)\,.$$

a) Passons aux coordonnées bipolaires :

$$x^i = \rho\omega_i \quad (1 \leqslant i \leqslant p) \quad \text{et} \quad x^j = \sigma\omega_j \quad (p + 1 \leqslant j \leqslant m = p + q)\,.$$

Pour $\varphi \in \mathfrak{D}_{\Omega}$ nous pouvons prendre l'intégrale

$$\psi(\rho, \sigma) = \int_{Sp \times Sq} \varphi(\rho\omega_i, \sigma\omega_j)\, \sqrt{|\, g(\rho\omega_i, \sigma\omega_j)\,|}\, dS^{(p)}\, dS^{(q)}$$

puis poser $u = \rho^2$, $v = \sigma^2$, $\psi_1(u, v) = \psi(\rho, \sigma)$ pour définir, comme au n° 3 les distributions $\delta^{(k)}_{1/2}(P)$. Les résultats de ce n° 3 s'étendent ici, puisque

$$\sqrt{|\, g(x')\,|} = +\, 1\,.$$

b) Prenons maintenant la fonction

$$\text{(I,3)} \qquad P(x) = g_{\alpha\beta}(x')\, x^{\alpha}\, x^{\beta} = g_{\alpha\beta}(x)\, x^{\alpha}\, x^{\beta} = \sum_{i=1}^{p} (x^i)^2 - \sum_{j=p+1}^{m=p+q} (x^j)^2$$

définie et étudiée au n° 5. Nous pouvons aussi introduire sur V_m les distributions $P^{\lambda}_{\pm}$ étudiées au n° 4 dans le cas plat [1]. Les résultats restent les mêmes. Nous pouvons poser finalement, dans le domaine $\text{Re}\, \lambda > 0$

$$(P \pm i\, 0)^{\lambda} = P^{\lambda}_{+} + e^{\pm i\pi\lambda}\, P^{\lambda}_{-}$$

et ces distributions ont les mêmes propriétés de pôles et résidus que dans le cas plat (en remplaçant partout δ par $\delta_{x'}$) quand on les prolonge dans le domaine $\text{Re}\, \lambda > -\, m/2 - \frac{1}{2}$ .Nous retiendrons donc les résultats suivants :

[1] Pour $\text{Re}\, \lambda > 0$, ce sont les fonctions :

$$P^{\lambda}_{+} \begin{cases} P^{\lambda}_{+} & \text{pour } P \geqslant 0 \\ 0 & \text{pour } P \leqslant 0 \end{cases} \quad ; \quad P^{\lambda}_{-} = \begin{cases} 0 & \text{pour } P \geqslant 0 \\ (-\,P)^{\lambda} & \text{pour } P \leqslant 0. \end{cases}$$

Pour les distributions $P_{\pm}^{\lambda}$, les pôles $\lambda = -1 - 2, \ldots, > -m/2$ sont simples et :

$$\text{(I,4)}\quad \underset{\lambda=-l}{\text{résidu}}\, P_{+}^{\lambda} = \frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)\,!}\,\delta_1^{(l-1)}(P)\,; \qquad \underset{\lambda=-l}{\text{résidu}}\, P_{-}^{\lambda} = \frac{1}{(l-1)\,!}\,\delta_1^{(l-1)}(\mathrm{u})\,.$$

Le point $\lambda = -m/2$ est le seul pôle (il est simple) de $(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda}$ dans le domaine $\mathrm{Re}\,\lambda > -m/2 - \frac{1}{2}$,

$$\text{(I,5)}\qquad \underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}}\,(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda} = \frac{2^{\mp \mathrm{i}\pi q/2}\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\,\delta_{x'}\,.$$

c) Rappelons quelques propriétés de la méthode du prolongement analytique des distributions : Soit D_0 un domaine connexe du plan complexe $\mathbf{C}$. Une application $\lambda \in D_0 \to T_{\lambda} \in \mathfrak{D}'_{\Omega}$ est analytique (ou holomorphe) si, pour chaque $\varphi \in \mathfrak{D}_{\Omega}$, la fonction numérique $\lambda \in D_0 \to \langle T_{\lambda}, \varphi \rangle \in \mathbf{C}$ est analytique sur D_0. Si, pour chaque $\varphi \in \mathfrak{D}_{\Omega}$, cette fonction se prolonge analytiquement sur un domaine D (le même pour toutes les φ) contenant D_0, l'application $\lambda \to T_{\lambda} \in \mathfrak{D}'$ se prolonge analytiquement sur D (L. Schwartz [1] Ch. III) et l'on peut étendre à T_{λ} les résultats classiques concernant les pôles, résidus... (Guelfand et Chilov, Ch. I, app. 2).

Si T_{λ} est invariante pour une isométrie L opérant sur V_m quand $\lambda \in D_0$, T_{λ} est invariante pour tout $\lambda \in D$. Si pour $\lambda \in D_0$, on a

$$\Delta T_{\lambda} = U_{\lambda}$$

où U_{λ} se prolonge analytiquement sur D, on a cette relation pour tout $\lambda \in D$. Chacune de ces propriétés découle de l'unicité du prolongement analytique.

d) Sur le domaine $\mathrm{Re}\,\lambda > -m/2 - \frac{1}{2}$, $\lambda \neq -m/2$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots$, nous sommes en présence d'une définition précise du prolongement analytique des distributions $P_{\pm}^{\lambda}$ et $(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda}$ pour lesquelles nous avons

$$\langle \alpha T_{\lambda}, \varphi \rangle = \langle T_{\lambda}, \alpha\varphi \rangle \qquad \text{pour } \alpha \text{ fonction } \mathcal{C}^{\infty}\,.$$

$$P^n\, P_{+}^{\lambda} = P_{+}^{\lambda+n}\,,\ P^n\, P_{-}^{\lambda} = (-1)^n\, P_{-}^{\lambda+n} \qquad \text{et} \qquad P^n(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda} = (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

Enfin, si $F(x)$ est une somme du type considéré par Hadamard [1] :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{N} F_n(x)\, P^n(x) \qquad (\text{avec des } F_n(x) \text{ qui sont } \mathcal{C}^{\infty}),$$

nous avons, au sens des distributions :

$$F(x)\,P_{\pm}^{\lambda} = \sum_{n=0}^{N} (\pm 1)^n\, F_n(x)\, P_{\pm}^{\lambda+n} \ \text{ et } \ F(x)\,(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda} = \sum_{n=0}^{N} F_n(x)\,(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n}.$$

CHAPITRE II

SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES DANS LE CAS ULTRA-HYPERBOLIQUE

V_m est supposée analytique ($\mathcal{C}^\omega$) de métrique $\mathcal{C}^\omega$, de type ultra-hyperbolique de signature ($p+$, $q-$) avec p et $q > 1$. Tous les calculs sont faits sur un voisinage Ω d'un point fixé x', rapporté à des coordonnées normales x^α relatives à un repère $R^{x'}$ orthonormé de $T_{x'}$.

1 Calculs de laplaciens.

a) Nous nous servirons souvent des formules suivantes :

$$\text{(II,1)} \qquad g^{\alpha\beta}(x)\,\partial_\beta P(x) = 2\,x^\alpha$$

$$\text{(II,2)} \qquad g^{\alpha\beta}(x)\,\partial_\beta P.\partial_\alpha P = 4\,P$$

$$\text{(II,3)} \qquad \Delta P(x) = -\,2\,m - \frac{2\,s}{\sqrt{|\,g(x)\,|}}\,\partial_s\sqrt{|\,g(x)\,|}\,.$$

En effet :

$$g^{\alpha\beta}(x)\,\partial_\beta\,P = g^{\alpha\beta}(x)\,\partial_\beta(g_{\gamma\delta}(x')\,x^\gamma\,x^\delta) = 2\,g^{\alpha\beta}(x)\,g_{\beta\delta}(x')\,x^\delta = 2\,g^{\alpha\beta}(x)\,g_{\beta\delta}(x)\,x^\delta.$$

(d'après I, 1)$= 2\,x^\alpha$

$$g^{\alpha\beta}(x)\,\partial_\beta\,P.\partial_\alpha\,P = 4\,x^\alpha\,g_{\alpha\delta}(x')\,x^\delta = 4\,P\,.$$

Enfin, en remarquant que $x^\alpha = su^\alpha_x = su^\alpha_{x'}$,

$$\Delta P = -\,\frac{1}{\sqrt{|\,g(x)\,|}}\,\partial_\alpha\left(\sqrt{|\,g(x)\,|}\,g^{\alpha\beta}(x)\,\partial_\beta\,P\right)$$

$$= -\,\partial_\alpha(g^{\alpha\beta}(x)\,\partial_\beta\,P) - g^{\alpha\beta}(x)\,\partial_\beta\,P\cdot\frac{\partial_\alpha\sqrt{|\,g(x)\,|}}{\sqrt{|\,g(x)\,|}}$$

$$= -\,2\,\partial_\alpha\,x^\alpha - 2\,x^\alpha\,\frac{\partial_\alpha\sqrt{|\,g(x)\,|}}{\sqrt{|\,g(x)\,|}} = -\,2\,m - \frac{2\,s}{\sqrt{|\,g(x)\,|}}\,\partial_s\sqrt{|\,g(x)\,|}$$

C.Q.F.D.

b) Nous supposons que Re $\lambda > 1$ et que n est un entier $\geqslant 0$:

$$\partial_\alpha P_+^{\lambda+n+1} = \left\{ \begin{array}{ll} (\lambda + n + 1) P^{\lambda+n} \partial_\alpha P & \text{pour} \quad P \geqslant 0 \\ 0 & \text{pour} \quad P \leqslant 0 \end{array} \right\} =$$

$$= (\lambda + n + 1) P_+^{\lambda+n} \partial_\alpha P$$

$$\partial_\alpha P_-^{\lambda+n+1} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{pour} \quad P \geqslant 0 \\ -(\lambda + n + 1)(-P)^{\lambda+n} \partial_\alpha P & \text{pour} \quad P \leqslant 0 \end{array} \right\} =$$

$$= -(\lambda + n + 1) P_-^{\lambda+n} \partial_\alpha P$$

$$\partial_\alpha (P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+n+1} = (\lambda + n + 1)(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+n} \partial_\alpha P .$$

$$\nabla_\beta \partial_\alpha (P_\pm^{\lambda+n+1}) =$$

$$= (\lambda + n + 1)(\lambda + n) P_\pm^{\lambda+n-1} \partial_\beta P . \partial_\alpha P \pm$$

$$\pm (\lambda + n + 1) P_\pm^{\lambda+n} \nabla_\beta \partial_\alpha P .$$

$$\Delta(P_\pm^{\lambda+n+1}) =$$

$$= -(\lambda + n + 1)(\lambda + n) P_\pm^{\lambda+n-1} g^{\alpha\beta}(x) \partial_\beta P . \partial_\alpha P \pm$$

$$\pm (\lambda + n + 1) P_\pm^{\lambda+n} \Delta P .$$

Il découle de (II, 2) :

$$\Delta(P_\pm^{\lambda+n+1}) = -4(\lambda + n + 1)(\lambda + n) P_\pm^{\lambda+n-1} P \pm (\lambda + n + 1) P_\pm^{\lambda+n} \Delta P .$$

Donc :

$$\Delta(P_\pm^{\lambda+n+1}) \qquad = \mp (\lambda + n + 1) P_\pm^{\lambda+n} [- \Delta P + 4\lambda + n]$$

$$\Delta(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+n+1} = -(\lambda + n + 1)(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+n} [- \Delta P + 4\lambda + 4n] .$$

c) $U_n(x)$ étant une fonction $\mathcal{C}^\infty$,

$$\nabla_\beta \partial_\alpha (U_n P_\pm^{\lambda+n+1}) = P_\pm^{\lambda+n+1} \nabla_\beta \partial_\alpha U_n \pm$$

$$\pm (\lambda + n + 1) P_\pm^{\lambda+n} (\partial_\beta U_n . \partial_\alpha P + \partial_\alpha U_n . \partial_\beta P) + U_n \nabla_\beta \partial_\alpha P_\pm^{\lambda+n+1}$$

$$\Delta(U_n P_\pm^{\lambda+n+1}) = P_\pm^{\lambda+n+1} \Delta U_n \mp$$

$$\mp (\lambda + n + 1) P_\pm^{\lambda+n}\, 2\, g^{\alpha\beta}(x) \partial_\alpha P . \partial_\beta U_n + U_n \Delta P_\pm^{\lambda+n+1}$$

où

$$g^{\alpha\beta}(x) \partial_\alpha P . \partial_\beta U_n = 2 s \partial_s U_n .$$

Donc :

$$\Delta(U_n P_\pm^{\lambda+n+1}) = P_\pm^{\lambda+n+1} \Delta U_n \mp (\lambda + n + 1) P_\pm^{\lambda+n} . 4\, s\partial_s U_n$$
$$\mp U_n(\lambda + n + 1) P_\pm^{\lambda+n}(- \Delta P + 4\lambda + 4n)$$

$$\Delta(U_n(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+n+1}) = (P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+n+1} \Delta U_n -$$
$$- 4(\lambda + n + 1)(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+n} s\partial_s U_n$$
$$- (\lambda + n + 1)(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+n} U_n(- \Delta P + 4\lambda + 4n).$$

Compte tenu de (II, 3) :

$$\Delta(U_n(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+n+1}) = (P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda} P^{n+1} \Delta U_n -$$
$$- 4(\lambda + n + 1)(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda} P^n s\partial_s U_n - (\lambda + n + 1)(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+n} U_n(2m+4\lambda)$$
$$- (\lambda + n + 1)(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda} P^n U_n \left(4n + \frac{2s}{\sqrt{|g(x)|}} \partial_s \sqrt{|g(x)|}\right).$$

Donc :

$$\Delta(U_n(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+n+1}) = - 4\left(\lambda + \frac{m}{2}\right)(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda}(\lambda + n + 1) P^n U_n$$

$$\text{(II,4)} \qquad + (P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda} P^{n+1} \Delta U_n -$$

$$- (P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda} P^n(\lambda + n + 1)\left\{4\, s\partial_s U_n + U_n\left(4n + \frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|}\right)\right\}.$$

d) Suivant une méthode de J. Hadamard [1], considérons une fonction analytique

$$U(x) = \sum_{n=0}^{N} U_n(x) P^n(x)$$

où N est un entier quelconque $\geqslant 1$ et les $U_n(x)$ des fonctions analytiques : il découle de (II, 4) que :

$$\Delta(U(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+1}) = \sum_{n=0}^{N} \Delta[U_n(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+n+1}]$$

$$\text{(II,5)} \qquad \Delta(U(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+1}) =$$

$$= - 4\left(\lambda + \frac{m}{2}\right)(P + \mathrm{i}\, 0)^{\lambda} \sum_{n=0}^{N} (\lambda + n + 1) U_n P^n$$
$$- (\lambda + 1)(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda}\left[4\, s\partial_s U_0 + U_0\left(\frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|}\right)\right]$$

$$- (P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda} \sum_{n=1}^{N} P^n \left[(\lambda + n + 1) \left\{ 4\, s\partial_s U_n \right.\right.$$

$$\left.\left. + U_n \left(4\, n + \frac{2\, s}{\sqrt{|\, g\,|}} \partial_s \sqrt{|\, g\,|} \right) \right\} - \Delta U_{n-1} \right] + (P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+N+1} \Delta U_N \, .$$

2 Cas où *m* est impair.

a) Dans le cas où V_m est de dimension impaire, posons,

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\, P^n(x)\, .$$

Pour Re $\lambda > 1$, il découle de (II, 5) :

$$\text{(II,6)} \qquad \Delta\big(U(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+1}\big) = - 4 \left(\lambda + \frac{m}{2} \right) (P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda}\, U' -$$

$$- (\lambda + 1)\, (P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda} \left[4\, s\partial_s U_0 + U_0 \frac{2\, s}{\sqrt{|\, g\,|}} \partial_s \sqrt{|\, g\,|} \right]$$

$$- (P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} P^n \left[(\lambda + n + 1) \left\{ 4\, s\partial_s U_n \right.\right.$$

$$\left.\left. + U_n \left(4\, n + \frac{2\, s}{\sqrt{|\, g\,|}} \partial_s \sqrt{|\, g\,|} \right) \right\} - \Delta U_{n-1} \right]$$

où

$$\text{(II,7)} \qquad U'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n + 1)\, U_n(x)\, P^n(x)\, .$$

Pour des $U_n(x)$ solutions analytiques des équations différentielles (en s)

$$\text{(II,8)} \qquad 4\, s\partial_s U_0 + U_0 \frac{2\, s}{\sqrt{|\, g\,|}} \partial_s \sqrt{|\, g\,|} = 0$$

$$\text{(II,9)} \quad (\lambda + n + 1) \left\{ 4\, s\partial_s U_n + U_n \left(4\, n + \frac{2\, s}{\sqrt{|\, g\,|}} \partial_s \sqrt{|\, g\,|} \right) \right\} - \Delta U_{n-1} = 0.$$

L'expression (II, 6) se réduit à

$$\Delta\big(U(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+1}\big) = - 4 \left(\lambda + \frac{m}{2} \right) U'(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda}\, .$$

b) Calcul des U_n :

Imposons à $U_0(x)$ d'être solution de (II, 8) avec

$$U_0(x') = 1$$

nous obtenons

$$\frac{\partial_s U_0}{U_0} = -\frac{1}{2}\frac{\partial_s \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}}$$

et nous prenons

$$U_0(x) = |g(x)|^{-\frac{1}{4}}$$

qui est bien analytique sur le voisinage Ω de x'.

L'équation (II, 9) s'écrit

$$s\partial_s U_n + U_n\left(n - \frac{s}{U_0}\partial_s U_0\right) = \frac{\Delta U_{n-1}}{4(\lambda + n + 1)}$$

ou encore :

$$\partial_s\left(\frac{s^n U_n}{U_0}\right) = \frac{1}{4(\lambda + n + 1)}\frac{s^{n-1}\Delta U_{n-1}}{U_0}$$

et nous prenons

$$U_n(x) = \frac{U_0(x)}{4(\lambda + n + 1)s^n}\int_0^s \frac{t^{n-1}\Delta U_{n-1}(\xi)}{U_0(\xi)}\,\mathrm{d}t$$

où l'intégrale est prise le long de la géodésique $\widehat{x'x} : \xi^\alpha = tu^\alpha_{x'}$.

Cette solution est la seule qui soit analytique sur Ω. En effet (Hadamard [1], book II, Ch. III, § 62-63) supposons que $U_{n-1}(x)$ soit analytique ; ceci entraîne l'analycité de $\Delta U_{n-1}(x)$ et on a :

$$\frac{\Delta U_{n-1}(\xi)}{U_0(\xi)} = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(\xi)$$

où les Q_i sont des polynômes homogènes de degré i par rapport aux coordonnées normales ξ^α. Alors

$$\frac{U_n(x)}{U_0(x)} = \frac{1}{4\,s^n(\lambda + n + 1)}\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^s t^{n-1}\,Q_i(\xi)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4(\lambda + n + 1)}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{Q_i(x)}{n + i}$$

ce qui prouve l'analycité de $U_n(x)$.

Ce résultat reste valable pour tout $\lambda \neq -2, -3, -4, \ldots$

c) Convergence des séries U et U' :

Les séries

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n P^n \qquad \text{et} \qquad U' = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n + 1)\, U_n P^n$$

définissent sur un voisinage suffisamment petit de x' (et contenu dans Ω), des fonctions analytiques en x et holomorphes en λ pour $\lambda \neq -2, -3, -4, \ldots$

Démonstration : (Hadamard, [1], book II, Ch. III, § 63).

Pour toute fonction v, posons

$$\overline{\Delta} v = \frac{1}{U_0} \Delta(vU_0)\,, \qquad \bar{v} = \frac{v}{U_0} \qquad \text{donc} \qquad \overline{\Delta v} = \frac{\Delta v}{U_0} \text{ et :}$$

$$\overline{U}_0 = 1\,, \qquad \overline{U}_n = \frac{1}{4(n + \lambda + 1)\, s^n} \int_0^s t^{n-1}\, \overline{\Delta U}_{n-1}(\xi)\, \mathrm{d}t\,.$$

La démonstration s'appuie sur la méthode des fonctions majorantes, dont le symbole est noté $\ll$. α et r étant des constantes convenables, les coefficients de $\overline{\Delta}$ peuvent être majorés par $\dfrac{\alpha}{1 - \sigma/r}$ où $\sigma = \sum_{\alpha=1}^{m} |\, x^\alpha \,|$. Pour toute fonction analytique $v \ll \dfrac{K}{(1 - \sigma/r)^n}$, il existe une constante α' telle que $\overline{\Delta} v \ll \dfrac{\alpha' Kn(n + 1)}{(1 - \sigma/r)^{n+3}}$. Alors :

$$\overline{U}_h \ll \frac{K_h}{(1 - \sigma/r)^{2h}} \quad \Rightarrow \quad \overline{\Delta} U_h \ll \frac{\alpha' K_h\, 2\, h(2\, h + 1)}{(1 - \sigma/r)^{2h+3}}$$

et, σ étant proportionnel à s sur chaque géodésique :

$$\overline{U}_{h+1} \ll \frac{\alpha' K_h\, 2\, h(2\, h + 1)}{4\, |\, \lambda + 2 + h \,|} \cdot \frac{1}{\sigma^{n+1}} \int_0^\sigma \frac{t^{\,h}}{(1 - \sigma/r)^{2h+3}}\, \mathrm{d}t \ll \frac{K_{h+1}}{(1 - \sigma/r)^{2(h+1)}}$$

où

$$K_{h+1} = \frac{\alpha' K_h\, 2\, h(2\, h + 1)}{4(h + 1)\, |\, \lambda + 2 + h \,|} \text{ donc } \frac{K_{h+1}}{K_h} \to \alpha' \text{ (fini) quand } h \to +\infty\,.$$

Les $\overline{U}_n$ étant analytiques, $\overline{U}_n = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i^{(n)}$ où les $Q_i^{(n)}$ sont des polynômes homogènes de degré i par rapport aux coordonnées normales x^α.

Pour

$$|P| \leqslant \frac{k}{\alpha'}\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^2$$

où k est un nombre positif quelconque inférieur à 1, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} |Q_i^{(n)}|\,|P^n| \leqslant \frac{K_n}{\alpha'^n}\cdot k^n \quad \text{où} \quad \frac{K_{n+1}}{\alpha'^{n+1}} : \frac{K_n}{\alpha'^n} = \frac{K_{n+1}}{K_n}\cdot\frac{1}{\alpha'} \to 1$$

et la série double

$$\overline{U} = \sum_{n=0}^{\infty} P^n \sum_{i=0}^{\infty} Q_i^{(n)}$$

qui converge absolument peut se mettre sous la forme d'une série entière par rapport aux coordonnées normales

$$\overline{U} = \sum_{j=0}^{\infty} R_j$$

où l'on pose

$$R_j = \sum_{i+2n=j} Q_i^{(n)} P^n .$$

On montre ainsi que $\overline{U}$ est analytique sur le voisinage de x' où

$$|P| < \frac{1}{\alpha'}\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^2 .$$

Pour $\overline{U}'$, nous pouvons écrire que

$$\overline{U}'_h = (\lambda + h + 1)\,\overline{U}_h \ll \frac{K'_h}{(1 - \sigma/r)^{2h}} = \frac{|\lambda + h + 1|\,K_h}{(1 - \sigma/r)^{2h}}$$

où $K'_{h+1}/K'_h \to \alpha'$ et les conclusions restent les mêmes.

Pour $\lambda \neq -2, -3, -4$, la fonction $\overline{U}_1\, P$ est holomorphe en λ et si $\overline{U}_h\, P^h$ est holomorphe il en est de même de $\overline{U}_{h+1}\, P^{h+1}$, résultat qui s'étend alors aux séries $\overline{U}$ (et $\overline{U}'$) qui convergent normalement sur tout compact d'un domaine ne contenant pas les points $-2, -3, -4, \ldots$ Il ne reste plus alors qu'à remarquer que $U = U_0\, \overline{U}$ et $U' = U_0\, \overline{U}'$ pour conclure.

C. Q. F. D.

d) Les fonctions U et U' sont invariantes sur V_m ainsi que les distributions $(P \pm \mathrm{i}\,0)^\lambda$:

Soit L une isométrie sur V_m laissant fixe le point x', L' l'application linéaire tangente de transposée L^* (A. Lichnérowicz [2]). Nous avons :

$$\left(L^*\, g(Lx)\right)_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x)$$

ou encore tout $u_x \in T_x$ a même longueur que $(L' u)_{Lx}$. A la fonction $P(x)$ correspond par L la fonction

$$L^* P(x) \equiv P(Lx) = g_{\alpha\beta}(x')\, x^\alpha_{Lx}\, x^\beta_{Lx} = s^2\, g_{\alpha\beta}(x')\, (L' u)^\alpha_{x'} (L' u)^\beta_{x'}$$
$$= s^2\, g_{\alpha\beta}(x')\, u^\alpha_{x'}\, u^\beta_{x'} = P(x)$$

et qui est donc invariante.

Il en est de même des fonctions $P^\lambda_+(x)$ et $P^\lambda_-(x)$ pour $\mathrm{Re}\,\lambda > 1$ donc des distributions $(P \pm \mathrm{i}\,0)^\lambda$ pour $\mathrm{Re}\,\lambda > -m/2 - \frac{1}{2}$, $\lambda \neq -m/2$.

Sur les coordonnées normales x^α, l'isométrie L se traduit par la transformation orthogonale

$$x^\alpha_x = a^\alpha_\beta\, x^\beta_{Lx}$$

avec

$$g_{\alpha\beta}(Lx) = a^\gamma_\alpha\, a^\delta_\beta\, g_{\gamma\delta}(x)$$

donc

$$L^* g(x) = \text{dét}\,\big(g_{\alpha\beta}(Lx)\big) = \text{dét}\,\big(g_{\alpha\beta}(x)\big) = g(x)$$

d'où l'on déduit que $U_0(x)$ est invariante.

Enfin, si $\xi(t)$ décrit le géodésique $\widehat{x'x}$, $L\xi(t)$ décrit la géodésique $\widehat{x'Lx}$ et on a

$$L^* U_n(x) = \frac{L^* U_0(x)}{4(\lambda + n + 1)\, s^n} \int_0^s \frac{t^{n-1}\, \Delta L^* U_{n-1}(\xi)}{L^* U_0(\xi)}\, \mathrm{d}t = U_n(x)$$

par récurrence à partir de $n = 0$.

e) Calcul des solutions élémentaires :

Pour $\lambda \neq -2, -3, \ldots$ nous avons construit deux fonctions invariantes $U(x)$ et $U'(x)$ analytiques en x sur un voisinage de x', holomorphes en λ et telles que, pour $\mathrm{Re}\,\lambda > 1$:

$$\Delta\big[U(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}\big] = -4\left(\lambda + \frac{m}{2}\right) U'(P \pm \mathrm{i}\,0)^\lambda$$

avec

$$U'(x') = \lambda + 1 \,.$$

D'après (I, 5) on peut prolonger analytiquement jusqu'à $\lambda = -m/2$:

$$\Delta\big[U(P \pm \mathrm{i}\,0)^{1-m/2}\big] = -4 \underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}}\; U'(P \pm \mathrm{i}\,0)^\lambda$$
$$= -4\left(1 - \frac{m}{2}\right) \frac{\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\pi q/2}\, \pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\, \delta_{x'}$$

donc

$$\Delta[U(P \pm \mathrm{i}\,0)^{1-m/2}] = 4 \cdot \frac{e^{\mp i\pi q/2}\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2-1)}\,\delta_{x'}\,.$$

m étant impair, les distributions $P_{\pm}^{1-m/2}$ sont régulières et :

$$(P \pm \mathrm{i}\,0)^{1-m/2} = P_{+}^{1-m/2} + e^{\pm i\pi(1-m/2)}\,P_{-}^{1-m/2}$$

ce qui donne les solutions élémentaires complexes conjuguées et invariantes :

$$\frac{e^{\pm i\pi q/2}\,\Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2}}\,U(P_{+}^{1-m/2} + e^{\pm i\pi(1-m/2)}\,P_{-}^{1-m/2})$$

(II,10)

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n P^n\,; \qquad U_0 = |\,g\,|^{-\frac{1}{4}}\,;$$

$$U_n = \frac{U_0}{4(-m/2+n+1)\,s^n}\int_0^s \frac{t^{n-1}\,\Delta U_{n-1}(\xi)}{U_0(\xi)}\,\mathrm{d}t \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Si q est pair, il faut retenir :

— la solution élémentaire

$$\frac{(-1)^{q/2}\,\Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2}}\,UP_{+}^{1-m/2}$$

de Δ au point x' ;

— la solution $UP_{-}^{1-m/2}$ de l'équation homogène $\Delta(T) = 0$.

Si q est impair, il faut retenir :

— la solution élémentaire

$$-\frac{(-1)^{p/2}\,\Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2}}\,UP_{-}^{1-m/2}$$

de Δ au point x' ;

— la solution $UP_{+}^{1-m/2}$ de l'équation homogène.

3 Cas où *m* est pair.

a) Quand V_m est de dimension paire, la méthode du n° 2 ne s'applique plus à cause du terme

$$U_{m/2-1} = \frac{U_0}{4(\lambda + m/2)\,s^{m/2-1}}\int_0^s \frac{t^{m/2-2}\,\Delta U_{m/2-2}}{U_0}\,\mathrm{d}t$$

suivant Hadamard [1], posons

$$U(x) = \sum_{n=0}^{m/2-2} U_n(x)\, P^n(x) \qquad \text{et} \qquad U'(x) = \sum_{n=0}^{m/2-2} (\lambda + n + 1)\, U_n(x)\, P^n(x)$$

avec

$$U_0 = |\, g\,|^{-\frac{1}{4}} \qquad \text{et} \qquad U_n(x) = \frac{U_0(x)}{4(\lambda + n + 1)\, s^n} \int_0^s \frac{t^{n-1}\, \Delta U_{n-1}(\xi)}{U_0(\xi)}\, dt\,,$$

$$(1 \leqslant n \leqslant m/2 - 2)\,.$$

D'après (II, 5), il vient :

(II,11) $\quad \Delta\left[U(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+1}\right] =$

$$= -\, 4(\lambda + m/2)\, U'(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda} + (P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda + m/2 - 1}\, \Delta U_{m/2-2}\,.$$

Il faut alors introduire deux nouvelles séries V et W (cette dernière étant assez arbitraire) pour faire disparaître le terme en $(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+m/2-1}\, \Delta U_{m/2-2}$.

b) Considérons la série

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x)\, P^n(x)\,.$$

On obtient, d'après (II, 4) :

(II,12)
$$\Delta\left[V(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+m/2}\right] = -\left(\lambda + \frac{m}{2}\right)(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+m/2-1} \times$$

$$\times \left[4\, s\partial_s V_0 + V_0 \left(\frac{2\,s}{\sqrt{|\,g\,|}}\, \partial_s \sqrt{|\,g\,|} + 4\, m + 4\,\lambda - 4\right)\right]$$

$$-\, (P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+m/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} P^{n-1} \left\{ \left(\lambda + \frac{m}{2} + n\right) \left[4\, s\partial_s V_n\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + V_n \left(4\, n + 4\, m + 4\,\lambda - 4 + \frac{2\, s}{\sqrt{|\,g\,|}}\, \partial_s \sqrt{|\,g\,|}\right)\right] - \Delta V_{n-1} \right\}\right]\,.$$

Pour Re $\mu > -\, m/2$, introduisons les distributions

$$(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\mu}\, \mathrm{Log}(P \pm \mathrm{i}\, 0) = \frac{\partial}{\partial \mu}(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\mu}\,.$$

En dérivant l'expression (II, 12), par rapport à λ, nous obtenons :

$$\Delta[V(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2} \operatorname{Log}(P \pm \mathrm{i}\,0) =$$

$$= -(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2-1}\left[4\,s\,\partial_s V_0 + V_0\left(\frac{2\,s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|} + 4\,m + 4\,\lambda - 4\right)\right]$$

$$-\left(\lambda + \frac{m}{2}\right)\left[(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2-1}\operatorname{Log}(P \pm \mathrm{i}\,0)\left\{4\,s\,\partial_s V_0\right.\right.$$

$$\left.\left.+ V_0\left(\frac{2\,s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|} + 4\,m + 4\,\lambda - 4\right)\right\} + 4\,V_0(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2-1}\right]$$

$$-(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2}\operatorname{Log}(P \pm \mathrm{i}\,0)\left[\sum_{n=1}^{\infty} P^{n-1}\left\{\left(\lambda + \frac{m}{2} + n\right)\left(4\,s\,\partial_s V_n\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+ V_n\left(4\,n + 4\,m + 4\,\lambda - 4 + \frac{2\,s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|}\right)\right) - \Delta V_{n-1}\right\}\right]$$

$$-(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} P^{n-1}\left\{4\,s\,\partial_s V_n + V_n\left(4\,n + 4\,m + 4\,\lambda\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.- 4 + \frac{2\,s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|}\right) + 4\,V_n\left(\lambda + \frac{m}{2} + n\right)\right\}\right].$$

Imposons aux V_n d'être solutions analytiques (en x) autour de x' des équations :

$$4\,s\,\partial_s V_0 + V_0\left(\frac{2\,s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|} + 4\,m + 4\,\lambda - 4\right) = \Delta U_{m/2-2}$$

$$\left(\lambda + \frac{m}{2} + n\right)\left[4\,s\,\partial_s V_n + V_n\left(4\,n + 4\,m + 4\,\lambda -\right.\right.$$

$$\left.\left.- 4 + \frac{2\,s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|}\right)\right] - \Delta V_{n-1} = 0\,.$$

On obtient ainsi d'après (II, 11) :

$$\Delta[U(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1} + V(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2}\operatorname{Log}(P \pm \mathrm{i}\,0)]$$

$$= -4\left(\lambda + \frac{m}{2}\right)U'(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda}$$

$$-\left(\lambda + \frac{m}{2}\right)(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2-1}[4\,V_0 + \operatorname{Log}(P \pm \mathrm{i}\,0)\,\Delta U_{m/2-2}]$$

$$- (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} P^{n-1} \left\{ 4\,s\,\partial_s V_n + V_n \left(8\,n + 6\,m + 8\,\lambda \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - 4 + \frac{2\,s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|} \right) \right\} \right]$$

tandis que (II, 12) devient :

$$\Delta \left[V(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2} \right] = - \left(\lambda + \frac{m}{2} \right) (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2-1} . \Delta U_{m/2-2} .$$

La distribution $(P \pm \mathrm{i}\,0)^{-1}$ étant régulière :

(II, 13) $\qquad \Delta V = 0 \qquad$ pour $\qquad \lambda = - m/2$.

Calcul des V_n :

Rappelons que

$$\frac{2\,s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|} = - \frac{4\,s}{U_0} \partial_s U_0 :$$

$$4\,s\,\partial_s V_0 + V_0 \left\{ - \frac{4\,s\,\partial_s U_0}{U_0} + 4\,m + 4\,\lambda - 4 \right\} = \Delta U_{m/2-2} ;$$

$$\frac{U_0}{s^{m+\lambda-2}} \partial_s \left(\frac{V_0}{U_0} s^{m+\lambda-1} \right) = \frac{1}{4} \Delta U_{m/2-2}$$

$$V_0 = \frac{U_0}{4\,s^{m+\lambda-1}} \int_0^s \frac{t^{m+\lambda-2}\,\Delta U_{m/2-2}}{U_0} \mathrm{d}t .$$

$$s\,\partial_s V_n + V_n \left(n + \lambda + m - 1 - s \frac{\partial_s U_0}{U_0} \right) = \frac{1}{4(\lambda + m/2 + n)} \Delta V_{n-1} ;$$

$$\frac{U_0}{s^{n+m+\lambda-2}} \partial_s \left(\frac{V_n}{U_0} s^{n+\lambda+m-1} \right) = \frac{1}{4(\lambda + m/2 + n)} \Delta V_{n-1}$$

$$V_n = \frac{U_0}{4(\lambda + m/2 + n)\,s^{n+m+\lambda-1}} \int_0^s \frac{t^{n+m+\lambda-2}\,\Delta V_{n-1}}{U_0} \mathrm{d}t .$$

Une démonstration analogue à celle du n° 2 conduit au même résultat : la série $\sum_{n=0}^{\infty} V_n P^n$ définit une fonction analytique sur un voisinage assez petit de x'.

c) Considérons la série

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x)\, P^n(x) .$$

On a :

$$\Delta[W(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2+1}] = -\left(\lambda + \frac{m}{2} + 1\right)(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2}\left[4\,s\,\partial_s W_0 + \right.$$

$$\left. + W_0\left(\frac{2\,s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|} + 4\,m + 4\,\lambda\right)\right]$$

$$-(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2+1}\left[\sum_{n=1}^{\infty} P^{n-1}\left\{\left(\lambda + 1 + \frac{m}{2} + n\right)\left[4\,s\,\partial_s W_n\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + W_n\left(4\,n + 4\,m + 4\,\lambda + \frac{2\,s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|}\right)\right] - \Delta W_{n-1}\right\}\right] =$$

$$= -(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2}\left[\left(\lambda + \frac{m}{2} + 1\right)\left(4\,s\,\partial_s W_0\right.\right.$$

$$\left. + W_0\left\{\frac{2\,s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|} + 4\,m + 4\,\lambda\right\}\right)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} P^n\left\{\left(\lambda + 1 + \frac{m}{2} + n\right)\left(4\,s\,\partial_s W_n + W_n\left(4\,n + 4\,m + 4\,\lambda\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{2\,s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|}\right)\right) - \Delta W_{n-1}\right\}.$$

En supposant les W_n solutions de

$$\left(\lambda + \frac{m}{2} + 1\right)\left(4\,s\,\partial_s W_0 + W_0\left\{\frac{2\,s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|} + 4\,m + 4\,\lambda\right\}\right) +$$

$$+ 4\,s\,\partial_s V_1 + V_1\left\{\frac{2\,s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|} + 6\,m + 8\,\lambda + 4\right\} = 0$$

et :

$$\left(\lambda + \frac{m}{2} + n + 1\right)\left(4\,s\,\partial_s W_n + W_n\left\{\frac{2\,s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|} + 4\,n + 4\,m + 4\,\lambda\right\}\right) -$$

$$- \Delta W_{n-1} = -4\,s\,\partial_s V_{n+1} - V_{n+1}\left(8\,n + 6\,m + 8\,\lambda + 4 + \frac{2\,s}{\sqrt{|g|}}\partial_s\sqrt{|g|}\right),$$

nous obtiendrons

$$\text{(II,14)}\quad \Delta[U(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1} + V(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2} \operatorname{Log}(P \pm \mathrm{i}\,0) + $$

$$+ W(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2+1}] = -4\left(\lambda + \frac{m}{2}\right) U'(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda}$$

$$-\left(\lambda + \frac{m}{2}\right)[(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2-1} \operatorname{Log}(P \pm \mathrm{i}\,0)\,\Delta U_{m/2-2}$$

$$+ 4\,V_0(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2-1}].$$

Calcul des W_n :

$$\frac{U_0}{s^{\lambda+m-1}}\,\partial_s\left[\frac{s^{\lambda+m}\{(\lambda + m/2 + 1)\,W_0 + V_1\}}{U_0}\right] = -\left(\lambda + \frac{m}{2} + 1\right) V_1$$

$$W_0 = -\frac{V_1}{\lambda + m/2 + 1} - \frac{U_0}{s^{m+\lambda}}\int_0^s \frac{t^{\lambda+m-1}\,V_1}{U_0}\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{U_0}{s^{\lambda+m+n-1}}\,\partial_s\left[\frac{s^{\lambda+m+n}\{(\lambda + 1 + m/2 + n)\,W_n + V_{n+1}\}}{U_0}\right] =$$

$$= \frac{\Delta W_{n-1}}{4} - \left(\lambda + 1 + \frac{m}{2} + n\right) V_{n+1}$$

$$W_n = -\frac{V_{n+1}}{\lambda + 1 + m/2 + n} +$$

$$+ \frac{U_0}{s^{\lambda+m+n}}\int_0^s \frac{t^{\lambda+m+n-1}}{U_0}\left[\frac{\Delta W_{n-1}}{4(\lambda + 1 + m/2 + n)} - V_{n+1}\right]\mathrm{d}t\,.$$

La fonction $W(x)$ est encore analytique au voisinage de x'.

d) Dans le second membre de (II,14), les distributions $(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2-1}$ et $(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2-1} \operatorname{Log}(P \pm \mathrm{i}\,0)$ sont régulières pour $\lambda = -m/2$. En prolongeant analytiquement, on obtient :

$$\Delta[U(P \pm \mathrm{i}\,0)^{1-m/2} + V \operatorname{Log}(P \pm \mathrm{i}\,0) + WP] = 4\,\frac{\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\pi q/2}\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2 - 1)}\,\delta_{x'}$$

d'où l'on déduit les solutions élémentaires invariantes :

$$\text{(II,15)}\quad \frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi q/2}\,\Gamma(m/2 - 1)}{4\,\pi^{m/2}}\,[U(P \pm \mathrm{i}\,0)^{1-m/2} + V \operatorname{Log}(P \pm \mathrm{i}\,0) + WP]\,.$$

e) Afin de séparer les parties réelle et imaginaire de (II,15), remarquons que, pour Re $\lambda > -1$,

$$(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\mu} \operatorname{Log}(P \pm \mathrm{i}\,0) = \frac{\partial}{\partial \mu}(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\mu} = \frac{\partial}{\partial \mu}[P_+^{\mu} + \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi\mu} P_-^{\mu}]$$

$$= P_+^{\mu} \operatorname{Log} P_+ + \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi\mu} P_-^{\mu} \operatorname{Log} P_- \pm \mathrm{i}\,\pi P_-^{\mu}$$

et pour $\mu = 0$:

$$\operatorname{Log}(P \pm \mathrm{i}\,0) = \operatorname{Log} P_+ + \operatorname{Log} P_- \pm \mathrm{i}\,\pi P_-^0 .$$

De plus, il découle de (I,4) qu'au voisinage de $\lambda = 1 - m/2$,

$$(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda} = P_+^{\lambda} + \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi(1-m/2)}\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi(\lambda+m/2-1)}\, P_-^{\lambda}$$

$$= \frac{(-1)^{m/2-2}}{(m/2-2)\,!} \frac{\delta_1^{(m/2-2)}(P)}{\lambda + m/2 - 1} + \text{partie régulière}_1$$

$$+ \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi(1-m/2)}[1 \pm \mathrm{i}\,\pi(\lambda + m/2 + 1) + \cdots]$$

$$\left\{ \frac{1}{(m/2-2)\,!} \; \frac{\delta_1^{(m/2-2)}(P)}{\lambda + m/2 - 1} + \text{partie régulière}_2 \right\},$$

d'où l'on déduit :

$$(P \pm \mathrm{i}\,0)^{1-m/2} = \pm\, \mathrm{i}\,\pi \frac{(-1)^{1-m/2}}{(m/2-2)\,!}\, \delta_1^{(m/2-2)}(P) +$$

$$+ P_+^{1-m/2} + (-1)^{1-m/2}\, P_-^{1-m/2}$$

où $P_{\pm}^{1-m/2}$ sont les parties régulières du développement des $P_{\pm}^{\lambda}$ autour de $\lambda = 1 - m/2$, et prises pour cette valeur de λ.

Avec ces expressions (II,15), s'écrit :

$$\frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi q/2}\, \Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2}} \left[\pm\, \mathrm{i}\,\pi \left\{ \frac{(-1)^{1-m/2}}{(m/2-2)\,!}\, U \delta_1^{(m/2-2)}(P) + V P_-^0 \right\} + \right.$$

$$\left. + U\{ P_+^{1-m/2} + (-1)^{1-m/2}\, P_-^{1-m/2} \} + V\{ \operatorname{Log} P_+ + \operatorname{Log} P_- \} + WP \right].$$

D'après (II,13). on a :

$$\Delta(VP_-^0) = -\,\Delta(VP_+^0)$$

et nous retiendrons les solutions élémentaires

$$\text{(II,16)} \quad \frac{e^{\pm i\pi q/2}\,\Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2}}\left[\pm\, i\,\pi\left\{\frac{(-1)^{1-m/2}}{(m/2-2)\,!}\,U\delta_1^{(m/2-2)}(P) - VP_+^0\right\} + \right.$$
$$\left. + U\{P_+^{1-m/2} + (-1)^{1-m/2}\,P_-^{1-m/2}\} + V\{\operatorname{Log} P_+ + \operatorname{Log} P_-\} + WP\right]$$

dont les parties réelle et imaginaire se séparent sans difficulté (suivant la parité de q) et qui donnent simultanément des solutions invariantes de l'équation homogène.

4 Les opérateurs $\Delta + B^\rho\,\partial_\rho + C$.

$B^\rho(x)$ étant un champ de vecteurs et $C(x)$ un champ scalaire sur le voisinage Ω de x', nous cherchons des solutions $T(x)$ de

$$(\Delta + B^\rho\,\partial_\rho + C)\,T = \delta_{x'}$$

Complétons l'expression (II,5) du n° II,1 :

A l'expression de $\Delta\big(U(P \pm i\,0)^{\lambda+1}\big)$ il faut ajouter (on suppose d'abord que $\operatorname{Re}\lambda > 1$) :

$$\begin{aligned}
(B^\rho\,\partial_\rho + C)\big[U(P \pm i\,0)^{\lambda+1}\big] &= (B^\rho\,\partial_\rho + C)\left[\sum_{n=0}^{N} U_n(P \pm i\,0)^{\lambda+n+1}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{N} (P \pm i\,0)^{\lambda+n+1}(B^\rho\,\partial_\rho + C)\,U_n + \\
&+ \sum_{n=0}^{N} (\lambda + n + 1)\,(P \pm i\,0)^{\lambda+n}\,U_n\,B^\rho\,\partial_\rho\,P \\
&= (P \pm i\,0)^{\lambda+1}(B^\rho\,\partial_\rho + C)\,U_0 \\
&+ (\lambda + 1)\,(P \pm i\,0)^{\lambda}\,U_0\,B^\rho\,\partial_\rho\,P \\
&+ \sum_{n=1}^{N} (P \pm i\,0)^{\lambda}\,P^{n+1}(B^\rho\,\partial_\rho + C)\,U_n \\
&+ \sum_{n=1}^{N} (\lambda + n + 1)\,(P \pm i\,0)^{\lambda}\,P^n\,U_n\,B^\rho\,\partial_\rho\,P \\
&= (\lambda + 1)\,(P \pm i\,0)^{\lambda}\,U_0\,B^\rho\,\partial_\rho\,P \\
&+ (P \pm i\,0)^{\lambda}\sum_{n=1}^{N} (\lambda + n + 1)\,P^n\,U_n\,B^\rho\,\partial_\rho\,P \\
&+ (P \pm i\,0)^{\lambda}\sum_{n=1}^{N} P^n(B^\rho\,\partial_\rho + C)\,U_{n-1} \\
&+ (P \pm i\,0)^{\lambda+N+1}(B^\rho\,\partial_\rho + C)\,U_N\,.
\end{aligned}$$

En posant

$$D \equiv \Delta + B^\rho \partial_\rho + C$$

on obtient :

$$D(U(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}) = -4\left(\frac{m}{2} + \lambda\right)(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda} \sum_{n=0}^{N} (\lambda + n + 1)\, U_n P^n -$$

$$- (\lambda + 1)(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda} \left[4\, s\, \partial_s U_0 + U_0 \left\{ \frac{2\, s}{\sqrt{|\, g\,|}} \partial_s \sqrt{|\, g\,|} - B^\rho \partial_\rho P \right\}\right]$$

$$- (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda} \sum_{n=1}^{N} P^n \left[(\lambda + n + 1)\left\{4\, s\, \partial_s U_n + U_n \left(4\, n + \frac{2\, s}{\sqrt{|\, g\,|}} \partial_s \sqrt{|\, g\,|}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - B^\rho \partial_\rho P\right)\right\} - DU_{n-1}\right] + (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+N+1}\, DU_N\,.$$

Dans le cas où m est impair, nous prenons

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n P^n\,.$$

U_0 étant la solution analytique de

$$4\, s\, \partial_s U_0 + U_0 \left\{ \frac{2\, s}{\sqrt{|\, g\,|}} \partial_s \sqrt{|\, g\,|} - B^\rho \partial_\rho P \right\} = 0$$

qui vérifie

$$U_0(x') = 1$$

ce qui donne, en remarquant que

$$\frac{1}{s} B^\rho \partial_\rho P = \frac{1}{s} B^\rho(x)\, g_{\rho\alpha}(x)\, x^\alpha = g_{\rho\alpha}(x)\, B^\rho(x)\, u_x^\rho = B^\rho u_\rho$$

où u_ρ est tangent à la géodésique $\widehat{x'\,x}$, l'expression :

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{|\, g\,|}} \exp\left[\frac{1}{4}\int_0^s u_\rho\, B^\rho(\xi)\, \mathrm{d}t\right] ;$$

les U_n sont alors les solutions analytiques de

$$4\, s\, \partial_s U_n + U_n \left(4\, n + \frac{2\, s}{\sqrt{|\, g\,|}} \partial_s \sqrt{|\, g\,|} - B^\rho \partial_\rho P)\right) = \frac{DU_{n-1}}{\lambda + n + 1}\,.$$

Cette équation s'écrit

$$s\, \partial_s U_n + U_n \left(n - s\, \frac{\partial_s U_0}{U_0}\right) = \frac{DU_{n-1}}{\lambda + n + 1}$$

donc :

$$U_n = \frac{U_0}{4(\lambda + n + 1)\, s^n} \int_0^s \frac{t^{n-1}\, DU_{n-1}(\xi)}{U_0(\xi)}\, \mathrm{d}t \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

et la série U s'étudie comme au n° II,2.

Dans le cas où m est pair, nous posons $U = \sum_{n=0}^{m/2-2} U_n P^n$ où les U_n $(0 \leqslant n \leqslant m/2 - 2)$ sont déterminés comme dans le cas impair. On obtient :

$$D[U(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+1}] = -4\left(\frac{m}{2} + \lambda\right)(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda} \sum_{n=0}^{m/2-2} (\lambda + n + 1)\, U_n P^n + \\ + (P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda + m/2 - 1}\, DU_{m/2-2}\,.$$

Comme au n° II,3, le terme $(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda + m/2 - 1}\, DU_{m/2-2}$ disparaît par l'introduction de deux nouvelles séries V et W. Celles-ci ont la forme trouvée précédemment à condition de remplacer Δ par D.

En conclusion, nous obtenons une solution de

$$(\Delta + B^\rho\, \partial_\rho + C)\, T = \delta_{x'}$$

en substituant

$$D \equiv \Delta + B^\rho\, \partial_\rho + C \text{ à } \Delta \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt[4]{|g|}} \exp\left[\frac{1}{4}\int_0^s u_\rho\, B^\rho(\xi)\, \mathrm{d}t\right] \text{ à } U_0$$

dans les formules (II,10) et (II,16).

Nous y reviendrons d'ailleurs dans le cas d'un espace harmonique, en prenant $B^\rho \equiv 0$ et $C = Cte$.

5 Cas où V_m est harmonique.

M. Lichnérowicz a défini et étudié dans [3] et [4] les espaces harmoniques : l'espace riemannien analytique V_m est dit harmonique si au voisinage de chaque point $x' \in V_m$, on a

(II,17) $$\Delta P = -2m + Pf(P)$$

où $f(P)$ est une fonction analytique de P, régulière au voisinage de $P = 0$ (A. Lichnérowicz [4] p. 12 et 18). Ceci implique que $|g(x)|$ est une fonction analytique de P :

$$\sqrt{|g(P)|} = \mathrm{e}^{\varphi(P)}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\Delta P(x) &= -\,2\,m - g^{\alpha\beta}(x)\,\partial_\beta P.\partial_\alpha \operatorname{Log}\sqrt{|\,g(P)\,|}\\ &= -\,2\,m - \varphi'(P)\,g^{\alpha\beta}(x)\,\partial_\beta P.\partial_\alpha P\\ &= -\,2\,m - 4\,P\,\varphi'(P)\,.\end{aligned}$$

donc :

(II,18) $$f(P) = -\,4\,\varphi'(P)\,.$$

Nous supposerons encore dans la suite que V_m est de type $(p\,+,\,q\,-)$ ultrahyperbolique.

a) Soit une fonction $u(\xi)$ holomorphe de la variable complexe ξ au voisinage de 0, sauf peut-être en ce point $\xi = 0$.

D'après les calculs du n° II,1, nous avons, pour $\operatorname{Re}\lambda > 1$:

$$\begin{aligned}\Delta[(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}\,u(P \pm \mathrm{i}\,0)] &= (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}\,\Delta u(P \pm \mathrm{i}\,0) -\\ &\quad - (\lambda + 1)\,(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda}\,2\,g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha P.\partial_\beta u(P \pm \mathrm{i}\,0)\\ &\quad - (\lambda + 1)\,(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda}\,(4\,\lambda - \Delta P)\,u(P \pm \mathrm{i}\,0)\,.\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}\Delta u(P \pm \mathrm{i}\,0) &= -\,g^{\alpha\beta}\,\nabla_\alpha\,\partial_\beta\,u(P \pm \mathrm{i}\,0) = -\,g^{\alpha\beta}\,\nabla_\alpha[\partial_\beta P.u'(P \pm \mathrm{i}\,0)]\\ &= -\,g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\,\partial_\beta\,P.u'(P \pm \mathrm{i}\,0) - g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha P.\partial_\beta P.u''(P \pm \mathrm{i}\,0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta u(P \pm \mathrm{i}\,0) &= -\,4(P \pm \mathrm{i}\,0)\,u''(P \pm \mathrm{i}\,0) +\\ &\quad + [(P \pm \mathrm{i}\,0)\,f(P \pm \mathrm{i}\,0) - 2\,m]\,u'(P \pm \mathrm{i}\,0)\,.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\Delta[(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}\,u(P \pm \mathrm{i}\,0)] &= (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}\{-\,4(P \pm \mathrm{i}\,0)\,u''(P \pm \mathrm{i}\,0) +\\ &\quad + [(P \pm \mathrm{i}\,0)\,f(P \pm \mathrm{i}\,0) - 2\,m]\,u'(P \pm \mathrm{i}\,0)\}\\ &\quad - 8(\lambda + 1)\,(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}\,u'(P \pm \mathrm{i}\,0)\\ &\quad - (\lambda + 1)\,(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda}\,[2\,m + 4\,\lambda - (P \pm \mathrm{i}\,0)\,f(P \pm \mathrm{i}\,0)]\,u(P \pm \mathrm{i}\,0)\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta[(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}\,u(P \pm \mathrm{i}\,0)] &=\\ &- 4(\lambda + m/2)\,(\lambda + 1)\,(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda}\,u(P \pm \mathrm{i}\,0)\\ &- (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}\,[4(P \pm \mathrm{i}\,0)\,u''(P \pm \mathrm{i}\,0)\\ &+ \{2\,m + 8\,\lambda + 8 - f(P \pm \mathrm{i}\,0)\,(P \pm \mathrm{i}\,0)\}\,u'(P \pm \mathrm{i}\,0)\\ &- (\lambda + 1)\,u(P \pm \mathrm{i}\,0)\,f(P \pm \mathrm{i}\,0)]\end{aligned}$$

qui devient, avec une constante C :

$$\begin{aligned}(\Delta + C)\left[(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1} u(P \pm \mathrm{i}\,0)\right] = \\ = -4(\lambda + m/2)(\lambda + 1)(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda} u(P \pm \mathrm{i}\,0) \\ - (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}\left[4(P \pm \mathrm{i}\,0)\, u''(P \pm \mathrm{i}\,0)\right. \\ + \left\{2m + 8\lambda + 8 - (P \pm \mathrm{i}\,0) f(P \pm \mathrm{i}\,0)\right\} u'(P \pm \mathrm{i}\,0) \\ \left. - \left\{C + (\lambda + 1) f(P \pm \mathrm{i}\,0)\right\} u(P \pm \mathrm{i}\,0)\right].\end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore :

(II,19)

$$\begin{aligned}(\Delta + C)\left[(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1} u(P \pm \mathrm{i}\,0)\right] = \\ -4(\lambda + m/2)(\lambda + 1)(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda} u(P \pm \mathrm{i}\,0) \\ - (\lambda + m/2)(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}\left[8\, u'(P \pm \mathrm{i}\,0) - f(P \pm \mathrm{i}\,0)\, u(P \pm \mathrm{i}\,0)\right] \\ - (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}\left[4(P \pm \mathrm{i}\,0)\, u''(P \pm \mathrm{i}\,0)\right. \\ + \left\{8 - 2m - (P \pm \mathrm{i}\,0) f(P \pm \mathrm{i}\,0)\right\} u'(P \pm \mathrm{i}\,0) \\ \left. - \left\{C + (1 - m/2) f(P \pm \mathrm{i}\,0)\right\} u(P \pm \mathrm{i}\,0)\right].\end{aligned}$$

Nous sommes conduits à étudier les solutions holomorphes au voisinage de $\xi = 0$, sauf peut-être en ce point, de l'équation

(II,20) $\quad 4\,\xi y'' + \left[8 - 2m - \xi f(\xi)\right] y' - \left\{C + (1 - m/2) f(\xi)\right\} y = 0$

qui est du type de Fuchs autour de $\xi = 0$. Son équation déterminante

$$r(r - m/2 + 1) = 0$$

s'obtient (voir par exemple G. Valiron [1], n° 96) en cherchant ses solutions de la forme

$$\xi^r \psi(\xi), \quad \psi(\xi) \text{ holomorphe au voisinage de } \xi = 0 .$$

Cette équation admet les deux racines :

$$r_1 = 0, \qquad r_2 = m/2 - 1$$

et, dans tous les cas, (II,20) admet la solution :

$$v(\xi) = \xi^{m/2-1} \psi(\xi) \qquad (\psi \text{ holomorphe})$$

pour laquelle (II,19) s'écrit :

$$(\Delta + C)\left[(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2}\,\psi(P)\right] =$$
$$= -\,4(\lambda + m/2)(\lambda + 1)(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2-1}\,\psi(P)$$
$$-\,(\lambda + m/2)(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2-1}\left[8\left\{(m/2 - 1)\,\psi(P) + P\,\psi'(P)\right\} -\right.$$
$$\left. -\,f(P).P.\psi(P)\right].$$

En prolongeant analytiquement jusqu'à $\lambda = -\,m/2$, on obtient la solution $\psi(P)$ de l'équation homogène $\Delta\psi = 0$.
L'équation (II,20) admet une autre solution dont la forme est plus ou moins compliquée suivant que $r_2 - r_1 = m/2 - 1$ est un entier ou non.

b) Si m est impair, $m/2 - 1$ n'est pas un entier et (II,20) admet la solution holomorphe

$$\xi^{r_1}\,u(\xi) = u(\xi)$$

que l'on détermine par la méthode des « coefficients indéterminés » de façon que

$$u(0) = 1\,.$$

En prolongeant analytiquement (II,19), il vient :

$$(\Delta + C)\left[(P \pm \mathrm{i}\,0)^{1-m/2}\,u(P)\right] = \frac{4\,\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\pi q/2}\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2 - 1)}\,\delta_{x'}$$

dont on déduit les solutions élémentaires complexes conjuguées :

$$\frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi q/2}\,\Gamma(m/2 - 1)}{4\,\pi^{m/2}}\,u(P)\,(P \pm \mathrm{i}\,0)^{1-m/2}\,.$$

Dans le cas particulier où V_m est un espace plat :

$$f(\xi) \equiv 0$$

et (II,20) devient :

$$4\,\xi y'' + (8 - 2\,m)\,y' - Cy = 0\,.$$

Supposons que $C = -\,\varepsilon^2 < 0$ et prenons la variable

$$\eta = \varepsilon\xi^{\frac{1}{2}} \qquad ((P \pm \mathrm{i}\,0)^{1/2} \text{ a un sens})$$

$u(\xi)$ devient $u_1(\eta)$ solution de

$$\eta y'' + (3 - m)\,y' + \eta y = 0$$

et $u_2(\eta) = \eta^{-m/2+1} u_1(\eta)$ est solution de

$$y'' + \frac{y'}{\eta} + y\left[1 - \frac{(1-m/2)^2}{\eta^2}\right] = 0$$

on prend la solution (J est une fonction de Bessel) :

$$u_2(\eta) = kJ_{1-m/2}(\eta)\,, \qquad u_1(\eta) = k\eta^{m/2-1} J_{1-m/2}(\eta)$$
$$u(\xi) = u_1(\varepsilon\xi^{\frac{1}{2}}) = k\varepsilon^{m/2-1}\,\xi^{m/4-\frac{1}{2}}\,J_{1-m/2}(\varepsilon\xi^{\frac{1}{2}})$$

où k est une constante telle que $u(0) = 1$, soit encore $u_1(0) = 1$ avec

$$u_1(\eta) = k\left(\frac{1}{2}\right)^{1-m/2}\left\{\frac{1}{\Gamma(2-m/2)} - \left(\frac{\eta}{2}\right)^2\frac{1}{2\,!\,\Gamma(3-m/2)} + \cdots\right\}$$

dont on déduit :

$$k = \frac{\Gamma(2-m/2)}{2^{m/2-1}}$$

$$u(\xi) = \frac{\Gamma(2-m/2)}{2^{m/2-1}}\,\varepsilon^{m/2-1}\,\xi^{m/4-\frac{1}{2}}\,J_{1-m/2}(\varepsilon\xi^{\frac{1}{2}})$$

et les solutions élémentaires

$$(-1)^{(m+1)/2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m/2-1}\frac{e^{\pm i\pi q/2}}{4\,\pi^{m/2-1}}\,(P \pm i\,0)^{\frac{1}{2}-m/4}\,J_{1-m/2}(\varepsilon(P \pm i\,0)^{\frac{1}{2}})$$

puisque

$$\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)\Gamma\left(2-\frac{m}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left[(m/2-1)\,\pi\right]} = (-1)^{(m+1)/2}\,\pi\,.$$

Pour $C > 0$, il faut remplacer J par la fonction I de Bessel modifiée.

c) Si V_m est de dimension paire, $r_2 - r_1 = m/2 - 1$ est un entier et l'on a les deux solutions

$$v(\xi) = \xi^{m/2-1}\,\psi(\xi) \qquad \text{et} \qquad u(\xi) = \xi^{m/2-1}\,\psi(\xi)\,\mathrm{Log}\,\xi + \bar{\psi}(\xi)$$

où ψ et $\bar{\psi}$ sont holomorphes au voisinage de $\xi = 0$ et où on peut poser $\bar{\psi}(0) = 1$. Remarquons que :

$$u'(\xi) = \xi^{m/2-2}\,\mathrm{Log}\,\xi\left[(m/2-1)\,\psi(\xi) + \xi\psi'(\xi)\right] + \xi^{m/2-2}\,\psi(\xi) + \bar{\psi}'(\xi)$$

et que

$$(P \pm i\,0)^{\lambda+1}\,u(P \pm i\,0) = (P \pm i\,0)^{\lambda+m/2}\,\mathrm{Log}\,(P \pm i\,0).\psi(P) +$$
$$+ (P \pm i\,0)^{\lambda+1}\,\bar{\psi}(P)\,.$$

L'équation (II,19) s'écrit :

$$(\Delta + C)\left[(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}\, u(P \pm \mathrm{i}\,0)\right] = -4(\lambda + m/2)(\lambda + 1)(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda}\,\overline{\psi}(P)$$
$$-(\lambda + m/2)\left[(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2-1} \operatorname{Log}(P \pm \mathrm{i}\,0).A(P) + (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1} B(P)\right]$$

où A et B sont les fonctions holomorphes :

$$A(P) = \psi(P)\left[4(\lambda + m + 1) - Pf(P)\right] + 8\,P\,\psi'(P)$$
$$B(P) = 8\left[P^{m/2-2}\,\psi(P) + \overline{\psi}'(P)\right] - f(P)\,\overline{\psi}(P)\,.$$

On peut prolonger la relation précédente jusqu'à $\lambda = m/2$:

$$(\Delta + C)\left[(P \pm \mathrm{i}\,0)^{1-m/2}\, u(P \pm \mathrm{i}\,0)\right] = \frac{4\,\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\pi q/2}\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2 - 1)}\,\delta_{x'}$$

et l'on obtient les solutions élémentaires complexes conjuguées

$$\frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi q/2}\,\Gamma(m/2 - 1)}{4\,\pi^{m/2}}\left[\overline{\psi}(P)\,(P \pm \mathrm{i}\,0)^{1-m/2} + \psi(P)\operatorname{Log}(P \pm \mathrm{i}\,0)\right].$$

dont on séparera encore les parties réelles et imaginaires comme au n° 3 de ce Ch. II.

Si V_m est un espace plat, il faut trouver les solutions

$$u(\xi) = \xi^{m/2-1}\,\psi(\xi)\operatorname{Log}\xi + \overline{\psi}(\xi)\,, \qquad v(\xi) = \xi^{m/2-1}\,\psi(\xi)$$

de l'équation

$$4\,\xi y'' + y'(8 - m) + \varepsilon^2\, y = 0$$

où l'on suppose encore que $C = -\,\varepsilon^2 < 0$.

En prenant $\eta = \varepsilon\xi^{\frac{1}{2}}$, $u(\xi)$ et $v(\xi)$ deviennent les solutions

$$u_1 = \frac{2}{\varepsilon^{m-2}}\,\eta^{m-2}\operatorname{Log}\frac{\eta}{2}\,\psi_1(\eta) + \alpha_1(\eta) \qquad (\alpha_1 \text{ holomorphe})$$
$$v_1 = \eta^{m-2}\,\psi_1(\eta)$$

de l'équation

$$\eta y'' + (3 - m)\,y' + \eta y = 0$$

et

$$u_2 = \eta^{-m/2+1}\,u_1(\eta) = \eta^{m/2-1}\,\psi_1(\eta)\,,$$
$$v_2 = \eta^{-m/2+1}\,v_1(\eta) = \frac{2}{\varepsilon^{m-2}}\,\eta^{m/2-1}\,\psi_1(\eta)\operatorname{Log}\frac{\eta}{2} + \eta^{m/2-1}\,\alpha_1(\eta)$$

sont solutions de

$$y'' + \frac{y'}{\eta} + y\left[1 - \frac{(1-m/2)^2}{\eta^2}\right] = 0 .$$

On doit prendre

$v_2 = kJ_{m/2-1}(\eta)$

$u_2 = k'\, Y_{m/2-1}(\eta)$ (fonction de Bessel modifiée, parfois écrite $N_{m/2-1}$).

Sachant que

$$Y_{m/2-1}(\eta) = \frac{2}{\pi}\left(C + \operatorname{Log}\frac{\eta}{2}\right) J_{m/2-1}(\eta) -$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{m/2-2} \frac{(m/2-r-2)\,!}{r\,!}\left(\frac{2}{\eta}\right)^{m/2-1-2r} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\eta}{2}\right)^{m/2-1} \beta(\eta)$$

où β est holomorphe, on obtient

$$u_1(\eta) = \eta^{m/2-1}\, u_2(\eta) = \frac{k'}{\pi}\left[2\left(C + \operatorname{Log}\frac{\eta}{2}\right)\eta^{m/2-1} J_{m/2-1}(\eta) -\right.$$

$$\left. - \sum_{r=0}^{m/2-2} \frac{(m/2-r-2)\,!}{r\,!}\,\frac{\eta^{2r}}{2^{2r+1-m/2}} - (\eta)^{m-2}\,\frac{\beta(\eta)}{2^{m/2-1}}\right] .$$

D'où l'on déduit que

$$u_1(0) = -\frac{k'}{\pi}\,\frac{(m/2-2)\,!}{2^{1-m/2}} = 1 \Leftrightarrow k' = -\frac{2^{1-m/2}\,\pi}{(m/2-2)\,!}$$

et les solutions élémentaires

$$-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m/2-1} \frac{e^{\pm i\pi q/2}}{4\,\pi^{m/2-1}} (P \pm i\,0)^{\frac{1}{2}-m/4}\, Y_{m/2-1}\left(\varepsilon(P \pm i\,0)^{1/2}\right)$$

qui s'écrivent :

$$- \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m/2-1} \frac{e^{\pm i\pi q/2}}{4\,\pi^{m/2-1}}$$

$$\left\{\frac{2}{\pi}\left(C + \operatorname{Log}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Log}(P \pm i\,0)\right)(P \pm i\,0)^{\frac{1}{2}-m/4} J_{m/2-1}\left(\varepsilon(P \pm i\,0)^{1/2}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi}(P \pm i\,0)^{1-m/2}\sum_{r=0}^{m/2-2}\frac{(m/2-r-2)\,!}{r\,!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2r-m/2+1} . P^r - \frac{\varepsilon^{m/2-1}}{\pi}\,\alpha(P)\right\}$$

et où l'on a :

$$(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\frac{1}{2}-m/4}\, J_{m/2-1}\big(\varepsilon(P \pm \mathrm{i}\,0)^{1/2}\big) = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m/2-1}$$

$$\left[\frac{1}{\Gamma(m/2)} - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2} \frac{P}{\Gamma(m/2+1)} + \cdots + (-1)^{k} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2k} \frac{P^{k}}{k\,!\,\Gamma(m/2+k)} + \cdots\right].$$

Supposons de plus, pour terminer, que p et q soient impairs et cherchons la partie réelle de ces solutions élémentaires :

$$e^{\pm \mathrm{i}\pi q/2} = \pm\, \mathrm{i}\,(-1)^{(q-1)/2}$$

$$\mathrm{Log}\,(P \pm \mathrm{i}\,0) \quad \text{donne} \quad \pm\, \mathrm{i}\,\pi P_{-}^{0} \quad \text{ou} \quad \mp\, \mathrm{i}\,\pi\, P_{+}^{0}$$

$$(P \pm \mathrm{i}\,0)^{1-m/2} \quad \text{donne} \quad \pm\, \mathrm{i}\,\pi \frac{(-1)^{1-m/2}}{(m/2-2)\,!}\, \delta_{1}^{(m/2-2)}(P)$$

et la solution élémentaire s'écrit ici :

$$-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m/2-1} \frac{e^{\pm \mathrm{i}\pi q/2}}{4\,\pi^{m/2-1}} \Bigg\{ \pm\, \mathrm{i}\, P_{+}^{\frac{1}{2}-m/4}\, J_{m/2-1}(\varepsilon P_{+}^{\frac{1}{2}}) \mp$$

$$\mp\, \mathrm{i}\, \frac{(-1)^{1-m/2}}{(m/2-2)\,!}\, \delta_{1}^{(m/2-2)}(P) \sum_{r=0}^{m/2-2} \frac{(m/2-r-2)\,!}{r\,!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2r-m/2+1} .P^{r} \Bigg\}$$

ou encore :

$$\text{(II,21)} \qquad -\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m/2-1} \frac{(-1)^{(q-1)/2}}{4\,\pi^{m/2-1}} \Bigg\{ \frac{(-1)^{1-m/2}}{(m/2-2)\,!}\, \delta_{1}^{(m/2-2)}(P) \sum_{r=0}^{m/2-2}$$

$$\frac{(m/2-r-2)\,!}{r\,!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2r-m/2+1} .P^{r} + P_{+}^{\frac{1}{2}-m/4}\, J_{m/2-1}(\varepsilon P_{+}^{\frac{1}{2}}) \Bigg\}$$

où l'on a posé :

$$P_{+}^{\frac{1}{2}-m/4}\, J_{m/2-1}(\varepsilon P_{+}^{\frac{1}{2}}) = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m/2-1}$$

$$\left[\frac{1}{\Gamma(m/2)} - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2} \frac{P_{+}}{\Gamma(m/2+1)} + \cdots + (-1)^{k} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2k} \frac{P_{+}^{k}}{k\,!\,\Gamma(m/2+k)} + \cdots\right].$$

Remarquons enfin que si $C > 0$, on remplacera J par I.

CHAPITRE III

CAS HYPERBOLIQUE NORMAL

V_m est une variété riemannienne orientée, de classe C^∞ et de type hyperbolique normal : $p = 1$, $q = m - 1$. On peut rapporter un voisinage Ω de $x' \in V_m$ aux coordonnées normales (x^α) relatives à un repère orthonormé $R^{x'}$ de l'espace tangent $T_{x'}$. Ces coordonnées normales définissent un homéomorphisme de Ω sur un voisinage de x' dans l'espace minkowskien $T_{x'}$ qui applique le conoïde isotrope $\Gamma_{x'}$ sur le cône isotrope $C_{x'}$ de $T_{x'}$ (A. Lichnérowicz, [1], page 14). Ainsi $\Gamma_{x'}$ a deux nappes $\Gamma^\pm_{x'}$ et partage intrinsèquement Ω en trois régions :

$$\varepsilon^+(x') \quad \text{(futur de } x'), \qquad \varepsilon^-(x') \quad \text{(passé de } x'),$$
$$\Omega_-(x') \quad \text{(ailleurs de } x').$$

Si l'on pose

$$P(x) = (x^1)^2 - (x^2)^2 - \cdots - (x^m)^2$$

ces trois régions sont définies respectivement par

$$P(x) > 0\,, \quad x^1 > 0\,; \qquad P(x) > 0\,, \quad x^1 < 0\,; \qquad P(x) < 0\,.$$

1 Les solutions élémentaires.

a) Soit $\varphi \in \mathfrak{D}_\Omega$. Passons aux coordonnées polaires

$$x^j = \sigma\omega_j \qquad (2 \leqslant j \leqslant m)$$

et posons

$$\psi(x^1, \sigma) = \int_{S_{m-1}} \varphi \sqrt{|\,g\,|}\, \mathrm{d}\Omega^{(m-1)}$$

où S_{m-1} est la sphère de rayon 1 de $\mathbf{R}^{m-1}$ et de $\mathrm{d}\Omega^{(m-1)}$ l'élément de surface de cette sphère.

Avec Guelfand et Chilov ([1], Ch. III, § 2,1), nous considérons les distributions

$$\langle \delta_1^{(k)}(P), \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{2\,\sigma\,\partial\sigma}\right)^k \left[\sigma^{m-3}\,\frac{\psi(x^1,\sigma)}{2}\right]_{\sigma=|x^1|} \mathrm{d}x^1$$

$$\langle \delta_2^{(k)}(P), \varphi \rangle = (-1)^k \int_0^{+\infty} \sigma^{m-2} \left(\frac{\partial}{2\,x^1\,\partial x^1}\right)^k \times$$

$$\times \left[\left\{\frac{\psi(x^1,\sigma)}{2\,x^1}\right\}_{x^1=\sigma} + \left\{\frac{\psi(x^1,\sigma)}{2\,x^1}\right\}_{x^1=-\sigma}\right] \mathrm{d}\sigma\,.$$

Pour Re $\lambda > 0$, nous pouvons définir :

$$\langle P_+^\lambda, \varphi \rangle = \int_{P>0} P^\lambda(x)\,\varphi(x)\,\sqrt{|\,g(x)\,|}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x^1 \int_0^{|x^1|} [(x^1)^2 - \sigma^2]^\lambda\,\psi(x^1,\sigma)\,\sigma^{m-2}\,\mathrm{d}\sigma$$

et, en posant $\sigma = t\,|\,x^1\,|$:

$$\langle P_+^\lambda, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x^1\,|\,x^1\,|^{2\lambda+m-1} \int_0^1 (1-t^2)^\lambda\,t^{m-2}\,\psi(x^1, t\,|\,x^1\,|)\,\mathrm{d}t$$

et de la même façon :

$$\langle P_-^\lambda, \varphi \rangle = \int_{P<0} (-P)^\lambda(x)\,\varphi(x)\,\sqrt{|\,g(x)\,|}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} \sigma^{m-2}\,\mathrm{d}\sigma \int_{-\sigma}^{+\sigma} [\sigma^2 - (x^1)^2]^\lambda\,\psi(x^1,\sigma)\,\mathrm{d}x^1$$

$$= \int_0^{+\infty} \sigma^{m-2}\,\mathrm{d}\sigma \int_0^{+\sigma} [\sigma^2 - (x^1)^2]^\lambda\,\psi(x^1,\sigma)\,\mathrm{d}x^1 +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \sigma^{m-2}\,\mathrm{d}\sigma \int_{-\sigma}^{0} [\sigma^2 - (x^1)^2]^\lambda\,\psi(x^1,\sigma)\,\mathrm{d}x^1$$

où l'on pose respectivement $x^1 = t\sigma$ et $x^1 = -\,t\sigma$:

$$\langle P_-^\lambda, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \sigma^{2\lambda+m-1}\,\mathrm{d}\sigma \int_0^1 (1-t^2)^\lambda \{\,\psi(t\sigma,\sigma) + \psi(-\,t\sigma,\sigma)\}\,\mathrm{d}t\,.$$

Les résultats du chapitre I s'étendent sans difficulté ici et l'on obtient encore dans le domaine Re $\lambda > -\,m/2 - \frac{1}{2}$:

Pour les distributions $P_{\pm}^{\lambda}$ les pôles $\lambda = -1, -2, \ldots > -m/2$ sont simples et :

(III,1)

$$\underset{\lambda=-l}{\text{résidu}}\, P_{+}^{\lambda} = \frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!}\,\delta_1^{(l-1)}(P) \quad \text{et} \quad \underset{\lambda=-l}{\text{résidu}}\, P_{-}^{\lambda} = \frac{1}{(l-1)!}\,\delta_1^{(l-1)}(P)\,.$$

Le point $\lambda = -m/2$ est le seul pôle (il est simple) de $(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda} = P_{+}^{\lambda} + e^{\pm i\pi\lambda}\, P_{-}^{\lambda}$

$$\text{(III,2)}\qquad \underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}}\,(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda} = \frac{e^{\mp i\pi q/2}\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\,\delta_{x'} = \frac{e^{\mp i\pi(m-1)/2}\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\,\delta_{x'}\,.$$

b) Les résultats du chapitre II s'étendent alors sans changement aux solutions élémentaires de Δ :

Pour m impair, on obtient les solutions élémentaires complexes conjuguées

$$\text{(III,3)}\qquad (-1)^{(m-1)/2}\,\frac{\Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2}}\,U(x)\left[P_{+}^{1-m/2} \pm \mathrm{i}\,(-1)^{(m-1)/2}\,P_{-}^{1-m/2}\right]$$

de partie réelle

$$\text{(III,4)}\qquad (-1)^{(m-1)/2}\,\frac{\Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2}}\,U(x)\,P_{+}^{1-m/2}\,.$$

Pour m pair, il vient :

$$\text{(III,5)}\qquad \frac{(-1)^{m/2}\,\Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2-1}}\left\{\frac{(-1)^{1-m/2}}{(m/2-2)!}\,U\,\delta_1^{(m/2-2)}(P) - VP_{+}^{0}\right\} \mp$$

$$\mp\,\mathrm{i}\,\frac{(-1)^{m/2}\,\Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2}}\Big[U\left\{P_{+}^{1-m/2} + (-1)^{1-m/2}\,P_{-}^{1-m/2}\right\} + V\left\{\operatorname{Log} P_{+} + \operatorname{Log} P_{-}\right\} + WP\Big],$$

de partie réelle :

$$\text{(III,6)}\qquad \frac{(-1)^{m/2}\,\Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2-1}}\left\{\frac{(-1)^{1-m/2}}{(m/2-2)!}\,U\,\delta_1^{(m/2-2)}(P) - VP_{+}^{0}\right\}\,.$$

2 Les distributions $P_{+}^{\lambda+}$, $P_{+}^{\lambda-}$, $\delta_1^{(k)+}(P)$ et $\delta_1^{(k)-}(P)$.

a) Nous utiliserons dans ce n° 2 les demi-conoïdes $\Gamma_{x'}^{\pm}$ et les régions $\varepsilon^{\pm}(x')$: Les distributions $\delta_1^{(k)+}(P)$ et $\delta_1^{(k)-}(P)$ de support $\Gamma_{x'}^{+}$ et $\Gamma_{x'}^{-}$ sont définies par :

$$\langle \delta_1^{(k)+}(P), \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial}{2\,\sigma\,\partial\sigma}\right)^k \left[\sigma^{m-3}\,\frac{\psi(x^1, \sigma)}{2}\right]_{\sigma=x^1} \mathrm{d}x^1$$

$$\langle \delta_1^{(k)-}(P), \varphi \rangle = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial}{2\,\sigma\,\partial\sigma}\right)^k \left[\sigma^{m-3}\,\frac{\psi(x^1, \sigma)}{2}\right]_{\sigma=-x^1} \mathrm{d}x^1$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial}{2\,\sigma\,\partial\sigma}\right)^k \left[\sigma^{m-3}\,\frac{\psi(-\,x^1, \sigma)}{2}\right]_{\sigma=x^1} \mathrm{d}x^1$$

ces intégrales étant régularisées le cas échéant. On a :

(III,7) $$\delta_1^{(k)}(P) = \delta_1^{(k)+}(P) + \delta_1^{(k)-}(P)\,.$$

Pour Re $\lambda > 0$, considérons les fonctions

$$P_+^{\lambda+}(x) = \begin{cases} P^\lambda(x) & \text{pour} \quad P(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x^1 > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$P_+^{\lambda-}(x) = \begin{cases} P^\lambda(x) & \text{pour} \quad P(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x^1 < 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et définissons les distributions

$$\langle P_+^{\lambda+}, \varphi \rangle = \int_{P>0,x^1>0} P^\lambda \varphi \sqrt{|\,g\,|}\,\mathrm{d}x \quad \text{et}$$

$$\langle P_+^{\lambda-}, \varphi \rangle = \int_{P>0,x^1<0} P^\lambda\, \varphi \sqrt{|\,g\,|}\,\mathrm{d}x\,.$$

En passant aux coordonnées semi-polaires x^1, $x^j = \sigma\omega_j$ $(2 \leqslant j \leqslant m)$ et en posant $\sigma = tx^1$:

$$\langle P_+^{\lambda+}, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} (x^1)^{2\lambda+m-1}\,\mathrm{d}x^1 \int_0^1 (1 - t^2)^\lambda\, t^{m-2}\, \psi(x^1, tx^1)\,\mathrm{d}t$$

et, en posant $\sigma = -\,tx^1$:

$$\langle P_+^{\lambda-}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^0 (-\,x^1)^{2\lambda+m-1}\,\mathrm{d}x^1 \int_0^1 (1 - t^2)^\lambda\, t^{m-2}\, \psi(x^1, -\,tx^1)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} (x^1)^{2\lambda+m-1}\,\mathrm{d}x^1 \int_0^1 (1 - t^2)^\lambda\, t^{m-2}\, \psi(-\,x^1, tx^1)\,\mathrm{d}t$$

que l'on peut prolonger analytiquement dans le domaine Re $\lambda > -\,m/2 - \frac{1}{2}$, $\lambda \neq -\,1, -\,2, \ldots, -\,m/2$.

On obtient :

$$P_+^\lambda = P_+^{\lambda+} + P_+^{\lambda-}\,.$$

b) Proposition.

Dans le domaine $\operatorname{Re}\lambda > -m/2 - \frac{1}{2}$, les seuls pôles de $P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}$ sont les points $\lambda = -k$ avec

$$\begin{array}{ll} k = 1, 2, \ldots, (m-1)/2 & \text{pour } m \text{ impair} \\ k = 1, 2, \ldots, m/2 & \text{pour } m \text{ pair,} \end{array}$$

ces pôles sont simples et

$$\text{(III,8)} \qquad \underset{\lambda=-k}{\text{résidu}}\,(P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)\,!}\,(\delta_1^{(k-1)+}(P) - \delta_1^{(k-1)-}(P))\,.$$

Démonstration.

Nous avons pour $\operatorname{Re}\lambda > 0$:

$$\langle P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}, \varphi \rangle =$$

$$= \int_0^{+\infty} (x^1)^{2\lambda+m-1}\,\mathrm{d}x^1 \int_0^1 (1-t^2)^\lambda\, t^{m-2}[\psi(x^1, tx^1) - \psi(-x^1, tx^1)]\,\mathrm{d}t\,.$$

Posons $\tau = t^2$:

$$\langle P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}, \varphi \rangle = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (x^1)^{2\lambda+m-1}\,\mathrm{d}x^1 \int_0^1 (1-\tau)^\lambda\, \tau^{(m-3)/2}$$
$$[\psi(x^1, x^1\sqrt{\tau}) - \psi(-x^1, x^1\sqrt{\tau})]\,\mathrm{d}\tau\,.$$

D'après le procédé de prolongement analytique défini par Guelfand et Chilov, on peut poser :

$$\begin{aligned} \Phi^\pm(\lambda, x^1) &= \int_0^1 (1-\tau)^\lambda\, \tau^{(m-3)/2}[\psi(\pm x^1, x^1\sqrt{\tau})]\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\Phi_0^\pm(x^1)}{\lambda + k} + \Phi_1^\pm(\lambda, x^1) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Phi_0^\pm(x^1) &= \underset{\lambda=-k}{\text{résidu}}\,\Phi^\pm(\lambda, x^1) = \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)\,!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial\tau^{k-1}}\left[\tau^{(m-3)/2}\,\psi(\pm x^1, x^1\sqrt{\tau})\right]_{\tau=1} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)\,!}(x^1)^{2k+1-m}\left(\frac{\partial}{2\,\sigma\,\partial\sigma}\right)^{k-1}\left[\sigma^{m-3}\,\psi(\pm x^1, \sigma)\right]_{\sigma=x^1}. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\langle P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}, \varphi \rangle = \frac{1}{2(\lambda + k)} \int_0^{+\infty} (x^1)^{2\lambda+m-1} (\Phi_0^+(x^1) - \Phi_0^-(x^1))\, dx^1 + $$
$$+ \int_0^{+\infty} (x^1)^{2\lambda+m-1} (\Phi_1^+(\lambda, x^1) - \Phi_1^-(\lambda, x^1))\, dx^1 .$$

Pour $\operatorname{Re} \lambda > -m/2$, ces deux intégrales sont régulières et l'on obtient pour $\langle P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}, \varphi \rangle$ les pôles simples $\lambda = -k$ où

$$\begin{array}{ll} k = 1, 2, \ldots, (m-1)/2 & \text{si } m \text{ est impair} \\ k = 1, 2, \ldots, m/2 - 1 & \text{si } m \text{ est pair} \end{array}$$

avec :

$$\underset{\lambda=-k}{\text{résidu}} \langle P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}, \varphi \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (x^1)^{-2k+m-1} (\Phi_0^+(x^1) - \Phi_0^-(x^1))\, dx^1$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial}{2\sigma\,\partial\sigma}\right)^{k-1} \left[\sigma^{m-3} \left\{ \frac{\psi(x^1, \sigma)}{2} - \frac{\psi(-x^1, \sigma)}{2} \right\}\right]_{\sigma=x^1} dx^1$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \langle \delta_1^{(k-1)+}(P) - \delta_1^{(k-1)-}(P), \varphi \rangle .$$

Voyons maintenant ce qui se passe pour $\lambda = -m/2$:

Pour m impair, les intégrales $\Phi^{\pm}(\lambda, x^1)$ sont régulières et

$$\underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}} \langle P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}, \varphi \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}} \int_0^{+\infty} (x^1)^{2\lambda+m-1} (\Phi^+(\lambda, x^1) - \Phi^-(\lambda, x^1))\, dx^1$$

où l'on pose $u = (x^1)^2$:

$$\underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}} \langle P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}, \varphi \rangle =$$

$$= \frac{1}{4} \underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}} \int_0^{+\infty} u^{\lambda+m/2-1} (\Phi^+(\lambda, \sqrt{u}) - \Phi^-(\lambda, \sqrt{u}))\, du$$

$$= \frac{1}{4} \left(\Phi^+\left(-\frac{m}{2}, 0\right) - \Phi^-\left(-\frac{m}{2}, 0\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4} (\psi(0,0) - \psi(0,0)) \int_0^1 (1-\tau)^{-m/2}\, \tau^{(m-3)/2}\, d\tau = 0 .$$

Pour m pair, introduisons

$$F_0(x^1) = \Phi_0^+(x^1) - \Phi_0^-(x^1) \quad \text{et} \quad F_1(\lambda, x^1) = \Phi_1^+(\lambda, x^1) - \Phi_1^-(\lambda, x^1)$$

alors au voisinage de $\lambda = -m/2$:

$$\langle P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}, \varphi \rangle = \frac{1}{2(\lambda + m/2)} \int_0^{+\infty} (x^1)^{2\lambda+m-1} F_0(x^1)\, dx^1 + \\ + \int_0^{+\infty} (x^1)^{2\lambda+m-1} F_1(\lambda, x^1)\, dx^1 .$$

En posant $x^1 = \sqrt{u}$, il vient avec des notations évidentes :

$$\langle P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}, \varphi \rangle = \\ = \frac{1}{2(\lambda + m/2)} \int_0^{+\infty} u^{\lambda+m/2-1} G_0(u)\, du + \int_0^{+\infty} u^{\lambda+m/2-1} G_1(\lambda, u)\, du .$$

Mais pour toute fonction $f(u) \in \mathfrak{D}_u$, nous avons autour de $\nu = -1$:

$$\int_0^{+\infty} u^\nu f(u)\, du = \\ = \int_0^1 u^\nu (f(u) - f(0))\, du + \int_1^{+\infty} u^\nu f(u)\, du + \frac{f(0)}{\nu + 1} = \frac{f(0)}{\nu + 1} + \text{partie rég.}$$

ce qui donne ici :

$$\langle P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}, \varphi \rangle = \frac{G_0(0)}{2(\lambda + m/2)^2} + \frac{1}{(\lambda + m/2)}$$

$$\left\{ G_1(\lambda, 0) + \frac{1}{2} \text{partie rég. pour } \lambda = -\frac{m}{2} \text{ de } \langle u^{\lambda+m/2-1}, G_0(u) \rangle \right\} + \text{partie rég.}$$

avec

$$G_0(0) = F_0(0) = \Phi_0^+(0) - \Phi_0^-(0) =$$

$$= \left[\underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}} \int_0^1 (1-\tau)^\lambda \tau^{(m-3)/2} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\psi(x^1, x^1\sqrt{\tau}) - \psi(-x^1, x^1\sqrt{\tau}) \right] d\tau \right]_{x^1=0} = 0$$

et

$$G_1\left(-\frac{m}{2},0\right) = F_1\left(-\frac{m}{2},0\right) = \Phi_1^+\left(-\frac{m}{2},0\right) - \Phi_1^-\left(-\frac{m}{2},0\right)$$

$$= \Phi^+\left(-\frac{m}{2},0\right) - \Phi^-\left(-\frac{m}{2},0\right)$$

$$= \left[\underset{\lambda=-m/2}{\text{partie régulière}} \int_0^1 (1-\tau)^\lambda \tau^{(m-3)/2} \left[\psi(x^1, x^1\sqrt{\tau}) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \psi(-x^1, x^1\sqrt{\tau})\right] d\tau\right]_{x^1=0} = 0\,.$$

Le pôle $\lambda = -m/2$ est simple et

$$\underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}} \langle P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}, \varphi \rangle = \frac{1}{2} \underset{\lambda=-m/2}{\text{partie régulière}} \int_0^{+\infty} u^{\lambda+m/2-1}\, G_0(u)\, du\,.$$

Rappelons que

$$\int_0^{+\infty} u^{\lambda+m/2-1}\, G_0(u)\, du = \int_0^{+\infty} (x^1)^{2\lambda+m-1}\, F_0(x^1)\, dx^1 =$$

$$= \int_0^{+\infty} (x^1)^{2\lambda+m-1} (\Phi_0^+(x^1) - \Phi_0^-(x^1)\, dx^1$$

$$= \frac{(-1)^{m/2-1}}{(m/2-1)\,!} \int_0^{+\infty} (x^1)^{2\lambda+m} \left(\frac{\partial}{2\,\sigma\,\partial\sigma}\right)^{m/2-1} [\sigma^{m-3}\{\psi(x^1,\sigma) -$$

$$- \psi(-x^1,\sigma)\}]_{\sigma=x^1}\, dx^1$$

d'où, en posant $u = (x^1)^2$ et $v = \sigma^2$

$$\int_0^{+\infty} u^{\lambda+m/2-1}\, G_0(u)\, du = \frac{1}{2}\frac{(-1)^{m/2-1}}{(m/2-1)\,!} \int_0^{+\infty} u^{\lambda+m/2-1}.u^{1/2} \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^{m/2-1} \times$$

$$\times [v^{(m-3)/2}\{\psi(\sqrt{u},\sqrt{v}) - \psi(-\sqrt{u},\sqrt{v})]\}_{v=u}.du$$

d'où l'on déduit l'expression de $G_0(u) \in \mathfrak{D}_u$:

$$G_0(u) = \frac{1}{2}\frac{(-1)^{m/2-1}}{(m/2-1)\,!}\, u^{1/2} \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^{m/2-1}$$

$$[v^{(m-3)/2}\{\psi(\sqrt{u},\sqrt{v}) - \psi(-\sqrt{u},\sqrt{v})\}]_{v=u}\,.$$

Nous avons posé

$$\langle \delta_1^{(k)\pm}(P), \varphi \rangle = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial}{2\,\sigma\,\partial\sigma}\right)^k [\sigma^{m-3}\,\psi(\pm x^1,\sigma)]_{\sigma=x^1}\, dx^1\ .$$

cette intégrale doit être régularisée pour

$$k = -m/2 \qquad (m \text{ pair}).$$

Pour cela, on pose encore $u = (x^1)^2$ et $v = \sigma^2$:

$$\langle \delta_1^{(k)\pm}(P), \varphi \rangle = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^k [v^{(m-3)/2} \psi(\pm \sqrt{u}, \sqrt{v})]_{v=u} . du ,$$

où l'on doit écrire

$$\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^k [v^{(m-3)/2} \psi(\pm \sqrt{u}, \sqrt{v})]_{v=u} = u^{(m-3)/2-k} . \Psi_\pm(u) , \quad \Psi_\pm(u) \in \mathfrak{D}_u$$

on obtient :

$$\langle \delta_1^{(k)\pm}(P), \varphi \rangle = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} u^{m/2-2-k} \Psi_\pm(u)\, du$$

et notamment :

$$\langle \delta_1^{(m/2-1)\pm}(P), \varphi \rangle = \frac{1}{4} \text{partie régulière} \int_0^{+\infty} u^{-1} \Psi_\pm(u)\, du$$

avec :

$$\Psi_\pm(u) = u^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^k [v^{(m-3)/2} \psi(\pm \sqrt{u}, \sqrt{v})]_{v=u}$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{1}{2} G_0(u) = \frac{(-1)^{m/2-1}}{(m/2-1)\,!} \cdot \frac{1}{4} (\Psi_+(u) - \Psi_-(u))$$

et que

$$\underset{\lambda=-m/2}{\text{résidu}} \langle P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}, \varphi \rangle = \frac{1}{2} \underset{\lambda=-m/2}{\text{partie rég.}} \int_0^{+\infty} u^{\lambda+m/2-1} G_0(u)\, du$$

$$= \frac{(-1)^{m/2-1}}{(m/2-1)\,!} \langle \delta_1^{(m/2-1)+}(P) - \delta_1^{(m/2-1)-}(P), \varphi \rangle$$

CQFD.

c) Lorsque m est pair, nous utiliserons les distributions définies par

$$P'^{\lambda\pm}_+ = (\lambda + 1)(\lambda + 2) \ldots (\lambda + m/2) P_+^{\lambda\pm}$$

pour Re $\lambda > 0$ et par prolongement analytique pour Re $\lambda > -m/2 - \frac{1}{2}$.

Ces distributions peuvent aussi être employées dans le cas ultra-hyperbolique sous la forme

$$P'^{\lambda}_{+} = (\lambda + 1)(\lambda + 2)\cdots(\lambda + m/2)\, P^{\lambda}_{+}$$

et nous y reviendrons au dernier chapitre pour retrouver la paramétrix de Madame Choquet-Bruhat.

L'entier k prenant les valeurs $1, 2, \ldots, m/2$, il découle de la proposition précédente qu'au voisinage de $\lambda = -k$, on a :

$$P^{\lambda+}_{+} - P^{\lambda-}_{+} = \frac{1}{\lambda + k} \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \times$$

$$\times \left(\delta_1^{(k-1)+}(P) - \delta_1^{(k-1)-}(P)\right) + \text{partie régulière}$$

ainsi :

$$P'^{\lambda+}_{+} - P'^{\lambda-}_{+} = (\lambda + 1)(\lambda + 2)\ldots(\lambda + k - 1)(\lambda + k + 1)\ldots\left(\lambda + \frac{m}{2}\right) \times$$

$$\times \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\left(\delta_1^{(k1-)+}(P) - \delta_1^{(k-1)-}(P)\right) +$$

$$+ (\lambda + 1)\ldots(\lambda + k)\ldots\left(\lambda + \frac{m}{2}\right)\ (\text{partie régulière}).$$

Ainsi, les différentes $P'^{-k+}_{+} - P'^{-k-}_{+}$ sont régulières :

$$P'^{-k+}_{+} - P'^{-k-}_{+} = (m/2 - k)!\,\left(\delta_1^{(k-1)+}(P) - \delta_1^{(k-1)-}(P)\right)$$

et notamment :

$$\text{(III,9)} \qquad P'^{1-m/2+}_{+} - P'^{1-m/2-}_{+} = \delta_1^{(m/2-2)+}(P) - \delta_1^{(m/2-2)-}(P)\,.$$

3 Solutions élémentaires quand m est impair.

a) Pour $\operatorname{Re}\lambda > 1$ et $n =$ entier $\geqslant 0$,

$$P^n(x)\, P^{\lambda\pm}_{+}(x) = P^{\lambda+n\pm}_{+}(x)$$

et nous pouvons reproduire pour ces distributions $P^{\lambda\pm}_{+}$ les calculs effectués au chapitre II, nos 1 et 2.

Posons encore :

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\, P^n(x) \quad \text{et} \quad U'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n + 1)\, U_n(x)\, P^n(x)\,;$$

Il découle de (II,6) :

$$\Delta[U\, P_+^{\lambda+1\,\pm}] = -4\left(\lambda + \frac{m}{2}\right) P_+^{\lambda\pm}\, U' - (\lambda+1)\, P_+^{\lambda\pm} \times$$
$$\times \left[4\, s\, \partial_s U_0 + U_0 \cdot \frac{2\, s}{\sqrt{|g|}}\, \partial_s \sqrt{|g|}\right] - P_+^{\lambda\pm} \sum_{n=1}^{\infty} P^n \times$$
$$\times \left[(\lambda+n+1)\left\{4\, s\, \partial_s U_n + U_n \left(4\, n + \frac{2\, s}{\sqrt{|g|}}\, \partial_s \sqrt{|g|}\right)\right\} - \Delta U_{n-1}\right]$$

qui, pour

$$U_0 = |g|^{-\frac{1}{4}} \text{ et } U_n = \frac{U_0(x)}{4(\lambda+n+1)\, s^n} \int_0^s \frac{t^{n-1}\, \Delta U_{n-1}(\xi)}{U_0(\xi)}\, \mathrm{d}t \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

se réduit à

$$\Delta[U\, P_+^{\lambda+1\,\pm}] = -4(m/2+\lambda)\, P_+^{\lambda\pm}\, U'$$

et

$$\Delta[U(P_+^{\lambda+1\,+} - P_+^{\lambda+1\,-})] = -4(m/2+\lambda)\, U'(P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-})$$

b) On peut prolonger analytiquement cette relation dans le domaine

$$\operatorname{Re}\lambda > -m/2 - \tfrac{1}{2}, \qquad \lambda \neq -1, -2, \ldots, -m/2 + \tfrac{1}{2},$$

et d'après la proposition du n° II,2, la différence $P_+^{-m/2\,+} - P_+^{-m/2\,-}$ est régulière :

$$\Delta[U(P_+^{1-m/2\,+} - P_+^{1-m/2\,-})] = 0\,.$$

De l'expression (III,4) de la solution élémentaire de Δ et de la relation

$$P_+^{1-m/2} = P_+^{1-m/2\,+} + P_+^{1-m/2\,-}$$

nous déduisons l'existence de deux solutions élémentaires $E_{x'}^{\pm}$ de supports respectifs $\varepsilon^{\pm}(x')$ et d'expression :

$$E_{x'}^{+} = \frac{(-1)^{(m-1)/2}\, \Gamma(m/2-1)}{2\, \pi^{m/2}}\, U(x)\, P_+^{1-m/2\,+}$$

(III,10) $$E_{x'}^{-} = \frac{(-1)^{(m-1)/2}\, \Gamma(m/2-1)}{2\, \pi^{m/2}}\, U(x)\, P_+^{1-m/2\,-}$$

avec

$$U_0 = |g|^{-\frac{1}{4}} \quad \text{et} \quad U_n(x) = \frac{U_0(x)}{4(-m/2+n+1)\, s^n} \int_0^s \frac{t^{n-1}\, \Delta U_{n-1}(\xi)}{U_0(\xi)}\, \mathrm{d}t\,.$$

c) Sur un espace V_m harmonique :

$$\Delta P = -2m + Pf(P)$$

nous obtenons les solutions élémentaires de $\Delta + C$:

$$E_{x'}^{\pm} = \frac{(-1)^{(m-1)/2}\,\Gamma(m/2-1)}{2\pi^{m/2}}\,U(P)\,P_+^{1-m/2\,\pm}$$

où $u(\xi)$ est la solution holomorphe au voisinage de $\xi = 0$ de l'équation

$$4\xi y'' + (8 - 2m - \xi f(\xi))\,y' - \{C + (1 - m/2)\,f(\xi)\}\,y = 0\,.$$

Rappelons qu'un espace harmonique de type hyperbolique normal est à courbure constante (A. Lichnérowicz, [4], page 22).

d) Sur un espace M_m plat et pour $\Delta - \varepsilon^2$:

$$E_{x'}^{\pm} = -\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m/2-1}\frac{1}{2\pi^{m/2-1}}\,P_+^{\frac{1}{2}-m/4\,\pm}\,J_{1-m/2}(\varepsilon P_+^{\frac{1}{2}\pm})$$

ce qui signifie :

$$E_{x'}^{\pm} = -\frac{P_+^{1-m/2\,\pm}}{2\pi^{m/2-1}}\left[\frac{1}{\Gamma(2-m/2)} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\frac{P}{2\,!\,\Gamma(3-m/2)} + \cdots + (-1)^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2k}\frac{P^k}{k\,!\,\Gamma(k+2-m/2)} + \cdots\right]$$

et, pour $\varepsilon = 0$:

$$E_{x'}^{\pm} = \frac{(-1)^{(m-1)/2}\,\Gamma(m/2-1)}{2\pi^{m/2}}\,P_+^{1-m/2\,\pm}\,.$$

4 Solutions élémentaires quand *m* est pair.

a) Au nº 2, nous avons défini :

$$P_+'^{\lambda+1\,\pm} = (\lambda+2)(\lambda+3)\ldots\left(\lambda+\frac{m}{2}+1\right)P_+^{\lambda+1\,\pm}\,.$$

Comme au nº II,3, considérons

$$U(x) = \sum_{n=0}^{m/2-2} P^n(x)\,U_n(x)$$

avec les mêmes fonctions U_n. On obtient pour Re $\lambda > 1$:

$$\Delta[U(x)\,P_+^{\lambda+1\pm}] = -4\left(\lambda + \frac{m}{2}\right) P_+^{\lambda\pm}\,U'(x) + P_+^{\lambda+m/2-1\pm}\,\Delta U_{m/2-2}$$

d'où nous déduisons

$$\Delta[U\,P'^{\lambda+1\pm}_+] = -4\left(\lambda + \frac{m}{2}\right)(\lambda+2)(\lambda+3)\ldots\left(\lambda + \frac{m}{2} + 1\right) P_+^{\lambda\pm}\,U'$$

$$+ (\lambda+2)(\lambda+3)\ldots\left(\lambda + \frac{m}{2} + 1\right) P_+^{\lambda+m/2-1\pm}\,\Delta U_{m/2-2}$$

où

$$(\lambda+2)(\lambda+3)\ldots\left(\lambda + \frac{m}{2} + 1\right) P_+^{\lambda\pm} = \frac{\lambda + m/2 + 1}{\lambda + 1}\,P'^{\lambda\pm}_+$$

ce qui donne :

$$\Delta[U\,P'^{\lambda+1\pm}_+] = -4\left(\lambda + \frac{m}{2}\right)\frac{\lambda + m/2 + 1}{\lambda + 1}\,P'^{\lambda\pm}_+\,U' +$$

$$+ (\lambda+2)(\lambda+3)\ldots\left(\lambda + \frac{m}{2} + 1\right) P_+^{\lambda+m/2-1\pm}\,\Delta U_{m/2-2}\,.$$

Pour la fonction

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x)\,P^n(x)$$

nous obtenons :

$$\Delta[V\,P_+^{\lambda+m/2\pm}] = -\left(\lambda + \frac{m}{2}\right) P_+^{\lambda+m/2-1\pm}$$

$$\times\left[4\,s\,\partial_s V_0 + V_0\left(\frac{2\,s}{\sqrt{|g|}}\,\partial_s\sqrt{|g|} + 4\,m + 4\,\lambda - 4\right)\right]$$

$$- P_+^{\lambda+m/2\pm}\left[\sum_{n=1}^{\infty} P^{n-1}\left\{\left(\lambda + \frac{m}{2} + n\right)\left[4\,n\,\partial_s V_n + V_n\left(4\,n + 4\,m + 4\,\lambda -\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. - 4 + \frac{2\,s}{\sqrt{|g|}}\,\partial_s\sqrt{|g|}\right)\right] - \Delta V_{n-1}\right\}\right]\,.$$

En prenant encore

$$V_0 = \frac{U_0}{4\, s^{m+\lambda-1}} \int_0^s \frac{t^{m+\lambda-2}\, \Delta U_{n-1}}{U_0}\, \mathrm{d}t \quad \text{et}$$

$$V_n = \frac{U_0}{4(\lambda + m/2 + n)\, s^{n+m+\lambda-1}} \int_0^s \frac{t^{n+m+\lambda-2}\, \Delta V_{n-1}}{U_0}\, \mathrm{d}t \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

il vient :

$$\Delta \left[U\, P'^{\lambda+1\pm}_{+} + (\lambda+2)(\lambda+3) \ldots \left(\lambda + \frac{m}{2} - 1\right)\left(\lambda + \frac{m}{2} + 1\right) V P^{\lambda+m/2\pm}_{+} \right] =$$

$$= -4 \left(\lambda + \frac{m}{2}\right) \frac{\lambda + m/2 + 1}{\lambda + 1} P'^{\lambda\pm}_{+}\, U'$$

ou encore :

$$\Delta \left[U(P'^{\lambda+1+}_{+} - P'^{\lambda+1-}_{+}) + \right.$$

$$\left. + (\lambda+2)(\lambda+3) \ldots \left(\lambda + \frac{m}{2} - 1\right)\left(\lambda + \frac{m}{2} + 1\right) V(P^{\lambda+m/2+}_{+} - P^{\lambda+m/2-}_{+}) \right] =$$

$$= -4 \left(\lambda + \frac{m}{2}\right) \frac{\lambda + m/2 + 1}{\lambda + 1} U'(P'^{\lambda+}_{+} - P'^{\lambda-}_{+}).$$

Nous avons établi au n° 2 (*c*) que les différences

$$P'^{\mu+}_{+} - P'^{\mu-}_{+}$$

sont régulières en tous les points du domaine $\mathrm{Re}\,\mu > -m/2 - \frac{1}{2}$. On obtient par prolongement analytique jusqu'à $\lambda = -m/2$:

$$\Delta[U(P'^{1-m/2+}_{+} - P'^{1-m/2-}_{+}) + (-1)^{m/2}(m/2 - 2)!\, V(P^{0+}_{+} - P^{0-}_{+})] = 0$$

soit encore, d'après (III,9) :

$$\Delta \left[\frac{(-1)^{1-m/2}}{(m/2 - 2)!} U(\delta_1^{(m/2-2)+}(P) - \delta_1^{(m/2-2)-}(P)) - V(P^{0+}_{+} - P^{0-}_{+}) \right] = 0\,.$$

En remarquant que

$$\delta_1^{(m/2-2)}(P) = \delta_1^{(m/2-2)+}(P) + \delta_1^{(m/2-2)-}(P) \quad \text{et} \quad P^0_{+} = P^{0+}_{+} + P^{0-}_{+}$$

nous déduisons de la solution élémentaire (III,6) les solutions élémentaires $E_x^{\pm}$ de supports respectifs $\bar{\varepsilon}^{\pm}(x')$ et d'expressions :

$$\text{(III,11)} \quad \begin{aligned} E_{x'}^{+} &= \frac{(-1)^{m/2}\,\Gamma(m/2-1)}{2\,\pi^{m/2-1}}\left[\frac{(-1)^{1-m/2}}{(m/2-2)\,!}\,U\,\delta_1^{(m/2-2)+}(P) - V P_+^{0+}\right] \\ E_{x'}^{-} &= \frac{(-1)^{m/2}\,\Gamma(m/2-1)}{2\pi^{m/2-1}}\left[\frac{(-1)^{1-m/2}}{(m/2-2)\,!}\,U\,\delta_1^{(m/2-2)-}(P) - V P_+^{0-}\right] \end{aligned}$$

avec :

$$U = \sum_{n=0}^{m/2-2} U_n P^n\,; \qquad U_0 = |g|^{-\frac{1}{4}}\,;$$

$$U_n = \frac{U_0}{4(-m/2+n+1)\,s^n}\int_0^s \frac{t^{n-1}\,\Delta U_{n-1}}{U_0}\,dt$$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n P^n\,; \qquad V_0 = \frac{U_0}{4\,s^{m/2-1}}\int_0^s \frac{t^{m/2-2}\,\Delta U_{m/2-2}}{U_0}\,dt\,;$$

$$V_n = \frac{U_0}{4\,n\,s^{n+m/2-1}}\int_0^s \frac{t^{n+m/2-2}\,\Delta V_{n-1}}{U_0}\,dt\,.$$

On trouve en particulier, sur un espace-temps V_4 analytique les solutions élémentaires de Δ :

$$E_{x'}^{\pm} = -\frac{1}{2\,\pi}\left[U_0\,\delta_1^{(0)\pm}(P) + V P_+^{0\pm}\right].$$

b) Dans le cas d'un espace harmonique, nous avons trouvé au Ch. II, nº 5 (*c*) la solution élémentaire de $\Delta + C$:

$$\text{(III,12)} \quad \frac{e^{\pm i\pi(m-1)/2}\,\Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2}}\left[\bar{\psi}(P)\,(P \pm i\,0)^{1-m/2} + \psi(P)\,\mathrm{Log}\,(P \pm i\,0)\right]$$

où $\bar{\psi}(\xi)$ et $\psi(\xi)$ sont holomorphes au voisinage de $\xi = 0$ et entrent dans la construction de la solution

$$u(\xi) = \xi^{m/2-1}\,\psi(\xi)\,\mathrm{Log}\,\xi + \bar{\psi}(\xi)$$

de l'équation

$$4\,\xi\,y'' + (8 - 2\,m - \xi f(\xi))\,y' - \{C + (1 - m/2)\;f(\xi)\}\,y = 0$$

avec la condition

$$\bar{\psi}(0) = 1\,.$$

Rappelons que :

$$(P \pm \mathrm{i}\,0)^{1-m/2} =$$

$$= \pm \mathrm{i}\,\pi \frac{(-1)^{1-m/2}}{(m/2-2)\,!}\,\delta_1^{(m/2-2)}(P) + P_+^{1-m/2} + (-1)^{1-m/2}\,P_-^{1-m/2}$$

$$\mathrm{Log}\,(P \pm \mathrm{i}\,0) = \pm \mathrm{i}\,\pi\, P_-^0 + \mathrm{Log}\, P_+ + \mathrm{Log}\, P_-$$

où P_-^0 peut être remplacé dans (III,12) par $-P_+^0$ ce qui remplace (III,12) par :

$$-\frac{(-1)^{(m-2)/2}\,\Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2-1}}\left[\frac{(-1)^{1-m/2}}{(m/2-2)\,!}\,\overline{\psi}(P)\,\delta_1^{(m/2-2)}(P) - \psi(P)\,P_+^0 \pm\right.$$

$$\left.\pm \frac{i}{\pi}\left\{\overline{\psi}(P)\,(P_+^{1-m/2} + (-1)^{1-m/2}\,P_-^{1-m/2}) + \psi(P)\,(\mathrm{Log}\,P_+ + \mathrm{Log}\,P_-)\right\}\right]$$

où seule intervient la partie réelle dans la contribution à la solution élémentaire. Nous en déduisons encore deux solutions élémentaires :

$$E_{x'}^{\pm} = -\frac{1}{2\,\pi^{m/2-1}}\left[\overline{\psi}(P)\,\delta_1^{(m/2-2)\pm}(P) + (-1)^{m/2}\left(\frac{m}{2}-2\right)!\,\psi(P)\,P_+^{0\,\pm}\right].$$

c) Sur un espace M_m plat, et pour $\Delta - \varepsilon^2$, on obtient d'après (II,21) les solutions élémentaires

$$E_{x'}^{\pm} = -\frac{1}{2\,\pi^{m/2-1}}\left[\delta_1^{(m/2-2)\pm}(P)\sum_{r=0}^{m/2-2}\frac{(m/2-2-r)\,!}{(m/2-2)\,!\,r\,!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2r} P^r + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m/2-1} P_+^{\frac{1}{2}-m/4\,\pm}\, J_{m/2-1}\,(\varepsilon\, P^{\frac{1}{2}\pm})\right].$$

Ainsi, sur l'espace-temps M_4 de la relativité restreinte on obtient les distributions connues sous le nom de D^{ret} et D^{av} :

$$E_{x'}^{\pm} = -\frac{1}{2\,\pi}\,\delta_1^{(0)\pm}(P) + \frac{\varepsilon}{4\,\pi}\,P_+^{-\frac{1}{2}\pm}\,J_1(\varepsilon\,P_+^{\frac{1}{2}\pm})$$

où l'on pose

$$P_+^{-\frac{1}{2}\pm} J_1(\varepsilon\,P_+^{\frac{1}{2}\pm}) = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2k}\frac{P_+^{k\,\pm}}{k\,!\,(k+1)\,!}.$$

5 Solutions invariantes de l'équation homogène.

a) Soit L une isométrie laissant fixe le point x' ; les fonctions U, V, W, $\bar{\psi}$ et ψ sont invariantes par L. Il en est de même des distributions P_-^λ. Les distributions $P_+^{\lambda\pm}$ (et $P_+'^{\lambda\pm}$) sont invariantes ou échangées (comme c'est le cas où L est une symétrie par rapport à x', ce qui exige que le tenseur dérivé du tenseur de courbure soit nul en x' — *E.* Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, n° 240). Nous en déduisons que les solutions élémentaires obtenues sont invariantes respectivement ou échangées.

b) Dans chaque cas, nous pouvons expliciter trois solutions invariantes de l'équation homogène :

$$(\Delta - \varepsilon^2)\, T = 0\,.$$

Rappelons d'abord la formule (II,12) : si

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x)\, P^n(x)\,,$$

nous avons obtenu :

$$\Delta[V(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda + m/2}] = -\left(\lambda + \frac{m}{2}\right)(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda + m/2 - 1}$$
$$\left[4\, s\, \partial_s V_0 + V_0 \left(\frac{2\, s}{\sqrt{|\, g\, |}}\, \partial_s \sqrt{|\, g\, |} + 4\, m + 4\, \lambda - 4\right)\right]$$

à condition de prendre

$$V_n = \frac{U_0}{4(\lambda + m/2 + n)\, s^{n+m+\lambda-1}} \int_0^s \frac{t^{n+m+\lambda-2}\, \Delta V_{n-1}}{U_0}\, \mathrm{d}t$$

pour $n = 1, 2, \ldots$

Ainsi, quel que soit V_0, nous obtenons pour $\lambda = -\, m/2$ la solution

$$T_1 = V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x)\, P^n$$

de $\Delta T = 0$. Il suffit de substituer $\Delta - \varepsilon^2$ à Δ dans ces formules pour avoir un solution de l'équation homogène $(\Delta - \varepsilon^2)\, T = 0$.

Une deuxième solution de cette équation est évidemment donnée par

$$T_2 = E_{x'}^{+} - E_{x'}^{-}$$

qui correspond au propagateur de M. Lichnérowicz [1].

Enfin, la troisième solution s'obtient en considérant la partie imaginaire des solutions élémentaires que nous avons construites (en remplaçant Δ par $\Delta - \varepsilon^2$ dans les calculs de U, V, W) :

$$T_3 = U . P_-^{1-m/2} \qquad \text{pour } m \text{ impair}$$

$$T_3 = U\{ P_+^{1-m/2} + (-1)^{1-m/2} P_-^{1-m/2} \}$$
$$+ V\{ \operatorname{Log} P_+ + \operatorname{Log} P_- \} + WP \qquad \text{pour } m \text{ pair}.$$

Explicitons ces résultats dans le cas d'un espace plat :

Pour m impair ou pair, T_1 est la solution que nous avons trouvée au n° 5 (a, b, c) du chapitre II :

$$T_1 = (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\frac{1}{2}-m/4} J_{m/2-1}(\varepsilon(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\frac{1}{2}})$$
$$= \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m/2-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2k} \frac{P^k}{k\,!\,\Gamma(m/2+k)}$$
$$= \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m/2-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2k} \frac{P_+^k + (-1)^k P_-^k}{k\,!\,\Gamma(m/2+k)}$$
$$= \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m/2-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2k} \frac{P_+^k}{k\,!\,\Gamma(m/2+k)} +$$
$$+ \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m/2-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2k} \frac{P_-^k}{k\,!\,\Gamma(m/2+k)}$$

et on peut écrire :

$$T_1 = P_+^{\frac{1}{2}-m/4} J_{m/2-1}(\varepsilon(P_+^{\frac{1}{2}})) + P_-^{\frac{1}{2}-m/4} I_{m/2-1}(\varepsilon P_-^{\frac{1}{2}}).$$

Pour m impair,

$$T_3 = (P_-^{\frac{1}{2}-m/2}) I_{1-m/2}(\varepsilon P_-^{\frac{1}{2}}).$$

Pour m pair, à un coefficient près (Ch. II, n° 5 (c))

$$T_3 = \frac{2}{\pi}\left(C + \operatorname{Log}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Log} P_+ + \frac{1}{2}\operatorname{Log} P_-\right)$$
$$\times [P_+^{\frac{1}{2}-m/4} J_{m/2-1}(\varepsilon P_+^{\frac{1}{2}}) + P_-^{\frac{1}{2}-m/4} I_{m/2-1}(\varepsilon P_-^{\frac{1}{2}})]$$
$$- \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{m/2-2} \frac{(m/2-r-2)\,!}{r\,!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2r-m/2+1}$$
$$\times [P_+^{r+1-m/2} + (-1)^{r+1-m/2} P_-^{r+1-m/2}] - \frac{\varepsilon^{m/2=1}}{\pi} \alpha(P + \mathrm{i}\,0)$$

ce qui s'écrit encore :

$$T_3 = P_+^{\frac{1}{2}-m/4} \left\{ \frac{2}{\pi} \left(C + \operatorname{Log} \frac{\varepsilon P_+^{\frac{1}{2}}}{2} \right) J_{m/2-1}(\varepsilon P_+^{\frac{1}{2}}) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{m/2-2} \frac{(m/2 - r - 2)\,!}{r\,!} \left(\frac{\varepsilon P_+^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^{2r+1-m/2} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\varepsilon P_+^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^{m/2-1} \beta(\varepsilon P_+^{\frac{1}{2}}) \right\}$$

$$+ \frac{2}{\pi} P_-^{\frac{1}{2}-m/4} \left\{ \left(C + \operatorname{Log} \frac{\varepsilon P_-^{\frac{1}{2}}}{2} \right) I_{m/2-1}(\varepsilon P_-^{\frac{1}{2}}) \right.$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m/2-2} \frac{(m/2 - r - 2)\,!}{r\,!} (-1)^{r+1-m/2} \left(\frac{\varepsilon P_-^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^{2r-m/2+1}$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon P_-^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^{m/2-1} \beta(\varepsilon P_-^{\frac{1}{2}}) \right\}$$

où

$$\alpha(P + \mathrm{i}\,0) = \sum_{r=0}^{r=+\infty} (-1)^r \frac{1}{r\,!(n+r)\,!} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{2r} \times$$

$$\times \left(P_+^r + (-1)^r P_-^r \right) \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+r} \right)$$

on déduit de cette expression $\beta(\varepsilon P_+^{\frac{1}{2}})$, $\overline{\beta}(\varepsilon P_-^{\frac{1}{2}})$ et :

$$T_3 = P_+^{\frac{1}{2}-m/4} Y_{m/2-1}(\varepsilon P_+^{\frac{1}{2}}) + \frac{2}{\pi} P_-^{\frac{1}{2}-m/4} K_{m/2-1}(\varepsilon P_-^{\frac{1}{2}})\,.$$

Notamment, pour M_4,

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} T_3 = \frac{\varepsilon}{4\pi} P_+^{-\frac{1}{2}} Y_1 (\varepsilon P_+^{\frac{1}{2}}) + \frac{\varepsilon}{2\pi^2} P_-^{-\frac{1}{2}} K_1(\varepsilon P_-^{\frac{1}{2}})$$

est la distribution G^1 (ou D^1 ou Δ^1 ...) qui intervient en théorie quantique des champs.

Sur un espace plat, Méthée [1] a établi l'unicité de ces distributions T_1, T_2, T_3.

Dans le cas général, Lichnérowicz [1] a montré l'unicité des solutions élémentaires $E_{x'}$.

CHAPITRE IV

CAS TENSORIEL ET SPINORIEL

V_m est riemannienne de type hyperbolique quelconque, supposée analytique.

1 Tenseur-distribution solution élémentaire de Δ.

a) Le laplacien de de Rham-Lichnérowicz d'un p-tenseur différentiable U est le p-tenseur ΔU défini par (A. Lichnérowicz [1], p. 26) :

$$(\Delta U)_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = - \nabla^\rho \nabla_\rho U_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} + \sum_k R_{\alpha_k \mu} U_{\alpha_1 \ldots \overset{\mu}{\hat{\alpha}_k} \ldots \alpha_p} - \sum_{k \neq 1} R_{\alpha_k \rho, \alpha_1 \sigma} T_{\alpha_1 \ldots \overset{\rho}{\hat{\alpha}_k} \ldots \overset{\sigma}{\hat{\alpha}_1} \ldots \alpha_p}$$

où interviennent le tenseur de courbure $R_{\alpha\rho,\beta\sigma}$ et de Ricci $R_{\alpha\mu} = R^\rho_{\alpha,\rho\mu}$.

Il en découle, pour un champ de vecteurs :

$$(\Delta U)_\alpha = - \nabla^\rho \nabla_\rho U_\alpha + R_{\rho\alpha} U^\rho$$

pour un 2-tenseur :

$$(\Delta U)_{\alpha\beta} = - \nabla^\rho \nabla_\rho U_{\alpha\beta} + R_{\alpha\rho} U^\rho_\beta + R_{\beta\rho} U^\rho_\alpha - 2 R_{\alpha\rho,\beta\sigma} U^{\rho\sigma}$$

pour une p-forme (de Rham [1], § 26)

$$\Delta U = (\mathrm{d}\delta + \delta d) T$$

où d et δ sont les opérateurs de différentiation et de codifférentiation extérieure :

$$(\mathrm{d}U)_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{p+1} (-1)^{\nu-1} \nabla_{\alpha_\nu} U_{\alpha_1 \ldots \hat{\alpha}_\nu \ldots \alpha_p}$$

$$(\delta U)_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}} = - \nabla_\rho U^\rho_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}$$

$\mathfrak{D}_\Omega(\otimes p)$ désignant l'espace des p-tenseurs $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur l'ouvert $\Omega \subset V_m$ et $\mathfrak{D}'_\Omega(\otimes p)$ l'espace des p-tenseurs distributions, on a, par définition pour tout $T \in \mathfrak{D}'_\Omega(\otimes p)$

$$\langle \Delta T, U \rangle = \langle T, \Delta U \rangle$$

quel que soit $U \in \mathfrak{D}_\Omega(\otimes p)$. Avec une définition analogue pour les p-formes distributions (qui se ramènent aux courants de de Rham par application de l'opérateur*).

b) Soit x' un point fixé de V_m, Ω un voisinage de x', $\tau_{\alpha,\lambda'}(x)$ un bitenseur appartenant $T^*_{x\in\Omega} \otimes T^*_{x'}$, supposé $\mathcal{C}^\infty$ en x (nous le prendrons analytique au n° 2) et astreint à la seule condition

$$\text{(IV,1)} \qquad \tau_{\alpha,\lambda'}(x') = g_{\alpha\lambda'}(x') .$$

A. Lichnérowicz ([1], page 12) appelle bitenseurs de Dirac relatifs au point $x' \in V_m$ les p-tenseurs distributions $(\otimes^p \tau)\, \delta_{x'}$ à valeurs dans $\otimes^p T^*_{x'}$:

$$(\otimes^p \tau)\, \delta_{x'} \in [\mathfrak{D}'_\Omega(\otimes p)] \otimes (\otimes^p T^*_{x'}) .$$

Il définit de la même façon les p-formes distributions $\delta^{(p)}_{x'} \equiv (\wedge^p \tau)\, \delta_{x'}$ à valeurs dans $\wedge^p T^*_{x'}$. On peut écrire par exemple :

$$(\otimes^1 \tau)\, \delta_{x'} = \tau_{\alpha,\lambda'}(x)\, \delta_{x'}(x)$$

$$\delta^{(2)}_{\alpha\beta,\lambda'\mu'} = (\tau_{\alpha,\lambda'}\, \tau_{\beta,\mu'} - \tau_{\beta,\lambda'}\, \tau_{\alpha,\mu'})\, \delta_{x'}(x) .$$

Il découle de (IV,1) que

$$\langle (\otimes^p \tau)\, \delta_{x'}, U \rangle = U(x') \qquad \text{pour tout} \qquad U \in \mathfrak{D}_\Omega(\otimes p)$$

et la définition du bitenseur de Dirac ne dépend de τ que dans la mesure où (IV,1) est vérifiée. Nous dirons alors que

$$E \in [\mathfrak{D}'_\Omega(\otimes p)] \otimes (\otimes^p T^*_{x'})$$

est solution élémentaire de Δ au point x' si

$$\Delta_x E = (\otimes^p \tau)\, \delta_{x'} .$$

c) Le transport par parallélisme pour la connexion riemannienne, le long de la géodésique $\widehat{x'x}$ définit un isomorphisme canonique μ de T_x sur $T_{x'}$ qui s'exprime par un bitenseur $t_{\alpha,}^{\lambda'}$ (A. Lichnérowicz [1] p. 10) tel que, pour chaque $v \in T_{x'}$

$$(\mu v)^{\lambda'}(x') = t_{\alpha,}{}^{\lambda'}\, v^\alpha(x) .$$

L'isomorphisme inverse μ^{-1} se traduit par

$$(\mu^{-1} v)^\alpha(x) = t^\alpha{}_{,\lambda'}\, v^{\lambda'}(x')$$

et l'on a

$$g_{\lambda'\mu'}(x') = t^{\alpha}{}_{,\lambda'}\, t^{\beta}{}_{,\mu'}\, g_{\alpha\beta}(x)$$

ce qui permet d'abaisser ou d'élever les indices à l'aide du tenseur métrique et de définir le tenseur de transport $t_{\alpha,\lambda'} = g_{\alpha\beta}\, t^{\beta}{}_{,\lambda'}$ et que nous noterons $t_{\alpha,\lambda'}(x)$ puisque x' est fixé.

On a, pour ce bi-tenseur :

$$t_{\alpha,\lambda'}(x') = g_{\alpha\lambda'}(x')$$

et t peut remplacer τ dans la définition des bi-tenseurs de Dirac.

De plus, si (u^{α}) est le vecteur tangent en x à la géodésique $\widehat{x'x}$,

$$u^{\alpha}\, \nabla_{\alpha}\, t_{\beta,\lambda'}(x) = 0 \,. \tag{IV,2}$$

Enfin, Ω étant rapporté à un système de coordonnées locales et $T(\Omega)$ aux repères naturels associés, les composantes de t sont des fonctions analytiques de ces coordonnées.

2 Construction des solutions élémentaires dans le cas vectoriel ($p = 1$).

a) Le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant : pour chaque $x' \in V_m$, il faut trouver un voisinage Ω de ce point et un vecteur distribution E sur Ω, à valeurs dans $T^*_{x'}$, tel que

$$\langle\, \Delta_x\, E_{\alpha,\alpha'}(x)\,, \qquad \varphi^{\alpha}(x)\,\rangle = \varphi_{\alpha'}(x')$$

pour chaque vecteur $\varphi \in \mathfrak{D}_{\Omega}(\otimes\, 1)$.

Tous les calculs seront faits en coordonnées normales relatives à un repère orthonormé $R^{x'}$ de $T_{x'}$.

b) Généralisons les méthodes des chapitres II et III en posant :

$$U_{\alpha,\alpha'}(x) = \sum_{n=0}^{N} U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}(x)\, P^{n}(x)\,.$$

Nous avons, pour Re $\lambda > 1$:

$$\nabla_{\beta}[U_{\alpha,\alpha'}(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}] =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} [(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n+1}\, \nabla_{\beta}\, U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} + U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}\, \nabla_{\beta}(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n+1}]$$

$$\nabla_\gamma \nabla_\beta[U_{\alpha,\alpha'}(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}] =$$
$$= \sum_{n=0}^{N} [(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n+1} \nabla_\gamma \nabla_\beta U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} + U^{(n)}_{\alpha,\alpha} \nabla_\gamma \nabla_\beta (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n+1} +$$
$$+ \nabla_\gamma (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n+1} \nabla_\beta U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} + \nabla_\gamma U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} . \nabla_\beta (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n+1}]$$

$$g^{\gamma\beta} \nabla_\gamma \nabla_\beta[U_{\alpha,\alpha'}(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}] =$$
$$= \sum_{n=0}^{N} [(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n+1} g^{\gamma\beta} \nabla_\gamma \nabla_\beta U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} - U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} \Delta (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n+1} +$$
$$+ 2\, g^{\gamma\beta} \partial_\gamma (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n+1} . \nabla_\beta U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}] .$$

Compte tenu de l'expression du laplacien sur les vecteurs :

$$\Delta[U_{\alpha,\alpha'}(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}] = \sum_{n=0}^{N} [(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n+1} \Delta U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} + U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} \Delta (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n+1} -$$
$$- 2\, g^{\gamma\beta}(x)\, \partial_\gamma (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n+1} . \nabla_\beta U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}] .$$

Nous avons montré au chapitre II :

$$\Delta (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n+1} =$$
$$= -(\lambda + n + 1)(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n} \left[2\,m + \frac{2\,s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|} + 4\,\lambda + 4\,n\right]$$
$$g^{\gamma\beta}(x)\, \partial_\gamma (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n+1} = 2(\lambda + n + 1)(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n}\, x^\beta .$$

Ainsi :

$$\Delta[U_{\alpha,\alpha'}(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}] = \sum_{n=0}^{N} \Big[(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n+1} \Delta U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} -$$
$$- (\lambda + n + 1)(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n} U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} \left(2\,m + \frac{2\,s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|} + 4\,\lambda + 4\,n\right)$$
$$- 4(\lambda + n + 1)(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+n}\, x^\beta\, \nabla_\beta U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}\Big]$$

qui peut encore s'écrire :

$$\Delta[U_{\alpha,\alpha'}(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}] = -(2\,m + 4\,\lambda)(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda} \sum_{n=0}^{N} (\lambda + n + 1)\, U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} P^n -$$
$$- (\lambda + 1)(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda} \left[4\, x^\beta \nabla_\beta U^{(0)}_{\alpha,\alpha'} + U^{(0)}_{\alpha,\alpha'} \frac{2\,s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|}\right]$$
$$- (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda} \sum_{n=1}^{N} P^n \Big[(\lambda + n + 1) \Big\{ 4\, x^\beta \nabla_\beta U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}$$
$$+ U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} \left(4\,n + \frac{2\,s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|}\right) \Big\} - \Delta U^{(n-1)}_{\alpha,\alpha'}\Big] + (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+N+1} \Delta U^{(N)}_{\alpha,\alpha'} .$$

Pour des $U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}$ solutions de

$$4\, x^{\beta}\, \nabla_{\beta}\, U^{(0)}_{\alpha,\alpha'} + U^{(0)}_{\alpha,\alpha'}\, \frac{2\, s}{\sqrt{|\, g\, |}}\, \partial_s \sqrt{|\, g\, |} = 0$$

$$(\lambda + n + 1)\left\{ 4\, x^{\beta}\, \nabla_{\beta}\, U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} + U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} \left(4\, n + \frac{2\, s}{\sqrt{|\, g\, |}}\, \partial_s \sqrt{|\, g\, |}\right) \right\} - \Delta U^{(n-1)}_{\alpha,\alpha'} = 0$$

le laplacien précédent se ramène à

(IV,3) $$\Delta[U_{\alpha,\alpha'}(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+1}] =$$
$$= -\, (2\, m + 4\, \lambda)\, (P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda}\; U'_{\alpha,\alpha'} + (P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+N+1}\, \Delta U^{(N)}_{\alpha,\alpha'}$$

où

$$U'_{\alpha,\alpha'} = \sum_{n=0}^{N} (\lambda + n + 1)\, U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}\, P^n\,.$$

Pour déterminer $U^{(0)}_{\alpha,\alpha'}$ rappelons que

$$U_0 = |\, g\, |^{-\frac{1}{4}}$$

vérifie

$$2\, \partial_s\, U_0 + \frac{1}{\sqrt{|\, g\, |}}\, \partial_s \sqrt{|\, g\, |} = 0\,.$$

Posons

$$U^{(0)}_{\alpha,\alpha'} = U_0\, t_{\alpha,\alpha'}$$

où $t_{\alpha,\alpha'}$ est le tenseur de transport :

$$4\, x^{\beta}\, \nabla_{\beta}\, U^{(0)}_{\alpha,\alpha'} + U^{(0)}_{\alpha,\alpha'}\, \frac{2\, s}{\sqrt{|\, g\, |}}\, \partial_s \sqrt{|\, g\, |} =$$
$$= U_0 \cdot 4\, x^{\beta}\, \nabla_{\beta}\, t_{\alpha,\alpha'} + t_{\alpha,\alpha'} \left(4\, s\, \partial_s\, U_0 + \frac{2\, s}{\sqrt{|\, g\, |}}\, \partial_s \sqrt{|\, g\, |}\right) = 0$$

puisque, d'après (IV,2) :

$$x^{\beta}\, \nabla_{\beta}\, t_{\alpha,\alpha'} = s\, .\, u^{\beta}\, \nabla_{\beta}\, t_{\alpha,\alpha'} = 0\,.$$

Ayant ainsi déterminé $U^{(0)}_{\alpha,\alpha'}$ on peut déterminer les $U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$ réguliers en x' de façon à obtenir (IV,3) .

c) Quand m est impair, on pose

$$U_{\alpha,\alpha'} = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}\, P^n$$

et les $U^{(n)}$ précédents conduisent à

$$\Delta[U_{\alpha,\alpha'}(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}] = -\,4(\lambda + m/2)\,(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda}\, U'_{\alpha,\alpha'}$$

avec

$$U'_{\alpha,\alpha'} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n + 1)\, U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}\, P^n ,$$

$$U^{(0)} = \frac{t_{\alpha,\alpha'}}{\sqrt[4]{|g|}}$$

et $U^{(n)}$ solution régulière pour x' de

(IV,4) $$(\lambda + n + 1)\left[4\, x^{\beta}\, \nabla_{\beta}\, U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} + \right.$$
$$\left. + \, U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}\left(4\, n + \frac{2\, s}{\sqrt{|g|}}\,\partial_s \sqrt{|g|}\right)\right] - \Delta U^{(n-1)}_{\alpha,\alpha'} = 0.$$

Nous avons :

$$\nabla_{\beta}\, U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} = \partial_{\beta}\, U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} - \Gamma^{\rho}_{\beta\alpha}\, U^{(n)}_{\rho,\alpha'} .$$

Rappelons (A. Lichnérowicz, [3], page 6) qu'en coordonnées normales,

$$x^{\beta}\,\partial_{\alpha}\, g_{\beta\sigma} = x^{\beta}\,\partial_{\sigma}\, g_{\beta\alpha}$$

ainsi le long de la géodésique $\widehat{x'\,x}$:

$$x^{\beta}\,\Gamma^{\rho}_{\beta\alpha} = \tfrac{1}{2}\, x^{\beta}.g_{\rho\sigma}(\partial_{\beta}\, g_{\alpha\sigma} + \partial_{\alpha}\, g_{\beta\sigma} - \partial_{\sigma}\, g_{\beta\alpha}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\, g^{\rho\sigma}\, x^{\beta}\,\partial_{\beta}\, g_{\alpha\sigma} = \tfrac{1}{2}\, g^{\rho\sigma}\, s\,\partial_s\, g_{\alpha\sigma}$$

ce qui donne :

$$x^{\beta}\,\nabla_{\beta}\, U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} = s\,\partial_s\, U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} - \tfrac{1}{2}\, g^{\rho\sigma}\, U^{(n)}_{\rho,\alpha'}\, s\,\partial_s\, g_{\alpha\sigma}$$

ou encore :

$$x^{\beta}\,\nabla_{\beta}\, U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} = s\,\partial_s\, U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} - \tfrac{1}{2}\, U^{(n)\sigma}{}_{,\alpha'}\, s\,\partial_s\, g_{\alpha\sigma}$$

et (IV,4) s'écrit :

$$s\,\partial_s\, U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} + U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}\left(n - \frac{s}{U_0}\,\partial_s\, U_0\right) - \frac{s}{2}\, U^{(n)\sigma}{}_{,\alpha'}\,\partial_s\, g_{\alpha\sigma} = \frac{\Delta U^{(n-1)}_{\alpha,\alpha'}}{4(\lambda + n + 1)}$$

et l'on obtient ainsi un système de m équations (pour chaque indice α') linéaires par rapport aux inconnues $U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}$.

On peut en déterminer une solution $(U^{(n)}_{1,\alpha'}, \ldots, U^{(n)}_{m,\alpha'})$ analytique au voisinage de x'.

L'équation précédente s'écrit encore :

$$\partial_s \left(\frac{s^n\, U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}}{U_0}\right) = \frac{s^n\, U^{(n)}_{\sigma,\alpha'}}{U_0} \left(\frac{1}{2}\, g^{\sigma\rho}\, \partial_s\, g_{\alpha\rho}\right) + \frac{1}{4(\lambda + n + 1)} \cdot \frac{s^{n-1}\, \Delta U^{(n-1)}_{\alpha,\alpha'}}{U_0}$$

Posons

$$\overline{U}^{(n)}_{\alpha,\alpha'} = \frac{U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}}{U_0} \qquad \text{et} \qquad \overline{\Delta}\overline{U}^{(n)}_{\alpha,\alpha'} = \frac{1}{U_0}\, \Delta(U_0\, \overline{U}^{(n)}_{\alpha,\alpha'}) = \frac{1}{U_0}\, \Delta U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}\,;$$

on obtient l'équation :

$$\partial_s(s^n\, \overline{U}^{(n)}_{\alpha,\alpha'}) = (s^n\, \overline{U}^{(n)}_{\sigma,\alpha'}) \left(\frac{1}{2}\, g^{\sigma\rho}\, \partial_s\, g_{\alpha\rho}\right) + \frac{1}{4(\lambda + n + 1)}\, (s^{n-1}\, \overline{\Delta}\overline{U}^{(n-1)}_{\alpha,\alpha'}) .$$

Nous pouvons appliquer à cette équation la méthode des fonctions majorantes (Valiron [1], n° 47). Nous pouvons supposer que

$$\frac{1}{2}\, g^{\sigma\rho}\, \partial_s\, g_{\alpha\rho} \ll \frac{G}{1 - \sigma/r} \qquad (G, r = \text{constantes}\,, \qquad \sigma = \sum |\, x^\alpha\, |)$$

et :

$$\overline{U}^{(n-1)}_{\alpha,\alpha'} \ll \frac{K_{n-1}}{(1 - \sigma/r)^{2(n-1)+mGr}} \Rightarrow \overline{\Delta}\overline{U}^{(n-1)}_{\alpha,\alpha'} \ll \frac{\alpha'\, K_{n-1}(2\,n - 2)\,(2\,n - 1)}{(1 - \sigma/r)^{2n+1+mGr}} .$$

Alors, s étant proportionnel à σ le long d'une géodésique, il vient :

$$\sigma^n\, \overline{U}^{(n)}_{\alpha,\alpha'} \ll y(\sigma)$$

où $y(\sigma)$ est solution de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{mG}{1 - \sigma/r}\, y + \frac{\alpha'\, K_{n-1}(2\,n - 2)\,(2\,n - 1)\,\sigma^{n-1}}{4\,|\,\lambda + n + 1\,|\,(1 - \sigma/r)^{2n+1+mGr}} .$$

Si l'on pose

$$y = \frac{z}{(1 - \sigma/r)^{mGr}}$$

$z(\sigma)$ est solution de

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{\alpha'\, K_{n-1}(2\,n - 2)\,(2\,n - 1)\,\sigma^{n-1}}{4\,|\,\lambda + n + 1\,|\,(1 - \sigma/r)^{2n+1}}$$

ce qui entraîne (Hadamard [1], Book II, n° 63) :

$$z \ll \frac{K_n \sigma^n}{(1 - \sigma/r)^{2n}}$$

donc

$$\overline{U}^{(n)}_{\alpha,\alpha'} \ll \frac{K_n}{(1 - \sigma/r)^{2n+mGr}}$$

avec

$$K_n = \alpha' K_{n-1} \frac{(2n-2)(2n-1)}{4n \mid \lambda + n + 1 \mid}.$$

On a toujours

$$\frac{K_n}{K_{n-1}} \to \alpha'$$

et l'on obtient les mêmes résultats qu'au n° 2 (*c*) du chapitre II ; les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} P^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n + 1) U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} P^n$$

définissent des tenseurs analytiques en x sur un voisinage assez petit de x' et holomorphes en λ pour $\lambda \neq -2, -3, \ldots$ Pour ces deux tenseurs $U_{\alpha,\alpha'}$ et $U'_{\alpha,\alpha'}$ nous avions obtenu pour Re $\lambda > 1$:

$$\Delta[U_{\alpha,\alpha'}(P \pm i\,0)^{\lambda+1}] = -4(\lambda + m/2)(P \pm i\,0)^{\lambda} U'_{\alpha,\alpha'}$$

qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned}\langle \Delta_x[U_{\alpha,\alpha'}(x)(P \pm i\,0)^{\lambda+1}(x)], \varphi^{\alpha}(x) \rangle &= \\ &= -4 \langle (\lambda + m/2)(P \pm i\,0)^{\lambda} U'_{\alpha,\alpha'}(x), \varphi^{\alpha}(x) \rangle \\ &= -4 \langle (\lambda + m/2)(P \pm i\,0)^{\lambda}(x), U'_{\alpha,\alpha'}(x)\varphi^{\alpha}(x) \rangle\end{aligned}$$

pour tout $\varphi^{\alpha} \in \mathfrak{D}_{\Omega}(\otimes 1)$ (Ω est le voisinage de x' où sont définis $U_{\alpha,\alpha'}$ et $U'_{\alpha,\alpha'}$).

En prolongeant analytiquement jusqu'à $\lambda = -m/2$:

$$\langle \Delta_x[U_{\alpha,\alpha'}(x)(P \pm i\,0)^{1-m/2}(x)], \varphi^{\alpha}(x) \rangle = -4 \cdot \frac{e^{\mp i\pi q/2}\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)} U'_{\alpha,\alpha'}(x')\varphi^{\alpha}(x')$$

où

$$U'_{\alpha,\alpha'}(x') = (1 - m/2)\,U_0(x')\,t_{\alpha,\alpha'}(x') = (1 - m/2)\,g_{\alpha,\alpha'}(x')$$

et l'on obtient :

$$\langle \Delta_x[U_{\alpha,\alpha'}(x)\,(P \pm \mathrm{i}\,0)^{1-m/2}(x)],\ \varphi^\alpha(x) \rangle = 4 \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\pi q/2}\ \pi^{m/2}}{\Gamma(m/2-1)}\,\varphi_{\alpha'}(x')$$

ce qui s'écrit encore :

$$\Delta_x[U_{\alpha,\alpha'}(x)\,(P \pm \mathrm{i}\,0)^{1-m/2}(x)] = 4 \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\pi q/2}\ \pi^{m/2}}{\Gamma(m/2-1)}\,t_{\alpha,\alpha'}(x)\,\delta_{x'}(x)\,.$$

Conclusion (pour m impair).

Le laplacien

$$(\Delta T)_\alpha \equiv -\nabla^\rho \nabla_\rho T_\alpha + R_{\rho\alpha} T^\rho$$

admet au point x' les solutions élémentaires complexes conjuguées :

$$E = \frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi q/2}\ \Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2}}\,U_{\alpha,\alpha'}(P \pm \mathrm{i}\,0)^{1-m/2}$$

où

$$U_{\alpha,\alpha'} = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}\,P^n\,, \qquad U^{(0)}_{\alpha,\alpha'} = \frac{t_{\alpha,\alpha'}}{\sqrt[4]{|g|}}\,, \qquad U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}$$

étant la solution régulière en x' de

$$s\,\partial_s U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} + U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}\left(n - \frac{s}{U_0}\,\partial_s U_0\right) - \frac{s}{2}\,U^{(n)\sigma}{}_{,\alpha'}\,\partial_s g_{\alpha\sigma} = \frac{\Delta U^{(n-1)}_{\alpha,\alpha'}}{4(\lambda+n+1)}$$

d) Quand m est pair, on pose

$$U_{\alpha,\alpha'} = \sum_{n=0}^{m/2-2} U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}\,P^n \qquad \text{et} \qquad U'_{\alpha,\alpha'} = \sum_{n=0}^{m/2-2} (\lambda+n+1)\,U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}\,P^n$$

où les $U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}$ sont donnés par les précédentes formules (cas impair) pour $0 \leqslant n \leqslant m/2-2$.

On obtient, d'après (IV,3) pour $\operatorname{Re}\lambda > 1$:

$$\Delta[U_{\alpha,\alpha'}(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}] =$$
$$= -4(\lambda+m/2)\,U'_{\alpha,\alpha'}(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda} + (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2-1}\,\Delta U^{(m/2-2)}_{\alpha,\alpha'}\,.$$

Comme au chapitre II, on peut supprimer le terme

$$(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2-1}\,\Delta U^{(m/2-2)}_{\alpha,\alpha'}$$

en introduisant les distributions

$$V_{\alpha,\alpha'}(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2}\,\mathrm{Log}\,(P \pm \mathrm{i}\,0) \qquad \text{et} \qquad W_{\alpha,\alpha'}(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+m/2+1}$$

où

$$V_{\alpha,\alpha'} = \sum_{n=0}^{\infty} V^{(n)}_{\alpha,\alpha'}\,P^n \qquad \text{et} \qquad W_{\alpha,\alpha'} = \sum_{n=0}^{\infty} W^{(n)}_{\alpha,\alpha'}\,P^n$$

sont déterminés par des équations analogues à celles du chapitre II, en remplaçant $s\,\partial_s$ par $x^\rho\,\nabla_\rho$. On en déduit deux solutions élémentaires complexes conjuguées de la forme

$$E = \frac{e^{\pm \mathrm{i}\pi q/2}\,\Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2}}\left[U_{\alpha,\alpha'}(P \pm \mathrm{i}\,0)^{1-m/2} + V_{\alpha,\alpha'}\,\mathrm{Log}\,(P \pm \mathrm{i}\,0) + W_{\alpha,\alpha'}\,P\right]$$

où la séparation des parties réelles et imaginaires fait apparaître $\delta_1^{(m/2-2)}(P)$.

e) Le bi-tenseur $V_{\alpha,\alpha'}$ déterminé dans le cas m pair aussi peut être construit dans le cas m impair, il a la forme

$$V_{\alpha,\alpha'}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V^{(n)}_{\alpha,\alpha'}\,P^n$$

et, quel que soit $V^{(0)}_{\alpha,\alpha'}$ il est, pour $\lambda = -\,m/2$, solution de l'équation homogène

$$\Delta(\ ) = 0.$$

f) Quand V_m est de type hyperbolique normal, on déduit de la partie réelle de la solution E ci-dessus deux solutions élémentaires $E^{\pm}_{x'}$ de supports respectifs $\bar{\mathcal{E}}^+(x')$ et $\bar{\mathcal{E}}^-(x')$ qui sont uniques, d'après Lichnérowicz ([1]).

g) Les solutions déterminées sont invariantes pour les isométries laissant fixe le point x'.

3 Construction des solutions élémentaires pour p quelconque.

Il faut construire

$$E_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\alpha'_1\ldots\alpha'_p} \in \mathcal{D}'_\Omega(\otimes p) \otimes (\otimes^p\, T^*_{x'})$$

telle que

$$\langle\, \Delta_x\, E_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\alpha'_1\ldots\alpha'_p},\ \varphi^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\,\rangle = \varphi_{\alpha'_1\ldots\alpha'_p}(x')$$

pour chaque

$$\varphi^{\alpha_1\ldots\alpha_p} \in \mathcal{D}_\Omega(\otimes p)\,.$$

Nous ne reproduirons pas intégralement des calculs qui sont semblables à ceux du n° 2, et, pour plus de simplicité, nous poserons :

$$\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_p) \qquad \text{et} \qquad \alpha' = (\alpha'_1 \dots \alpha'_p) \, .$$

Lorsque m est impair, en prenant

$$U_{\alpha,\alpha'}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}(x) \, P^n(x) \qquad \text{et} \qquad U'_{\alpha,\alpha'}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n + 1) \, U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} \, P^n(x) ,$$

nous aurons encore, pour $\operatorname{Re} \lambda > 1$,

$$\Delta\big(U_{\alpha,\alpha'}(P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda+1}\big) = -\, 4(\lambda + m/2) \, (P \pm \mathrm{i}\, 0)^{\lambda} \, U'_{\alpha,\alpha'}$$

avec

$$U^{(0)}_{\alpha,\alpha'} \quad \text{solution de} \quad 4 \, x^{\beta} \, \nabla_{\beta} \, U^{(0)}_{\alpha,\alpha'} + U^{(0)}_{\alpha,\alpha'} \, \frac{2 \, s}{\sqrt{|g|}} \, \partial_s \sqrt{|g|} = 0$$

$$U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} \quad \text{solution de} \quad 4 \, x^{\beta} \, \nabla_{\beta} \, U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} + U^{(n)}_{\alpha,\alpha'} \left(4 \, n + \frac{2 \, s}{\sqrt{|g|}} \, \partial_s \sqrt{|g|}\right) - \\ - \frac{\Delta U^{(n-1)}_{\alpha,\alpha'}}{\lambda + n + 1} = 0$$

avec la condition initiale :

$$U^{(0)}_{\alpha,\alpha'}(x') = g_{\alpha_1 \alpha'_1}(x') \dots g_{\alpha_p \alpha'_p}(x')$$

et

$$U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}(x) \qquad \text{analytiques autour de } x' \, .$$

Nous pouvons prendre alors :

$$U^{(0)}_{\alpha,\alpha'}(x) = \frac{t_{\alpha_1,\alpha'} \, \dots \, t_{\alpha_p,\alpha'_p}}{\sqrt[4]{|g(x)|}}$$

et, pour les $U^{(n)}_{\alpha,\alpha'}(x)$ les seules solutions régulières autour de x' déduites par récurrence des équations précédentes.

On déterminera une solution élémentaire par prolongement analytique jusqu'à $\lambda = -\, m/2$. Lorsque m est pair, on arrive à ce résultat à l'aide de deux tenseurs supplémentaires $V_{\alpha,\alpha'}$ et $W_{\alpha,\alpha'}$.

4 Spineurs distributions sur V_4.

Dans ce n° 4 et dans le suivant, nous suivons essentiellement la théorie de M. Lichnérowicz ([5] et [6]) :

a) V_4 est un espace riemannien orienté, analytique, de type hyperbolique normal. $E(V_4)$ est le fibré principal des repères orthonormés de V_4, de groupe structural le groupe de Lorentz $L(4)$. $S(V_4)$ est le fibré principal des repères spinoriels de V_4, de groupe structural Spin (4) et déduit de $E(V_4)$ par extension.

Un spineur contravariant $\psi = (\psi^a)$ est une application $z \to \psi(z)$ de $S(V_4)$ dans un espace vectoriel M de matrices à une ligne de quatre éléments où opère le groupe Spin (4), avec :

$$\psi(zA^{-1}) = A\psi(z), \qquad A = (A_b^{a'}) \in \mathrm{Spin}\,(4)\,.$$

Un spineur covariant $\varphi = (\varphi_a)$ est une application $z \to \varphi(z)$ de $S(V_4)$ dans le dual M^* telle que

$$\varphi(zA^{-1}) = \varphi(z)\,A^{-1}\,.$$

Les indices grecs $\alpha, \beta, \ldots$ sont les indices tensoriels et les indices latins $a, b, \ldots$ sont les indices spinoriels.

Soient γ_α les matrices de Dirac qui vérifient

$$\gamma_\alpha\,\gamma_\beta + \gamma_\beta\,\gamma_\alpha = -\,2\,g_{\alpha\beta}\,e\,.$$

La variété V_4 admet une connexion riemanienne $\omega = (\omega_\beta^\alpha)$ de coefficients $C_{\beta\rho}^\alpha$ par rapport aux repères de $E(V_4)$ et, canoniquement associée à celle-ci, une connexion spinorielle $\sigma = \frac{1}{4}\,\omega_\beta^\alpha\,\gamma_\alpha\,\gamma^\beta$ de coefficients

$$\sigma_{b\rho}^a = \tfrac{1}{4}\,C_{\beta\rho}^\alpha\,\gamma_{\alpha r}^a\,\gamma_b^{\beta r}\,,$$

où l'on pose $\gamma_\alpha = (\gamma_{\alpha r}^a)$.

Les tenseurs spineurs dérivées covariantes du spineur contravariant ψ ou covariant φ sont :

$$\nabla_\mu\,\psi^a = \partial_\mu\,\psi^a + \sigma_{r\mu}^a\,\psi^r$$

$$\nabla_\mu\,\varphi_a = \partial_\mu\,\varphi_a - \varphi_r\,\sigma_{a\rho}^r$$

où les ∂_μ sont des dérivées pfaffiennes.

M. Lichnérowicz a défini sur les spineurs de laplacien Δ :

sur les spineurs contravariants : $\Delta \equiv +\,\gamma^\alpha\,\gamma^\beta\,\nabla_\alpha\,\nabla_\beta = -\,\nabla^\alpha\,\nabla_\alpha + \frac{1}{4}\,R$
sur les spineurs covariants : $\Delta \equiv \nabla_\alpha\,\nabla_\beta(\,)\,\gamma^\alpha\,\gamma^\beta = -\,\nabla^\alpha\,\nabla_\alpha + \frac{1}{4}\,R$

où R est la courbure riemannienne scalaire.

b) Un spineur contravariant (resp. covariant) $\psi(z)$ (resp. $\varphi(z)$) en z au-dessus de $x \in V_4$ définit en x un spineur contravariant $\psi(x)$ (resp. covariant $\varphi(x)$) dont les composantes sont $(\psi(z)^a)$ (resp. $\varphi(z)_b$) par rapport au repère $z \in S(V_4)$. Ces spineurs définissent les espaces vectoriels $\mathcal{S}_x$ et $\mathcal{S}_x^*$ sur C, duaux pour la forme bilinéaire :

$$(\psi, \varphi)_x = \psi^a(x)\, \varphi_a(x)\,.$$

Un spineur distribution contravariant est une fonctionnelle linéaire continue à valeurs dans C sur l'espace $\mathcal{S}_\Omega^*$ des spineurs covariants $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans l'ouvert Ω de V_4. Leur espace est noté $\mathcal{S}_\Omega^{*\prime}$. On définit de même le dual $\mathcal{S}'_\Omega$ de $\mathcal{S}_\Omega$.

On a pour le spineur contravariànt Ψ ou le spineur covariant Φ localement sommables :

$$\Psi \in \mathcal{S}_\Omega^{*\prime} \qquad \text{par} \qquad \langle \Psi, \varphi \rangle = \int_\Omega (\Psi, \varphi)_x\, \eta(x)$$

$$\Phi \in \mathcal{S}'_\Omega \qquad \text{par} \qquad \langle \Phi, \psi \rangle = \int_\Omega (\Phi, \psi)_x\, \eta(x)\,.$$

Toutes ces définitions se généralisent par produits tensoriels aux tenseurs-spineurs et aux tenseurs spineurs-distributions :

Si Ψ est un spineur contravariant différentiable et φ un vecteur-spineur covariant à support compact, on montre que :

$$\langle \nabla\Psi, \varphi \rangle = \langle \Psi, \delta\varphi \rangle$$

où δ est l'opérateur défini par

$$\delta(\varphi_{\rho a}) = -\nabla^\rho \varphi_{\rho a}$$

et cette relation est prise pour définition de $\nabla\Psi$ pour tout $\Psi \in \mathcal{S}_\Omega^{*\prime}$. Le laplacien de Ψ est alors défini par

$$\langle \Delta\Psi, \varphi \rangle = \langle \Psi, \Delta\varphi \rangle\,.$$

c) Si $\delta_{x'}(x)$ est la distribution de Dirac pour le point x', le bi-spineur de Dirac $s_{x'}(x) = \delta^a_{b'}\, \delta_{x'}(x)$ est contravariant en x, covariant en x'. Nous dirons que $E_{x'} \in \mathcal{S}_\Omega^{*\prime} \otimes \mathcal{S}_{x'}^*$ est solution élémentaire de $\Delta - \varepsilon^2$ pour le point x' si, sur ce voisinage Ω de x',

$$(\Delta_x - \varepsilon^2)\, E_{x'} = s_{x'}$$

ou encore, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}_\Omega^*$,

$$\langle (\Delta_x - \varepsilon^2)\, E^a_{x'b'}(x), \varphi_a(x) \rangle_\Omega = \varphi_{b'}(x')\,.$$

5 Le bi-spineur de transport sur V_4.

a) Les chemins horizontaux $\widehat{z' z}$ de $S(V_4)$ au-dessus de la géodésique $\widehat{x' x}$ de V_4 définissent un isomorphisme μ de la fibre $F_{x'}$ sur la fibre F_x qui se réduit à l'identité pour $x = x'$ (A. Lichnérowicz [7], p. 58-59) : si z' est un repère choisi en x' de $\mathcal{S}_{x'}$, $z = \mu z'$ est un repère en x et $\mathcal{S}_x$ et on a :

$$\mu(z' \Lambda) = z\Lambda \qquad \text{pour tout} \qquad \Lambda \in \mathrm{Spin}\ (4)$$

et l'on déduit de μ un isomorphisme de $\mathcal{S}_{x'}$ sur $\mathcal{S}_x$ qui ne dépend pas de z' choisi au-dessus de x'. Cet isomorphisme est un bi-spineur $t \in \mathcal{S}_x \otimes \mathcal{S}_{x'}$ et, des repères spinoriels étant arbitrairement choisis sur Ω, on peut écrire :

$$t^a_{b'}(x, x')\, \psi^{b'}(x') = (\mu\psi)^a\,(x)$$

$$t^a_{b'}(x', x') = \delta^a_{b'}\,.$$

b) Fixons le point x' et désignons par $t^a_{b'}(x)$ en repères spinoriels quelconques le bi-spineur de transport. D'un repère z' choisi au-dessus de x' on déduit par μ un système de repères spinoriels z au-dessus d'un voisinage Ω de x'. A tout spineur $\psi(x')$ correspond dans ces repères le spineur

$$\psi^a(x) = \psi^a(x')$$

en d'autres termes :

$$t^a_{b'}(x) = \delta^a_{b'}\,.$$

Soit $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, un chemin géodésique de V_4, d'origine x' et $z(t)$ le chemin horizontal issu de z', au-dessus de $x(t)$. Si ξ est le vecteur tangent en x à $x(t)$, projeté du vecteur τ tangent en z à $z(t)$, nous avons :

$$\xi^\rho\, \nabla_\rho\, \psi^a(x) = (\nabla\psi)\,(\tau) = \mathrm{d}\psi(\delta\tau) = \mathrm{d}\psi(\tau) = 0\,.$$

Nous retiendrons donc les deux relations

$$\xi^\rho\, \nabla_\rho\, t^a_{b'}(x) = 0$$

$$\text{(IV,5)} \qquad t^a_{b'}(x') = \delta^a_{b'}$$

qui sont valables en repères spinoriels quelconques sur Ω.

$P(x)$ étant la fonction définie précédemment en coordonnées normales d'origine x' nous avons vu qu'en repères naturels pour ces coordonnées,

$$g^{\rho\alpha}\, \nabla_\alpha\, P(x) = 2\, s\xi^\rho\,.$$

Il vient ainsi en repères quelconques :

$$\text{(IV,6)} \qquad g^{\rho\alpha}(x)\, \nabla_\alpha\, P(x) . \nabla_\rho\, t^a_{b'}(x) = 0\,.$$

6 Solutions élémentaires du laplacien spinoriel.

a) Considérons un bi-spineur $u^a_{b'}(x)$, contravariant en x, covariant en x' et dont les composantes sont analytiques au voisinage de x'.

Pour Re $\lambda > 1$, nous avons :

$$\nabla_\rho(u^a_{b'}\, P_+^{\lambda+1\,\pm}) = \partial_\rho(u^a_{b'}\, P_+^{\lambda+1\,\pm}) + P_+^{\lambda+1\,\pm}\, \sigma^a_{r\rho}\, u^r_{b'}$$

donc

$$\text{(IV,7)} \qquad \nabla_\rho(u^a_{b'}\, P_+^{\lambda+1\,\pm}) = u^a_{b'}\, \partial_\rho\, P_+^{\lambda+1\,\pm} + P_+^{\lambda+1\,\pm}\, \nabla_\rho\, u^a_{b'}\,.$$

Pour un vecteur spineur ψ^a_μ la dérivée seconde s'écrit :

$$\nabla\psi_\mu = \mathrm{d}\psi_\mu + \sigma.\psi_\mu - \omega^\sigma_\mu\, \psi_\sigma$$

donc :

$$\nabla_\mu\, \nabla_\rho(u^a_{b'}\, P_+^{\lambda+1\,\pm}) = \partial_\mu[\nabla_\rho(u^a_{b'}\, P_+^{\lambda+1\,\pm})] + \\ + \sigma^a_{r\mu}\, \nabla_\rho(u^r_{b'}\, P_+^{\lambda+1\,\pm}) - C^\sigma_{\rho\mu}\, \nabla_\sigma(u^a_{b'}\, P_+^{\lambda+1\,\pm})\,.$$

En portant (IV,7) dans cette expression :

$$\nabla_\mu\, \nabla_\rho(u^a_{b'}\, P_+^{\lambda+1\,\pm}) = P_+^{\lambda+1\,\pm}\, \nabla_\mu\, \nabla_\rho\, u^a_{b'} + (\nabla_\mu\, u^a_{b'})\, (\partial_\rho\, P_+^{\lambda+1\,\pm}) + \\ + (\partial_\mu\, P_+^{\lambda+1\,\pm})\, (\nabla_\rho\, u^a_{b'}) + u^a_{b'}\, \nabla_\mu\, \partial_\rho\, P_+^{\lambda+1\,\pm}\quad.$$

Ainsi :

$$- g^{\mu\rho}\, \nabla_\mu\, \nabla_\rho(u^a_{b'}\, P_+^{\lambda+1\,\pm}) = - P_+^{\lambda+1\,\pm}\, g^{\mu\rho}\, \nabla_\mu\, \nabla_\rho\, u^a_{b'} - \\ - 2\, g^{\mu\rho}(\partial_\mu\, P_+^{\lambda+1\,\pm})\, (\nabla_\rho\, u^a_{b'}) - u^a_{b'}\, g^{\mu\rho}\, \nabla_\mu\, \partial_\rho\, P_+^{\lambda+1\,\pm}\,.$$

En ajoutant $\frac{1}{4}\, R - \varepsilon^2$ à cette expression, il vient :

$$(\Delta - \varepsilon^2)\, (u^a_{b'}\, P_+^{\lambda+1\,\pm}) = P_+^{\lambda+1\,\pm}(\Delta - \varepsilon^2)\, u^a_{b'} - \\ - 2\, g^{\mu\rho}(\partial_\mu\, P_+^{\lambda+1\,\pm})\, (\nabla_\rho\, u^a_{b'}) + u^a_{b'}\, \Delta P_+^{\lambda+1\,\pm}$$

où nous pouvons écrire (Ch. II, nº 1) :

$$\partial_\mu\, P_+^{\lambda+1\,\pm} = (\lambda + 1)\, P_+^{\lambda\pm}\, \partial_\mu\, P$$

$$\Delta P_+^{\lambda+1\,\pm} = - (\lambda + 1)\, P_+^{\lambda\pm}(- \Delta P + 4\, \lambda)$$

où nous pouvons remplacer ΔP par :

$$\Delta P = - 2\, m + 2\, g^{\mu\rho}\, \partial_\mu\, P \cdot \frac{\partial_\rho\, U_0}{U_0} \qquad \text{où} \qquad m = 4\,;$$

$U_0(x)$ étant la fonction qui, en coordonnées normales issues d'un repère orthonormé de $T_{x'}$ s'écrit :

$$U_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{|g(x)|}}.$$

Il vient ainsi ($m = 4$) :

$$\Delta P_+^{\lambda+1\pm} = -(\lambda + 1) P_+^{\lambda\pm} \left(2m + 4\lambda - 2g^{\mu\rho} \partial_\mu P \cdot \frac{\partial_\rho U_0}{U_0}\right)$$

et le laplacien s'écrit ($m = 4$) :

(IV,8) $$(\Delta - \varepsilon^2)(u_{b'}^a P_+^{\lambda+1\pm}) = -4(\lambda + m/2)(\lambda + 1) u_{b'}^a P_+^{\lambda\pm} - \\ - 2(\lambda + 1) P_+^{\lambda\pm} g^{\mu\rho}(\partial_\mu P) \left(\nabla_\rho u_{b'}^a - \frac{U_{b'}^a}{U_0} \partial_\rho U_0\right) + P_+^{\lambda+1\pm}(\Delta - \varepsilon^2) u_{b'}^a.$$

En posant

$$u_{b'}^a = U_0 t_{b'}^a$$

où $t_{b'}^a$ est le bi-spineur de transport, il vient d'après (IV,6) :

(IV,9) $$(\Delta - \varepsilon^2)(u_{b'}^a P_+^{\lambda+1\pm}) = \\ = -4(\lambda + 2)(\lambda + 1) u_{b'}^a P_+^{\lambda\pm} + P_+^{\lambda+1\pm}(\Delta - \varepsilon^2) u_{b'}^a$$

avec la condition initiale

(IV,10) $$u_{b'}^a(x') = \delta_{b'}^a.$$

Nous introduisons maintenant les distributions

$$P_+^{\prime\mu\pm} = (\mu + 1)(\mu + 2) P_+^{\mu\pm}$$

étudiées aux n^{os} 2 et 4 du chapitre III.

Nous avons :

$$P_+^{\prime\lambda+1\pm} = (\lambda + 2)(\lambda + 3) P_+^{\lambda+1\pm}$$

et (IV,9) s'écrit :

(IV,11) $$(\Delta - \varepsilon^2)(u_{b'}^a P_+^{\prime\lambda+1\pm}) = -4(\lambda + 2)(\lambda + 3) u_{b'}^a P_+^{\prime\lambda\pm} \\ + (\lambda + 2)(\lambda + 3) P_+^{\lambda+1\pm}(\Delta - \varepsilon^2) u_{b'}^a.$$

b) Pour faire disparaître le terme $(\lambda + 2)(\lambda + 3) P_+^{\lambda+1\pm}(\Delta - \varepsilon^2) u_{b'}^a$ nous introduisons, comme dans le cas scalaire (Ch. III) la série :

$$V_{b'}^a = \sum_{n=0}^{\infty} V_{b'(n)}^a P^n$$

nous obtenons par un calcul identique à celui de (*a*) (voir le n° 4 du Ch. III) :

$$\text{(IV,12)} \qquad \Delta(V^a_{b'} P_+^{\lambda+2\pm}) = -(\lambda+2) P_+^{\lambda+1\pm} \times$$

$$\times \left[2 g^{\mu\rho} \partial_\mu P \cdot \nabla_\rho V^a_{b'(0)} + V^a_{b'(0)} \left(-2 g^{\mu\rho} \partial_\mu P \cdot \frac{\partial_\rho U_0}{U_0} + 12 + 4\lambda\right)\right]$$

$$- P_+^{\lambda+2\pm} \left[\sum_{n=1}^{\infty} P^{n-1} \left\{(\lambda+2+n) \left[2 n g^{\mu\rho} \partial_\mu P \cdot \nabla_\rho V^a_{b'(n)}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + V^a_{b'(n)} \left(4n + 12 + 4\lambda - 2 g^{\mu\rho} \partial_\mu P \cdot \frac{\partial_\rho U_0}{U_0}\right)\right] - \Delta V^a_{b'(n-1)}\right\}\right]$$

ce qui donne :

$$(\Delta - \varepsilon^2)\left[(\lambda+3) V^a_{b'} P_+^{\lambda+2\pm}\right] = -(\lambda+2)(\lambda+3) P_+^{\lambda+1\pm} \times$$

$$\times \left[2 g^{\mu\rho} \partial_\mu P \cdot \nabla_\rho V^a_{b'(0)} + V^a_{b'(0)} \left(-2 g^{\mu\rho} \partial_\mu P \cdot \frac{\partial_\rho U_0}{U_0} + 12 + 4\lambda\right)\right]$$

$$-(\lambda+3) P_+^{\lambda+2\pm} \left[\sum_{n=1}^{\infty} P^{n-1} \left\{(\lambda+2+n) \left[2 n g^{\mu\rho} \partial_\mu P \cdot \nabla_\rho V^a_{b'(n)}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + V^a_{b'(n)} \left(4n + 12 + 4\lambda - 2 g^{\mu\rho} \partial_\mu P \cdot \frac{\partial_\rho U_0}{U_0}\right)\right] - (\Delta - \varepsilon^2) V^a_{b'(n-1)}\right\}\right].$$

En prenant alors pour les $V^a_{b'(n)}$ des solutions régulières des équations :

$$2 g^{\mu\rho} \partial_\mu P . \nabla_\rho V^a_{b'(0)} + V^a_{b'(0)} \left(-2 g^{\mu\rho} \partial_\mu P \cdot \frac{\partial_\rho U_0}{U_0} + 12 + 4\lambda\right) =$$

$$= (\Delta - \varepsilon^2) u^a_{b'}$$

$$2 n g^{\mu\rho} \partial_\mu P . \nabla_\rho V^a_{b'(n)} + V^a_{b'(n)} \left(4n + 12 + 4\lambda - 2 g^{\mu\rho} \partial_\mu P \cdot \frac{\partial_\rho U_0}{U_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{(\lambda+2+n)} (\Delta - \varepsilon^2) V^a_{b'(n-1)} .$$

On obtient :

$$\text{(IV,13)} \qquad (\Delta - \varepsilon^2)\left[u^a_{b'} P'^{\lambda+1\pm}_+ + (\lambda+3) V^a_{b'} P_+^{\lambda+2\pm}\right] =$$

$$= -4(\lambda+2)(\lambda+3) u^a_{b'} P'^{\lambda\pm}_+$$

$$u^a_{b'}(x') = \delta^a_{b'} .$$

Ou encore pour tout $\varphi \in \mathcal{S}^*_\Omega$:

(IV,14) $$\langle (\Delta - \varepsilon^2)\,[u^a_{b'}(P'^{\lambda+1\,\pm}_+) + (\lambda + 3)\,V^a_{b'}\,P^{\lambda+2\,\pm}_+]\,(x), \varphi_a(x) \rangle =$$
$$= -\,4(\lambda + 3) \langle (\lambda + 2)\,u^a_{b'}\,P'^{\lambda\pm}_+(x), \varphi_a(x) \rangle$$
$$= -\,4(\lambda + 3) \langle (\lambda + 2)\,P'^{\lambda\pm}_+(x), U^a_{b'}(x)\,\varphi_a(x) \rangle .$$

Au chapitre I, n° 4 (*a*), nous avons rappelé qu'au voisinage de $\lambda = -2$ (pour $m = 4$)

$$P^\lambda_+ = \frac{-\pi}{(\lambda + 2)^2}\,\delta_{x'} + \frac{1}{\lambda + 2}\{ -\,\delta^{(1)}_1(P) + $$
$$+\,\pi\big(\psi(\tfrac{1}{2}) - \psi(\tfrac{3}{2})\big)\,\delta_{x'}\} + \text{partie régulière.}$$

Ainsi :

$$P'^\lambda_+ = (\lambda + 1)\,(\lambda + 2)\,P^\lambda_+ = -\,\frac{(\lambda + 1)\,\pi}{\lambda + 2}\,\delta_{x'} + \text{partie régulière.}$$

Au chapitre III, n° 2 (*c*) nous avons montré que les différences $P'^{\lambda+}_+ - P'^{\lambda-}_+$ sont régulières pour $\operatorname{Re}\lambda > -\,m/2 - \frac{1}{2}$. Ainsi, au voisinage de $\lambda = -2$:

$$P'^{\lambda\pm}_+ = -\,\frac{(\lambda + 1)\,\pi}{2(\lambda + 2)}\,\delta_{x'} + \text{partie régulière.}$$

Cette relation permet d'exprimer le prolongement analytique de (IV,14) jusqu'à $\lambda = -\,m/2$ sous la forme :

$$\langle (\Delta - \varepsilon^2)\,[u^a_{b'}\,P'^{1-m/2\,\pm}_+ + V^a_{b'}\,P^{0\,\pm}_+], \varphi_a \rangle = -\,2\,\pi\,\varphi_{b'}(x') .$$

De la relation (III,9) qui permet d'écrire (compte tenu des résultats du chapitre I, n° 4 (*a*)) :

$$P'^{1-m/2\,\pm}_+ = \delta^{(0)\,\pm}_1(P)$$

nous déduisons les solutions élémentaires du laplacien spinoriel $\Delta - \varepsilon^2$ au point x' :

$$E^{\pm a}_{x'b'} = -\,\frac{1}{2\,\pi}\{ u^a_{b'}\,\delta^{(0)\,\pm}_1(P) + V^a_{b'}\,P^{0\,\pm}_+ \}$$

dont les supports sont respectivement les demi-conoïdes $\mathcal{E}^\pm(x')$.

c) L'équation (IV,12) permet d'écrire :

$$(\Delta - \varepsilon^2)\,(V^a_{b'}(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+2}) = -\,(\lambda + 2)\,(P + \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1} \times$$
$$\times \left[2\,g^{\mu\rho}\,\partial_\mu P.\nabla_\rho\,V^a_{b'(0)} + V^a_{b'(0)}\left(-\,2\,g^{\mu\rho}\,\partial_\mu P \cdot \frac{\partial_\rho U_0}{U_0} + 12 + 4\,\lambda\right)\right]$$

où nous pouvons laisser $V^a_{b'(0)}$ arbitraire et prendre pour les $V^a_{b'(n)}$ les solutions régulières de

$$\text{(IV,15)} \qquad 2\,n\,g^{\mu\rho}\,\partial_\mu\,P\cdot\nabla_\rho\,V^a_{b'(n)} + V^a_{b'(n)}\left(4\,n + 12 + 4\,\lambda - \right.$$

$$\left. - 2\,g^{\mu\rho}\,\partial_\mu\,P\cdot\frac{\partial_\rho\,U_0}{U_0}\right) = \frac{1}{\lambda + 2 + n}(\Delta - \varepsilon^2)\,V^a_{b'(n-1)}\,.$$

La distribution $(P + \mathrm{i}\,0)^{-1}$ étant régulière nous trouvons en prolongeant analytiquement jusqu'à $\lambda = -2$ la solution $V^a_{b'}$ de l'équation homogène $(\Delta - \varepsilon^2)\,(\,) = 0$.

d) Dans l'expression des équations (IV,15), interviennent les coefficients $C^\lambda_{\mu\rho}$ de la connexion riemannienne en repères orthonormés. Pour résoudre effectivement ces équations, on peut supposer que le voisinage Ω de x' est rapporté aux coordonnées normales (x^α) issues d'un repère orthonormé $R^{x'}$ de $T_{x'}$. Désignons toujours par $t^{\alpha'}_\beta(x)$ les composantes du bi-tenseur de transport pour les repères R^x naturels de ces coordonnées normales. Si $\mathrm{e}_{\beta'}$ est un vecteur de base de $R^{x'}$, il se transporte en x en un vecteur $\mathrm{e}_{\underline{\beta}}$ de composantes

$$\mathrm{e}^\alpha_{\underline{\beta}} = t^\alpha_{\beta'}(x) \qquad (\underline{\beta} = \beta')$$

par rapport à R^x. L'ensemble de ces $\mathrm{e}_{\underline{\beta}}$ forme en x la base d'un repère orthonormé $\overline{R^x}$ de T_x avec, en x, la matrice $t^\alpha_{\underline{\beta}}(x)$ de passage du repère R^x au repère $\overline{R^x}$:

$$\mathrm{e}_{\underline{\beta}} = t^\alpha_{\underline{\beta}}(x)\,\mathrm{e}_\alpha \qquad (\underline{\beta} = \beta')$$

et pour les corepères :

$$\theta^\beta = t^\beta_{\underline{\alpha}}(x)\,\theta^{\underline{\alpha}}\,.$$

Dans ces conditions, on obtient pour les coefficients de la connexion (A. Lichnérowicz [7] page 77) :

$$C^{\underline{\lambda}}_{\underline{\mu}\underline{\rho}}(x) = t^{\underline{\lambda}}_\alpha\,t^\beta_{\underline{\mu}}\,t^\gamma_{\underline{\rho}}\,\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + t^\alpha_{\underline{\rho}}\,t^{\underline{\lambda}}_\sigma\,\partial_\alpha\,t^\sigma_{\underline{\mu}}$$

où $(t^{\underline{\lambda}}_\alpha)$ est la matrice inverse de $(t^\alpha_{\underline{\lambda}})$ et où les $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ sont exprimés pour les coordonnées normales.

On peut ainsi ramener (IV,15) à une expression en coordonnées normales.

e) A l'aide d'un bi-spineur de transport $t_b^{a'}(x)$ nous avons construit les solutions élémentaires

$$E_{x'b}^{\pm a'}(x) = -\frac{1}{2\pi}\{ U_b' \ \delta_1^{(0)\pm} (P) + V_b^{a'} P_+^{0\,\pm}\}$$

de $\Delta - \varepsilon^2$ au point x'.

En combinant les résultats des n° 2, 3, 6 de ce chapitre, on peut généraliser sans difficulté aux divers cas tenseurs-spineurs.

L'étude profonde de ces solutions élémentaires est possible en termes de noyaux, bi-tenseurs, bi-spineurs ... (voir A. Lichnérowicz [6]).

CHAPITRE V

NOYAUX ÉLÉMENTAIRES. PROPAGATEURS

1 Noyaux élémentaires.

V_m est analytique, du type hyperbolique quelconque.

a) Pour chaque $x' \in V_m$, nous avons construit des fonctions

$$U(x) = \sum_{n=0}^{N} U_n(x)\, P^n(x), \quad V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x)\, P^n(x), \quad W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x)\, P^n(x)$$

analytiques en x sur un voisinage suffisamment petit de x'.

Soit Ω un ouvert de V_m homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbf{R}^m$, tel que pour tout point $x \in \Omega$ et tout point $x' \in \Omega$ il existe un arc géodésique et un seul joignant x et x'.

En coordonnées normales issues d'un repère orthonormé de $T_{x'}$ nous avons vu que

$$U_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{|\, g(x)\,|}}.$$

En coordonnées normales issues d'un repère quelconque de $T_{x'}$ nous aurons :

$$U_0(x) = \frac{\sqrt[4]{|\, g(x')\,|}}{\sqrt[4]{|\, g(x)\,|}}.$$

En coordonnées locales quelconques (y^α) sur Ω, cette fonction a donc pour expression (A. Lichnérowicz [4], page 15)

$$U_0(x) = \frac{\sqrt[2]{\frac{1}{2}\, J(x, x')}}{\sqrt[4]{|\, \gamma(x)\,| \,.\, |\, \gamma(x')\,|}} \qquad \text{où} \qquad J(x, x') = \text{dét}\, \frac{\partial^2 P(x, x')}{\partial y^\alpha . \partial y'^\beta}$$

où $P(x, x')$ est pour chaque x' la fonction $P(x)$ que nous avons utilisée dans les chapitres précédents et qui coïncide avec la longueur au carré (et au signe près) de la géodésique $\widehat{x'\, x}$: $P(x, x')$ est une fonction symétrique de x et de x' ; les quantités $\gamma(x)$ et $\gamma(x')$ sont les déterminants des coefficients $\gamma_{\alpha\beta}$ de la métrique exprimés pour les coordonnées locales (y^α). Nous pouvons alors remplacer $U_0(x)$ par $U_0(x, x')$ et cette fonction symétrique en x, x' est analytique sur $\Omega \times \Omega$. Si $t_{\alpha,\lambda'}(x, x')$ est le bitenseur de transport exprimé en coordonnées locales (y^α), nous avons :

$$\gamma_{\alpha\beta}(x) = t_{\alpha,\lambda'}(x, x')\, t_{\beta,\mu'}(x, x')\, \gamma^{\lambda'\mu'}(x')$$

d'où nous déduisons que :

$$U_0(x, x') = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\, J(x, x')}{\text{dét}\big(t_{\alpha,\lambda'}(x, x')\big)}}$$

qui est la forme utilisée par M^me^ C. de Witt dans l'expression de ΔP (page 329 dans « Les théories relativistes de la gravitation » Editions C. N. R. S. 1962).

Il s'ensuit par récurrence que les fonctions U_n, V_n, W_n qui entrent dans la construction des séries U, V, W sont aussi analytiques en $(x, x') \in \Omega \times \Omega$ et nous les écrirons $U_n(x, x')$, $V_n(x, x')$, $W_n(x, x')$.

b) La majoration $|P| < \dfrac{1}{\alpha'}\left(1 - \dfrac{\sigma}{r}\right)^2$ utilisée dans l'étude de la convergence de ces séries U, V, W peut être faite de façon indépendante de x' quand x' décrit un compact de Ω puisqu'alors r a un minimum et α' un maximum. Les fonctions U, V, W sont donc des fonctions analytiques $U(x, x')$, $V(x, x')$, $W(x, x')$ sur un voisinage suffisamment petit de la diagonale de $V_m \times V_m$.

c) Il découle de la définition que donne M^me^ Choquet-Bruhat [2] du changement de variables pour les distributions définies sur les multiplicités que l'on peut toujours déduire d'une distribution $T(x)$, par un changement de variable régulier et dépendant de façon régulière d'un point x' un noyau régulier sur $V_m \times V_m$. L'application de cette propriété aux distributions $P_\pm^\lambda(x)$, $(P \pm \mathrm{i}\, 0)^\lambda(x)$ et l'analycité des fonctions $U(x, x')$, $V(x, x')$, $W(x, x')$ montrent que nous avons construit au voisinage de la diagonale Δ' de $V_m \times V_m$ des noyaux réguliers $E(x', x)$ qui sont des noyaux élémentaires à gauche pour Δ (laplacien scalaire) (L. Schwartz [1], Ch. V, § 6) : si $\Omega \times \Omega$ appartient au voisinage considéré de la diagonale Δ', il vient, pour chaque $\varphi \in \mathfrak{D}_\Omega$:

$$\langle E(x', x), \Delta_x\, \varphi(x) \rangle = \varphi(x')$$

Δ étant sa propre transposée, le symétrique du noyau $E(x, x')$ est noyau élémentaire à droite pour Δ : pour toute $\psi \in \mathfrak{D}_\Omega$, on a :

$$\Delta_x \langle \psi(x'), E(x', x) \rangle = \psi(x)$$

ce que l'on montre d'ailleurs d'une façon immédiate en appliquant la règle de Fubini à

$$\langle E(x', x), \psi(x') \Delta_x \varphi(x) \rangle_{\Omega \times \Omega} .$$

d) Soit L une isométrie de V_m, $\mathbf{L}'$ l'application linéaire tangente, L^* la transposée de L'. $P(x, x')$ est, au signe près, le carré de la longueur de la géodésique $\widehat{x'\,x}$; c'est une fonction invariante par L sur $\Omega \times \Omega$.

Pour chaque $x' \in \Omega$, on rapporte Ω aux coordonnées normales issues d'un repère orthonormé de $T_{x'}$, pour définir la fonction

$$| g_{x'}(x) | = | \text{dét} \left(g_{\alpha\beta}(x)\right) | .$$

Opérons maintenant dans un système de coordonnées locales quelconques (y^α) sur Ω. Cette fonction s'écrit :

$$| g(x, x') | = \frac{| g(x) | \, | \gamma(x') |}{4\, J^2(x, x')} \quad \text{où } J(x, x') = \text{dét} \left(\frac{\partial^2 P(x, x')}{\partial y^\lambda \, \partial y'^\mu}\right)$$

avec $\gamma(x) = \text{dét}\, \gamma_{\alpha\beta}(x)$ et $\gamma(x') = \text{dét}\, \gamma_{\alpha\beta}(x')$.

L'isométrie L fait passer des points x, x' de coordonnées y^α, y'^α aux points X, X' de coordonnées Y^ρ, Y'^σ qui sont des fonctions de y^α, y'^α telles que

$$\gamma_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial Y^\rho}{\partial y^\alpha} \frac{\partial Y^\sigma}{\partial y^\beta} \gamma_{\rho\sigma}(X)$$

donc :

$$| \gamma(X) | = \left| \text{dét} \frac{DY^\rho}{Dy^\alpha} \right|^{-2} | \gamma(x) | \text{ et } | \gamma(X') | = \left| \text{dét} \frac{DY'^\sigma}{Dy'^\beta} \right|^{-2} | \gamma(x') |$$

La fonction $P(x, x')$ étant invariante par L, il en est de même des

$$\frac{\partial^2 P(x, x')}{\partial y^\lambda \, \partial y'^\mu} \in T_x^* \otimes T_{x'}^*$$

et nous avons :

$$\frac{\partial^2 P(x, x')}{\partial y^\lambda \, \partial y'^\mu} = \frac{\partial Y^\nu}{\partial y^\lambda} \cdot \frac{\partial Y'^\tau}{\partial y'^\mu} \cdot \frac{\partial^2 P(X, X')}{\partial y^\nu . \partial Y'^\tau}$$

ainsi :

$$J(X, X') = \left(\text{dét} \frac{DY^\nu}{Dy^\lambda}\right)^{-1} \left(\text{dét} \frac{DY'^\tau}{Dy'^\mu}\right)^{-1} J(x, x') .$$

D'où nous déduisons que :

$$L^* g(x, x') = g(x, x') = g(X, X')$$

et cette fonction est invariante pour L.

D'après leur méthode de construction, nous déduisons par récurrence de ce qui précède que les fonctions $U(x, x')$, $V(x, x')$, $W(x, x')$ sont invariantes par L. Le prolongement analytique conserve cette invariance pour les noyaux déduits des $(P \pm \mathrm{i}\,0)^\lambda$: les noyaux élémentaires que nous avons construits dans le cas ultra-hyperbolique sont invariants ; ceux que nous avons construits dans le cas hyperbolique normal sont invariants ou s'échangent.

Dans le cas où V_m est un espace symétrique (A. Lichnérowicz [2]) les noyaux élémentaires $E(x', x)$ sont symétriques pour un V_m ultra-hyperbolique ; nous reviendrons plus loin au cas hyperbolique normal.

e) Pour les cas tensoriels et spinoriel,des considérations analogues à celles de (*a*), (*b*), (*c*) conduisent aux bitenseurs élémentaires et bispineurs élémentaires des laplaciens correspondants qui sont étudiés en détail par A. Lichnérowicz dans [1] et [6].

2 Paramétrix sur V_m ultra-hyperbolique de structure $\mathcal{C}^\infty$.

Nous supposons dans ce numéro que V_m n'est plus analytique mais $\mathcal{C}^\infty$. Nous nous proposons de construire dans tous les cas une paramétrix pour Δ sur $\Omega \times \Omega$ c'est-à-dire un noyau régulier $N(x', x)$ tel que

$$\langle \Delta_x N(x', x), \varphi(x) \rangle = \varphi(x') - \langle F(x', x), \varphi(x) \rangle$$

où $F(x, x')$ est une fonction continue bornée sur $\Omega \times \Omega$.

a) Pour m impair :

Posons pour chaque $x' \in \Omega$ et $\operatorname{Re} \lambda > 1$:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{(m-1)/2} U_n(x)\, P^n(x) \quad \text{et} \quad U'(x) = \sum_{n=0}^{(m-1)/2} (\lambda + n + 1)\, U_n(x)\, P^n(x)$$

où, en coordonnées normales issues de x' :

$$U_0(x) = 1/\sqrt[4]{|\, g(x)\,|}\,,$$

$$U_n(x) = \frac{U_0(x)}{4(\lambda + n + 1)\, s} \int_0^s \frac{t^{n-1}\, \Delta U_{n-1}(\xi)}{U_0(\xi)}\, \mathrm{d}t \quad \left(1 \leqslant n \leqslant \frac{m-1}{2}\right).$$

Il vient :

$$\Delta(U(P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda+1}) = -\, 4(\lambda + m/2)\, U' . (P \pm \mathrm{i}\,0)^\lambda + \\ + (P \pm \mathrm{i}\,0)^{\lambda + m/2 + \frac{1}{2}} . \Delta U_{(m-1)/2} .$$

Et, pour $\lambda = -m/2$ en prolongeant analytiquement :

$$\Delta(U(P \pm i\,0)^{1-m/2}) = \frac{4\, e^{\mp i\pi q/2}\, \pi^{m/2}}{\Gamma(m/2-1)}\, \delta_{x'} + (P \pm i\,0)^{½}\, \Delta U_{(m-1)/2}\,.$$

En posant :

$$N_{x'}(x) = \frac{e^{\pm i\pi q/2}\, \Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2}}\, U.(P \pm i\,0)^{1-m/2}$$

$$F_{x'}(x) = -\frac{e^{\pm i\pi q/2}\, \Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2}}\, (P \pm i\,0)^{\frac{1}{2}}\, \Delta U_{(m-1)/2}$$

nous obtenons deux distributions qui définissent sur $\Omega \times \Omega$ deux noyaux $N(x', x)$ et $F(x', x)$ vérifiant les propriétés énoncées.

b) Pour m pair :

On pose pour chaque $x' \in \Omega$ (en coordonnées normales) :

$$U(x) = \sum_{n=0}^{m/2-2} U_n(x)\, P^n(x)\,; \quad U'(x) = \sum_{n=0}^{m/2-2} (\lambda + n + 1)\, U_n(x)\, P^n(x)\,;$$

$$V(x) = V_0(x) + V_1\, P(x)$$

où les $U_n(x)$ sont déterminés comme en (*a*) et où

$$V_0(x) = \frac{U_0(x)}{4\, s^{m+\lambda-1}} \int_0^s \frac{t^{m+\lambda-2}\, \Delta U_{m/2-2}(\xi)}{U_0(\xi)}\, dt\,;$$

$$V_1(x) = \frac{U_0(x)}{4(\lambda + m/2 + 1)\, s^{m+\lambda}} \int_0^s \frac{t^{m+\lambda-1}\, \Delta V_0(\xi)}{U_0(\xi)}\, dt$$

d'où l'on déduit

$$\Delta[U(P \pm i\,0)^{1-m/2} + V \operatorname{Log}(P \pm i\,0)] = \frac{4\, e^{\mp i\pi q/2} \pi^{m/2}}{\Gamma(m/2-1)}\, \delta_{x'} - [4\, V_1 - \Delta V_0]$$

et l'on posera ici :

$$N_{x'}(x) = \frac{e^{\pm i\pi q/2}\, \Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2}}\, (U(P \pm i\,0)^{1-m/2} + V \operatorname{Log}(P \pm i\,0))$$

$$F_{x'}(x) = \frac{e^{\pm i\pi q/2}\, \Gamma(m/2-1)}{4\,\pi^{m/2}}\, (4\, V_1 - \Delta V_0) \qquad \text{(fonction } C^\infty\text{)}.$$

c) Pour m pair, p et q impairs :

On peut dans ce cas suivre la méthode de M^me^ Choquet-Bruhat [1] pour déterminer une paramétrix plus simple σ où F est remplacée par une mesure $\mathfrak{L}$ portée par le conoïde isotrope $\Gamma_{x'}$:

$$\Delta\sigma = \delta_{x'} - \mathfrak{L}\,.$$

Pour cela, x' étant fixé et les coordonnées normales de nouveau utilisées, reprenons les distributions

$$P'^{\lambda+1} = (\lambda + 2)(\lambda + 3) \dots (\lambda + m/2 + 1)\, P_+^{\lambda+1}$$

(on arrive au même résultat avec les $P_-^{\lambda+1}$).
Reprenons aussi

$$U(x) = \sum_{n=0}^{m/2-2} U_n(x)\, P^n(x) \quad \text{et} \quad U'(x) = \sum_{n=0}^{m/2-2} (\lambda + n + 1)\, U_n(x)\, P^n(x)$$

avec les mêmes U_n qu'en (*b*) ou (*a*).
Il vient pour Re $\lambda > 1$:

$$\Delta(UP'^{\lambda+1}) = -4\left(\lambda + \frac{m}{2}\right) \frac{\lambda + m/2 + 1}{\lambda + 1}\, U'\, P'^{\lambda} +$$
$$+ \frac{(\lambda + 2)(\lambda + 3) \dots (\lambda + m/2 - 2)}{(\lambda + m/2 + 2)(\lambda + m/2 + 3) \dots (\lambda + m - 1)}\, \Delta U_{m/2-2}\, P'^{\lambda+m/2-1}\,.$$

Nous avons déjà calculé :

$$P'^{1-m/2} = \delta_1^{(m/2-2)}(P)$$
$$P'^{-1} = (m/2 - 1)\,!\, \delta_1^{(0)}(P)$$

et nous savons (Ch. I, nº 4) qu'au voisinage de $\lambda = -m/2$:

$$P'^{\lambda} = \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + m/2 - 1)}{\lambda + m/2} \frac{(-1)^{(q-1)/2}\, \pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\, \delta_{x'} +$$
$$+ \text{ partie régulière.}$$

On obtient ainsi, par prolongement analytique jusqu'à $\lambda = -m/2$ (en se rappelant que $U'(x') = \lambda + 1$)

$$\Delta\big(U(x)\, \delta_1^{(m/2-2)}(P)\big) =$$
$$= -4\left(-\frac{m}{2} + 1\right)\left(-\frac{m}{2} + 2\right) \dots (-1)\, \frac{(-1)^{(q-1)/2}\, \pi^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)}\, \delta_{x'}$$
$$+ \frac{(-m/2 + 2)(-m/2 + 3) \dots (-2)}{(2)(3) \dots (m/2 - 1)} \left(\frac{m}{2} - 1\right)!\, (\Delta U_{m/2-2})\, \delta_1^{(0)}(P)\,.$$

ou encore :

$$\Delta(U\,\delta_1^{(m/2-2)}(P)) = 4(-1)^{(p+1)/2}\,\pi^{m/2-1}\,\delta_{x'} + \\ + (-1)^{m/2-1}\,(m/2-2)\,!\,(\Delta U_{m/2-2})\,\delta_1^{(0)}(P)\,.$$

On peut donc poser :

$$\mathscr{L} = \frac{(-1)^{(q-1)/2}\,(m/2-2)\,!}{4\,\pi^{m/2-1}}\,(\Delta U_{m/2-2})\,\delta_1^{(0)}(P)$$

et

$$\sigma = \frac{U}{4(-1)^{(p+1)/2}\,\pi^{m/2-1}}\,\delta_1^{(m/2-2)}(P)$$

où on peut remarquer que

$$U\,\delta_1^{(m/2-2)}(P) = \sum_{n=0}^{m/2-2} U_n\,\delta_1^{(m/2-2-n)}(P)\,.$$

3 Noyau élémentaire sur V_m (ultra-hyperbolique C^∞).

a) Dans tous les cas, nous avons un noyau $N(x', x)$ et une fonction continue $F(x', x)$ qui vérifient :

$$\varphi(x') = \int_\Omega F(x', x)\,\varphi(x)\,\eta(x) + \langle N(x', x), \Delta_x\,\varphi(x)\rangle$$

pour chaque $\varphi \in \mathfrak{D}_\Omega$.

Quelle que soit la fonction $\psi \in \mathfrak{D}_\Omega$ on peut construire une fonction continue T solution de l'équation intégrale

$$T(x') = \int_\Omega F(x', x)\,T(x)\,\eta(x) + \langle N(x', x), \psi(x)\rangle\,.$$

On procède par itération (De Rham [1] § 30 ; M[me] Choquet-Bruhat [1]) sur un ouvert Ω assez petit pour que

$$\int_\Omega |\,F(x', x)\,|\,\eta(x) \leqslant k < 1$$

pour tout $x' \in \Omega$.

On pose :

$$\begin{aligned} \beta(x') &= \langle N(x', x), \psi(x) \rangle \\ \beta_1(x') &= \int_\Omega F(x', y)\, \beta(y)\, \eta(y) \\ \beta_2(x') &= \int_\Omega F(x', z)\, \beta_1(z)\, \eta(z) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

et l'on a :

$$|\beta_1(x')| \leqslant k\,|\beta|\,; \quad |\beta_2(x')| \leqslant k\,|\beta_1| \leqslant k^2\,|\beta|\,; \quad \ldots$$

La série

$$T(x') = \beta(x') + \beta_1(x') + \beta_2(x') + \cdots$$

est bien une fonction continue solution de l'équation intégrale.

L'application :

$$\psi \in \mathfrak{D}_\Omega \to T \in \mathfrak{D}'_\Omega$$

ainsi obtenue définit un noyau $E(x', x)$ sur $\Omega \times \Omega$.

En particulier, pour

$$\psi = \Delta\varphi \qquad \text{où} \qquad \varphi \in \mathfrak{D}_\Omega$$

on obtient :

$$T(x') = \varphi(x') = \langle E(x', x), \Delta\varphi(x) \rangle$$

et $E(x', x)$ est le noyau élémentaire à gauche de Δ sur $\Omega \times \Omega$.

On peut même montrer que la fonction $T(x')$ construite plus haut est, pour chaque $\psi \in \mathfrak{D}_\Omega$ dérivable autant de fois que l'on veut : $N(x', x)$ est un noyau régulier et $\beta(x')$ est indéfiniment dérivable. De plus β_1 peut s'écrire :

$$\beta_1(x') = \int_\Omega F(x', y)\, \beta(y) \sqrt{|g(y)|}\, \mathrm{d}y = \int_\Omega F(x)\, \beta\big(y(x, x')\big) \sqrt{|g(x)|}\, \mathrm{d}x$$

où (y^α) est un système de coordonnées locales quelconques et (x^α) des coordonnées normales issues de x' dans cette expression, x' intervient comme paramètre par ses coordonnées (y'^α) dans le système (y^α). Ainsi, β_1 est dérivable et les séries dérivées $\partial T/\partial y'^\alpha$ convergent uniformément sur Ω.

On a, pour cette fonction différentiable :

$$\Delta T = \psi\,.$$

b) On peut remplacer Δ par $\Delta + C$ ($C = Cte$ ou fonction $\mathcal{C}^\infty$) et même par les opérateurs $D = \Delta + B^\rho\, \partial_\rho + C$ en distinguant les rôles joués par D et son transposé D^* (voir [1] de M^me^ Choquet-Bruhat).

c) En appliquant les méthodes de ces nº 2 et 3 aux résultats du chapitre IV, on peut généraliser aux cas tensoriel et spinoriel : dans le cas tensoriel (1,1) par exemple, nous pouvons construire un bi-tenseur distribution $N_{\alpha,\alpha'}(x', x)$ tel que pour tout $\varphi^\alpha \in \mathcal{D}_\Omega(\otimes\, 1)$:

$$\langle\, \Delta_x\, N_{\alpha,\alpha'}(x', x), \varphi^\alpha(x)\, \rangle = \varphi_{\alpha'}(x') - \int_\Omega F_{\alpha,\alpha'}(x', x)\, \varphi^\alpha(x)\, \eta(x)$$

où $F_{\alpha,\alpha'}(x', x)$ est continu sur $\Omega \dot{\times} \Omega$. On pourra ensuite procéder comme en (*a*).

4 Le cas hyperbolique-normal.

Ce cas est étudié en détail dans la théorie des propagateurs et commutateurs de A. Lichnérowicz [1].

a) Lorsque V_m est $\mathcal{C}^\infty$, par application des résultats du chapitre III, nous pouvons construire pour chaque x' deux distributions $N^\pm_{x'}(x)$ et deux fonctions $F^\pm_{x'}(x)$ continues, ayant respectivement leurs supports dans $\bar{\mathcal{E}}^\pm(x')$ et vérifiant :

$$\Delta_x\, N^\pm_{x'} = \delta_{x'} - F^\pm_{x'}\,,$$

les noyaux correspondants étant réguliers.

Suivant la construction du nº 3, de chaque $\psi \in \mathcal{D}_\Omega$ nous déduirons deux fonctions différentiables

$$T^\pm(x') = \beta^\pm(x') + \beta^\pm_1(x') + \cdots$$

où

$$\beta^\pm(x') = \langle\, N^\pm(x', x), \varphi(x)\, \rangle\,, \ldots$$

qui sont nulles respectivement si le support de ψ ne rencontre pas $\bar{\mathcal{E}}^\pm(x')$. Les noyaux $E^\pm(x', x)$ élémentaires correspondants ont donc eux-mêmes les propriétés de support qui caractérisent le cas hyperbolique-normal.

b) D'un théorème d'unicité de Lichnérowicz ([1] nº 7) on déduit la relation d'échange

$$E^\pm(x, x') = E^\mp(x', x)$$

et l'antisymétrie du propagateur scalaire

$$G(x, x') = E^+(x', x) - E^-(x', x)$$

ce noyau intervenant dans la résolution du problème de Cauchy sur V_m et dans le calcul du commutateur du champ scalaire sur l'espace-temps V_4.

c) De cette même relation d'échange des solutions élémentaires par permutation de x, x', on déduit la symétrie des fonctions $U(x, x')$, $V(x, x')$ qui interviennent dans leur construction quand V_m est $\mathcal{C}^\omega$. On a en effet :

$$P_+^{\lambda\pm}(x, x') = P_+^{\lambda\mp}(x', x) .$$

d) Dans le cas hyperbolique-normal, il est fondamental, selon Leray [1], de considérer les fonctions différentiables φ dont le support $S(\varphi)$ est compact vers le futur ou vers le passé. Dans le premier cas, $S(\varphi) \cap \mathcal{E}^+(x)$ est compacte ou vide pour tout $x \in S(\varphi)$ et dans le deuxième cas, $S(\varphi) \cap \mathcal{E}^-(x)$ est compacte ou vide pour tout $x \in S(\varphi)$. Pour un ouvert Ω de V_m nous désignerons par $\mathcal{K}_\Omega^\pm$ ces deux espaces de fonctions.

Supposons que m soit impair et posons sur V_m analytique :

$$E_{\lambda+1}^\pm(x', x) = \frac{(-1)^{(m-1)/2}\,\Gamma(m/2-1)}{2\,\pi^{m/2}}\, U_{\lambda+1}(x, x')\, P^{\lambda+1\,\pm}(x', x) .$$

Nous avons :

$$\langle E^\pm(x', x), \varphi(x') \rangle \in \mathcal{K}_y^\mp \quad \text{pour} \quad \varphi \in \mathcal{D}_{x'} \quad \text{ou} \quad \varphi \in \mathcal{K}_{x'}^\mp$$

et les produits de Volterra

$$E_{\lambda+1}^+(x', y) \underset{y}{\circ} \Delta_y\, E_{\lambda+1}^-(x, y)\,; \quad E_{\lambda+1}^-(x, y) \underset{y}{\circ} \Delta_y\, E^+(x', y)$$

sont définis dans le domaine

$$\operatorname{Re}\lambda > -m/2 - \tfrac{1}{2},\ \lambda \neq -1, -2, \ldots, -m/2 + \tfrac{1}{2}, -m/2.$$

Pour $\operatorname{Re}\lambda > 1$, nous pouvons appliquer la formule de Green :

$$\int_\Omega [E_{\lambda+1}^+(x', y)\, \Delta_y\, E_{\lambda+1}^-(x, y) - E_{\lambda+1}^-(x, y)\, \Delta_y\, E_{\lambda+1}^+(x', y)]\, \eta(y) = 0$$

(le second membre est une intégrale de surface sur $\Gamma_{x'}^+$, Γ_x^- où $P_+^{\lambda+1\,+}(x', y)$, $P_+^{\lambda+1\,-}(x, y)$ ainsi que leurs dérivées sont nulles). Pour φ et $\psi \in \mathcal{D}_\Omega$, posons

$$\Phi_{\lambda+1}(y) = \langle E_{\lambda+1}^+(x', y), \varphi(x') \rangle \quad \text{et} \quad \Psi_{\lambda+1}(y) = \langle E_{\lambda+1}^-(x, y), \psi(x) \rangle .$$

Nous avons :

$$\langle E_{\lambda+1}^+(x', y), \varphi(x)\, \Delta_y\, \Psi_{\lambda+1}(y) \rangle = \langle E_{\lambda+1}^-(x, y), \psi(x)\, \Delta_y\, \Phi_{\lambda+1}(y) \rangle$$

Par prolongement analytique jusqu'à $\lambda = -m/2$, nous obtenons les noyaux élémentaires $E^{\pm}$ et nous savons que :

$$\Delta_y \langle E^{\pm}(x', y), x(x') \rangle = x(y) \quad \text{pour} \quad x \in \mathfrak{D}_\Omega .$$

Donc :

$$\langle E^{+}(x', y), \varphi(x')\,\psi(y) \rangle = \langle E^{-}(x, y), \psi(x)\,\varphi(y) \rangle = \langle E^{-}(y, x'), \varphi(x')\,\psi(y) \rangle .$$

ce qui montre que

$$E^{+}(x', y) = E^{-}(y, x')$$

et permet de retrouver la symétrie de la fonction $U(x, x')$.

BIBLIOGRAPHIE

Mme Choquet-Bruhat.

[1] *Solutions élémentaires d'équations du second ordre*. Colloque CNRS sur les équations aux dérivées partielles (Nancy, 1956).

[2] *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, t. 236, mai-juin 1953.

I. M. Guelfand et G. E. Chilov.

[1] *Les distributions*. Dunod. Paris, 1962.

J. Hadamard.

[1] *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Dover. New York, 1952 (ou Hermann. Paris, 1932).

J. Leray.

[1] *Hyperbolic differential equations*. Princeton, 1951-1952.

A. Lichnérowicz.

[1] *Propagateurs et commutateurs en relativité générale*. Publication de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques no 10. Paris, 1961.

[2] *Géométrie des groupes de transformations*. Dunod. Paris, 1958.

[3] *Sur les espaces riemanniens complètement harmoniques*. Bulletin de la Société mathématique de France, t. 72, 1944.

[4] *Equations de Laplace et espaces harmoniques*. Colloque CBRM sur les équations aux dérivées partielles (Louvain, 1953).

[5] *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, t. 252, p. 3742-3744, juin 1961.

[6] *Champs spinoriels et propagateurs en relativité générale*. Cours du Collège de France, 1962-1963.

[7] *Théorie globale des connexions*. Dunod. Paris, 1955.

P. D. Methee.

[1] *Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz* (Thèse). Commentarï Math. Helvetici. Vol. 28. 1954, p. 225 à 259.

De Rham.

[1] *Variétés différentiables*. Hermann. Paris, 1955.

L. Schwartz.

[1] *Théorie des distributions*, t. I, Hermann. Paris, 1957 (Deuxième édition).

G. Valiron.

[1] *Equations fonctionnelles applications*. Masson. Paris, 1950 (Deuxième édition).

TABLE DES MATIÈRES

Imprimé en France. — Imprimerie JOUVE, 15, rue Racine, PARIS
Dépôt légal éd : 1340 6491 N° de code 513-63