Mémorial des sciences mathématiques

W. J. Trjitzinsky

La régularité moyenne dans la théorie métrique

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 157 (1965)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1965__157__1_0>

© Gauthier-Villars, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

W. J. TRJITZINSKY
Urbana, Illinois, U. S. A.

LA RÉGULARITÉ MOYENNE

DANS LA

THÉORIE MÉTRIQUE

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CLVII

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES
38 - SAINT-MARTIN-D'HÈRES

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & Cie ÉDITEUR-IMPRIMEUR
55, Quai des Grands-Augustins
1965

© Gauthier-Villars & C^ie^, 1965.
Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction, par tous procédés
y compris la photographie et le microfilm réservés pour tous pays.

LA RÉGULARITÉ MOYENNE

DANS LA

THÉORIE MÉTRIQUE

Par M. W. J. Trjitzinsky,

Urbana, Ill., U. S. A. (¹).

1. **Introduction.** — Dans cet Ouvrage il s'agit d'un espace abstrait muni d'une mesure, sans aucune topologie, sauf dans la section 11. La théorie présentée est essentiellement métrique et se rattache : aux théorèmes de couverture du genre de Vitali-Denjoy; aux conséquences différentielles pour les fonctions d'ensemble, qui s'ensuivent des théorèmes de couverture et qui correspondent aux résultats de la théorie classique de Lebesgue; aux questions comme celle relativement aux décompositions de fonctions complètement additives; aux théorèmes fondamentaux d'épaisseur; aux résultats du genre de Lusin sur la mesurabilité de fonctions de point; enfin, aux questions analogues au théorème de Vitali-Carathéodory, dans la théorie classique, sur l'approximation de fonctions $f(x)$ mesurables par des suites monotones de fonctions semi-continues, avec un énoncé convenable faisant intervenir les intégrales de ces fonctions lorsque $f(x)$ est sommable.

Denjoy [1] a été le premier à établir, dans un espace abstrait, ce qu'on peut considérer comme le vrai théorème de couverture de

(¹) Cet Ouvrage a été réalisé avec le concours de la *National Science Foundation* Grant U. S. NSF-G 19 834.

Vitali; nous l'appellerons le théorème exact de Denjoy-Vitali. En développant les conséquences de ce théorème, Denjoy a introduit le caractère de *parfaite régularité* (D_1), qui fait intervenir les ensembles nommés *noyaux* et *enveloppes*. Plus tard Denjoy [2] a considéré un caractère plus général. Enfin [3] cet auteur a adopté une notion très fructueuse [*voir* (OD), p. 69] pour remplacer le caractère de la parfaite régularité, la notion de la *moyenne régularité*. L'auteur a inclus dans un Ouvrage [4], (T), une étude sur théorèmes de couverture dans le genre du théorème exact de Denjoy-Vitali. Ces théorèmes sont dans des conditions plus générales, mais les conclusions sont seulement à ε-près; pourtant on a réussi à en obtenir des conséquences différentielles, de la sorte qu'on s'attend à en tirer un théorème du genre de Vitali. Dans (T), en développant les conséquences différentielles des théorèmes de couverture, l'auteur s'appuie sur la notion ancienne de Denjoy (D_1) de la parfaite régularité; ainsi dans (T) on a fait usage de noyaux et d'enveloppes.

Dans l'Ouvrage actuel, dans les sections 2, 3 et 4, nous faisons une étude approfondie de théorèmes de couverture à ε-près, qui suffisent pour en tirer les conséquences différentielles voulues. Les théorèmes de couverture sont 2.8, 3.3, 3.11, 4.4 et 4.5. Selon la définition 4.18, au cas où les deux familles d'ensembles P, G (hypothèse 2.3) se confondent, on dira que la famille G est *régulière*, si les conditions dans un au moins des théorèmes de couverture sont remplies. Les théorèmes de couverture de Denjoy (D_1) et de l'auteur, dans (T) et dans l'Ouvrage présent, ainsi que les notions correspondantes de *familles régulières* sont, dans l'ordre de généralité croissante. Ce fait découle, quand on considère les exemples donnés dans (T) ainsi que les exemples (2.15), (3.9) [*voir* (1′)-(12′) de la section 3], 3.15 [*voir* (3.12), (3.12 *a*)], (4.17) [(4.8)], qui se rattachent respectivement aux théorèmes 2.8, 3.3, 3.11 et 4.5.

Les conséquences différentielles (5.1)-(5.14) s'appuient sur les théorèmes de couverture et elles ne dépendent ni de la parfaite régularité de G, ni de la moyenne régularité.

La moyenne régularité de Denjoy ou bien quelques autres notions analogues surviennent d'une façon essentielle à partir de (5.15). Dans (5.17) nous présentons certaines conditions suffisantes pour qu'une famille G possède la moyenne régularité; ces conditions ont été suggérées par un exemple de Denjoy [(OD); p. 69] d'une famille jouissant de cette propriété.

$F = \Delta(G)$ désignant l'ensemble des points indéfiniment couverts par une famille G, au moins régulière, et Ψ désignant une fonction, définie et finie pour les ensembles mesurables-Φ [mesure $\Phi \geqq 0$ borélienne] contenus dans F, on envisage le caractère C. A. (complète additivité) pour Ψ (5.5) et les dérivés extrêmes $(G)\overline{D}$, $(G)\underline{D}$ et la dérivée (G) D [relatifement à G] (5.6) d'une fonction Ψ; à certaines reprises Ψ est métriquement (absolument) continue (définition 5.9). Les conséquences différentielles dans la section 6 sont formulées dans les théorèmes 6.1, 6.2, 6.3, 6.6, 6.7 et le corollaire 6.8; dans ces énoncés G régulière possède la moyenne régularité et les fonctions Ψ, Ψ_n d'ensemble mesurable sont C. A. et métriquement continues (sur F); le théorème 6.6 est un théorème d'épaisseur, qui s'appuie sur un théorème de couverture.

Dans la section 7 est introduite l'hypothèse 7.2, relativement à une famille G régulière fixe et à une fonction Ψ quelconque; cette hypothèse a quelque ressemblance à la notion de la moyenne régularité. Le théorème 7.3, analogue au théorème 6.1, est dans l'hypothèse 7.2, mais avec Ψ, $\geqq 0$ et C. A., possiblement sans continuité métrique; si Ψ C. A. est *singulière* (7.1), on montre que $(G)D\Psi(x) = 0$ sur une plénitude de $\Delta(G)$ (théorème 7.4). Enfin (théorème 7.5), si G régulière jouit de la moyenne régularité et l'hypothèse 7.2 a lieu, toute fonction Ψ C. A. possède la décomposition unique (7.5 *a*) de Lebesgue.

Dans la définition 8.1 nous introduisons une famille $\mathcal{F} = \{ E \}$ d'ensembles E *simplement régulière* [comme dans (T)]. Dans l'énoncé (8.2) il s'agit d'un rapport entre la simple régularité, ainsi définie, et la régularité selon la définition 4.18. Quelques développements dans (T) étaient pour des familles $\mathcal{F}$ *complètement régulières*; la complète régularité est un caractère analogue à la parfaite régularité au sens ancien. Une famille *simplement régulière* $\mathcal{F}$ peut être *R. M.*, *régulière au sens moyenne* (essentiellement celui de Denjoy), d'accord avec la définition 8.5; *dans ce cas il ne faut pas présupposer que* $\mathcal{F}$ *soit régulière au sens de la définition* 4.18, e. g. le théorème fondamental de couverture peut être en défaut pour une telle $\mathcal{F}$. Le résultat principal dans la section 8 est *le théorème* 8.9 *d'épaisseur*, relativement à une famille $\mathcal{F} \in$ R. M. (la partie nécessaire reste valide, si seulement $\mathcal{F}$ est simplement régulière).

L'hypothèse 9.6 *est que* $\mathcal{F}$ *est régulière, avec la moyenne régularité, ou bien est R. M.* $\Delta(\mathcal{F})$ désignant l'ensemble indéfiniment couvert par $\mathcal{F}$, on envisage la classe $K(\mathcal{F})$ (définition 9.1) d'ensembles H, $\subset \Delta(\mathcal{F})$ ($\mathcal{F}$ satisfaisant à l'hypothèse 9.6), pour chacun desquels une famille $\mathcal{F}^*$, $\subset \mathcal{F}$, existe telle que $H = \Delta(\mathcal{F}^*)$; ces ensembles sont mesurables et satisfont à (9.2). On introduit les familles (9.3 *a*) $K_\delta(\mathcal{F})$, $K_\sigma(\mathcal{F})$, $K_{\delta\sigma}(\mathcal{F})$, $K_{\sigma\delta}(\mathcal{F})$, ...; on remarque qu'en général un ensemble de $K_\delta(\mathcal{F})$ ou de $K_\sigma(\mathcal{F})$ n'est pas dans $K(\mathcal{F})$. Si $A[\subset \Delta(\mathcal{F})]$ est un ensemble mesurable ou non, on envisage selon la définition 9.4 les classes, sur A,

$$C_0^+(\mathcal{F}),\quad C_0^-(\mathcal{F}),\quad C_0(\mathcal{F});\qquad C_1^+(\mathcal{F}),\quad C_1^-(\mathcal{F}),\quad C_1(\mathcal{F})$$

de fonctions $f(x)$ de point x sur A. On trouve (9.5) que $\mathcal{F} \in$ R. M. équivaut à ce que $\mathcal{F}$ est simplement régulière et que pour tout X, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, mesurable et $\varepsilon > 0$ il correspond un O de $K(\mathcal{F})$, telle que $O \supset X$, $\Phi(O - X) < \varepsilon$. On établit que relativement à tout ensemble mesurable contenu dans $\Delta(\mathcal{F})$ la classe d'ensembles $K(\mathcal{F})$ possède la propriété (9.7). A la suite des résultats préliminaires (9.8)-(9.10) nous établissons *le théorème* 9.11, au genre de Lusin, où il s'agit de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction $f(x)$ soit mesurable; ici interviennent un ensemble $N \in K_\delta(\mathcal{F})$ et la classe de fonctions $C_1(\mathcal{F})$.

Dans [(D_1); p. 353] Denjoy a donné un résultat [*voir* (9.13), (9.13 *a*)] sous l'hypothèse de la parfaite régularité. Un énoncé analogue se trouve dans le théorème 9.16 dans l'hypothèse 9.14 [e. g. en admettant une faible restriction de la moyenne régularité, dont il s'agit dans l'hypothèse 9.6] : pour tout ensemble mesurable H, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, il existe un Q de $K(\mathcal{F})$ tel que

$$\Phi(H - HQ) = \Phi(Q - QH) = 0.$$

Les énoncés (10.1), (10.2), lemme 10.3, (10.4), (10.5) sont relativement aux classes de fonctions $C_0(\mathcal{F})$, $C_1^-(\mathcal{F})$. Dans (10.6) il s'agit d'une approximation d'une fonction $f(x) \geqq 0$, finie et mesurable, par une fonction de $C_1^-(\mathcal{F})$; la même sorte d'approximation, dans l'hypothèse 9.6, est obtenue au théorème 10.8, au cas où $f(x)$ $(\geqq 0)$ peut être infinie. Il est montré (10.10) que

$$d(x) = \min(a(x),\, b(x)) \in C_1^-(\mathcal{F}),$$

sauf sur un ensemble mince, lorsque $a(x)$ et $b(x)$ sont dans $C_1^-(\mathcal{F})$. Le résultat principal de la section 10 est le théorème 10.11, analogue au théorème de Vitali-Carathéodory de la théorie classique, dont il s'agit dans le livre de S. Saks [5], [(S); p. 75]. Notre théorème est dans l'hypothèse 9.6 (e. g. la moyenne régularité est admise) : toute fonction $f(x)$, mesurable sur $F = \Delta(\mathcal{F})$, possède une approximation au sens de (10.11 *a*)-(10.11 *c*) par deux suites monotones $i_n(x) \in C_1^-(\mathcal{F})$ sur $F - F_0$, $s_n(x) \in C_1^+(\mathcal{F})$ sur $F - F_0$, avec F_0 mince. Dans (10.13)-(10.13 *b*) sont définies les classes de fonctions $C_\sigma^-(\mathcal{F})$, $C_\sigma^+(\mathcal{F})$ et il est montré (théorème 10.14) que, dans l'hypothèse 9.6, toute fonction $f(x)$ mesurable sur F vaut une $h(x)$ de $C^+_\circ(\mathcal{F})$ et une $g(x)$ de $C^-_\circ$ (F), sauf sur un ensemble mince. Dans la section **11** sur divisions alvéolaires interviennent des considérations métriques ainsi que topologiques.

2. **Préliminaires aux théorèmes de couverture.** — Soit U un espace muni d'une mesure $\Phi(E) \geqq 0$, fonction d'ensemble borélienne, assujettie aux caractères de complète additivité et de soustractivité. $\Phi_e(E)$ et $\Phi_i(E)$ seront respectivement les mesures extérieure et inférieure (d'un ensemble quelconque E), définies selon [(T); (2.1)]; ces mesures satisfont à [(T); (2.2)]. On dira [(D_1); p. 320] qu'un point x est indéfiniment couvert (au sens de la mesure-Φ) par une famille $\{e\}$ d'ensembles, s'il existe une suite e_n ($n = 1, 2, \ldots$) dans cette famille de sorte que

$$e_n \ni x, \qquad \Phi_e(e_n) \to 0. \tag{2.1}$$

NOTATION 2.2. — Si $\mathcal{F} = \{E\}$ est une famille d'ensemble, $\Delta(\mathcal{F})$ *désignera l'ensemble des points* x *(de* $\mathcal{U}$*) indéfiniment couverts par* $\mathcal{F}$. Si A est un ensemble particulier, $\mathcal{F}(A)$ *désignera la famille des* E *de* $\mathcal{F}$ *joints à* A [ainsi $\Delta(\mathcal{F}(A))$ sera l'ensemble des points indéfiniment couverts par les E de $\mathcal{F}$ joints à A].

HYPOTHÈSE 2.3. — $P = \{\omega\}$ est une famille d'ensemble ω *possiblement non-mesurables*-Φ. Avec tout ω est associé un ensemble *mesurable* $\gamma \leqq \omega$; on écrit $\omega = \omega(\gamma)$, $\gamma = \gamma(\omega)$. Soit G la famille des γ (les ensembles de P et de G sont en une correspondance biunivoque). On admet que $0 < \Phi(\gamma) < +\infty$, $\Phi_e(D) < \infty \left(D = \sum \gamma\right)$, $\Phi_e(\Delta(G)) > 0$.

NOTATION 2.4. — *Soit* $a > 1$ *une constante.* Posons, pour $\gamma \in G$:

$$\Omega(\gamma) = \sum \omega' \qquad [\omega' = \omega(\gamma'), \in P, \text{ joints à } \gamma;\ \Phi(\gamma') < a\Phi(\gamma)] \tag{2.4 a}$$

[la réunion des $\omega(\gamma')$ de P, joints à γ, tels que $\Phi(\gamma') < a\,\Phi(\gamma)$]; en plus

$$\Omega^0(\gamma) = \sum \gamma' \qquad [\gamma', \in G, \text{ joints à } \gamma;\ \Phi(\gamma') < a\Phi(\gamma)]; \tag{2.4 b}$$

$$\rho(\gamma) = \Delta(P(\gamma)) - \Delta(P(\gamma))\,\gamma; \tag{2.4 c}$$

$$\rho^0(\gamma) = \Delta(G(\gamma)) - \Delta(G(\gamma))\,\gamma. \tag{2.4 d}$$

Une fonction $\alpha(u)$ *de* $u > 0$ *satisfait à l'hypothèse* [(T); **4.1**], si

$$\alpha(u) > 0 \quad (u > 0), \qquad \alpha(u) \downarrow 0 \quad (\text{pour } u \downarrow 0) \tag{2.5}$$

et si, étant donné un $\varepsilon > 0$, des $\eta_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\eta_n \to 0$, existent tels que

$$(2.5\,a)\qquad \sigma = \sum_{n,i=1}^{\infty} \alpha(u_{i,n}) < \varepsilon \quad (\text{dès que } 0 < u_{i,n} < \eta_n), \qquad \sum_i u_{i,n} \leqq \Phi_e(\mathrm{D})$$

[(2.5 a) a lieu si $\alpha(u) = \mathrm{O}(u^c)$ avec $c > 1$].

Hypothèse 2.5*. — *Étant donné* $\varepsilon > 0$, *on suppose que des* η_n *positifs et tendant vers zéro existent de sorte que*

$$(2.5^*\,a)\qquad \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_e\left(\sum_{i=1}^{\infty} \rho(\gamma_i^n)\right) < \varepsilon,$$

dès que les γ_i^n $(i = 1, 2, \ldots)$, $\in \mathrm{G}$, *sont disjoints pour tout* $n > 0$ *et*

$$(2.5^*\,b)\qquad \Phi(\gamma_i^n) < \eta_n \qquad (i, n = 1, 2, \ldots).$$

Remarque 2.5′. — La condition

$$(2.5'\,a)\qquad \Phi_e(\rho(\gamma)) \leqq \alpha(\Phi(\gamma)) \qquad (\text{pour tout } \gamma \text{ de G}),$$

la fonction $\alpha(\ldots)$ satisfaisant à (2.5), (2.5 a) [e. g. à l'hypothèse [(T); 4.1]], entraîne la propriété qui survient dans l'hypothèse 2.5*. La réciproque n'est pas vraie, comme on le verra moyennant l'exemple à la fin de la section 3. Ainsi *l'hypothèse* 2.5* *est plus générale que la condition* (2.5′ a) [*avec* (2.5), (2.5 a)].

Remarque 2.5″. — Dans les deux théorèmes de couverture de l'auteur, à savoir [(T); 5.2] et [(T); (6.1)], on peut remplacer la condition (2.5′ a) [avec (2.5), (2.5 a)] par l'hypothèse 2.5*. Dans le théorème [(T); (6.1)] $\rho(\gamma)$ devient $\rho^0(\gamma)$ (2.4 d). On peut vérifier ce fait en examinant les développements dans [(T); sections 5 et 6]; les conclusions restent essentiellement les mêmes. *Dès lors nous supposerons les deux théorèmes* [(T); 5.2] *et* [(T); (6.1)] *généralisés de la façon indiquée.*

Hypothèse 2.6. — Admettons :

(2.6 a) l'hypothèse 2.5* avec $\rho^0(\ldots)$ (2.4 d) au lieu de $\rho(\ldots)$(2.4 c) et, de plus, que

$$(2.6\,b)\qquad \Phi_e(\omega(\gamma)) \to 0 \qquad [\text{lorsque } \Phi(\gamma) \to 0].$$

On remarque que [(2.4 c), (2.4 d)] :

$$(2.7)\quad \Delta(\mathrm{G}) \leqq \Delta(\mathrm{P}), \qquad \rho^0(\gamma) \leqq \rho(\gamma); \qquad \rho^0(\gamma) \leqq \Delta(\mathrm{G}), \qquad \rho(\gamma) \leqq \Delta(\mathrm{P}).$$

En effet si x est indéfiniment couvert par $G = \{\gamma\}$, il se trouve des γ_n (de G), $\ni x$, avec $\Phi(\gamma_n) \to 0$; alors $\omega_n = \omega(\gamma_n)$ (de P) $\ni x$ et $\Phi_e(\omega_n) \to 0$ d'après (2.6 *b*), e. g. x sera aussi indéfiniment couvert par P.

Nous allons démontrer l'énoncé suivant :

THÉORÈME 2.8. — *Admettons les hypothèses* 2.3, 2.6 *et les notations précédentes. Soit* $b > a\ (> 1)$. *Supposons que* (2.4 *b*) :

$$\Phi_e(\Omega^0(\gamma)) < b\Phi(\gamma) \qquad (pour\ \gamma \in G); \tag{2.8}$$

$$\Phi(\Delta(P) - \Delta(G)) = 0, \tag{2.8 a}$$

Alors $\Delta(P)$, $\Delta(G)$ *sont mesurables*; *de plus, à tout* $\varepsilon > 0$ *des* γ_i $(i = 1, 2, \ldots)$, $\in G$, *disjoints correspondent, tels que*

$$\Phi(\Delta(P) - \Delta(P)\Gamma) < \varepsilon, \qquad où\ \Gamma = \sum \gamma_i; \tag{2.8 b}$$

$$\Phi(\Delta(G)) - \varepsilon < \Phi(\Gamma) < \Phi(\Delta(G)) + \varepsilon. \tag{2.8 c}$$

Le théorème de couverture (6.1) [(T); p. 16] se rattache au cas où $\omega(\gamma) = \gamma$ pour tout γ de G [donc $P = G$, $\Delta(P) = \Delta(G)$]. $\Omega^0(\gamma)$ et $\rho^0(\gamma)$ de l'énoncé 2.8 sont respectivement les ensembles désignés dans [(T); (6.1)] par $\Omega(\gamma)$ et $\rho(\gamma)$. Le théorème [(T); (6.1)] s'applique. Ainsi $\Delta(G)$ *est mesurable* et, étant donné $\varepsilon > 0$, les $\gamma_i\ (\in G)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *disjoints* existent de sorte que

$$\Phi(\Delta(G) - \Delta(G)\Gamma) < \varepsilon \qquad \left(\text{avec } \Gamma = \sum \gamma_i\right), \tag{2.9}$$

$$\Phi(\Delta(G)) - \varepsilon < \Phi(\Gamma) < \Phi(\Delta(G)) + \varepsilon. \tag{2.9 a}$$

D'après (2.8 *a*) $\Delta(P)$ sera mesurable. Posons

$$H = \Delta(P), \qquad H^0 = \Delta(G), \qquad E = H - H^0. \tag{2.9 b}$$

Alors

$$H - H\Gamma = (H^0 - H^0\Gamma) + (E - E\Gamma), \qquad \Phi(E - E\Gamma) = 0 \qquad [\text{car } \Phi(E) = 0].$$

Ainsi (2.8 *b*) est une conséquence de (2.9), *ce qui vérifie le théorème* 2.8.

REMARQUE 2.10. — Au cas spécial où $\omega(\gamma) = \gamma$ (e. g. $P = G$) la condition (2.8 *a*) devient superflue, et l'on voit que le théorème 2.8 est alors équivalent au théorème spécial de couverture [(T); (6.1)] généralisé au sens de la remarque 2.5″. D'autre part, lorsque les familles P et G ne sont pas identiques, le théorème 2.8 paraît être distinct du théorème fondamental de couverture 5.2 dans [(T); p. 14

et 15]. Précisément, la condition (2.8 a) n'intervient pas au théorème [(T); 5.2], tandis que dans l'énoncé actuel les deux conditions :

$$(2.10\,a)\qquad \text{Hypothèse 2.5* pour } \rho^0(\ldots),\qquad \Phi_e(\Omega^0(\gamma)) < b\,\Phi(\gamma),$$

sont moins restrictives que les conditions correspondantes

$$(2.10\,b)\qquad \text{Hypothèse 2.5* pour } \rho(\ldots),\qquad \Phi_e(\Omega(\gamma)) < b\,\Phi(\gamma),$$

qui surviennent dans [(T); 5.2], généralisé selon la remarque 2.5″ [car $\rho^0(\gamma) \leqq \rho(\gamma)$ et $\Omega^0(\gamma) \leqq \Omega(\gamma)$]. Il serait intéressant de donner un exemple de familles P, G telles que les conditions du théorème 2.8 soient satisfaites, tandis qu'un au moins des caractères (2.10 b) soit en défaut. Ci-après nous en présentons un exemple.

Soit $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_2$ *le plan euclidien des points* (x, y), la métrique Φ étant au sens de l'aire euclidienne. Prenons $G = \{\gamma\}$ selon [(T); section 10]. Avec $0 < x_0 < 1$, $c_0 > 1$, $x_0 - c_0$ et $x_0 + c_0$ dans l'intervalle $(0, 1)$ [dans (T) c'était segment] de l'axe Ox, définissons l'ensemble γ_0 de G correspondant ainsi :

$$(2.11)\qquad \begin{cases} x_0 - c_0(1-y)^{\nu_0} \leqq x \leqq x_0 + c_0(1-y)^{\nu_0}, \qquad 0 < y \leqq 1 \\ \qquad [\text{dans (T)} : 0 \leqq y \leqq 1]; \\ x_0 = x(\gamma_0), \qquad c_0 = c(\gamma_0); \end{cases}$$

$$(2.11\,a)\qquad \begin{cases} \nu_0 = \nu(\gamma_0) = \frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + 8c_0}\right]; \\ \gamma_0 \leqq \text{rectangle } r_0 = r(\gamma_0) = \{x_0 - c_0 \leqq x \leqq x_0 + c;\ 0 < y \leqq 1\}; \end{cases}$$

$$(2.11\,b)\qquad \Phi(\gamma_0) = |\gamma_0| = \frac{2c_0}{\nu_0 + 1},\qquad |r_0 - \gamma_0| = |\gamma_0|^2.$$

G consiste de tous les γ, formés selon (2.11), (2.11 a) avec

$$x(\gamma),\qquad c = c(\gamma),\qquad \nu = \nu(\gamma)\qquad (\text{pour } x_0, c_0, \nu_0).$$

Le recouvrement étant au sens de l'aire, notons que $|\gamma| \to 0$ équivaut à $c \to 0$. On obtient

$$(2.11\,c)\qquad \Delta(G) = D\ \left(= \sum \gamma\right),\qquad = \{0 < x < 1,\ 0 < y \leqq 1\}\quad (= S)$$

[dans (T) le segment $0 \leqq x \leqq 1$ est inclus dans S]. Pour l'ensemble $\rho^0(\gamma_0)$ (2.4 d), qui correspond à l'ensemble désigné dans [(T); (10.1-3)] par $\rho(\gamma_0)$, on déduit

$$(2.11\,d)\qquad \rho^0(\gamma_0) = r(\gamma_0) - \gamma_0\quad (2.11\,a),\qquad |\rho^0(\gamma_0)| = \alpha(|\gamma_0|) = |\gamma_0|^2,$$

cela étant vrai pour tous les γ de G; $\alpha(\ldots)$ satisfait à (2.5), (2.5 *a*). D'après la remarque 2.5′, *la première condition* (2.10 *a*) *aura lieu.* Quant à $\Omega^0(\gamma)$ (2.4 *b*), selon [(T); p. 28 et 29] il vient

$$(2.11\,e)\qquad \Omega^0(\gamma)\subset S,\qquad |\,\Omega^0(\gamma)\,|_e < b\,|\,\gamma\,|\qquad (\text{pour tout } \gamma\in G)$$

dès que $b > q' = (1 + 2\,qa)\,q\,[2\,q = 1 + \sqrt{5}]$; on a $b > a\,(> 1)$.

Définissons les triangles

$$T_g\left\{0 < x \leqq \frac{1}{2};\ 0 < c < x\right\},\quad T_d\left\{\frac{1}{2} \leqq x < 1;\ 0 < c < 1 - x\right\}$$

et la fonction

$$(2.12)\qquad h(x, c) = x^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}\quad (\text{dans } T_g),\qquad = (1-x)^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}\quad (\text{dans } T_d);$$

on aura

$$(2.12\,a)\qquad c < h(x, c) < x\quad (\text{dans } T_g),\qquad c < h(x, c) < 1 - x\quad (\text{dans } T_d).$$

Les $\omega = \omega(\gamma)$ d'une famille P (2.3) seront donnés par

$$(2.12\,b)\qquad \omega = \{\,x(\gamma) - h(x(\gamma), c(\gamma)) \leqq x \leqq x(\gamma) + h(x(\gamma), c(\gamma));\ 0 < y \leqq 1\,\},$$

où $x(\gamma)$, $c(\gamma)$ sont les nombres qui correspondent à l'ensemble γ (de G) envisagé; ω est un rectangle tel que

$$(2.12\,c)\qquad \gamma < \omega = \omega(\gamma) < \Delta(G)\quad (= S)\quad (2.11\,c).$$

En effet on vérifie que pour tous les γ de G :

$$(1^0)\qquad 0 < x(\gamma) - h(x(\gamma), c(\gamma)) < x(\gamma) - c(\gamma);$$

$$(2^0)\qquad x(\gamma) + c(\gamma) < x(\gamma) + h(x(\gamma), c(\gamma)) < 1.$$

Au cas $(0 <)\ x(\gamma) \leqq \frac{1}{2}$ on aura $(x(\gamma), c(\gamma)) \in T_g$ et (1^0) s'ensuivra de (2.12 *a*) (pour T_g); (2^0) découle de (2.12 *a*) et du fait que

$$x(\gamma) + h(x(\gamma), c(\gamma)) < 2x(\gamma) \leqq 1.$$

Pour $\frac{1}{2} \leqq x(\gamma)\ (< 1)$ on obtient $(x(\gamma), c(\gamma)) \in T_d$; ($2^0$) suit de (2.12 *a*) (pour T_d), tandis que (1^0) résulte de (2.12 *a*) et parce que

$$x(\gamma) - h(x(\gamma), c(x)) > 2x(\gamma) - 1 \geqq 0.$$

On obtient

$$(2.12\,d)\qquad |\,\omega(\gamma)\,| = 2x^{\frac{1}{2}}(\gamma)c^{\frac{1}{2}}(\gamma)\quad \left[x(\gamma) \leqq \frac{1}{2}\right],$$

$$= 2(1 - x(\gamma))^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}(\gamma)\quad \left[x(\gamma) \geqq \frac{1}{2}\right],$$

donc $[c(\gamma) \to 0$ avec $|\gamma|]$:

$$(2.12\,e) \qquad |\omega(\gamma)| \left[\leqq \sqrt{2}\, c^{\frac{1}{2}}(\gamma)\right] \to 0 \qquad (\text{avec } |\gamma|).$$

En tenant compte de (2.12 *e*), (2.11 *d*) il se voit que l'*hypothèse* 2.6 *est satisfaite.* $\Delta(P)$ désignant l'ensemble indéfiniment couvert par $P = \{\omega\}$, d'après (2.12 *c*) on a $\Delta(P) \leqq \Delta(G)$; mais (2.7) $\Delta(G) \leqq \Delta(P)$, donc $\Delta(P) = \Delta(G)$ et *la condition* (2.8 *a*) *du théorème* 2.8 *est remplie.* Parmi les $\omega' [= \omega'(\gamma') \in P]$ qui interviennent dans la réunion pour $\Omega(\gamma)$ (2.4 *a*) il y a $\omega(\gamma)$; ainsi $\Omega(\gamma) > \omega(\gamma)$ et (2.12 *d*) :

$$(1_0) \qquad \frac{1}{|\gamma|} |\Omega(\gamma)|_e > \frac{|\omega(\gamma)|}{|\gamma|} = \frac{2}{|\gamma|} x^{\frac{1}{2}}(\gamma)\, c^{\frac{1}{2}}(\gamma) \qquad \left[x(\gamma) \leqq \frac{1}{2}\right],$$
$$= \frac{2}{|\gamma|} (1 - x(\gamma))^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}(\gamma) \qquad \left[x(\gamma) \geqq \frac{1}{2}\right].$$

Or, selon [(T); p. 29], $4\,c(\gamma) = \left[1 + \sqrt{1 + 8c(\gamma)}\right] |\gamma| > 2|\gamma|$, donc (1_0) :

$$(2.13) \qquad \frac{1}{|\gamma|} |\Omega(\gamma)|_e > \sqrt{2}\, x^{\frac{1}{2}}(\gamma)\, |\gamma|^{-\frac{1}{2}} \qquad \left[\text{lorsque } 0 < x(\gamma) \leqq \frac{1}{2}\right],$$
$$> \sqrt{2}(1 - x(\gamma))^{\frac{1}{2}} |\gamma|^{-\frac{1}{2}} \qquad \left[\text{lorsque } \frac{1}{2} \leqq x(\gamma) < 1\right].$$

Par conséquent, *aucune constante finie* $b\,(> a)$ *n'existe telle que la seconde inégalité* (2.10 *b*) *soit satisfaite pour tous les* γ *de* G; en effet, $\delta\left(0 < \delta < \frac{1}{2}\right)$ étant aussi petit qu'on veut, on obtient

$$(2.13\,a) \qquad \lim_{|\gamma| \to 0} \frac{1}{|\gamma|} |\Omega(\gamma)|_e = +\infty$$

pour tous les γ (de G) pour lesquels $\delta \leqq x(\gamma) \leqq 1 - \delta$.

Quant à $\rho(\gamma)$ (2.4 *c*), on observe [(2.11 *d*), (2.7)] que

$$\rho^0(\gamma) = r(\gamma) - \gamma \leqq \rho(\gamma)$$
$$[r(\gamma) = \{x(\gamma) - c(\gamma) \leqq x \leqq x(\gamma) + c(\gamma);\ 0 < y \leqq 1\}];$$

d'autre part, si (x_1, y_1) est un point de $S - r(\gamma)$ [e. g. si $0 < y_1 \leqq 1$ et $0 < x_1 < x(\gamma) - c(\gamma)$, ou bien $x(\gamma) + c(\gamma) < x_1 < 1$], les $\omega = \omega(\gamma)$ qui contiennent (x_1, y_1) deviennent disjoints de $r(\gamma)$ (donc de γ), dès que la mesure $|\omega(\gamma)|$ est suffisamment petite; on note que $|\omega(\gamma)| \to 0$ entraîne $|\gamma| \to 0$, ce qui équivaut à $c(\gamma) \to 0$, et l'on fait usage de (2.12 *b*), où $h(x(\gamma), c(\gamma))$ (2.12) tend vers zéro avec $c(\gamma)$. Conséquemment $\rho(\gamma) = \rho^0(\gamma)$; on n'a pas encore mis la première propriété (2.10 *b*) en défaut. Pourtant, *modifions l'exemple actuel* en ajoutant à tout $\omega = \omega(\gamma)$ (2.12 *b*) un *ensemble* :

$$(2.14) \quad \begin{cases} e(\gamma) \text{ mesurable}, \quad e(\gamma) \subset S \ (2.11\, c), \quad e(\gamma) \text{ joint à tous les } \gamma \text{ de } G, \\ \qquad |e(\gamma)| \to 0 \qquad (\text{avec } |\gamma|) \end{cases}$$

[par exemple, $e(\gamma)$ peut être l'intervalle linéaire $(0 < x < 1;\ y = 1)$].

$\rho^0(\gamma)$, $\Omega^0(\gamma)$ ne sont pas changés; on a encore (2.12 *c*) et (2.12 *e*) :

$$|\omega(\gamma)| \left[\leq \sqrt{2}\, c^{\frac{1}{2}}(\gamma) + |e(\gamma)| \right] \to 0 \qquad (\text{avec } |\gamma|).$$

Donc $\Delta(P) = \Delta(G) = S$. $\Omega(\gamma) > \omega(\gamma)$ et $\omega(\gamma)$ contient le $\omega(\gamma)$ originel, d'où (2.13 *a*) *est encore vérifiée.* $\rho(\gamma)$ étant l'ensemble des points étrangers à γ, indéfiniment couverts par les ω' de P, joints à γ, et tout ω' étant joint à tout γ, il résultera que

$$(2.14\, a) \qquad \rho(\gamma) = \Delta(P) - \gamma = S - \gamma.$$

On a mis l'hypothèse 2.5* pour $\rho(\ldots)$ en défaut.

(2.15) En tenant compte des développements (2.11)-(2.14 *a*), *on conclut que l'exemple « modifié » de familles* $G = \{\gamma\}$, $P = \{\omega\}$ *satisfait à toutes les conditions du théorème de couverture* 2.8, *tandis que les deux caractères* (2.10 *b*) (dont il s'agit dans le théorème de couverture [(T); 5.2]) *sont en défaut.* Par conséquent, le *théorème* 2.8 *est essentiellement différent du théorème exact de Denjoy-Vitali* (D_1) (si P est distincte de G), *ainsi que du théorème* [(T); 5.2] *de l'auteur.*

3. **Théorèmes de couverture.** — Dans la section présente nous admettons *l'hypothèse* 2.3 et *les notations* 2.2, 2.4. Introduisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.1. — *Supposons que* $\rho(\ldots)$ (2.4 *c*) *satisfait à*

(3.1 *a*) Hypothèse 2.5*.

$\Omega(\gamma)$ *étant défini selon* (2.4 *a*), *admettons que*

$$(3.1\, b) \qquad \Phi_c\left(\sum_{n>N} \Omega(\gamma_n)\right) \to 0 \qquad (\text{pour } N \to \infty),$$

dès que les γ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *de la famille* G *sont disjoints. De plus supposons que*

$$(3.1\, c) \qquad \Phi_e(\omega(\gamma)) \to 0 \qquad [\text{avec } \Phi(\gamma)].$$

Les conditions (3.1 *b*), (3.1 *c*) remplacent l'inégalité

$$(1^0) \qquad \Phi_e(\Omega(\gamma))\ (2.4\,a) < b\Phi(\gamma),$$

qui intervient dans le théorème de couverture 5.2 [(T); p. 14 et 15], si les familles P, G sont distinctes [dans la démonstration du théorème 5.2 de (T) la propriété (3.1 *c*) s'ensuit de (1^0) et du fait que $\omega(\gamma) \leqq \Omega(\gamma)$].

D'après (3.1 *c*) :

$$(3.2) \qquad \Delta(G) \leqq \Delta(P).$$

Nous allons démontrer le théorème suivant de couverture.

THÉORÈME 3.3. — *Dans les hypothèses* 2.3, 3.1 *on conclut ainsi.* (3.3 *a*) $H^0 = \Delta(G)$, $H = \Delta(P)$ *sont mesurables, de la même mesure. Étant donné* $\varepsilon > 0$, *il existe une suite au plus dénombrable de* γ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ *disjoints*, $\in G$, *de sorte que*

$$(3.3\,b) \qquad \Phi(H - H\Gamma) < \varepsilon \qquad \left(\text{avec } \Gamma = \sum \gamma_j\right),$$

$$(3.3\,c) \qquad \Phi(H^0) - \varepsilon < \Phi(\Gamma) < \Phi(H^0) + \varepsilon.$$

Les développements (1^0)-(31^0) dans [(T); p. 6-10] ne font pas intervenir la condition $\Phi(\Omega(\gamma)) < b\Phi(\gamma)$, qui nous manque à présent. Donc, comme à la suite de [(T); (20^0), p. 8], il existe une suite au plus dénombrable de γ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ disjoints, $\in G$, construits selon [(T); (8^0)-(19^0)], tels que [en raison de (3.1 *a*) (hypothèse 2.5*)] :

$$(1_0) \qquad \Phi_e(\theta) = s < \infty, \qquad \text{où} \quad \theta = \sum \rho(\gamma_i),$$

Les γ, avec $\Phi(\gamma) < \eta$, ont le même ensemble de recouvrement indéfini que la famille de tous les γ. Selon l'hypothèse 3.1 un $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ existe tel que

$$\Phi\left(\sum_1^\infty \rho(\gamma_i)\right) < \varepsilon \quad [\text{dès que les } \gamma_i,\ \in G, \text{ sont disjoints et } \Phi(\gamma_i) < \eta].$$

On peut choisir les γ_i [qui interviennent dans (1_0)] de mesure inférieure à η. Alors *dans* (1_0) *s est inférieure à* ε. Posons [(T); (24^0)] :

$$(2_0) \qquad R = H - H\Gamma, \qquad R' = H - H(\Gamma + \theta) = R - R\theta.$$

Donc $R = R' + R\theta$ et (1_0) :

$$(3_0) \qquad \Phi_e(R) - \varepsilon < \Phi_e(R').$$

Les développements à la suite de (26^0) jusqu'à (31^0) [(T); p. 9 et 10] montrent que

$$(4_0) \qquad R' \leqq \Omega_N = \sum_{n<N} \Omega(\gamma_n) \quad (2.4a)$$

quel que soit l'entier N (> 0). D'après (3.1 *b*) et (4_0) :

$$(3.4) \qquad \lim_N \Phi_e(\Omega_n) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi(R') = 0;$$

de plus (3_0) :

$$(3.4a) \qquad \Phi_e(R) < \varepsilon \quad (2_0);$$

ici l'ensemble R (2_0) peut dépendre de ε.

(3.5) *Les ensembles* $H^0 [= \Delta(G)]$, $H [= \Delta(P)]$ *sont mesurables,* $H^0 \leqq H$ (3.2), $\Phi(H^0) = \Phi(H)$.

Cet énoncé est identique à [(T); (4.3)]. On remarque que le raisonnement qui mène à la constatation [(T); (4.3)] fait intervenir les inégalités $[\Phi_e(\omega(\gamma)) \leqq] \Phi_e(\Omega(\gamma)) < b\Phi(\gamma)$ [(T); (3.3)] seulement pour démontrer que $H^0 \leqq H$. Dans le cas présent cette inclusion est déjà vérifiée dans (3.2) [comme une conséquence de (3.1 *c*)]. Dans [(T); (3^0), p. 11] s_n sera $\Phi_e\left(\sum_i \rho(\gamma_i^n)\right)$; d'après l'hypothèse 2.5* on aura $\sigma = \sum s_n < \varepsilon$, $s_n \to 0$, et ainsi de suite. La démonstration dans [(T); p. 10-13] s'applique, avec les modifications indiquées, ce qui vérifie (3.5), e. g. (3.3 *a*). L'ensemble $R = H - H\Gamma$ étant mesurable, (3.3 *b*) résulte de (3.4 *a*). Dans [(T); (1^0), p. 13] s sera $\Phi_e\left(\sum \rho(\gamma_i)\right) = \Phi(\ldots)$; dans [(T); ($4^0$), p. 13] s_n vaudra $\Phi\left(\sum_i \rho(\gamma_i^n)\right)$ et l'on aura $s_n < \varepsilon$, en tant que $\Phi(\gamma_i^n) < \eta_n$. Enfin on vérifie (3.3 *c*) en suivant le raisonnement dans [(T); p. 13 et 14], avec les modifications indiquées et en notant que l'hypothèse $\Phi_e(\Omega(\gamma)) < b\,\Phi(\gamma)$ n'y intervient pas. *Le théorème* 3.3 *est établi.*

Pour voir que le théorème 3.3 de couverture est plus général que celui dans (T), à savoir [(T); théorème 5.2], *il suffira d'établir, moyennant un exemple, que les conditions du théorème* 3.3 *puissent toutes être réalisées, avec*

$$(3.6) \qquad \max_G \frac{1}{\Phi(\gamma)} \Phi_e(\Omega(\gamma)) = +\infty.$$

Mais d'abord examinons quelques façons de réalisation de la condition (3.1 *b*).

Soit $\Omega^*(\gamma)$ un ensemble défini pour tout γ de G et construit selon une loi convenable, tel que $\gamma \leqq \Omega^*(\gamma) \leqq \Omega(\gamma)$. Par exemple on pourrait choisir

(3.7) $\Omega^*(\gamma) = \Omega^0(\gamma)$ (2.4 b); ou bien $\Omega^*(\gamma) = \Omega_0(\gamma)$,

avec

(3.7 a) $\Omega_0(\gamma) = \sum \gamma'$ $[\omega' = \omega(\gamma'),\ \varepsilon \mathrm{P}$, joints à γ; $\Phi(\gamma') < a\Phi(\gamma)]$.

On vérifie les inclusions

(3.7 b) $$\Omega_0(\gamma) \leqq \Omega(\gamma), \qquad \Omega^0(\gamma) \leqq \Omega(\gamma).$$

La première est immédiate. Quant à la seconde, soit x un point sur $\Omega^0(\gamma)$; il existe un γ' de G tel que

$$x \in \gamma', \qquad \gamma'\gamma \neq 0, \qquad \Phi(\gamma') < a\Phi(\gamma);$$

pour le $\omega' = \omega(\gamma')$, qui correspond dans P, on aura

$$x \in \omega(\gamma'), \qquad \omega(\gamma')\gamma \neq 0;$$

donc $x \in \Omega(\gamma)$ (2.4 a). Supposons que les conditions suivantes ont lieu.

HYPOTHÈSE 3.8. — *Il existe une constante* $b\ (> a > 1)$ *telle que*

(3.8 a) $\Phi_e(\Omega^*(\gamma)) < b\Phi(\gamma)$, $\Phi_e(\tau(n, \mathrm{N})) < b\Phi(\gamma_n)$ $(n > \mathrm{N})$,

avec

(3.8 b) $$\tau(n, \mathrm{N}) = \Omega(\gamma_n) - \Omega(\gamma_n)\,\Omega^*_{\mathrm{N}}, \qquad \Omega^*_{\mathrm{N}} = \sum_{j > \mathrm{N}} \Omega^*(\gamma_j),$$

$\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ *étant une suite quelconque d'ensembles disjoints de* G.

(3.8′) *Dans l'hypothèse* 3.8 *la propriété* (3.1 b) *s'ensuit.*

En effet, notons que $\Omega^*_{\mathrm{N}} \leqq \Omega_{\mathrm{N}}$ (4$_0$) [car $\Omega^*(\gamma_j) \leqq \Omega(\gamma_j)$]; en posant

$$\mathrm{T}_{\mathrm{N}} = \Omega_{\mathrm{N}} - \Omega^*_{\mathrm{N}} \quad \left[= \sum_{n > \mathrm{N}} \Omega(\gamma_n) - \Omega^*_{\mathrm{N}}\right],$$

on obtient

$$\mathrm{T}_{\mathrm{N}} \leqq \sum_{n > \mathrm{N}} (\Omega(\gamma_n) - \Omega(\gamma_n)\,\Omega^*_{\mathrm{N}}) = \sum_{n > \mathrm{N}} \tau(n, \mathrm{N});$$

d'où (3.8 a) :

$$\Phi_e(\mathrm{T}_{\mathrm{N}}) \left[< b \sum_{n < \mathrm{N}} \Phi(\gamma_n)\right] \to 0 \qquad (\text{pour } \mathrm{N} \to \infty)$$

[en tant que la série $\sum \Phi(\gamma_j)$ $[\leqq \Phi_e(\mathrm{D}) < \infty]$ converge]; en outre, d'après la première inégalité (3.8 *a*), on obtient aussi

$$\Phi_e(\Omega_{\mathrm{N}}^*)\left[< b\sum_{n>\mathrm{N}}\Phi(\gamma_n)\right]\to 0 \qquad (\text{pour } \mathrm{N}\to\infty).$$

Enfin

$$\Omega_{\mathrm{N}} = \mathrm{T}_{\mathrm{N}} + \Omega_{\mathrm{N}}^*, \qquad \Phi_e(\Omega_{\mathrm{N}})\,[\leqq \Phi_e(\mathrm{T}_{\mathrm{N}}) + \Phi_e(\Omega_{\mathrm{N}}^*)]\to 0,$$

ce qui vérifie (3.8′). Donnons maintenant un exemple.

Dans le plan euclidien $\mathcal{U} = \mathcal{U}$, *reprenons la famille* G, *dont les ensembles* γ *sont définis selon* (2.11), (2.11 *b*); on obtient (2.11 *b*)-(2.11 *e*) :

(1′) $\rho^0(\gamma) = r(\gamma) - \gamma, \qquad r(\gamma) = \{x(\gamma) - c(\gamma) \leqq x \leqq x'(\gamma) + c(\gamma);\ 0 < y \leqq 1\}$;

(2′) $|\rho^0(\gamma)| = \alpha(|\gamma|) = |\gamma|^2 \quad (2.4d)$;

(3′) $|\Omega^0(\gamma)|_e < b\,|\gamma| \quad (2.4b) \qquad [\text{avec un } b > a\,(>1)]$.

Spécifions la famille $\mathrm{P} = \{\omega\}$, où $\omega = \omega(\gamma)$, en posant

(4′) $\omega(\gamma) = \gamma$ si $x(\gamma) \neq \frac{1}{2}$, $\qquad \omega(\gamma)$ donné par (2.12*b*) si $x(\gamma) = \frac{1}{2}$;

e. g.

$$\omega(\gamma) = \left\{\frac{1}{2} - h\left(\frac{1}{2}, c(\gamma)\right) \leqq x \leqq \frac{1}{2} + h\left(\frac{1}{2}, c(\gamma)\right);\ 0 < y \leqq 1\right\};$$

ici $h\left(\frac{1}{2}, c(\gamma)\right) = 2^{-\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ (2.12). *On vérifie* (3.1 *c*). D'autre part $\rho(\gamma)$ (2.4 *c*) dans le cas présent est identique avec $\rho^0(\gamma)$; donc (2′) :

(5′) $|\rho(\gamma)| = \alpha(|\gamma|) = |\gamma|^2$,

e. g. (3.1 *a*) *aura lieu*, en tant que $\alpha(u) = u^2$ satisfait à (2.5), (2.5 *a*) et la remarque 2.5′ s'applique. Or

(6′) $\Omega(\gamma) = \sum \omega' \qquad [\omega' = \omega(\gamma');\ \omega'\gamma \neq 0;\ |\gamma'| < a\,|\gamma|]$;

$\Omega(\gamma) > \omega(\gamma)$. D'après une remarque à la suite de (2.1_0) $2\,c(\gamma) > |\gamma|$. Ainsi (4′) :

$$\frac{1}{|\gamma|}|\Omega(\gamma)|_e > \frac{1}{|\gamma|}|\omega(\gamma)| = \frac{\sqrt{2}}{|\gamma|}c^{\frac{1}{2}}(\gamma) > |\gamma|^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{si } x(\gamma) = \frac{1}{2};$$

par là

$$\lim_{|\gamma|\to 0}\frac{1}{|\gamma|}|\Omega(\gamma)|_e = +\infty \qquad \left[\text{avec } x(\gamma) = \frac{1}{2}\right];$$

a fortiori (3.6) *est vérifié.* En tenant compte de (6′), (4′) il vient

$$
(7') \quad \left\{
\begin{aligned}
&\Omega(\gamma) = A(\gamma) + B(\gamma),\\
&A(\gamma) = \sum \gamma' \quad \left[x(\gamma') \neq \tfrac{1}{2};\ \gamma'\gamma \neq 0;\ |\gamma'| < a|\gamma|\right],\\
&B(\gamma) = \sum \omega' \quad \left[\omega' = \omega(\gamma');\ x(\gamma') = \tfrac{1}{2};\ \omega(\gamma')\gamma \neq 0;\ |\gamma'| < a|\gamma|\right].
\end{aligned}
\right.
$$

En raison de (3′) :

$$
(8') \qquad A(\gamma) < \Omega^0(\gamma), \qquad |A(\gamma)|_e < b|\gamma| \qquad \text{(pour tout } \gamma \in G).
$$

Selon [(T); p. 28] l'inégalité $|\gamma'| < a|\gamma|$ entraîne que

$$
(9') \qquad c(\gamma') < c(\gamma)\, qa \qquad \left(2q = 1 + \sqrt{5}\right).
$$

En examinant B (γ) (7′), on note que pour $x(\gamma') = \frac{1}{2}$:

$$
\omega' = \omega(\gamma') = \left\{ \left| x - \frac{1}{2} \right| \leqq 2^{-\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}(\gamma');\ 0 < y \leqq 1 \right\};
$$

d'autre part ω' est joint à γ, dont la partie de la frontière en commun avec le segment [o, 1] est le segment

$$
s(\gamma) = [x(\gamma) - c(\gamma),\ x(\gamma) + c(\gamma)],
$$

par conséquent $s(\gamma)$ est joint au segment

$$
\sigma(\gamma') = \left\{ \frac{1}{2} - 2^{-\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}(\gamma') \leqq x \leqq \frac{1}{2} + 2^{-\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}(\gamma') \right\}
$$

(qui est la partie de la frontière de $\omega' = \omega(\gamma')$ commune avec [o, 1]). D'après (9′) :

$$
\sigma(\gamma') < \sigma_0(\gamma) = \left[\frac{1}{2} - q_0\sqrt{c(\gamma)},\ \frac{1}{2} + q_0\sqrt{c(\gamma)} \right], \qquad q_0^2 = \frac{1}{2} qa.
$$

Tous les ω' qui interviennent dans B (γ) (7′) sont contenus dans le rectangle $\left\{ \left| x - \frac{1}{2} \right| \leqq q_0\, c^{\frac{1}{2}}(\gamma);\ 0 < y \leqq 1 \right\}$. Or [(T); p. 29] $c(\gamma)$ est inférieur à $\frac{1}{2} q|\gamma|$, donc

$$
(10') \qquad B(\gamma) < R(\gamma) = \left\{ \left| x - \frac{1}{2} \right| < q_1 |\gamma|^{\frac{1}{2}};\ 0 < y \leqq 1 \right\},
$$

où q_1 (> o) est une constante. Pour quelques-uns des γ, B (γ) peut être vide.

Soient γ_n ($n = 1, 2, \ldots$) des ensembles disjoints de G; la série $\sum |\gamma_n|$ converge. Posons

$$\eta_N = \max_{n>N} |\gamma_N| \qquad (\text{alors } \eta_N \downarrow 0 \text{ pour } N \to \infty).$$

Il résulte que

$$B(\gamma_n) < R_N = \left\{ \left| x - \frac{1}{2} \right| < q_1 \eta_N^{\frac{1}{2}};\ 0 < y \leq 1 \right\} \qquad (\text{pour } n > N);$$

$$\sum_{n>N} B(\gamma_n) < R_N, \qquad \left| \sum_{n>N} B(\gamma_n) \right|_e < 2 q_1 \eta_N^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi

$$(11') \qquad \lim_N \left| \sum_{n>N} B(\gamma_n) \right|_e = 0$$

En outre, d'après (7), (8′) :

$$(12') \qquad \left| \sum_{n>N} \Omega(\gamma_n) \right|_e = \left| \sum_{n>N} A(\gamma_n) + \sum_{n>N} B(\gamma_n) \right|_e$$
$$\leq \sum_{n>N} |A(\gamma_n)|_e + \left| \sum_{n>N} B(\gamma_n) \right|_e < b \sum_{n>N} |\gamma_n| + \left| \sum_{n>N} B(\gamma_n) \right|_e$$

Par conséquent (11′), (3.1 *b*) *est vérifié.*

(3.9) *Les développements* (1′)-(12′) *fournissent un exemple de familles* G = { γ }, P = { ω }, *pour lesquelles toutes les conditions du théorème* 3.3 *sont satisfaites* [*avec* $\Phi_e(\rho(\gamma)) \neq 0$], *tandis qu'aucune constante* b ($> a > 1$), *telle que* $\Phi_e(\Omega(\gamma) < b\,\Phi(\gamma)$ (*pour tous les* γ *de* G), *n'existe.*

Dans beaucoup d'applications des théorèmes de couverture du genre de Vitali, e. g. de Denjoy-Vitali [(D_1), (D_2), (D_3)] et de l'auteur [(T); sections 5 et 6; théorèmes 2.8 et 3.3], les deux familles d'ensembles G = { γ }, P = { ω } se confondent; c'est-à-dire, ω (γ) = γ pour tout γ de G. Il convient d'introduire :

Définition 3.10. — Au cas de P = G, on dira que la famille G = { γ } est *régulière*, si (avec les notations 2.2 et 2.4) :

$$0 < \Phi(\gamma) < +\infty, \qquad \Phi_e(D) < \infty \quad \left(D = \sum \gamma\right);$$

(3.10*a*) L'hypothèse 2.5* a lieu pour $\rho(\gamma) = \Delta(G(\gamma)) - \Delta(G(\gamma))\,\gamma$;

$$(3.10b) \qquad \lim_{N\to\infty} \Phi_e\left(\sum_{n>N} \Omega(\gamma_n) \right) = 0$$

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE ★ SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES ★ 38 - SAINT-MARTIN-D'HÈRES

$\left[\text{où } \Omega(\gamma) = \sum \gamma' \, [\gamma', \in \mathrm{G}; \gamma' \gamma \neq 0; \Phi(\gamma') < a \Phi(\gamma)], \text{ avec un } a > 1\right]$ dès que $\{\gamma_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est une suite quelconque de γ_n, $\in \mathrm{G}$, disjoints.

Le cas d'intérêt est seulement celui où $\Delta(\mathrm{G})$ n'est pas mince-Φ. En posant au théorème 3.3, $\mathrm{P} = \mathrm{G}$, on obtient :

Théorème 3.11. — *Si la famille* $\mathrm{G} = \{\gamma\}$ *est régulière (définition* 3.10) *on conclut ainsi.* $\Delta(\mathrm{G})$ *est mesurable. Étant donné* $\varepsilon > 0$, *il existe une suite dénombrable de* γ_j $(j = 1, 2, \ldots)$, $\in \mathrm{G}$, *disjoints, tels que*

$$\Phi(\Delta(\mathrm{G}) - \Delta(\mathrm{G})\,\Gamma) < \varepsilon, \qquad \text{où} \quad \Gamma = \sum \gamma_j, \tag{3.11 a}$$

$$\Phi(\Delta(\mathrm{G})) - \varepsilon < \Phi(\Gamma) < \Phi(\Delta(\mathrm{G})) + \varepsilon. \tag{3.11 b}$$

Une sous-famille d'une famille régulière possède ce caractère. Donc, pour un γ fixe, la famille $\mathrm{G}(\gamma)$ (des γ' de G joints à γ), sera régulière, d'où (d'après le théorème) $\rho(\gamma)$ sera mesurable, de sorte que *dans* (3.10 *a*) *on peut remplacer* Φ_e *par* Φ.

Le théorème de couverture dans (T) qui correspond au théorème 3.11 est [(T); (6.1)]; dans celui-ci il s'agit d'une famille G *régulière* au sens de [(T); (6.A)-(6.D)]. On verra que *le théorème actuel va au-delà du théorème* [(T); (6.1)], si l'on montre que la propriété de régularité au sens de la définition 3.10 est plus générale que le caractère de régularité au sens de [(T); (6.A)-(6.D)]. On vérifie tout de suite que la régularité selon (T) entraîne la régularité au sens nouveau $\left[\text{car, avec } \gamma_n \,(\in \mathrm{G}) \text{ disjoints, la série } \sum \Phi(\gamma_n) \text{ converge et } \sum_{n>\mathrm{N}} \Omega(\gamma_n)\right.$ $\left.\left[< b \sum_{n>\mathrm{N}} \Phi(\gamma_n)\right] \to 0 \text{ pour } \mathrm{N} \to 0, \text{ si la régularité est au sens ancien}\right]$.

Il devient essentiel donc de donner un exemple d'une famille G qui est régulière au sens nouveau, mais ne l'est pas selon [(T); (6.A)-(6.D)].

Encore une fois soit $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0$ le plan euclidien. Choisissons les γ de G comme il suit :

(3.12) *Pour* $x \neq \frac{1}{2}$ *et* $0 < x < 1$ *les* γ *qui correspondent sont définis selon* (2.11)-(2.11 *b*); $x = x(\gamma)$ sera le milieu du segment $[x(\gamma) - c(\gamma), x(\gamma) + c(\gamma)]$ formant l'intersection avec l'axe x de la frontière de γ; $c(\gamma) > 0$ et ce segment est contenu dans l'intervalle $(0, 1)$; pour un tel x fixe il y a une infinité de γ, avec $x(\gamma) = x$ et $c(\gamma)$ prenant toutes les valeurs indiquées.

(3.12 *a*) *Pour* $x = \frac{1}{2}$ *soit* γ *de la forme* $\gamma = w + e\,[w = w(\gamma)$, $e = e(\gamma)]$, *où*

$$w(\gamma) = \left\{\frac{1}{2} - h \leqq x \leqq \frac{1}{2} + h;\ 0 < y \leqq 1\right\}, \qquad 0 < h < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

et $e(\gamma)$ est le segment (linéaire)

$$e(\gamma) = \left\{\frac{1}{2} - h^{\alpha} \leqq x \leqq \frac{1}{2} + h^{\alpha};\ y = 1\right\},$$

$0 < \alpha < 1$ étant un nombre fixe; on a $0 < h < h^{\alpha} < \frac{1}{2}$. En laissant h varier dans l'intervalle indiqué, on obtient une infinité de γ situés dans le rectangle $S\{0 < x < 1;\ 0 < y \leqq 1\}$. On dira que le nombre $x(\gamma)$ associé avec un tel γ vaut $\frac{1}{2}$.

Pour la famille G construite selon (3.12), (3.12 *a*) on aura $0 < |\gamma| < 1$, $D = S$, $|D| = 1$; $\Delta(G) = S$. Considérons $\rho(\gamma)$ (3.10 *a*) pour un γ avec $x(\gamma) \neq \frac{1}{2}$; il s'ensuit immédiatement que $\rho(\gamma)$ contient $r(\gamma) - \gamma$, où $r(\gamma)$ est le rectangle $\{x(\gamma) - c(\gamma) \leqq x \leqq x(\gamma) + c(\gamma);\ 0 < y \leqq 1\}$; si (x_0, y_0) est un point dans $S - r(\gamma)$, c'est que $x(\gamma) + c(\gamma) < x_0 < 1$ ou bien $0 < x_0 < x(\gamma) - c(\gamma)$; si $\gamma' \ni (x_0, y_0)$ et $|\gamma'| \to 0$, on voit qu'éventuellement γ' se trouve à l'extérieur de $r(\gamma)$ $\Big[$car $c(\gamma') \to 0$, $h(\gamma') \to 0$, selon le cas, lorsque $|\gamma'| \to 0$, tandis que le segment $[x(\gamma') - c(\gamma'),\ x(\gamma') + c(\gamma')]$, ou bien le segment $[x(\gamma') - h(\gamma'),\ x(\gamma') + h(\gamma')]$ avec $x(\gamma') = \frac{1}{2}$, contient toujours le point $x_0\Big]$; e. g. pour $|\gamma'|$ suffisamment petite γ', contenant (x_0, y_0), sera disjoint de γ $[\gamma < r(\gamma)]$, donc (x_0, y_0) n'est pas indéfiniment couvert par les γ' de G joints à γ. Par là (2.11 *b*) :

$$(1_1) \qquad \rho(\gamma) = r(\gamma) - \gamma, \qquad \rho|(\gamma)| = |\gamma|^2 \quad \text{si} \quad x(\gamma) \neq \frac{1}{2}.$$

Envisageons un γ avec $x(\gamma) = \frac{1}{2}$; $\gamma = w + e$, où w et γ sont donnés selon (3.12 *a*) avec un certain $h\left(0 < h;\ h^{\alpha} < \frac{1}{2}\right)$. Soit $R(h)$ le rectangle

$$(2_1) \qquad R(h) = \left\{\frac{1}{2} - h^{\alpha} \leqq x \leqq \frac{1}{2} + h^{\alpha};\ 0 < y \leqq 1\right\}.$$

$R(h) \supset \gamma$. Si un point (x_0, y_0) est dans $R(h) - \gamma$, tous les γ' avec $x(\gamma') = x_0$ seront de la forme (3.12) (pour $x = x_0$) et seront joints à l'ensemble $e(\gamma)$ (3.12 *a*) (qui fait partie de γ); donc (x_0, y_0) est indéfiniement couvert par les γ' (de G) joints à G, d'où $R(h) - \gamma$ est contenu dans $\rho(\gamma)$. Aucun point de $S - R(h)$ n'est indéfiniment couvert par $G(\gamma)$ [pour des raisons de la sorte intervenant plus haut relativement à $S - r(\gamma)$]. Or $|\gamma| = 2h$; ainsi,

$$(3_1) \quad \begin{cases} \rho(\gamma) = R(h) - \gamma \quad (2_1), \qquad |\rho(\gamma)| = 2(h^\alpha - h) < 2^{1-\alpha}|\gamma|^\alpha, \\ |\rho(\gamma)| > k|\gamma|^\alpha \quad \text{(une constante } k > 0) \qquad \text{si} \quad x(\gamma) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(3.13) *Pour la famille* $G = \{\gamma\}$ [(3.12), (3.12 *a*)] *on conclut qu'aucune fonction* $\alpha(u)$, *qui satisfait à* (2.5), (2.5 *a*), *n'existe de sorte que*

$$(3.13\,a) \qquad |\rho(\gamma)| \leqq \alpha(|\gamma|) \qquad \text{(pour tout } \gamma \text{ de G)};$$

e. g. pour cette famille G la condition (2.5′ *a*), (2.5), (2.5 *a*) (remarque 2.5′) ne peut être satisfaite.

En effet, si $\alpha(u)$ satisfaisant à (2.5) était une fonction telle que (3.13*a*) ait lieu pour *tout* γ de G, d'après (3_1) il s'ensuivrait que nécessairement $\alpha(u) > ku^\alpha$ $(u > 0)$, un $0 < \alpha < 1$); si, de plus, (2.5 *a*) avait lieu, on aurait ceci : étant donné un $\varepsilon > 0$, des $\eta_n = \eta_n(\varepsilon) > 0$ existent, tels que $\eta_n \to 0$ et

$$(4_1) \quad \sigma = \sum_{n,i} \alpha(u_{i,n}) < \varepsilon \quad (\text{dès que } 0 < u_{i,n} < \eta_n) \qquad \text{et} \qquad \sum_i u_{i,n} \leqq 1;$$

on peut supposer que $\eta_n \leqq 1$; ainsi on aurait

$$(5_1) \qquad k\sum_n \sum_i u_{i,n}^\alpha < \varepsilon \qquad [\text{pour } \textit{tout} \text{ choix } (4_1) \text{ des } u_{i,n}].$$

Soit β un nombre tel que $1 < \beta \leqq \frac{1}{\alpha}$ et posons

$$\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\beta}, \qquad u_{i,n} = \frac{\eta_n}{\nu} i^{-\beta}, \qquad \nu'_n = \left(\frac{\eta_n}{\nu}\right)^\alpha;$$

alors $0 < u_{i,n} < \eta_n$ et $\sum_i u_{i,n} = \eta_n (\leqq 1)$, tandis que

$$\sum_i u_{n,i}^\alpha = \nu'_n \sum i^{-\alpha\beta} = +\infty \qquad (\text{car } \alpha\beta \leqq 1),$$

ce qui contredit (5_1), e. g. (4_1). *L'énoncé* (3.13), (3.13 *a*) *est vérifié.*

Étant donné un $\varepsilon > 0$, prenons des nombres η_n ($n = 1, 2, \ldots$) tels que

$$(6_1) \qquad 1 \geqq \eta_n > 0 \quad (\eta_n \to 0); \qquad k' \sum_n \eta_n^\alpha < \varepsilon \qquad (\text{avec } k' = 1 + 2^{1-\alpha}).$$

Soient les γ_i^n, $\in$ G, des ensembles quelconques tels que

$$(7_1) \qquad \gamma_i^n \ (i = 1, 2, \ldots) \text{ pour } n \text{ fixe sont disjoints}, \qquad |\gamma_i^n| < \eta_n.$$

Pour un n fixe les $x(\gamma_i^n)$ [(3.12), (3.12 a)] sont tous distincts de $\frac{1}{2}$, ou bien un seul $x(\gamma_{\nu(n)}^n) = \frac{1}{2}$; d'après ($1_1$), ($3_1$) :

$$s_n = \left| \sum_i \rho(\gamma_i^n) \right| \leqq \sum_{i \neq \nu(n)} |\rho(\gamma_i^n)| + \delta_{\nu(n)} |\rho(\gamma_{\nu(n)}^n)|$$
$$\leqq \sum_{i \neq \nu(n)} |\gamma_i^n|^\alpha + \delta_{\nu(n)} 2^{1-\alpha} |\gamma_{\nu(n)}^n|^\alpha,$$

où $\delta_{\nu(n)} = 1$, si $\nu(n)$ existe, et $\delta_{\nu(n)} = 0$ au cas contraire.

Or $\sum_i |\gamma_i^n| \leqq 1$, d'où

$$s_n < \sum_{i \neq \nu(n)} |\gamma_i^n| \cdot |\gamma_i^n| + 2^{1-\alpha} \eta_n^\alpha < \eta_n \sum_i |\gamma_i^n| + 2^{1-\alpha} \eta_n^\alpha \leqq k' \eta_n^\alpha.$$

Ainsi (6_1) :

$$(8_1) \qquad \sigma = \sum_n \left| \sum_i \rho(\gamma_i^n) \right| = \sum_n s_n < k' \sum_n \eta_n^\alpha < \varepsilon.$$

On voit que (6_1), (7_1), (8_1) signifient que *la famille* G [(3.12), (3.12 a)] *satisfait à l'hypothèse* 2.5* [e. g. à (3.10 a)].

Soit γ un ensemble de G avec $x(\gamma) = \frac{1}{2}$, d'où $\gamma = w + e$ (3.12 a). R (h) étant le rectangle (2_1), si (x_0, y_0) est un point de R (h) $-\, \gamma$, tous les γ' avec $x(\gamma') = x_0$ auront $x(\gamma') \neq \frac{1}{2}$ et ils seront tous joints à e, donc à γ; parmi ces γ' ceux pour lesquels $|\gamma'| < a\,|\gamma|$ seront dans $\Omega(\gamma)$; donc $\Omega(\gamma) > \mathrm{R}(h) - \gamma$; mais $\Omega(\gamma)$ contient aussi γ, d'où $\Omega(\gamma) > \mathrm{R}(h)$. Or $|\gamma| = 2\,h$. Par conséquent

$$\frac{1}{|\gamma|} |\Omega(\gamma)|_e > \frac{1}{|\gamma|} |\mathrm{R}(h)| = \frac{1}{|\gamma|} 2h^\alpha = 2^{1-\alpha} \frac{1}{|\gamma|^{1-\alpha}} \to +\infty$$

pour $x(\gamma) = \frac{1}{2}$ et $|\gamma| \to 0$. On conclut ainsi.

(3.14) *Pour la famille* G [(3.12), (3.12 *a*)] :

$$\max_{G} \frac{1}{|\gamma|} |\Omega(\gamma)|_e = +\infty,$$

e. g. aucune constante b n'existe telle que $|\Omega(\gamma)|_e < b|\gamma|$ *pour tous les* γ *de* G.

Pour démontrer le caractère (3.10 *b*) considérons un γ avec $x(\gamma) \neq \frac{1}{2}$. On peut écrire

$$(9_1) \quad \begin{cases} \Omega(\gamma) = A(\gamma) + B(\gamma), \\ A(\gamma) = \sum \gamma' \quad \left[x(\gamma') \neq \frac{1}{2};\ \gamma'\gamma \neq 0;\ |\gamma'| < a|\gamma|\right], \\ B(\gamma) = \sum \gamma' \quad \left[x(\gamma') = \frac{1}{2};\ \gamma'\gamma \neq 0;\ |\gamma'| < a|\gamma|\right]. \end{cases}$$

Or les γ', qui interviennent dans A (γ), sont donnés selon (3.12), e. g. selon (2.11)-(2.11 *b*). Comme dans les développements (7′), (8′), (3′), présentés plus haut, il vient

$$(10_1) \qquad A(\gamma) < \Omega^0(\gamma), \qquad |A(\gamma)|_e < b|\gamma| \qquad (\text{un } b > a)$$

pour le γ considéré $\left[x(\gamma) \neq \frac{1}{2}\right]$; ici

$$\Omega^0(\gamma) = \sum \gamma' \qquad (\gamma'\gamma \neq 0;\ |\gamma'| < a|\gamma|),$$

où *tous* les γ' $\left[\text{même ceux avec } x(\gamma') = \frac{1}{2}\right]$ sont définis selon (3.12). Dans B (γ) $|\gamma'| = 2h'$ et, en tant que $|\gamma'| < a|\gamma|$, on aura $h' < \frac{a}{2}|\gamma|$. Tous les γ' qui surviennent dans B (γ) sont parmi les γ' [(3.12 *a*), où h' remplace h] avec $h' < \frac{a}{2}|\gamma|$; par conséquent

$$(11_1) \quad B(\gamma) < R\left(\frac{a}{2}|\gamma|\right) = \left\{\frac{1}{2} - a_0|\gamma|^\alpha \leq x \leq \frac{1}{2} + a_0|\gamma|^\alpha;\ 0 < y \leq 1\right\}.$$

($a_0 = 2^{-\alpha}a^\alpha$). Si $\{\gamma_j\}$ ($j = 1, 2, \ldots$) est une suite quelconque d'ensembles disjoints dans G $\left(\text{donc } \sum |\gamma_n| \text{ étant convergente}\right)$, prenons l'entier $N > n'$, où n' est l'indice de $\gamma_{n'}$ pour lequel $x(\gamma_{n'}) = \frac{1}{2}$, s'il y en a (autrement posons $n' = 0$). Ainsi tous les γ_n $(n > N)$ auront $x(\gamma_n) \neq \frac{1}{2}$. Posons $\eta_N = \max\limits_{n>N} |\gamma_n|$; d'après (11_1) :

$$B(\gamma_n) < R_N = R\left(\frac{a}{2}\eta_N\right) \quad (n > N), \qquad \sum_{n>N} B(\gamma_n) < R_N;$$

donc

$$(12_1) \qquad \lim_N \left| \sum_{n>N} B(\gamma_n) \right|_e \leqq \lim_N |R_N| = \lim_N 2a_0\eta_N^\alpha = 0.$$

Selon (9_1), (10_1) :

$$\left| \sum_{n>N} \Omega(\gamma_n) \right|_e \leqq \sum_{n>N} |A(\gamma_n)|_e + \left| \sum_{n>N} B(\gamma_n) \right| < b \sum_{n>N} |\gamma_n| + \left| \sum_{n>N} B(\gamma_n) \right|.$$

La série $\sum \gamma_j$ étant convergente, d'après (12_1) on conclut que *la famille* G [(3.12), (3.12 *a*)] *possède la propriété* (3.10 *b*).

En tenant compte de la conclusion à la suite de (8_1), de (3.14) et de (3.13) on est amené à l'énoncé suivant :

(3.15) *La famille d'ensembles* $G = \{\gamma\}$, *fournie par* (3.12) (3.12 *a*) *est régulière au sens de la définition* 3.10 *et ne l'est pas au sens ancien* [(T); (6.A)-(6.D)], *ni au sens de Denjoy* (D_1); *plus précisément, pour cet exemple les deux caractères* [(T); (6.B)], [(T); (6.C)] *sont en défaut* [l'importance de la régularité d'une famille G reste dans la validité pour une telle famille du théorème de couverture 3.11]. Dans cet exemple $\Phi(\rho(\gamma)) > 0$ pour tout γ de G. Notons encore que *pour cette famille* G *l'inégalité* (3.11 *a*) (*du théorème* 3.11) *ne peut pas être remplacée par l'égalité*

$$\Phi(\Delta(G) - \Delta(G)\Gamma) = 0.$$

4. **Théorèmes de couverture** (*suite*). — Dans la section présente nous examinons la possibilité d'un théorème de couverture, avec les conclusions du théorème 3.3, *lorsque l'hypothèse* (3.1 *b*) *n'est pas nécessairement satisfaite*, l'hypothèse (3.1 *a*) (e. g. 2.5*) étant toujours admise; de plus (3.1 *c*) sera aussi admise [$\Phi_e(\omega(\gamma)) \to 0$ avec $\Phi(\gamma)$], de sorte que

$$(4.1) \qquad \Delta(G) \leqq \Delta(P).$$

Démontrons d'abord l'énoncé:

(4.2) Φ_e est une mesure extérieure « *régulière* » au sens de [(S; p. 50)], e. g. tout ensemble X est contenu dans un ensemble Y mesurable-Φ de sorte que $\Phi_e(X) = \Phi(Y)$.

En effet

$$\Phi_e(X) = \min \Phi(Z) \qquad (\text{pour Z mesurables} \supset X).$$

Soit Y_n, mesurable et contenant X, un ensemble tel que

$$[\Phi_e(X) \leqq] \, \Phi(Y_n) < \Phi_e(X) + \frac{1}{n} \qquad (\text{entier } n > 0).$$

Posons $Y'_n = Y_1 \ldots Y_n$; Y'_n est mesurable, $Y'_n \downarrow$; $Y_n \supset Y'_n \supset X$. On obtient

$$\Phi_e(X) \leqq \Phi(Y'_n) \leqq \Phi(Y_n) < \Phi_e(X) + \frac{1}{n}.$$

En laissant $n \to \infty$ il vient

$$\Phi_e(X) = \Phi(Y), \qquad \text{où} \quad Y = \lim Y'_n.$$

Selon [(S); p. 51], Φ_e étant une mesure extérieure régulière, on aura

$$(4.2a) \qquad \Phi_e(\lim X_n) = \lim_n \Phi_e(X_n)$$

pour toute suite non décroissante d'ensembles X_n ($n = 1, 2, \ldots$).

Reprenons les développements [(T); p. 6-10] avec des modifications provenant du fait qu'à présent aucune fonction $\alpha(\ldots)$ ne survient et que la condition $\Phi_e(\Omega(\gamma)) < b\,\Phi(\gamma)$ n'a pas lieu; ces conditions sont remplacées par (2.5*), (3.1 *c*) et par des conditions introduites plus loin (théorème 4.5). En particulier dans les formules [(T); (8°), (10°), (12°), (16°), (20°), (22°)] a_n et s sont respectivement remplacés par

$$(1_0) \qquad \Phi_e(\theta_n) \quad \left[\theta_n = \sum_{i=1}^{n} \rho(\gamma_i^n)\right], \qquad s = \Phi_e(\theta) \quad \left[\theta = \sum_{1}^{\infty} \rho(\gamma_i)\right]$$

[$H = \Delta(P)$]. [(T); (25°)] devient

$$(2_0) \quad \Phi_e(R) \leqq \Phi_e(R') + s, \qquad R = H - H\Gamma, \qquad R' = H - H(\Gamma + \theta), \qquad \Gamma = \sum_{1}^{\infty} \gamma_i,$$

où (d'après l'hypothèse 2.5) on peut supposer que les $\gamma_i \in (G)$ disjoints soient choisis de sorte que $s < \varepsilon$. Omettons [(T); (26°)]. Soit N un entier positif. Le texte à la suite de [(T); (26°)] reste valide, sans changement, jusqu'à [(T); (31°)]. Ainsi

$$(3_0) \qquad R' \subset \sum_{n > N} \Omega(\gamma_n).$$

Posons

$$(4.3) \qquad X_p(N) = R' \sum_{i=N+1}^{N+p} \Omega(\gamma_i).$$

On obtient (3_0) :

$$(4.3\,a) \qquad X_p(N) \uparrow R' \qquad (\text{pour } p \to \infty);$$

de plus (4.2 *a*) :

$$(4.3\,b) \qquad \Phi_e(X_p(N)) \uparrow \Phi_e(R') \qquad (\text{pour } p \to \infty).$$

D'après (4.3) il vient

$$(4.3\,c) \qquad \Phi_e(X_p(N)) \leqq \Phi_e\left(\sum_{i=N+1}^{N+p} \Omega(\gamma_i)\right).$$

On est amené à la conclusion suivante :

(4.4) *Admettons les hypothèses* 2.5*, (3.1 c). *Remplaçons l'hypothèse* (3. 1 *b*) *par la suivante, qui est moins forte* :

$$(4.4\,a) \qquad \lim_N \Phi_e\left(\sum_{i=N+1}^{N+p} \Omega(\gamma_i)\right) = 0 \qquad (\text{pour tout } 0 < p < +\infty),$$

dès que les γ_i *de* G *sont disjoints. Si la convergence dans* (4.3 *b*) *est uniforme relativement à* N, *il résulte que*

$$(4.4\,b) \qquad \Phi_e(R) < \varepsilon, \qquad R = \Delta(P) - \Delta(P)\,\Gamma, \qquad \Gamma = \sum \gamma_i$$

pour un choix convenable des γ_i ($\in$ G) *disjoints, dépendant de* ε.

En effet, étant donné un $\xi > 0$, on déduit

$$(1_1) \qquad \Phi_e(R') - \Phi_e(X_p(N)) < \xi \qquad [(\text{pour tout } p \geqq p(\xi)],$$

où $p(\xi)$ est indépendant de N. Donc (4.3 *c*) :

$$\Phi_e(R') < \xi + \Phi_e\left(\sum_{i=N+1}^{N+p(\xi)} \Omega(\gamma_i)\right).$$

D'après (4.4 *a*), pour $N \to \infty$, il en découle que $\Phi_e(R') \leqq \xi$; R′ est indépendant de ξ, donc $\Phi(R') = 0$. En tenant compte de (2_0) on vérifie (4.4).

On est mené à un théorème de couverture, avec les conclusions comme au théorème 3.3, *lorsque les hypothèses de l'énoncé* (4.4) *sont satisfaites*

Il ne serait pas difficile de trouver un exemple de familles G, P, pour lesquelles l'hypothèse 2.5*, et les conditions (3.1 *c*), (4.4 *a*) sont remplies, tandis que la condition (3.1 *b*) est en défaut; pourtant, avec la relation (3.1 *b*) absente, *il paraît être assez difficile de s'assurer de l'uniformité de la convergence dans* (4.3 *b*). Par conséquent nous procéderons d'une façon différente.

Théorème 4.5. — *Admettons les hypothèses* 2.3, 2.5*, (3.1 *c*) [$\Phi_e(\omega(\gamma)) \to 0$ *avec* $\Phi(\gamma)$] *et la suivante. Soit* $\varepsilon > 0$ *quelconque; envisageons les suites de* γ_n ($n = 1, 2, \ldots$), $\in G$, *disjoints et choisis selon* [(T); p. 6-10], *avec les modifications indiquées à la suite de* (4.2 *a*) *et avec* $s = \Phi_e(\theta)\,(1_0) < \frac{\varepsilon}{2}$; *on admet qu'en correspondance avec les ensembles* $H(N)$ ($N = 1, 2, \ldots$), $H(N) \leqq \Omega_N$, *existent tels que*

$$(4.5a)\quad \begin{cases} \Delta(P) - \theta - \Gamma.\Delta(P) \leqq H(N), \\ \lim\limits_{N} \Phi_e(H(N)) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{où}\quad \Gamma = \sum \gamma_n, \qquad \theta = \sum \rho(\gamma_n). \end{cases}$$

Alors $\Delta(G) \leqq \Delta(P)$; $\Delta(G)$, $\Delta(P)$ *sont mesurables, de la même mesure; les* γ_i *peuvent être choisis de sorte que*

$$(4.5b)\quad \Phi\Big(\Delta(P) - \Delta(P)\sum \gamma_i\Big) < \varepsilon;$$

$$\Phi(\Delta(G)) - \varepsilon < \Phi\Big(\sum \gamma_i\Big) < \Phi(\Delta(G)) + \varepsilon.$$

D'abord on remarque que l'ensemble au premier membre de l'inclusion (4.5 *a*) est identique avec R' (2_0); de plus (3_0) :

$$(4.6)\quad R' \leqq \sum_{n>N} \rho(\gamma_n) = \Omega_N.$$

Par conséquent l'inclusion dans (4.5 *a*) certainement aura lieu pour $H(N) = \Omega_N$. Si l'on avait la condition (3.1 *b*), e. g. si $\lim\limits_{N} \Phi_e(\Omega_N) = 0$, le cas serait celui déjà envisagé au théorème 3.3. Pour démontrer le théorème notons d'abord que (4.5 *a*) entraîne

$$(4.7)\quad \Phi_e(R') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En tant que $s = \Phi_e(\theta) < \frac{\varepsilon}{2}$ (ce qui est possible d'après 2.5*), en raison de (2_0) et de (4.7) il vient

$$(4.7a)\quad \Phi_e(R) \leqq \Phi_e(R') + s < \varepsilon, \qquad \text{où}\quad R = \Delta(P) - \Gamma.\Delta(P).$$

La mesurabilité des ensembles $\Delta(G)$, $\Delta(P)$, R et toutes les autres conclusions du théorème s'ensuivent moyennant des adaptations convenables des procédés dans [(T); p. 11-14] [*voir* le texte à la suite de (3.5), qui s'applique pour achever la démonstration du théorème 3.3; ces développements restent valides même avec le remplacement de la condition (3.1 *b*) par l'hypothèse présente (4.5 *a*)]. *Le théorème est ainsi vérifié.*

EXEMPLE 4.8. — *Soit une constante* $a > 1$. Pour tout couple de nombres réels $\alpha < \beta$, qui se trouvent sur le segment linéaire [0, 1], envisageons tous les ensembles f (linéaires) *fermés, épais, discontinus* (totalement), ayant α, β pour les extrémités, $a(f) = \alpha$, $b(f) = \beta$, *ni* α *ni* β *n'étant isolés dans* f, tels que

$$(4.8a)\qquad \frac{1}{2}\delta^a(f) \leqq |f| \text{ (mesure euclidienne de } f) \leqq \delta^a(f),$$

où $\delta(f) = b(f) - a(f)$ est le diamètre de f; de plus, en posant

$$(1^0)\qquad [a(f), b(f)] - f = \sum u_n \quad \text{(les intervalles } u_n \text{ disjoints)},$$

on suppose que

$$(4.8b)\qquad |u_n| < \sqrt{\frac{a}{2}}\,\delta(f).$$

La famille d'ensembles γ, $G = \{\gamma\}$, est formée des f, que nous venons de spécifier, ainsi que des ensembles f^0, où f^0 est le f correspondant, dépourvu des deux extrémités, e. g. $f^0 = f - \{a(f)\} - \{b(f)\}$. *Prenons* $P = \{\omega\}$ (hypothèse 2.3) *identique avec* $G = \{\gamma\}$; $\omega = \omega(\gamma) = \gamma$.

On remarque que

$$(2^0)\qquad a(f^0) = a(f), \qquad b(f^0) = b(f), \qquad \text{d'où} \qquad \delta(f^0) = \delta(f);$$

$$(3^0)\qquad (a(f^0), b(f^0)) - f^0 = \sum u_n \quad [\text{les } u_n \text{ de } (1^0)], \qquad |u_n| < \sqrt{\frac{a}{2}}\,\delta(f^0).$$

Si h est un ensemble jouissant des propriétés de f, sauf pour (4.8 *b*) $\Big[$e. g. si h est fermé, épais, discontinu, $0 \leqq a(h) < b(h) \leqq 1$, $\frac{1}{2}\delta^a(h) \leqq |h|$, tandis qu'en posant $[a(h), b(h)] - h = \sum v_n$ (les intervalles v_n disjoints) on a $|v_n| \geqq \sqrt{\frac{a}{2}}\,\delta(h)$ pour quelques $n\Big]$, alors on pourra ajouter à h un nombre *fini* de points γ_q situés dans $\sum v_n$ de sorte que, f désignant l'ensemble ainsi obtenu, on aura toutes les conditions de l'exemple satisfaites [avec $\delta(f) = \delta(h)$, $|f| = |h|$]. D'une façon plus générale, étant donné un $\eta > 0$ quelconque, on peut choisir les γ_q dans $\sum v_n$ de sorte que $f\left(= h + \sum \gamma_q\right)$ est dans G et, en même temps,

$$(4^0) \qquad |u_n| < \eta.$$

Si $\alpha < \beta$ sont donnés sur $[0, 1]$, ainsi qu'un $\eta < 0$ et un nombre μ tel que

$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha)^2 \leqq \mu \leqq (\beta - \alpha)^2, \qquad \mu < 1,$$

des ensembles f de G, avec $a(f) = \alpha$, $b(f) = \beta$, existent jouissant des propriétés de l'exemple, ainsi que les suivantes :

$$(5^0) \qquad |f| = \mu, \; |u_n| < \eta \quad [u_n \text{ de } (1^0)];$$

l'ensemble correspondant f^0 (dans G) satisfera aussi à (5^0), les u_n pouvant être définis selon (3^0). Pour montrer l'existence des f satisfaisant aux conditions spécifiées, on peut d'abord choisir un p parfait, totalement discontinu, d'extrémités α, β, tel que $|p| = \mu$ (une telle construction est connue); puis on peut ajouter à p un nombre fini de points, situés dans les contigus de p, de sorte que, en désignant par f l'ensemble nouveau, f satisfait à toutes les conditions voulues.

On voit que

$$(4.9) \qquad \Delta(G) \; (= \text{l'ensemble indéfiniment couvert par } G) = [0, 1].$$

Selon (4.8 *a*) $|\gamma| \to 0$ entraîne $\delta(\gamma) \to 0$; donc le *recouvrement indéfini est au sens diamétral.*

Envisageons un γ de G particulier; γ est un f ou bien un f^0; dans les cas respectifs :

$$(6^0) \qquad [a(\gamma), b(\gamma)] - \gamma = \sum u_n, \qquad (a(\gamma), b(\gamma)) - \gamma = \sum u_n,$$

les u_n étant des intervalles disjoints. Il vient (2.4 *a*) :

$$(7^0) \qquad \Omega(\gamma) = \sum \gamma' \quad [\gamma' \in G;\; \gamma'\gamma \neq 0;\; |\gamma'| < a|\gamma|].$$

D'après (4.8 *a*) :

$$|\gamma'| \leqq \delta^2(\gamma'), \qquad \frac{a}{2}\delta^2(\gamma) \leqq a|\gamma|;$$

donc

$$(8^0) \qquad \delta(\gamma') < \sqrt{\frac{a}{2}}\,\delta(\gamma) \qquad \text{entraîne} \quad |\gamma'| < a\,|\gamma|.$$

Les intervalles u_n étant définis selon (6⁰), envisageons un $u_n = (a_n, b_n)$ particulier; a_n, b_n appartiennent à γ. Considérons *tous* les γ' (de G), chacun étant un f, tels que

$$(9^0) \qquad a(\gamma') = a_n, \qquad b(\gamma') = b_n, \qquad \text{d'où} \quad \frac{1}{2}|u_n|^2 \leqq |\gamma'| \leqq |u_n|^2;$$

si x est un point quelconque dans u_n on peut toujours trouver un tel γ' contenant x; donc la réunion des γ' dont il s'agit dans (9⁰) vaut le segment $\bar{u}_n$; pour un tel γ', d'après (4.8 *b*) et (6⁰) :

$$\delta(\gamma') = |u_n| < \sqrt{\frac{a}{2}}\,\delta(\gamma), \qquad \text{d'où } (8^0) \quad |\gamma'| < a\,|\gamma|;$$

en outre γ' est joint à γ (par a_n et b_n), ainsi ces γ' sont parmi les γ' qui surviennent dans (7⁰). Par conséquent $\Omega(\gamma)$ contient u_n (6⁰) pour $n = 1$, $2 \ldots$; puisque $a > 1$, $\Omega(\gamma)$ contient γ aussi. On déduit que

$$(10^0) \qquad \begin{cases} \Omega(\gamma) \supset [a(\gamma),\ b(\gamma)] & (\text{si } \gamma \text{ est un } f), \\ \Omega(\gamma) \supset (a(\gamma),\ b(\gamma)) & (\text{si } \gamma \text{ est un } f^0). \end{cases}$$

Si G′ *est la sous-famille de* G *formée de tous les* γ *de* G *qui sont les* f (e. g. contiennent leurs deux extrémités), on observe que G′ couvre indéfiniment, au sens diamétral, le segment [0, 1], $\Delta(G') = [0, 1]$.
(4.10) G′ (et en effet G) *ne couvre pas* [0, 1] *au sens classique du théorème de Vitali.*

En effet soient x un point quelconque sur [0, 1] et γ^n ($\in$ G′) une suite d'ensembles contenant x de mesure tendant vers zéro, donc (4.9) de diamètre tendant vers zéro; selon (4.8 *a*) on aura

$$(11^0) \qquad r_n = \frac{|\gamma^n|}{\delta(\gamma_n)}\,[\leqq \delta(\gamma^n)] \to 0 \qquad (\text{pour } n \to \infty);$$

ici r_n est le « paramètre de régularité » de γ^n; (11⁰) veut dire que la borne inférieure de la suite $\{r_n\}$ n'est pas positive, donc aucun point x de [0, 1] n'est couvert par G′ au sens classique de Vitali; (4.10) *est vérifié.*

Soit un $0 < \varepsilon \leqq \frac{1}{2}$. *Choisissons un* γ_1 *de* G′ *d'extrémités* 0, 1, *tel que* $|\gamma_1| = 1 - \varepsilon$ [cela est d'accord avec (4.8 *a*)]; posons

$$(12^0) \qquad [0, 1] - \gamma_1 = \sum_{n_1} u_{1,n_1} \qquad (\text{les intervalles } u_{1,n_1} \text{ disjoints});$$

on a (4.8 *b*) $|u_{1,n_1}| < \sqrt{\frac{a}{2}}$; en tenant compte de la constatation en rapport avec (5°) on fait en sorte que

(13°) $$|u_{1,n_1}| \leq \frac{1}{2^2}.$$

D'après (10°) $\Omega(\gamma_1) = [0, 1]$. Soient

(14°) $$a_{1,n_1} < b_{1,n_1} \quad \text{(les extrémités de } u_{1,n_1}\text{)}.$$

On choisit les γ_{1,n_1} ainsi :

(15°) $$\begin{cases} \gamma_{1,n_1} \in G - G' & \text{(e. g. les } \gamma_{1,n_1} \text{ sont des } f^0\text{)}, \\ a(\gamma_{1,n_1}) = a_{1,n_1}, & b(\gamma_{1,n_1}) = b_{1,n_1}; \end{cases}$$

en posant $u_{1,n_1} - \gamma_{1,n_1} = \sum_{n_2} u_{1,n_1,n_2}$ (des intervalles disjoints u_{1,n_1,n_2}), moyennant la remarque (5°) on réalise

(16°) $$|u_{1,n_1,n_2}| \leq \frac{1}{2^3} \quad \left[\text{ainsi que } (4.8\,b)\ |u_{1,n_1,n_2}| < \sqrt{\frac{a}{2}}\,|u_{1,n_1}|\right].$$

En raison de (10°) :

(17°) $$\Omega(\gamma_{1,n_1}) \supset u_{1,n_1};$$

γ_1, γ_{1,n_1} $(n_1 = 1, 2, \ldots)$ sont disjoints. Ensuite choisissons les γ_{1,n_1,n_2} de sorte que

(18°) $$\gamma_{1,n_1,n_2} \in G - G', \qquad a(\gamma_{1,n_1,n_2}) = a_{1,n_1,n_2}, \qquad b(\gamma_{1,n_1,n_2}) = b_{1,n_1,n_2}$$

(e. g. les extrémités de γ_{1,n_1,n_2} sont celles de u_{1,n_1,n_2}); en posant

$$u_{1,n_1,n_2} - \gamma_{1,n_1,n_2} = \sum_{n_3} u_{1,n_1,n_2,n_3} \qquad (u\,.\ \text{disjoints}),$$

on ait

(19°) $$|u_{1,n_1,n_2,n_3}| \leq \frac{1}{2^4} \qquad \left(\text{ainsi que } |u\,.\,| < \sqrt{\frac{a}{2}}\,|u_{1,n_1,n_2}|\right).$$

Alors (10°) :

(20°) $$\Omega(\gamma_{1,n_1,n_2}) \supset u_{1,n_1,n_2}.$$

γ_1, γ_{1,n_1} $(n_1 = 1, 2, \ldots)$, γ_{1,n_1,n_2} $(n_1, n_2 = 1, 2, \ldots)$ sont disjoints. Ayant obtenu, de cette manière, les ensembles

(21°) $$\gamma_1, \quad \gamma_{1,n_1}, \quad \gamma_{1,n_1,n_2}, \quad \ldots, \quad \gamma_{1,n_1,n_2,\ldots,n_k},$$

pour un $k > 0$, avec

$$(22^0)\qquad u_{1,n_1,\ldots,n_k} - \gamma_{1,n_1,\ldots,n_k} = \sum_{n_{k+1}} u_{1,n_1,\ldots,n_{k+1}} \qquad (u_{\ldots} \text{ disjoints}),$$

$\gamma_{1,n_1,\ldots,n_k}$ (un f^0) ayant les mêmes extrémités que $u_{1,n_1,\ldots,n_k}$,

$$|u_{1,n_1,\ldots,n_{k+1}}| \leqq 2^{-k-2},$$

on choisit les $\gamma_{1,n_1,\ldots,n_{k+1}}$ ainsi :

$$(23^0)\qquad \begin{cases} \gamma_{1,n_1,\ldots,n_{k+1}} \in G - G' \\ (\gamma_{\ldots} \text{ possède les mêmes extrémités que } u_{1,n_1,\ldots,n_{k+1}}); \end{cases}$$

en posant

$$u_{1,n_1,\ldots,n_{k+1}} - \gamma_{1,n_1,\ldots,n_{k+1}} = \sum_{n_{k+2}} u_{1,n_1,\ldots,n_{k+2}},$$

on a

$$|u_{1,n_1,\ldots,n_{k+2}}| \leqq 2^{-k-3}.$$

On obtient ainsi une suite dénombrable

$$(4.11)\qquad \begin{cases} \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots\} = \{\gamma_1, \gamma_{1,n_1}, \gamma_{1,n_1,n_2}, \ldots, \gamma_{1,n_1,n_2,\ldots,n_k}, \ldots\} \\ \text{(les } n_j \text{ parcourant les valeurs } 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

d'ensembles *disjoints* de G (γ_1 un f, les autres des f^0). En tant que $|\gamma_1| = 1 - \varepsilon$, *cette suite couvre* $\Delta(G) = [0, 1]$ *à* ε*-près* :

$$(4.11\,a)\qquad \left| [0, 1] - \sum_n \gamma_n \right| < \varepsilon.$$

Montrons que cette *suite ne couvre pas* $[0, 1]$, *sauf pour un ensemble mince.* En tenant compte des définitions successives des u_{1,n_1} (12^0), u_{1,n_1,n_2} [à la suite de (15^0)], u_{1,n_1,n_2,n_3} [à la suite de (18^0)], etc., on obtient en succession, avec $\sigma = [0, 1]$:

$$\sigma - \gamma_1 = \sum_{n_1} u_{1,n_1}, \qquad \sigma - \gamma_1 - \sum_{n_1} \gamma_{1,n_1} = \sum_{n_1} (u_{1,n_1} - \gamma_{1,n_1}) = \sum_{n_1,n_2} u_{1,n_1,n_2},$$

$$\sigma - \gamma_1 - \sum_{n_1} \gamma_{1,n_1} - \sum_{n_1,n_2} \gamma_{1,n_1,n_2} = \sum_{n_1,n_2} (u_{1,n_1,n_2} - \gamma_{1,n_1,n_2}) = \sum_{n_1,n_2,n_3} u_{1,n_1,n_2,n_3},$$

et en général :

$$(24^0)\qquad \begin{cases} \delta_k = \sigma - \gamma_1 - \sum_{n_1} \gamma_{1,n_1} - \ldots - \sum_{n_1,\ldots,n_k} \gamma_{1,n_1,\ldots,n_k} = \sum_{n_1,\ldots,n_{k+1}} u_{1,n_1,\ldots,n_{k+1}} \\ (k = 0, 1, \ldots;\ \delta_0 = \sigma - \gamma_1). \end{cases}$$

Or $\gamma_{1,n_1,\ldots,n_j}$ $(j \geqq 1)$ a les extrémités de $u_{1,n_1,\ldots,n_j}$ et, d'après (4.8 *a*), $|\gamma_{1,n_1,\ldots,n_j}| \leqq |u_{1,n_1,\ldots,n_j}|^2$; donc, en posant

$$(25^0)\quad A_k = \sum_{j=1}^{k} \sum_{n_1,\ldots,n_j} \gamma_{1,n_1,\ldots,n_j} \quad (k > 0), \qquad \text{d'où} \qquad \delta_k = \sigma - \gamma_1 - A_k \quad (k > 0),$$

on obtient [(22⁰), (24⁰)] :

$$|A_k| \leqq \sum_{j=1}^{k} \sum_{n_1,\ldots,n_j} |u_{1,n_1,\ldots,n_j}|^2 \leqq \sum_{j=1}^{k} 2^{-j-1} \sum_{n_1,\ldots,n_j} |u_{1,n_1,\ldots,n_j}|$$

$$= \sum_{j=1}^{k} 2^{-j-1} |l_j|, \qquad \text{où} \quad l_j = \sum_{n_1,\ldots,n_j} u_{1,n_1,\ldots,n_j};$$

il vient

$$l_1 = \sigma - \gamma_1; \qquad l_j = \delta_{j-1} \quad (j = 2, 3, \ldots);$$
$$|l_1| = 1 - |\gamma_1| = \varepsilon; \qquad |l_j| < |l_1| = \varepsilon \quad (j > 1).$$

Par conséquent

$$|A_k| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

et (24⁰) :

$$(26^0)\qquad |\delta_k| = 1 - |\gamma_1| - |A_k| = \varepsilon - |A_k| > \frac{\varepsilon}{2} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

On a $\delta_0 > \delta_1 > \delta_2 > \ldots$; les δ_k $(k > 0)$ sont ouverts; on déduit (4.11) :

$$(4.12)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \delta = \lim\limits_{k} \delta_k = \sigma - \gamma_1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{n_1,\ldots,n_k} \gamma_{1,n_1,\ldots,n_k} = \sigma - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n \\ \qquad\qquad [\text{avec } (26^0),\ 0 < \frac{\varepsilon}{2} \leqq |\delta| < \varepsilon]. \end{array} \right.$$

Ainsi *la suite* $\{\gamma_n\}$ (4.11) *couvre* [0, 1] *à* ε-*près, mais elle ne couvre pas* [0, 1] *sauf pour un ensemble mince.*

Dans (4.11) les $\gamma_1, \gamma_{1,n_1,\ldots,n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ étaient numérotés comme une suite simple $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$. Pour tout entier $N \geqq 1$ il existe un nombre $\lambda' = \lambda_N > 1$ tel qu'aucun des $\gamma_{1,n_1,\ldots,n_k}$ $(k \geqq \lambda')$ n'est parmi les γ_j ($j \leqq N$), e. g. les $\gamma_{1,n_1,\ldots,n_k}$ ($k \geqq \lambda'$) sont tous parmi les $\gamma_n (n > N)$. Donc d'après (10°) et (24°) :

$$(27^0) \qquad \Omega_N = \sum_{n>N} \Omega(\gamma_n) \supset \sum_{k\geqq\lambda'} \sum_{n_1,\ldots,n_k} \Omega(\gamma_{1,n_1,\ldots,n_k})$$
$$\supset \sum_{k\geqq\lambda'} \sum_{n_1,\ldots,n_k} u_{1,n_1,\ldots,n_k} = \sum_{k\geqq\lambda'} \delta_{k-1}.$$

La suite d'ensembles δ_k étant décroissante, $\delta_k \to \delta$, en raison de (4.12) il vient

$$(28^0) \qquad \Omega_N \supset \delta_{\lambda'-1} \supset \delta; \qquad |\Omega_N|_e \geqq |\delta| \geqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Les Ω_N ($N = 1, 2, \ldots$) constituent une suite non croissante, donc

$$(4.13) \qquad \lim_N |\Omega_N|_e \geqq |\delta| \geqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Notons la propriété suivante :

(4.14) Si $\gamma \in G$ (exemple 4.8), *pour l'ensemble* $\rho(\gamma)$ (2.4 c),

$$\rho(\gamma) = \Delta(G(\gamma)) - \gamma\,\Delta(G(\gamma)),$$

on aura

$\rho(\gamma) = 0$ (*si* γ *est un* f), $\quad \rho(\gamma) = \{a(\gamma)\} + \{b(\gamma)\}$ (*si* γ *est un* f^0);

(4.14 *a*) $\qquad |\rho(\gamma)| = 0 \qquad$ (*pour tous les* γ *de* G).

En effet, si γ est un f[γ contient ses extrémités $a(\gamma)$, $b(\gamma)$] et x est un point sur $\sigma - \gamma$, x sera à distance positive de γ; si γ^n de G ($n = 1, 2, \ldots$) contiennent x et $|\gamma^n| \to 0$ [e. g. $\delta(\gamma^n) \to 0$], les γ^n seront disjoints de γ dès que n surpasse un entier suffisamment grand; ainsi $\sigma - \gamma$ ne contient aucun point indéfiniment couvert par la famille $G(\gamma)$ d'ensembles de G joints à γ; dans ce cas $\rho(\gamma)$ est vide. Envisageons un γ qui est un f^0, donc γ ne contient pas les points $a(\gamma)$, $b(\gamma)$. Si x sur $\sigma - \gamma$ est à distance positive de γ on raisonne comme plus haut et l'on conclut que x est étranger à $\rho(\gamma)$. Si x (sur $\sigma - \gamma$) est à distance zéro de γ, c'est que x est une extrémité de γ. Soit par exemple, $x = a(\gamma)$. Choisissons une suite de γ^n ($n = 1, 2, \ldots$) tels que

(29°) γ^n est un f; $\quad a(\gamma^n) = a(\gamma)$; $\quad b(\gamma^n) \downarrow a(\gamma) \quad$ (pour $n \to \infty$);

(30°) $\qquad \gamma^n$ est joint à γ.

La possibilité d'un tel choix se voit en notant que, si des $\gamma(n)$ satisfont à (29°), on pourra trouver un point x_n de γ avec $a(\gamma) < x_n < b(\gamma(n))$ [on se rappelle que $a(\gamma)$ n'est pas isolé dans γ]; soit γ^n l'ensemble $\gamma(n)$

augmenté par x_n; alors γ^n satisfait à (29^0) et à (30^0), avec $b(\gamma^n)=a(\gamma(n))$; de plus γ^n, étant un f, contient son extrémité gauche $x=a(\gamma)$ et $|\gamma^n|\to 0$; *donc* x, *étranger à* γ, est indéfiniment couvert par la famille $G(\gamma)$ d'ensembles de G joints à γ, e. g. $a(\gamma)\in\rho(\gamma)$. De même pour le cas de $x=b(\gamma)$, *ce qui vérifie* (4.14), (4.14 *a*).

Pour la suite (4.11) on obtient

$$(4.15)\quad \begin{cases} R=\delta=[0,1]-\Gamma \quad (4.12), \qquad R'=R-\theta, \\ \text{où}\quad \Gamma=\sum\gamma_n, \qquad \theta=\sum_1^{\infty}\rho(\gamma_n); \end{cases}$$

ici θ est un ensemble dénombrable formé des extrémités des ensembles $\gamma_{1,n_1,\ldots,n_j}$ $(j\geqq 1)$; on a [(4.12), (24^0)] :

$$(4.15\,a)\quad 0<\frac{\varepsilon}{2}\leqq|R|=|R'|=|\delta|<\varepsilon; \qquad R'\subset R\subset\delta_k \quad (k=0,1,\ldots).$$

Donc en raison de (28^0) :

$$(4.15\,b)\qquad R'\subset R(\subset\delta_{\lambda'-1})\subset\Omega_N \qquad [\lambda'=\lambda(N);\ N=1,2,\ldots].$$

Nous allons montrer que

$$(4.15\,c)\qquad |\Omega_N|_e\leqq(1+2c)\varepsilon \quad (N=1,2,\ldots), \qquad c=\sqrt{2a}.$$

$\Omega(\gamma)$ étant défini dans (7^0), on note (4.8 *a*) que

$$\frac{1}{2}\delta^2(\gamma')\leqq|\gamma'|; \qquad a|\gamma|\leqq a\delta^2(\gamma).$$

Donc $|\gamma'|<a|\gamma|$ entraîne

$$(31^0)\qquad \frac{1}{2}\delta^2(\gamma')<a\delta^2(\gamma), \qquad \delta(\gamma')<c\delta(\gamma), \qquad c=\sqrt{2a};$$

si en plus γ' est joint à γ, tout point de γ' sera à distance inférieure à $c\delta(\gamma)$ de l'ensemble γ; *tous ces* γ', *ainsi que* $\Omega(\gamma)$, *sont inclus dans l'intervalle*

$$(32^0)\qquad \nu(\gamma)=(a(\gamma)-c\delta(\gamma),\ b(\gamma)+c\delta(\gamma)).$$

En tenant compte de (22^0), (23^0) il vient

$$u_{1,n_1,\ldots,n_k,n_{k+1}}\subset u_{1,n_1,\ldots,n_k}, \qquad \nu(\gamma_{1,n_1,\ldots,n_k,n_{k+1}})\subset\nu(\gamma_{1,n_1,\ldots,n_k})\subset\ldots\subset\nu(\gamma_{1,n_1}),$$

donc (32^0) :

$$\Omega(\gamma_{1,n_1,\ldots,n_{k+1}})\subset\nu(\gamma_{1,n_1,\ldots,n_{k+1}})\subset\nu(\gamma_{1,n_1}) \qquad (k\geqq 0).$$

Par conséquent (4.11) :

$$\Omega_1 = \sum_{n=9}^{\infty} \Omega(\gamma_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1, \ldots, n_k} \Omega(\gamma_{1, n_1, \ldots, n_k}) \subset \sum_{n_1=1}^{\infty} \rho(\gamma_{1, n_1}).$$

Or

$$|\rho(\gamma_{1,n_1})| \leqq (1+2c)\,\delta(\gamma_{1,n_1}) = (1+2c)\,|u_{1,n_1}|;$$

d'où (12⁰)

$$\begin{aligned}|\Omega_N| \leqq |\Omega_1| \leqq \sum_{n_1} |\rho(\gamma_{1,n_1})| \leqq (1+2c)\sum_{n_1} |u_{1,n_1}| \\ = (1+2c)\left|\sum_{n_1} u_{1,n_1}\right| = (1+2c)\,|[0, 1] - \gamma_1| = (1+2c)\,\varepsilon\end{aligned}$$

pour $N = 1, 2, \ldots$, *ce qui démontre* (4.15 *c*).

En raison de (4.15 *a*) :

(4.16) $$1 - \varepsilon < \left|\sum_1^{\infty} \gamma_n\right| \leqq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous résumons les développements (4.8)-(4.16) comme il suit :
(4.17) Envisageons la famille $G = \{\gamma\}$ de *l'exemple* 4.8, $P = G$. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons une suite γ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *disjoints*, $\gamma_n \in G$, dont il s'agit dans (4.11). *Cette suite n'est pas nécessairement formée d'accord avec* [(T); p. 6-10]. On a $\Delta(G) = [0, 1]$. G *ne couvre pas* [0, 1] *au sens classique de Vitali.* La suite $\{\gamma_n\}$ *couvre* [0, 1] *à* ε*-près, mais ne couvre pas* [0, 1] *sauf pour un ensemble mince.* Posons $\Gamma = \sum \gamma_n$, $\theta = \sum \rho(\gamma_n)$ (2.4 *c*); θ est un ensemble dénombrable [*voir* le texte qui précède (4.15 *a*)];

$$R = [0, 1] - \Gamma, \qquad R' = R - \theta;$$

on a

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqq |R'| = |R| < \varepsilon; \qquad R' \subset R \subset \Omega_N \quad (27^0) \qquad (N = 1, 2, \ldots).$$

On voit en particulier que R *est contenu dans* Ω_N $(N = 1, 2, \ldots)$, malgré le fait que la suite $\{\gamma_n\}$ n'est pas construite selon [(T); p. 6-10]. $\lim_N |\Omega_N|_e \neq 0$ et, en effet,

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqq |R'| = |R| \leqq \lim_N |\Omega_N|_e \leqq (1+2c)\,\varepsilon \qquad (c = \sqrt{2a}).$$

Toutes les conclusions du théorème 4.5 $\left[\text{où } H(N) = \Omega_N \text{ et } \frac{\varepsilon}{2} \text{ dans } (4.5\,a)\right.$ $\left.\text{est remplacé par } (1 + 2c)\varepsilon\right]$ seront vraies pour la suite $\{\gamma_n\}$. En effet, la première partie de (4.5 *b*) provient de (4.15 *a*) et la seconde partie de (4.5 *b*) a lieu en raison des inégalités $1 - \varepsilon < |\Gamma| \leqq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ (4.16) et puisque $|\Delta(G)| = 1$. Enfin on note que le *théorème* 3.3 *ne s'applique pas au cas actuel, puisque* (3.1*b*) *est en défaut au moins pour la suite* $\{\gamma_n\}$ *considérée.*

Définition 4.18. — Soit P = G. On dira que G est une famille *régulière* lorsque les conditions de la définition 3.10 sont remplies, ou bien, d'une façon plus générale, lorsque G est telle que l'un au moins des théorèmes de couvertures précédents ait lieu (encore au cas où P = G). Pourtant la définition de régularité selon la définition 3.10 est plus utile, parce que son application ne fait pas intervenir la formation de la suite $\{\gamma_n\}$.

5. **La moyenne régularité de Denjoy.** — *Désormais nous procédons toujours avec la famille* $G = \{\gamma\}$ [= P] *régulière au sens indiqué plus haut.* Ci-après les résultats (5.1)-(5.14) sont identiques (sauf pour l'emploi du caractère de régularité au sens plus général qu'avant) avec les constatations qui se trouvent dans (T) à partir de (6.3) jusqu'à (9.2) (sauf pour [(T); (8.3)] et pour [(T); (8.4)]. Il n'y a rien à changer dans les démonstrations (mais on fait usage des théorèmes nouveaux de couverture). Ces résultats étaient établis pour la première fois par Denjoy [dans (D_1)], sous l'hypothèse de régularité au sens de Denjoy. Ensuite nous abordons l'étude de questions qui outre la régularité exigent l'emploi d'un autre caractère; dans (D_1) [et les nombreuses Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* en rapport avec (D_1)] c'était la propriété de la « *parfaite régularité* » au sens de Denjoy; dans notre Ouvrage (T) c'était la propriété de la « parfaite régularité » à notre sens [plus générale que celle survenant dans (D_1)].

Pourtant Denjoy a introduit dans (D_3) une notion très remarquable de « *moyenne régularité* », qui sert pour remplacer le caractère de la « parfaite régularité ». La forme de la moyenne régularité, que Denjoy a finalement adoptée, se trouve dans [(OD); p. 69] [Observations..., à la fin de (D_3)]. A la suite de (5.15)-(5.15, II) nous faisons usage de cette notion de moyenne régularité dans sa forme finale donnée par Denjoy.

(5.1) *Toute sous-famille* G^* *d'une famille régulière* G *est régulière* [bien entendu $\Delta(G^*) \leqq \Delta(G)$ et le cas d'intérêt est où $\Phi(\Delta(G^*)) > 0$].
(5.2) Soient G régulière, une constante $0 < \theta < 1$, $E \subset \Delta(G)$, $\Phi_e(E) > 0$. Si $\Phi_e(E\gamma) < \theta\,\Phi(\gamma)$ pour tout γ de G, $\Phi_e(E) \leqq \theta\,\Phi(\Delta(G))$.

On définit les *épaisseurs extrêmes* d'un ensemble mesurable $E \subset \Delta = \Delta(G)$ au point M de Δ (relativement à une famille régulière) :

$$(5.3) \quad \text{ép. inf.}\, \underline{\eta}(E, M) = \underline{\lim} \frac{\Phi(E\gamma)}{\Phi(\gamma)}, \qquad \text{ép. sup.}\, \overline{\eta}(E, M) = \overline{\lim} \ldots$$

pour γ (de G) $\ni$ M et $\Phi(\gamma) \to 0$. L'épaisseur (exacte) est

$$\eta(E, M) = \underline{\eta}(E, M) = \overline{\eta}(E, M) \qquad \text{au cas où} \quad \underline{\eta} = \overline{\eta}.$$

(5.4) Si G est régulière, $\eta(\Delta, M) = 1$ sur une plénitude de $\Delta = \Delta(G)$.

Envisageons $\Psi(E)$ *fonction d'ensemble* mesurable-Φ, $E \subset \Delta = \Delta(G)$, G régulière, $\Psi(E)$ étant un nombre réel et fini pour tout tel ensemble E; on dira que

$$(5.5) \qquad \Psi \in \text{C. A., e. g. } \Psi \text{ est } \textit{complètement additive},$$

au cas où $\Psi\left(\sum E_n\right) = \sum \Psi(E_n)$, dès que les E_n, $\subset \Delta$, sont disjoints, les $\Psi(E_n)$ sont déterminés et $\sum |\Psi(E_n)| < \infty$, Ψ possédant, en outre, de la soustractivité. Dans l'Ouvrage actuel une relation $\Psi \in$ C. A. sur un ensemble mesurable $H \subset \Delta(G)$ aura la signification, un peu plus restrictive, d'accord avec [(S); p. 8]. Ainsi les ensembles mesurables (— Φ) formant une famille complètement additive, C. A. sur H voudra dire que Ψ est définie et finie pour tout X, $\subset$ H, mesurable et que $\Psi\left(\sum X_n\right) = \sum \Psi(X_n)$ dès que X_n, $\subset$ H, mesurables sont disjoints.

Définition 5.6. — Au moyen du rapport $\dfrac{\Psi(\Delta\gamma)}{\Phi(\gamma)}$ ($\gamma \in G$) on définit les *nombres dérivés supérieur, inférieur, moyen* (limite quelconque), *la dérivée* (unique, s'il y en a) :

$$(5.6\,a) \quad (G)\overline{D}\Psi(M), \quad (G)\underline{D}\Psi(M), \quad (G)D_m\Psi(M), \quad (G)D\Psi(M)$$

de Ψ au point M de $\Delta = \Delta(G)$.
(5.7) Les dérivés extrêmes et la dérivée unique, si elle existe, (5.6 *a*) sont mesurables.

(5.8) Soit $\Psi(E)$ $[E \subset \Delta = \Delta(G)]$ complètement additive (donc bornée); supposons que G est régulière. On conclut que les ensembles

$$E_{+\infty} = \{ (G)\overline{D}\Psi(M) = +\infty \}, \qquad E_{-\infty} = \{ (G)\underline{D}\Psi(M) = -\infty \}$$

sont minces-Φ (e. g. de mesure-Φ zéro).

DÉFINITION 5.9. — $\Psi(E)$, définie et finie pour tout ensemble mesurable $E\,(\subset \Delta)$, est dite *métriquement continue* (locution de Denjoy), si $\Psi(E) \to 0$ avec $\Phi(E)$ [alors, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta(\varepsilon)$, de sorte que $|\Psi(E)| < \varepsilon$ dès que $\Phi(E) < \delta(\varepsilon)$ $(E, \subset \Delta$, mesurable); $\Psi(E) = 0$ dès que $\Phi(E) = 0$].

(5.10) G étant régulière et Ψ étant *C. A.* et *métriquement continue*, aucun couple de nombres $A < B$ n'existe tel que

$$(G)\underline{D}\Psi(M) < A < B < (G)\overline{D}\Psi(M) \quad \text{partout sur } \Delta(G).$$

Dans (D) Denjoy fait usage d'ensembles *noyaux* et d'ensembles *enveloppes* au cas où G est régulière au sens de Denjoy; les mêmes sortes d'ensembles sont introduites dans [(T); p. 22 et 23] en rapport avec la régularité plus générale, celle au sens de [(T); (6.A-D)]. A présent noyaux et enveloppes sont entendus relativement à la notion de régularité selon la nouvelle définition 4.18.

DÉFINITION 5.11. — Si $G = \{\gamma\}$ est régulière et $F \subset \Delta(G)$, F sera un *noyau* lorsque

(5.11 *a*) $\Phi[\Delta(G(F)) - F] = 0$, $G(F)$ étant la famille des γ de G joints à F, on dira que $O[\subset \Delta(G)]$ est une *enveloppe*, si $\Delta(G) - O$ est un noyau.

On note que $G(F)$ étant régulière comme G l'est, $\Delta(G(F))$ sera mesurable en raison des théorèmes fondamentaux de couverture; en raison de (5.11 *a*) il s'ensuit que tout noyau F est nécessairement mesurable, d'où les enveloppes sont aussi mesurables.

(5.12) La somme (le produit) finie de noyaux (d'enveloppes) et le produit non vide (la somme) au plus dénombrable de noyaux (d'enveloppes) sont des noyaux (des enveloppes). F et O étant respectivement un noyau et une enveloppe, $F - FO$ sera un noyau et $O - OF$ sera une enveloppe.

Voici un *théorème d'épaisseur pour les noyaux.*

(5.13) Si F est un noyau, relativement à une famille G régulière, on aura

$$\eta(F, M) = 1 \quad \text{sur une plénitude de } F,$$
$$\eta(F, M) = 0 \quad \text{sur une plénitude de } O = \Delta(G) - F$$

[$\eta(\ldots)$ est l'épaisseur relativement à G].

(5.14) G étant régulière et Ψ étant une fonction d'ensemble $E \subset \Delta(G)$, complètement additive et métriquement continue, les inégalités, valides sur un noyau F,

$$(G)\underline{D}\Psi(M) < A, \qquad (G)\overline{D}\Psi(M) > B$$

entraînent dans les cas respectifs :

$$\Psi(F) \leqq A\Phi(F), \qquad \Psi(F) \geqq B\Phi(F).$$

(5.15) Définition de la moyenne régularité de Denjoy. — On admet d'abord, comme dans l'hypothèse 2.3, que la famille $G = \{\gamma\}$ jouit des propriétés :

$$(5.15\,a) \quad 0 < \Phi(\gamma) < \infty, \qquad \Phi_e(D) < \infty \quad \left(D = \sum \gamma\right), \qquad \Phi_e(\Delta(G)) > 0$$

[éventuellement $\Phi_e(\Delta(G)) = \Phi(\Delta(G))$]. $G\,(= P)$ possède *la moyenne régularité* dans les conditions suivantes :

Étant donné un $\varepsilon > 0$, quel que soit E, $\subset \Delta(G)$, *mesurable*, on peut réduire $G(E)$ (= la famille des γ de G joints à E) à une famille $G'(E)$ de sorte que

$$(5.15,\ \mathrm{I}) \qquad E\Delta(G(E) - G'(E)) = 0$$

[e. g. pour tout point M de E les γ de $G(E) - G'(E)$ contenant M ont $\Phi(\gamma) \geqq c(M, E)$ (indépendant de γ) > 0];

$$(5.15,\ \mathrm{II}) \qquad \Phi_e(\rho'(E)) < \varepsilon, \qquad \text{où} \quad \rho'(E) = \Delta(G'(E)) - E.$$

La notation pour $\rho'(E)$ dans (5.15, II) est justifiée à cause de l'inclusion $E \subset \Delta(G'(E))$, valide pour les raisons suivantes. Si M est un point de $E\,[\subset \Delta(G)]$, s'il existe une suite de γ_n ($n = 1, 2, \ldots$) $\subset G(E)$, $\gamma_n \ni M$, $\Phi(\gamma_n) \to 0$. Si aucune infinité de ces γ_n n'appartenait à $G'(E)$, on aurait M (de E) dans $\Delta(G(E) - G'(E))$, ce qui serait contraire à (5.15, I); donc une infinité de γ_n est dans $G'(E)$ et $M \in \Delta(G'(E))$, d'où $E \subset \Delta(G'(E))$.

Une famille $G\,(= P)$, satisfaisant à (5.15 *a*), est dite *régulière* (simplement) *au sens de Denjoy* [*voir* (D_1)] si

$$(5.16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi(\rho(\gamma)) = 0 & [\gamma \in G,\ \rho(\gamma) = \Delta(G(\gamma)) - \Delta(G(\gamma))\gamma], \\ \Phi_e(\Omega(\gamma)) < b\Phi(\gamma) & (1 < a < b). \end{array} \right.$$

Dans les « Observations » [(OD); p. 69] il a été affirmé, sans démonstration, que *la régularité au sens de* (5.16) *de* G, *jointe à la moyenne* *régularité, entraîne la validité des théorèmes des Notes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950, p. 1013; t. 232, 1951, p. 195). Nous allons vérifier que ces constatations restent vraies si l'on remplace la régularité (simple) de Denjoy (5.16) par la régularité au sens de l'Ouvrage actuel, en admettant toujours la moyenne régularité [définition (5.15)].

Avec G *régulière, soit au sens* (5.16) *de Denjoy, soit au sens de l'Ouvrage actuel* (définition 4.18), $\rho'(\mathrm{E})$ *dans* (5.15, II) *sera mesurable* (d'après un théorème de couverture) et l'on pourra y écrire $\Phi(\ldots)$ pour $\Phi_e(\ldots)$.

Dans [(OD); p. 69] l'exemple suivant a été considéré. L'espace $\mathfrak{U}$ est l'axe Ox, Φ est la mesure euclidienne de Borel, la famille $\mathrm{G}=\{\gamma\}$ est formée de tous les intervalles joints au segment $s=[0, 1]$. On a $\Delta(\mathrm{G})=s_n$. Si $\mathrm{E}(\subset s)$ est mesurable et est partout dense sur s, on trouve une suite au plus dénombrable de $\gamma_n \in \mathrm{G}(\mathrm{E})$ (e. g. γ_n est un intervalle joint à E; $n=1, 2, \ldots$) disjoints, tels que $\mathrm{E}\subset\sum\gamma_n$ et $\sum|\gamma_n|<|\mathrm{E}|+\varepsilon$. La famille $\mathrm{G}'(\mathrm{E})$ peut être choisie comme la famille de tous les intervalles, joints à E, et chacun contenu dans un quelconque des γ_n. Pour les ensembles E de la sorte spécifiée, les caractères (5.15, I), (5.15, II) sont vérifiés.

Nous remarquons que les considérations de l'exemple de Denjoy [(OD); p. 69] s'étendent sans difficulté, avec les mêmes conclusions, à tous les ensembles E, $\subset s$, mesurables. En faisant usage de cet exemple comme un modèle, nous sommes amenés aux conditions suffisantes de la régularité moyenne.

(5.17) *Soit* $\mathrm{G}=\{\gamma\}$ *une famille régulière* [donc G satisfait à (5.15 *a*)]. *Pour que* G *possède la régularité moyenne il suffit que, pour tout* $\varepsilon>0$ *et pour tout ensemble mesurable* E, $\subset\Delta(\mathrm{G})$, *on ait* :

(5.17, I) *la famille* G(E) *contient une suite, au plus dénombrable, de* γ_n ($n=1, 2, \ldots$) *disjoints, tels que*

$$(1_0)\qquad \mathrm{E}\subset\sum\gamma_n,\qquad \sum\Phi(\gamma_n)<\Phi(\mathrm{E})+\varepsilon;$$

(5.17, II) *il existe un nombre* $c(x, \mathrm{E}, \varepsilon)$, *indépendant de* γ *et positif pour tout* x *sur* E, *tel que*

$$(2_0)\quad \Phi(\gamma)\geqq c(x, \mathrm{E}, \varepsilon)\quad (\text{dès que } x\in\mathrm{E},\ \gamma\ni x \quad \text{et} \quad \gamma\in\mathrm{G}(\mathrm{E})-\mathrm{G}'(\mathrm{E})),$$

où

$$(3_0)\qquad \mathrm{G}'(\mathrm{E})=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{G}'_n(\mathrm{E}),$$

G'_n (E) *étant la famille de tous les ensembles de* G (E) *contenus dans* γ_n [nécessairement $\gamma_n \in G'_n$ (E)].

En tant que G est régulière, toute sous-famille G* de G sera régulière et les ensembles Δ (G), Δ (G*) seront mesurables. Soit x un point sur E [$\subset \Delta$ (G)]; il existe une suite γ^j ($j = 1, 2, \ldots$) d'ensembles de G tels que $\gamma^j \ni x$, $\Phi(\gamma^j) \to 0$; nécessairement $\gamma^j \in G$ (E); il existe un entier $j_0 > 0$ tel que $\Phi(\gamma^j) < c(x, E, \varepsilon)$ (pour $j \geqq j_0$); en raison de (2_0) les γ^j ($j \geqq j_0$) ne peuvent pas être dans G (E) — G′ (E), donc $\gamma^j \in G'$ (E) ($j \geqq j_0$) et x sera un point de Δ (G′ (E)); d'où

$$E \subset \Delta(G'(E)) \tag{5.18}$$

[comme une conséquence de (5.17, II)]. Donc pour l'ensemble ρ' (E) [dans (5.15, II)] on déduit

$$(1^0) \quad \rho'(E) = \Delta(G'(E)) - E, \qquad \Phi(\rho'(E)) = \Phi(\Delta(G'(E))) - \Phi(E).$$

Or, D′ (E) désignant la réunion des γ de G′ (E), il vient

$$\Delta(G'(E)) \subset D'(E) = \sum \gamma_n$$

[car les γ d'une famille G'_n (E) sont contenus tous dans γ_n, qui aussi appartient à G'_n (E)]. Par là (1_0) :

$$\Phi(\Delta(G'(E))) \leqq \sum \Phi(\gamma_n) < \Phi(E) + \varepsilon$$

et, d'après (1^0), $\Phi(\rho'(E)) < \varepsilon$, ce qui vérifie (5.15, II). La propriété (5.15, I) aura lieu en vertu de [(5.17, II), (2_0)]. *L'énoncé* (5.17) *est démontré.*

Remarque 5.19. — *Admettons* (5.17, I). *Pour que le caractère* (5.17, II) *ait lieu, la propriété suivante suffit. Avec tout* γ *de* G *est associé un nombre* $c(\gamma; x)$, *positif* pour tout x sur $\gamma\,\Delta$ (G), de sorte que, γ_0 étant un ensemble particulier quelconque de G et x *étant sur* $\gamma_0\,\Delta$ (G), les relations

$$(a) \qquad \gamma\,(\text{de } G) \ni x, \qquad \gamma - \gamma\gamma_0 \neq 0$$

entraînent

$$(b) \qquad \Phi(\gamma) \geqq c(\gamma_0; x) > 0 \qquad [c(\gamma_0; x) \text{ indépendant de } \gamma].$$

En effet soit $x \in E$ [$\subset \Delta$ (G)]; de l'inclusion (1_0) il suit qu'un entier $n' = n'(E, \varepsilon) > 0$ existe tel que $x \in \gamma_{n'} \Delta(G)$. Soit γ un ensemble quelconque comme dans (2_0) : $\gamma \ni x$, $\gamma \in G$ (E) — G′(E); γ étant étranger à $G'(E)\left[=\sum G'_n(E)\right]$, γ ne peut pas être entièrement contenu dans $\gamma_{n'}$; d'où $\gamma-\gamma\gamma_{n'}\neq 0$; d'après (*a*), (*b*) (avec $\gamma_0=\gamma_{n'}$) il s'ensuit que

$$\Phi(\gamma)\geqq c(\gamma_{n'};x)=c(x, E, \varepsilon)>0;$$

c'est-à-dire la propriété (5.17, II) a lieu; *la conclusion de la remarque est vérifiée.*

6. **Conséquences différentielles.** — Nous allons démontrer l'énoncé suivant analogue à un théorème fondamental de Lebesgue.

THÉORÈME 6.1. — *Soit* $G=\{\gamma\}$ *une famille régulière avec la propriété de moyenne régularité. Admettons que* $\Psi\geqq 0$ *est C. A. (complètement additive) et métriquement continue (définition* 5.9). *Alors l'inégalité*

$$(6.1\,a)\qquad \begin{cases}(G)\overline{D}\Psi(x)>a & [\text{ou } (G)\underline{D}\Psi(x)<a] \text{ sur un ensemble H,}\\ & \subset\Delta=\Delta(G), \text{ mesurable}\end{cases}$$

entraîne

$$(6.1\,b)\qquad \Psi(H)\geqq a\Phi(H)\qquad [\text{ou } \Psi(H)\leqq a\Phi(H)].$$

Soit $\delta>0$. Selon (5.15) il existe une famille $G'(H)=G'_\delta(H)\,[\subset G(H)]$ telle que

$$(1_0)\qquad H\Delta(G(H)-G'(H))=0;$$

$$(2_0)\qquad \Phi(\rho'(H))<\delta\quad \text{avec } \rho'(H)=O-H,\qquad O=\Delta(G'(H)),$$

e. g., avec $H\subset O$, on a $\Phi(H)>\Phi(O)-\delta$. D'après la continuité métrique de Ψ, pour tout $\varepsilon>0$ il existe un $\delta(\varepsilon)>0$, $\delta(\varepsilon)\downarrow 0$ avec ε, de sorte que

$$(3_0)\qquad \Phi(E)<\delta(\varepsilon)\quad (E,\subset\Delta, \text{ mesurable})\qquad \text{entraîne}\quad \Psi(E)<\varepsilon;$$

δ_{-1} désignant la fonction inverse de $\delta(\varepsilon)$, on aura

$$(4_0)\qquad \Psi(E)<\delta_{-1}(\varepsilon)\qquad [\text{dès que } \Phi(E)<\varepsilon\ (E \text{ mesurable}, \subset\Delta)].$$

Dans (1_0), (2_0) prenons $\delta=\delta(\varepsilon)$. En tant que $\Phi(O-H)<\delta(\varepsilon)$, selon (3_0) on obtient $\Phi(O-H)<\varepsilon$, e. g.

$$(5_0)\qquad \Psi(H)>\Psi(O)-\varepsilon.$$

Démontrons que

$$(6_0)\qquad (G)\overline{D}\Psi x=(G'(H))\overline{D}\Psi(x)\quad \text{sur H.}$$

Évidemment $(G)\overline{D}\,\Psi^{\cdot} = (G(H))\overline{D}\,\Psi^{\cdot}$ sur H. De plus les γ de G (H) étrangers à G′ (H) ne couvrent indéfiniment aucun point de H [*voir* (1_0)]; (6_0) *s'ensuit*.

Soit $\mathcal{F}$ la famille des γ de G′ (H) tels que

$$(7_0)\qquad \Psi^{\cdot}(\gamma) > a\Phi(\gamma)$$

[on peut supposer que $a > 0$, car autrement la conclusion (6.1 *b*), pour le premier cas, est immédiate]. $\mathcal{F}$ est régulière. Si x est un point de H, on a

$$\overline{\lim}\,\frac{\Psi^{\cdot}(\gamma)}{\Phi(\gamma)} = l > a \qquad [\gamma \in G'(H),\ \gamma \ni x,\ \Phi(\gamma)\ \text{arbitrairement petit}].$$

On peut trouver une suite de γ^j, tels que

$$\gamma^j \in G'(H) \quad (j = 1, 2, \ldots), \qquad \gamma^j \ni x, \qquad \Phi(\gamma^j) \to 0, \qquad \Psi^{\cdot}(\gamma^j) > a\Phi(\gamma^j).$$

Les γ^j seront dans $\mathcal{F}$ et l'on voit que le point x est indéfiniment couvert par $\mathcal{F}$; ainsi

$$(8_0)\qquad H \subset \Delta(\mathcal{F}) = A \subset O.$$

La famille $\mathcal{F}$ étant régulière (dans notre sens), d'après le théorème de couverture on conclut comme il suit. Si $\xi > 0$ est donné, il existe une suite de γ_n ($n = 1, 2, \ldots$), $\in \mathcal{F}$, *disjoints*, tels que

$$(9_0)\qquad \Phi\Big(A - A\sum \gamma_n\Big) < \xi,$$

$$(10_0)\qquad \Phi(A) - \xi < \Phi\Big(\sum \gamma_n\Big) < \Phi(A) + \xi.$$

Il vient

$$-\Phi\Big(A\sum \gamma_n\Big) < -\Phi(A) + \xi, \qquad \Phi\Big(\sum \gamma_n\Big) - \Phi(A) < \xi;$$

donc

$$(11_0)\qquad \Phi\Big(\sum \gamma_n - A\sum \gamma_n\Big) < \Phi\Big(\sum \gamma_n\Big) - \Phi(A) + \xi < 2\xi.$$

D'après (4_0) et (11_0) :

$$(12_0)\qquad \Psi^{\cdot}\Big(\sum \gamma_n - A\sum \gamma_n\Big) < \delta_{-1}(2\xi).$$

Or γ_n étant dans $\mathcal{F}$, on a (7_0) $\Psi(\gamma_n) > a\,\Phi(\gamma_n)$; d'où (12_0) :

$$\Psi\left(A\sum\gamma_n\right) = \Psi\left(\sum\gamma_n\right) - \Psi\left(\sum\gamma_n - A\sum\gamma_n\right)$$
$$> \Psi\left(\sum\gamma_n\right) - \delta_{-1}(2\xi) > a\sum\Phi(\gamma_n) - \delta_{-1}(2\xi).$$

Ainsi $[(5_0), (8_0), (10_0)]$:

$$\Psi(H) > \Psi(A) - \varepsilon \geqq \Psi\left(A\sum\gamma_n\right) - \varepsilon$$
$$> a\Phi\left(\sum\gamma_n\right) - \varepsilon - \delta_{-1}(2\xi) > a[\Phi(A) - \xi] - \varepsilon - \delta_{-1}(2\xi)$$
$$\geqq a[\Phi(H) - \xi] - \varepsilon - \delta_{-1}(2\xi).$$

La conclusion du théorème découle, quand on laisse $\varepsilon \to 0$, $\xi \to 0$.

REMARQUE 6.1'. — *Dans le théorème* 6.1 *on peut remplacer* (6.1 *a*) *par*

$$(6.1'a) \qquad \begin{cases} (G)\,\overline{D}\Psi(x) \geqq a \qquad [\text{ou } (G)\,\underline{D}\Psi(x) \leqq a] \\ \text{sur un } H, \ \subset \Delta(G), \text{ mesurable,} \end{cases}$$

ce qui mène encore à la conclusion (6.1 *b*). On peut démontrer ce fait en remplaçant a dans (7_0) par b, $< a$; alors dans les inégalités à la suite de (12_0) a est remplacé par b; enfin on laisse $\varepsilon \downarrow 0$, $\xi \downarrow 0$, $b \uparrow a$, obtenant la conclusion (6.1 *b*).

THÉORÈME 6.2. — *Si la famille régulière* G *jouit de la moyenne régularité et* Ψ *est une fonction C. A. et métriquement continue, alors la dérivée* (G) D Ψ *existe et est finie sur une plénitude de* $\Delta = \Delta$ (G).

Il suffit de prouver cet énoncé dans le cas $\Psi \geqq 0$. Si le théorème est en défaut, on aura $(G)\,\overline{D}\,\Psi(x) > (G)\,\underline{D}\,\Psi(x)$ sur un ensemble E $(\subset \Delta)$ de mesure positive [notons que les dérivés sont mesurables d'après 5.7)]. En employant un raisonnement bien connu [(S); p. 115] on introduit l'ensemble

$$(1^0) \qquad E_{h,k} = \left\{ x \in E;\ (G)\,\overline{D}\Psi > \frac{h+1}{k} > \frac{h}{k} > (G)\,\underline{D}\Psi \right\}$$

pour les entiers positifs h, k; $E = \sum_{h,k} E_{h,k}$; pour un couple d'entiers h_0, k_0, on aura

$$(2^0) \qquad \Phi(H) > 0, \qquad \text{où } H = E_{h_0,k_0}.$$

Soit un $\varepsilon > 0$. Selon (5.15) il existe une famille $G'(H)\,[\subset G(H)]$ telle que

$$(3^0) \qquad H\Delta(G(H) - G'(H)) = 0,$$

$$(4^0) \qquad \Phi(O - H) < \varepsilon, \quad \text{où} \quad O = \Delta(G'(H)).$$

Soit $\mathcal{F}$ la famille des γ de $G'(H)$ pour lesquels

$$(5^0) \qquad \Psi(\gamma) \leqq \frac{h^0}{k_0}\Phi(\gamma).$$

Comme dans (6_0) :

$$(6^0) \qquad (G)\,\underline{\overline{D}}\Psi(x) = (G'(H))\,\underline{\overline{D}}\Psi(x) \quad \text{sur H.}$$

D'après la définition des $E_{h,k}$,

$$(7^0) \qquad (G)\,\overline{D}\Psi > \frac{h_0+1}{k_0} > \frac{h_0}{k_0} > (G)\,\underline{D}\Psi \quad \text{sur H.}$$

Si x est un point de H, en raison de (6^0) et de (7^0) on voit qu'il existe une suite γ^j $(j = 1, 2, \ldots)$:

$$\gamma^j \in G'(H), \qquad \gamma^j \ni x, \qquad \Phi(\gamma^j) \to 0, \qquad \Psi(\gamma^j) < \frac{h_0}{k_0}\Phi(\gamma^j);$$

nécessairement $\gamma^j \in \mathcal{F}$, donc

$$(8^0) \qquad H \subset \Delta(\mathcal{F}) \quad [\subset O].$$

En outre $\mathcal{F}\,[\subset G'(H) \subset G(H) \subset G]$ est régulière, le théorème de couverture s'applique; ainsi, si $\xi > 0$ est donné, on peut trouver des γ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, $\in \mathcal{F}$, disjoints tels que

$$(9^0) \qquad \Phi\Big(\Delta(\mathcal{F}) - \Delta(\mathcal{F})\sum\gamma_n\Big) < \xi,$$

$$(10^0) \qquad \Phi(\Delta(\mathcal{F})) - \xi < \Phi\Big(\sum\gamma_n\Big) < \Phi(\Delta(\mathcal{F})) + \xi.$$

Or $[(8^0), (4^0)]$:

$$\Phi(\Delta(\mathcal{F})) \leqq \Phi(O) < \Phi(H) + \varepsilon.$$

γ_n étant dans $\mathcal{F}$, selon (5^0) il vient $\Psi(\gamma_n) \leqq \frac{h_0}{k_0}\Phi(\gamma_n)$; donc, en tenant compte de (10^0), on déduit

$$(11^0) \qquad \Psi\Big(\sum\gamma_n\Big) = \sum\Psi(\gamma_n) \leqq \frac{h_0}{k_0}\sum\Phi(\gamma_n) = \frac{h_0}{k_0}\Phi\Big(\sum\gamma_n\Big)$$
$$< \frac{h_0}{k_0}[\Phi(\Delta(\mathcal{F})) + \xi] < \frac{h_0}{k_0}[\Phi(H) + \varepsilon + \xi].$$

Faisons emploi de la première inégalité (7°). Le théorème 6.1 s'applique, menant à la conclusion

$$(12^0) \qquad \Psi(H) \geqq \frac{h_0+1}{k_0}\Phi(H).$$

En tant que $H \subset \Delta(\mathcal{F})$ et $H - H\Gamma \subset \Delta(\mathcal{F}) - \Delta(\mathcal{F})\sum\gamma_n = Q$, où $\Gamma = \sum\gamma_n$, on obtient $\Psi(H - H\Gamma) \leqq \Psi(Q)$; selon (9°) $\Phi(Q) < \xi$, donc

$$(13^0) \qquad \Psi(H - H\Gamma) < \delta_{-1}(\xi) \qquad [\textit{voir}\ (4_0)].$$

Par conséquent [(13°), (12°)] :

$$\Psi\Big(\sum\gamma_n\Big) \geqq \Psi\Big(H\sum\gamma_n\Big) = \Psi(H) - \Psi\Big(H - H\sum\gamma_n\Big)$$
$$> \Psi(H) - \delta_{-1}(\xi) \geqq \frac{h_0+1}{k_0}\Phi(H) - \delta_{-1}(\xi),$$

ce qui, joint à (11°), donne

$$\frac{h_0+1}{k_0}\Phi(H) - \delta_{-1}(\xi) < \frac{h_0}{k_0}[\Phi(H) + \varepsilon + \xi].$$

En faisant ξ et ε tendre vers zéro, il résulte

$$(h_0+1)\Phi(H) \leqq h_0\Phi(H), \qquad \text{où} \quad \Phi(H) > 0.$$

Il y a une impossibilité. Conséquemment la dérivée (unique) (G) $D\Psi$ existe sur une plénitude de $\Delta(G)$. A cause de (5.8) (G) $D\Psi$ est *finie* sur une plénitude de $\Delta(G)$. *Le théorème* 6.2 *est vérifié.*

(6.3) *Soit* G *régulière avec la propriété de moyenne régularité;* $\Psi_n(n = 1, 2, \ldots)$, Ψ *complètement additives et métriquement continues dans* $\Delta(G)$; *admettons que* $\Psi_n \uparrow \Psi$ (*ou bien* $\Psi_n \downarrow \Psi$). *Alors*

$$\lim_n\ (G)\, D\Psi_n(x) = (G)\, D\Psi(x) \quad \textit{sur une plénitude de } \Delta(G).$$

Considérons le cas $\Psi_n \uparrow \Psi$. En posant, comme dans [(S); p. 116] dans un cas analogue du théorème classique, $\theta_n = \Psi - \Psi_n$ on note que $\theta_n \downarrow$ et qu'il suffit d'obtenir

$$(6.4) \qquad l(x) = \lim_n\ (G)\, \overline{D}\,\theta_n(x) = 0 \quad \text{sur une plénitude de } \Delta(G).$$

Selon (5.7) les (G) $\overline{D}\theta_n(x)$ sont mesurables, donc $l(x)$ l'est. Soit $E\,[\subset \Delta(G)]$ l'ensemble où $l(x) > 0$; E est mesurable. On a $E = \sum E_k\,(k \geqq 1)$, où E_k est l'ensemble des points de $\Delta(G)$ où $l(x) \geqq \frac{1}{k}$. Ainsi pour un $k_0\,(> 0)$:

$$\Phi(H) > 0, \qquad H = E_{k_0} = \left\{ x \in \Delta(G)\,;\; l(x) \geqq \frac{1}{k_0} \right\}.$$

De plus

$$(G)\,\overline{D}\theta_n(x) \geqq \frac{1}{k_0} > \frac{1}{k_0+1} \quad \text{sur H.}$$

En raison du théorème 6.1 :

$$\theta_n(H) \geqq \frac{1}{k_0+1}\,\Phi(H) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Il y a contradiction pour $n \to \infty$, car $\Phi(H) > 0$ et $\lim \theta_n(H) = 0$, *ce qui démontre l'énoncé* (6.3).

Soit H un ensemble mesurable, $H \subset \Delta(G)$; X, $\subset \Delta(G)$, désignant un ensemble mesurable, posons (comme dans [(S); p. 117]) :

$$(6.5) \qquad L_H(X) = \Phi(HX)\,;$$

$L_H(X)$ comme fonction d'ensemble mesurable X est C. A. et est métriquement continue dans $\Delta(G)$. On a

$$(6.5\,a) \quad L_H(X) = \int_X c_H(x)\,d\Phi(x), \qquad c_H(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur H,} \\ 0 & \text{sur } \Delta(G) - H. \end{cases}$$

Démontrons le résultat suivant relativement à l'*épaisseur.*

THÉORÈME 6.6. — *Si* G *est régulière et jouit de la moyenne régularité, pour tout ensemble* H, $\subset \Delta(G)$, *mesurable on aura*

(6.6 *a*) $(G)\,DL_H(x)[= \eta(G, H, x)$
= l'épaisseur, relativement à G, de H au point $x]$
$= c_H(x)$ *sur une plénitude de* $\Delta(G)$.

D'après la moyenne régularité (5.15) et puisque toute famille (infinie) contenue dans une famille avec la propriété de moyenne régularité jouit du même caractère, on peut construire une suite de famille $G'_n(H)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *chacune possédant la moyenne régularité,* de sorte que

(1_1) $\quad [G \supset]\, G(H) \supset G'_1(H) \supset G'_2(H) \supset \ldots \supset G'_n(H) \supset G'_{n+1}(H) \supset \ldots;$

(2_1) $\quad O_1 \supset O_2 \supset \ldots \supset O_n \supset O_{n+1} \supset \ldots, \quad$ avec $O_n = \Delta(G'_n(H))$;

(3_1) $\quad \Delta(G) \supset O_n \supset H, \quad \Phi(O_n - H) < \frac{1}{n}.$

G (H) est la famille des γ de G joints à H; G'_1(H) est une réduction, d'accord avec (5.15), de G (H), avec $\varepsilon = 1$; ainsi

$$\mathrm{H}\Delta(\mathrm{G}(\mathrm{H}) - \mathrm{G}'_1(\mathrm{H})) = 0, \qquad \Phi(\mathrm{O}_1 - \mathrm{H}) < 1.$$

Puis on fait à G'_1 (H) jouer le rôle de G; les γ de G'_1 (H) sont joints à H; G'_2 (H) est une réduction de G'_1 (H) avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$\mathrm{H}\Delta(\mathrm{G}'_1(\mathrm{H}) - \mathrm{G}'_2(\mathrm{H})) = 0, \qquad \Phi(\mathrm{O}_2 - \mathrm{H}) < \frac{1}{2}.$$

En général, G'_n (H) sera une réduction de G'_{u-1} (H) ($n \geqq 2$) avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$; la construction des G'_n (H) se fait en succession, de sorte qu'on vérifie (1_1)-(3_1) [(2_2) s'ensuivant de (1_1)] ainsi que les relations

$$(4_1) \qquad \mathrm{H}\Delta(\mathrm{G}'_n(\mathrm{H}) - \mathrm{G}'_{n+1}(\mathrm{H})) = 0 \qquad [n = 0, 1, \ldots; \ \mathrm{G}'_0(\mathrm{H}) = \mathrm{G}(\mathrm{H})].$$

Les familles G'_n (H) sont régulières (étant contenues dans G régulière); donc d'après le théorème de couverture les O_n sont mesurables. A la fonction L_{O_n} (X) (6.5) d'ensemble mesurable X le théorème 6.2 s'applique, d'où la dérivée (unique) (G) D $L_{O_n}(x)$ existe sur une plénitude de O_n. Cette dérivée étant l'épaisseur η (G'_n (H), O_n, x), relativement à G'_n (H), d'ensemble $O_n = \Delta$ (G'_n (H)) au point x, il s'ensuit d'après (5.4) et puisque G'_n (H) est régulière que

$$(5_1) \qquad (\mathrm{G}'_n(\mathrm{H}))\,\mathrm{D}\,\mathrm{L}_{\mathrm{O}_n}(x) = 1 \quad \text{sur une plénitude } \eta_n \text{ de } \mathrm{O}_n.$$

En conséquence du raisonnement survenant dans (6_0), en posant Φ (O_n X) $= \Psi_n$ (X), on obtient successivement

$$(\mathrm{G})\,\mathrm{D}\Psi_n = (\mathrm{G}(\mathrm{H}))\,\mathrm{D}\Psi_n = (\mathrm{G}'_1(\mathrm{H}))\,\mathrm{D}\Psi_n = (\mathrm{G}'_2(\mathrm{H}))\,\mathrm{D}\Psi_n = \ldots$$

partout sur η_n H (car H $\subset O_n$); en particulier, on peut remplacer (5_1) par

$$(6_1) \qquad (\mathrm{G})\,\mathrm{D}\,\mathrm{L}_{\mathrm{O}_n}(x) = 1 \quad \text{sur } \eta_n \mathrm{H}, \qquad \textit{donc sur} \quad \eta\mathrm{H}\left(\eta = \prod \eta_n\right);$$

ηH est une plénitude de H. Les L_{O_n}(X) [X mesurable $\subset \Delta$(G)] sont C.A. et métriquement continues dans Δ (G). Puisque $O_n \downarrow \prod O_n = H^0$ ($\supset$ H) on a L_{O_n} (X) $\downarrow L_{H^0}$ (X). En raison de la seconde relation (3_1) Φ (H^0 — H) = 0, d'où

$$\Psi_n(\mathrm{X}) = \mathrm{L}_{\mathrm{O}_n}(\mathrm{X}) \downarrow \mathrm{L}_{\mathrm{H}}(\mathrm{X}) = \Psi(x) \quad \text{dans } \Delta(\mathrm{G});$$

$\Psi(X)$ est C.A. et métriquement continue dans $\Delta(G)$. L'énoncé (6.3) s'applique de sorte que

$$\lim_{n} (G)\, D\, L_{O_n}(x) = (G)\, D\, L_H(x) \quad \text{sur une plénitude } \sigma \text{ de } \Delta(G).$$

Par conséquent en tenant compte de (6_1) on déduit

$$(7_1) \qquad (G)\, D\, L_H(x) = 1 = c_H(x) \quad \text{sur } \eta\sigma H \text{ (une plénitude de H);}$$

e. g. on a vérifié que *l'épaisseur, relativement à* G, *de l'ensemble mesurable* H *vaut* 1 *sur une plénitude de* H. Conséquemment

$$(8_1) \qquad (G)\, D\, L_Q(x) = 1 \quad \text{sur une plénitude } \delta \text{ de } Q = \Delta(G) - H.$$

En procédant maintenant d'une façon bien connue, on note que $L_H(X) + L_Q(X) = \Phi(X)$ pour tout X mesurable contenu dans $\Delta(G)$; selon le théorème 6.2 les dérivées $(G)\, D\, L_H(x)$, $(G)\, D\, L_Q(x)$ existent à la fois sur une même plénitude λ de $\Delta(G)$; ainsi

$$(G)\, D\, L_H(x) + (G)\, D\, L_H(x) = 1 \quad \text{sur } \lambda$$

et, d'après (8_1) :

$$(G)\, D\, L_H(x) = 0 \quad \text{sur } \eta\delta \text{ (une plénitude de Q).}$$

En tenant compte de (7_1) on voit que *le théorème* 6.6 *est vérifié.*

Nous laissons de côté la question si, au cas de H ($\subset \Delta$ G) *possiblement non mesurable,* en posant $L_H(X) = \Phi_e(HX)$ [pour X variable mesurable, $X \subset \Delta(G)$], on ait

$$(G)\, D\, L_H(x) = c_H(x) \quad \text{sur une plénitude de H.}$$

On sait (4.2) que Φ_e est une mesure extérieure « régulière », de sorte qu'il existe un ensemble R mesurable, tel que $H \subset R \subset \Delta(G)$ et que $\Phi_e(H) = \Phi(R)$; pourtant cette égalité n'implique nécessairement pas la relation $\Phi_e(HX) = \Phi(RX)$ pour tout X [$\subset \Delta(G)$] mesurable.

Voici un théorème sur dérivation.

THÉORÈME 6.7. — G *étant régulière avec moyenne régularité, si la fonction* $f(x)$ *de point* x *est sommable-*Φ *sur* $\Delta(G)$, *il s'ensuit que*

$$(6.7\,a) \qquad (G)\, D\Psi(x) = f(x) \quad \textit{sur une plénitude de } \Delta(G),$$

$\Psi(X)$ *désignant l'intégrale indéfinie* $\int_X f(x)\, d\,\Phi(x)$ [X, $\subset \Delta(G)$, variable, mesurable].

Il suffit de donner la démonstration, en suivant les lignes données dans [(S); p. 118], pour le cas $f \geqq 0$. Lorsque $f(x) = c_H(x)$, fonction caractéristique d'un ensemble mesurable $H[\subset \Delta(G)]$, on a $\Psi(X) = \Phi(HX) = L_H(X)$ (6.5) et la conclusion (6.7 *a*) s'ensuit d'après le théorème 6.6. Si f est « simple » [(S); p. 7] mesurable, e. g. si pour un N fini,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} q_j\, c_{Q_j}(x)$$

$$\left[\text{des constantes } q_j \geqq 0, \text{ des } Q_j \text{ mesurables, disjoints; } \sum Q_j = \Delta(G)\right],$$

la conclusion du théorème sera immédiate. Enfin, si $f \geqq 0$ est sommable-Φ, quelconque, il existe une suite $f_n(x)$ $(\geqq 0)$ de fonctions simples, finies, mesurables, telles que $f_n \uparrow f$ sur $\Delta(G)$. Posons

$$\Psi_n(X) = \int_X f_n(x)\, d\Phi(x) \qquad [X, \subset \Delta(G), \text{ variable, mesurable}].$$

On a $\Psi_n \uparrow \Psi$; Ψ et les Ψ_n sont C. A. et métriquement continues dans $\Delta(G)$. En vertu de 6.3,

$$\lim_n (G)\,D\Psi_n = \lim f_n = f = (G)\,D\Psi \quad \text{sur une plénitude de } \Delta(G),$$

ce qui *établit le théorème.*

COROLLAIRE 6.8. — *Soit* G *régulière possédant la moyenne régularité. Si* $\Psi(X)$ *est C.A. et métriquement continue dans* $\Delta(G)$, *la dérivée* $(G)\,D\Psi(x)$ *sera sommable sur* $\Delta(G)$ *et l'on aura*

$$(6.8\,a) \qquad \Psi(X) = \int_X (G)\,D\Psi(x)\, d\Phi(x) \qquad [\text{pour tout } X, \subset \Delta(G), \text{ mesurable}].$$

Nous tenons compte du théorème de Lebesgue sur décomposition de fonctions C. A. (complètement additives) d'ensemble mesurable [(S); p. 33], qui s'applique dans notre cas. Dans le présent cas Ψ est métriquement continue (e. g. absolument continue), donc la composante singulière est absente et l'on a

$$\Psi(X) = \int_X g(x)\, d\Phi(x) \qquad [\text{pour tout } X, \subset \Delta(G), \text{ mesurable}],$$

où $g(x)$ est sommable-Φ sur $\Delta(G)$. En vertu du théorème 6.7 :

$$(G)\,D\Psi(x) = g(x) \qquad \text{sur une plénitude de } \Delta(G),$$

d'où la conclusion (6.8 *a*).

7. **Décomposition de fonctions complètement additives.** — Une fonction Ψ C. A. complètement additive dans $\Delta(G)$ sera dite *singulière*, s'il existe un ensemble E_0 [$\subset \Delta(G)$], avec $\Phi(E_0) = 0$, tel que

$$(7.1) \qquad \Psi(X) = \Psi(E_0 X) \qquad [\text{pour tout } X \text{ mesurable, } X \subset \Delta(G)].$$

Au cas classique [(S); p. 119] la dérivée « générale » [au sens de (S); p. 106] d'une fonction C. A. singulière est zéro sur une plénitude de l'espace considéré. Dans les conditions de l'Ouvrage actuel (la famille G étant régulière et jouissant de la moyenne régularité) on ne peut pas s'attendre à la validité de ce théorème sur les fonctions C. A. singulières. Il faut quelques conditions supplémentaires. Ainsi introduisons :

HYPOTHÈSE 7.2. — Soit $G = \{\gamma\}$ une famille régulière. Étant donné une fonction Ψ, $\geqq 0$, C. A. dans $\Delta(G)$, un ensemble E, $\subset \Delta(G)$, mesurable-Φ et un $\varepsilon > 0$, Ψ et E d'ailleurs quelconques, on suppose qu'il existe un ensemble H mesurable, tel que

$$(1^0) \qquad E \subset H \subset \Delta(G)$$

et une famille $G'(H) \subset G(H)$ [$G(H)$ est la famille des γ de G joints à H], de sorte que

$$(2^0) \qquad H.\Delta(G(H) - G'(H)) = 0;$$

$$(3^0) \qquad \Psi(O - E) < \varepsilon \qquad [O = \Delta(G'(H))];$$

$$(4^0) \qquad \text{les } \gamma \text{ [de } G'(H)] \subset O.$$

On constate que

$$(7.2\,a) \qquad E \subset H \subset O = \Delta(G'(H)) \subset \Delta(G).$$

Les conditions de cette hypothèse ressemblent à la moyenne régularité. Voici un analogue au théorème 6.1 (remarque 6.1′), sans que Ψ soit nécessairement métriquement continue.

THÉORÈME 7.3. — *Soit* $G = \{\gamma\}$ *assujettie aux conditions de l'hypothèse* 7.2. *Supposons que* $\Psi \geqq 0$ *est C. A. Alors l'inégalité*

$$(7.3\,a) \qquad (G)\,\overline{D}\Psi(x) \geqq a \qquad [\text{ou } (G)\,\underline{D}\Psi(x) \leqq a],$$

valide sur un ensemble E, $\subset \Delta(G)$, *mesurable, implique*

$$(7.3\,b) \qquad \Psi(E) \geqq a\Phi(E) \qquad [\text{ou } \Psi(E) \leqq a\Phi(E)].$$

Soit $\varepsilon > 0$, On trouve un H mesurable, tel que

$$(1_0) \qquad E \subset H \subset \Delta(G),$$

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE - SAINT-MARTIN-D'HÈRES
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES

pour lequel il existe une famille G′ (H), $\subset$ G (H), telle que

$$(2_0) \qquad H.\Delta(G(H) - G'(H)) = 0;$$

$$(3_0) \qquad \Psi(E) > \Psi(O) - \varepsilon, \qquad O = \Delta(G'(H)).$$

On a $H \subset O \subset \Delta$ (G). Or par la vertu de (2_0) :

$$(G)\,\overline{D}\Psi(x) = (G'(H))\,\overline{D}\Psi(x) \quad \text{sur H},$$

pour les raisons survenant dans (6.6_0). Désignons par $\mathcal{F}$ la famille des γ de G′ (H) tels que

$$(4_0) \qquad \Psi(\gamma) > (a - \quad)\Phi(\gamma);$$

il suffit de supposer que $0 < \varepsilon < a$. G étant régulière, $\mathcal{F}$ l'est. Dans la première condition (7.3 *a*), si x est sur E,

$$(G'(H))\,\overline{D}\Psi(x) \geqq a > a - \varepsilon;$$

il existe une suite de γ^j, tels que

$$\gamma^j \in G'(H), \qquad \gamma^j \ni x, \qquad \Phi(\gamma^j) \to 0, \qquad \Psi(\gamma^j) > (a - \varepsilon)\,\Phi(\gamma^j);$$

ainsi $\gamma^j \in \mathcal{F}$ et $x \in \Delta$ $(\mathcal{F})$, e. g.

$$(5_0) \qquad E \subset \Delta(\mathcal{F}) \subset O.$$

En raison du théorème de couverture pour $\mathcal{F}$, étant donné un $\xi > 0$, des γ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, $\in \mathcal{F}$, disjoints existent de sorte que, en particulier,

$$(6_0) \qquad \Phi\left(\sum \gamma_n\right) > \Phi(\Delta(\mathcal{F})) - \xi.$$

Les γ_n étant dans $\mathcal{F}$, donc dans G′ (H), d'après (4^0) et (4_0) :

$$(7_0) \qquad \gamma_n \subset O, \qquad \Psi(\gamma_n) > (a - \varepsilon)\,\Phi(\gamma_n).$$

En raison de (3_0), (7_0), (6_0) :

$$\Psi(E) > \Psi(O) - \varepsilon \geqq \Psi\left(\sum \gamma_n\right) - \varepsilon = \sum \Psi(\gamma_n) - \varepsilon$$
$$> (a - \varepsilon) \sum \Phi(\gamma_n) - \varepsilon > (a - \varepsilon)\,[\Phi(\Delta(\mathcal{F})) - \xi] - \varepsilon.$$

Mais (5_0) Δ $(\mathcal{F})$ contient E, donc

$$\Psi(E) > (a - \varepsilon)\,[\Phi(E) - \xi] - \varepsilon.$$

Laissons $\varepsilon \to 0$, $\xi \to 0$; *la première conclusion* (7.3 *b*) *en découle*; le procédé est de la même sorte pour démontrer la seconde.

THÉORÈME 7.4. — *Admettons l'hypothèse* 7.2. *Si* Ψ *C. A. est singulière dans* Δ (G), *on a* (G) $D\Psi(x) = 0$ *sur une plénitude de* Δ (G).

Il suffit de considérer le cas de Ψ non négative, C. A., singulière. Soit E_0 l'ensemble mince-Φ survenant dans (7.1). Par conséquent $\Psi(X(\Delta(G) - E_0)) = 0$ pour tout X mesurable, $X \subset \Delta(G)$. Selon (5.8) le dérivé (G) $\overline{D}\Psi(x)$ est fini sur une plénitude de Δ(G); de plus (5.7) ce dérivé est mesurable. Si la conclusion au théorème est en défaut, l'ensemble

$$E = \{x \in \Delta(G)\,;\ (G)\ \overline{D}\Psi(x) > 0\}$$

sera épais-Φ. Posons

$$E_n = \left\{x \in \Delta(G) - E_0\,;\ (G)\ \overline{D}\Psi(x) > \frac{1}{n}\right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

$E - EE_0 = \sum E_n$ est épais, donc pour un $n_0 > 0$,

$$\Phi(E_{n_0}) > 0, \qquad E_{n_0} = \left\{x \in \Delta(G) - E_0\,;\ (G)\,\overline{D}\Psi(x) > \frac{1}{n_0}\right\}.$$

En vertu du théorème 7.3 $\left(\text{pour } E_{n_0} \text{ et avec } a = \frac{1}{n_0}\right)$:

$$\Psi(E_n) \geqq \frac{1}{n_0}\Phi(E)_{n_0} > 0.$$

Mais E_{n_0} est disjoint de E_0 et pour la fonction singulière Ψ on devrait avoir $\Psi(E_{n_0}) = 0$. *Le théorème* 7.4 *est vérifié.*

THÉORÈME 7.5. — *Soit* G *régulière, avec la propriété de moyenne régularité. Admettons l'hypothèsé* 7.2. *Toute fonction* Ψ *C. A. dans* Δ (G) *possède une décomposition unique*

$$\Psi(X) = \int_X (G)\ D\Psi(x)\, d\Phi(x) + S(X) \tag{7.5 a}$$

[tout ensemble X, $\subset \Delta$ (G), mesurable], *où* S *est une fonction C. A., singulière dans* Δ (G).

On sait [(S); chap. I] que $\Psi = A + S$, où S est singulière-Φ [dans Δ (G)] et A est absolument continue, e. g. métriquement continue, tandis qu'il existe une fonction $g(x)$ sommable-Φ sur Δ (G) de sorte que

$$\Psi(X) = \int_X g(x)\, d\Phi(x) \qquad [X, \subset \Delta(G), \text{ mesurable} - \Phi].$$

D'après les théorèmes 6.7 et 7.4 :

$$(G)\,D\Psi = (G)\,DA + (G)\,DS = g$$

sur une plénitude de Δ (G), *ce qui mène à la conclusion dans le théorème* 7.5.

Il serait d'intérêt d'étudier des façons de la réalisation des conditions de l'hypothèse 7.2. A présent nous laissons cette question de côté.

8. **Théorème fondamental d'épaisseur.** — Avec la notion présente de la régularité d'une famille $G = \{\gamma\}$ nous reprenons la définition 11.5 dans (T).

DÉFINITION 8.1. — Une famille $\mathcal{F} = \{E\}$ d'ensembles E est *simplement régulière,* si les E sont épais-Φ de mesure finie et si

$$(8.1\,a)\qquad \mathcal{F} = \sum_{1}^{\infty} \mathcal{F}_\nu, \qquad \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots,$$

tandis que :

(8.1 *b*) Si $\mathcal{F}'_\nu$ est une sous-famille quelconque de $\mathcal{F}_\nu$, l'ensemble S ($\mathcal{F}'_\nu$) (= réunion des E de $\mathcal{F}'_\nu$) *est mesurable-*Φ, *de mesure finie.*

Tous les énoncés dans [(T); section 11] resteront valides. En particulier les résultats (8.2)-(8.4) ci-après auront lieu [S (...) désignant toujours la réunion des ensembles de la famille...].

(8.2) Supposons qu'à tout ensemble E d'une famille $\mathcal{F}$ il correspond une famille *régulière* $G_E = \{\gamma\}$, avec $\gamma \subset E$ et $\Delta(G_E) = E$, tandis que la famille $G^* = \sum G_E$ (E décrivant la famille $\mathcal{F}$) est *régulière.* Alors S ($\mathcal{F}$) est mesurable-Φ et $0 < \Phi(S(\mathcal{F})) < +\infty$ [cet énoncé est une conséquence du théorème de couverture].

(8.3) Soit $\mathcal{F} = \sum_{1}^{\infty} \mathcal{F}_\nu$, $F_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots$, chaque famille $\mathcal{F}_\nu$ satisfaisant aux conditions de (8.2). Alors $\mathcal{F}$ est *simplement régulière.*

(8.4) Supposons que $\mathcal{F}$ est *simplement régulière,* formée d'une famille $\mathcal{F}_\nu$ (8.1 *a*) [donc $\Phi(S(\mathcal{F})) < +\infty$]. *Alors* $\Delta(\mathcal{F})$ *est mesurable.* Si Ψ est une fonction réelle finie d'ensemble E de $\mathcal{F}$, les dérivés $(\mathcal{F})\,\overline{D}\Psi(x)$, $(\mathcal{F})\,\underline{D}\Psi(x)$ *seront mesurables-*Φ sur $\Delta(\mathcal{F})$.

Dans la suite toute famille $\mathcal{F}$ simplement régulière sera formée d'une seule famille $\mathcal{F}_\nu$ (8.1 *a*).

Dans (T) à certaines reprises usage est fait du caractère de *complète régularité* [(T); définition 12.8], qui est pareil à la propriété de « parfaite régularité » (dans la forme faisant intervenir les noyaux et les enveloppes). Dans le reste de l'Ouvrage actuel nous remplaçons cette propriété essentiellement par *la moyenne régularité* de Denjoy comme il suit.

DÉFINITION 8.5. — On dira qu'une famille $\mathcal{F} = \{E\}$ est *R. M., régulière au sens moyenne, si $\mathcal{F}$ est simplement régulière* [définition 8.1, $\Phi(S(\mathcal{F})) < \infty$] et si à tout ensemble X, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, mesurable et à tout $\varepsilon > 0$ il correspond une famille $\mathcal{F}'(X)$, $\subset \mathcal{F}(X)$ [= la famille des E de $\mathcal{F}$ joints à X], telle que

$$(1^o) \qquad X.\Delta(\mathcal{F}(X) - \mathcal{F}'(X)) = 0;$$

$$(2^o) \qquad \Phi(O - X) < \varepsilon, \qquad \text{où } O = \Delta(\mathcal{F}'(X)).$$

Si $\mathcal{F}$ est simplement régulière (définition 8.1), $\Delta(\mathcal{F})$ *est mesurable*, $\Phi(\Delta(\mathcal{F})) < +\infty$ (8.4). Si, en plus, $\Phi(\Delta(\mathcal{F})) > 0$, on peut introduire les *épaisseurs*, relativement à $\mathcal{F}$, extrêmes et exactes,

$$(8.6) \qquad (\mathcal{F})\overline{\eta}(X, x), \quad (\mathcal{F})\underline{\eta}(X, x), \quad (\mathcal{F})\eta(X, x)$$

d'un ensemble mesurable X au point x; ce sont respectivement les dérivés extrêmes et la dérivée unique (si elle existe) :

$$(8.6\,a) \qquad (\mathcal{F})\overline{D}\Psi(x), \quad (\mathcal{F})\underline{D}\Psi(x), \quad (\mathcal{F})D\Psi(x)$$

de la fonction $\Psi(E) = \Phi(XE)$; les épaisseurs (8.6) sont mesurables d'après (8.4) : elles peuvent être définies seulement dans $\Delta(\mathcal{F})$.

On dira qu'il y a, pour une famille $\mathcal{F}$, un théorème d'épaisseur, si X étant un ensemble mesurable quelconque on a

$$(8.7) \qquad (\mathcal{F})\eta(X, x) = \begin{cases} 1 & \text{sur une plénitude de } X\Delta(\mathcal{F}), \\ 0 & \text{sur une plénitude de } \Delta(\mathcal{F}) - X\Delta(\mathcal{F}). \end{cases}$$

Notons que selon le théorème 6.6 il y a un théorème d'épaisseur si $\mathcal{F} = G$ est *régulière* (définition 4.18) et possède *la moyenne régularité* (définition 5.15); ce théorème tient au théorème de couverture. Pourtant à présent nous procédons avec le théorème de couverture possiblement manquant.

NOTATION 8.8. — Avec $0 < \alpha < 1$, $0 < \delta < 1$ et X désignant un ensemble mesurable, possiblement sans inclusion $X \subset F = \Delta(\mathcal{F})$, écrivons

$$(8.8\,a) \qquad \begin{cases} \sigma_{\alpha,\delta}(X) = \sum E, & \text{la réunion étant étendue aux E de } \mathcal{F} \\ \text{pour lesquels } \Phi(XE) > \alpha\Phi(E) & \text{et} \quad \Phi(E) < \delta; \end{cases}$$

$$(8.8\,b) \qquad \nu_\alpha = \nu_\alpha(X) = \prod_{\delta > 0} \sigma_{\alpha,\delta}(X), \qquad \nu(X) = \sum_{0 < \alpha < 1} \nu_\alpha(X).$$

On note que nécessairement ν_α (X), ν (X) *sont contenus dans* F Nous vérifions que *les énoncés* [(T); (12.4)-(12.4 d'')] *restent vrais dans l'hypothèse seule que* $\mathcal{F}$ *soit simplement régulière*. Les voici avec de légères modifications :

(8.I) $\sigma_{\alpha,\delta}\left(\sum A\right) \supset \sum \sigma_{\alpha,\delta}(A)$, si les ensembles A, $\sum A$ (réunions possiblement indénombrables) sont mesurables.

(8.II) $\sigma_{\alpha_1,\delta_1}(X_1) \supset \sigma_{\alpha,\delta}(X)$ si $0 < \alpha_1 \leqq \alpha < 1$, $\delta_1 \geqq \delta > 0$ et $X_1 \supset X$ sont mesurables.

(8.III) $\nu_\alpha(X)$ (avec X mesurable, est contenu dans l'ensemble où $(\mathcal{F})\,\overline{\eta}\,(X, x) \geqq \alpha$; $\nu_\alpha(X)$ contient l'ensemble $(\mathcal{F})\,\overline{\eta}\,(X, x) > \alpha$.

(8.IV) Lorsque X est mesurable et le théorème d'épaisseur a lieu, on a

$$\nu_\alpha(X) + N_\alpha = XF + N'_\alpha,$$

où

$$N_\alpha \subset XF, \qquad N'_\alpha \subset F - XF, \qquad \Phi(N_\alpha) = \Phi(N'_\alpha) = 0.$$

Condition (8.8'). — X étant mesurable, pour tout $0 < \alpha < 1$ on a

$$\nu_\alpha(X) + N_\alpha = XF + N'_\alpha, \qquad N_\alpha \subset XF,$$
$$N'_\alpha \subset F - XF, \qquad \Phi(N_\alpha) = \Phi(N'_\alpha) = 0.$$

(8.V) (8.8') entraîne $\nu(X) + N_1 = XF + N_2$ (8.8 *b*), où

$$N_1 \subset XF, \qquad N_2 \subset F - XF, \qquad \Phi(N_1) = \Phi(N_2) = 0.$$

(8.VI) (8.8') entraîne $(\mathcal{F})\,\eta\,(X, x) = 0$ sur une plénitude de F — XF.

Les énoncés (8.I)-(8.IV) sont assez évidents; (8.V) et (8.VI) sont démontrés de la même manière que les résultats analogues [(T); (12.4 *d*)-(12.4 d'')].

Le théorème fondamental d'épaisseur [(T); 12.9] prend la forme suivante :

Théorème 8.9. — *Soit* $\mathcal{F} = \{E\}$ *R.M.* (*définition* 8.5); $\Phi(S(\mathcal{F})) < \infty$. *Pour que le théorème d'épaisseur* (8.7), *relativement à* $\mathcal{F}$, *soit valide il faut et il suffit que pour tout* $0 < \alpha < 1$, *pour toute suite* $\delta_\nu\,(> 0) \downarrow 0$ *et pour toute suite de* X_ν *mesurables, avec* $X_\nu \downarrow X_0$, $\Phi(X_0) = 0$, *on ait*

$$\lim_{\nu} \Phi(\sigma_{\alpha,\delta_\nu}(X_\nu)) = 0. \tag{8.9 a}$$

Cette condition est nécessaire, avec le caractère de la R. M. pour $\mathcal{F}$ *remplacé par la condition seule que* $\mathcal{F}$ *soit simplement régulière* (*définition* 8.1).

La nécessité découle, lorsque $\mathcal{F}$ est seulement simplement régulière [avec $\Phi(S(\mathcal{F}))$ finie], en procédant avec peu de changements, comme dans la démonstration correspondante dans [(T); p. 45 et 46], en tenant compte de (8.I)-(8.VI). Il est à noter que les ensembles mesurables X et X_ν [dans (8.9 *a*)] ne sont pas nécessairement contenus dans $F = \Delta(\mathcal{F})$.

La suffisance. — Nous procédons avec $\mathcal{F}$ R. M. Soit X un ensemble mesurable avec $\Phi(XF) > 0$. Posons

$$(1_0) \qquad X(\alpha) = \{x \in X;\ (\mathcal{F})\eta(X, x) < 1 - \alpha\}, \qquad \text{où} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Selon (8.6 *a*) les épaisseurs extrêmes sont mesurables (sur F); donc l'ensemble $X(\alpha)$ ($\subset F$) l'est. Lorsque $\alpha \downarrow 0$, $X(\alpha) \uparrow X^1$; X^1 est l'ensemble des points de X où $(\mathcal{F})\underline{\eta}(X, x) < 1$; d'où $XF - X^1$ est l'ensemble des points de X où $(\mathcal{F})\eta(X, x) = 1$. Le théorème est vérifié, si l'on établit que

$$(8.10) \qquad \Phi(X(\alpha)) = 0 \qquad (\text{pour tout } 0 < \alpha < 1).$$

Posons $Z = \Delta(\mathcal{F}) - X(\alpha)$ et soit $\mathcal{F}'_1(Z)$ une réduction de $\mathcal{F}(Z)$ (la famille des E de $\mathcal{F}$ joints à Z) de sorte que

$$(2_0) \qquad Z.\Delta[\mathcal{F}(Z) - \mathcal{F}'_1(Z)] = 0;$$

$$(3_0) \qquad \Phi(W_1 - Z) < 1, \qquad \text{où} \quad W_1 = \Delta(\mathcal{F}'_1(Z)),$$

ce qui est possible en tant que $\mathcal{F}$ est R. M. (définition 8.5). La condition (2_0) entraîne $W_1 \supset Z$; réciproquement, l'inclusion $W_1 \supset Z$ implique (2_0); *ainsi* (2_0) *équivaut à la relation* $W_1 \supset Z$. Soit $\mathcal{F}'_2(Z)$ [$\subset \mathcal{F}'_1(Z)$] une réduction de $\mathcal{F}'_1(Z)$ telle que

$$(4_0) \qquad Z.\Delta[\mathcal{F}'_1(Z) - \mathcal{F}'_2(Z)] = 0;$$

$$(5_0) \qquad \Phi(W_2 - Z) < \frac{1}{2}, \qquad \text{où} \quad W_2 = \Delta(\mathcal{F}'_2(Z));$$

on a $W_1 \supset W_2 \supset Z$. En succession on construit une suite infinie de familles :

$$(6_0) \qquad \mathcal{F}(Z) \supset \mathcal{F}'_1(Z) \supset \mathcal{F}'_2(Z) \supset \ldots \supset \mathcal{F}'_n(Z) \supset \ldots,$$

où $\mathcal{F}'_n(Z)$ est une réduction de $\mathcal{F}'_{n-1}(Z)$ [$n = 1, 2, \ldots$; $\mathcal{F}'_0(Z) = \mathcal{F}(Z)$] de sorte que

$$(7_0) \qquad Z.\Delta[\mathcal{F}'_{n-1}(Z) - \mathcal{F}'_n(Z)] = 0;$$

$$(8_0) \qquad \Phi(W_n - Z) < \frac{1}{n}, \qquad \text{avec} \quad W_n = \Delta(\mathcal{F}_n(Z));$$

$$(9_0) \qquad W_n \supseteq Z; \qquad W_1 \supset W_2 \supset \ldots.$$

Les W_n sont mesurables (8.4). Il se voit que

$$(10_0) \qquad Z.\Delta[\mathcal{F}(Z) - \mathcal{F}'_n(Z)] = 0;$$

donc *la réduction* $\mathcal{F}'_n$ (Z) de $\mathcal{F}'_{n-1}$ (Z) ($n \geqq 1$) *est une réduction de* $\mathcal{F}$ (Z), *avec* $\varepsilon = \frac{1}{n}\cdot$ D'après (8_0) et (9_0) :

$$(11_0) \qquad W_n \downarrow Z + Z_0, \quad \text{où} \quad \Phi(Z_0) = 0.$$

Pour le complément Y_n de W_n on a (8_0) :

$$(12_0) \qquad Y_n = \Delta(\mathcal{F}) - \Delta(\mathcal{F}'_n(Z)) = \Delta(\mathcal{F} - \mathcal{F}'_n(Z))$$

et (11_0) :

$$(13_0) \qquad Y_n \uparrow X(\alpha) - Z_0 \qquad (Z_0 \text{ mince});$$

e. g. $X(\alpha) = \sum Y_n + Z_0$. Ainsi $\Phi(X(\alpha)) = 0$, si tous les Y_n sont minces. *Soit* Y *un ensemble de la forme*

$$(8.11) \qquad Y = \Delta(\mathcal{F} - \mathcal{F}'(Z)) \qquad [Z = \Delta(\mathcal{F}) - X(\alpha)],$$

où F′ (Z) ($\subset \mathcal{F}$) *est une réduction de* $\mathcal{F}$ (Z), telle que

$$(8.11\,a) \qquad Z.\Delta[\mathcal{F}(Z) - .(\mathcal{F}'(Z)] = 0,$$

e. g. telle que $W = \Delta(\mathcal{F}(Z)) \supset Z$; on a

$$(8.11\,b) \qquad Y = \Delta(\mathcal{F}) - W \subset X(\alpha).$$

Les Y_n dans (13_0) sont de la forme de Y. Donc *le théorème est vérifié, si l'on montre que tout ensemble* Y, *satisfaisant à* (8.11), (8.11 *a*), *est mince.*

Pour l'ensemble Y (8.11) on peut écrire

$$(14_0) \qquad Y = \Delta(\mathcal{F}^*), \qquad \mathcal{F}^* = \{E^*\} = \mathcal{F} - \mathcal{F}'(Z).$$

Introduisons la famille

$$(15_0) \qquad \mathcal{F}^\alpha = \{E \in \mathcal{F};\ \Phi(X(\alpha)E) < (1-\alpha)\Phi(E);\ EX(\alpha) \neq 0\};$$

$\mathcal{F}^\alpha = \mathcal{F}^\alpha(X(\alpha))$. Si $x \in X(\alpha)$ (1_0), on pourra trouver une suite infinie de E_n ($\in$ F), avec

$$\lim \Phi(E_n) = 0, \qquad \Phi(X(\alpha)E_n) \leqq \Phi(XE_n) < (1-\alpha)\Phi(E_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

donc x est indéfiniment couvert par $\mathcal{F}^\alpha$ et [(8.11 *b*), (14_0)] :

$$(16_0) \qquad Y = \Delta(\mathcal{F}^*) \subset X(\alpha) \subset \Delta(\mathcal{F}^\alpha).$$

Par conséquent

$$(17_0)\qquad Y = \Delta(\mathcal{F}^{*\alpha}),\qquad \mathcal{F}^{*\alpha} = \mathcal{F}^{*}\mathcal{F}^{\alpha} = \{E^*\}.$$

$\mathcal{F}^{*\alpha}$ est la famille de *tous* les E^* de $\mathcal{F}$ tels que

$$(18_0)\quad E^*Y \neq 0,\qquad \Phi(X(\alpha)E^*) < (1-\alpha)\Phi(E^*)\qquad [E^* \text{ étranger à } \mathcal{F}'(Z)].$$

Désignons par $\mathcal{F}_n$ la famille

$$(19_0)\quad \begin{cases} \mathcal{F}_n = \{E^n\}, \quad \text{où les } E^n \text{ (pour } n \text{ fixe, sont } \textit{tous} \text{ les } E^* \text{ de } \mathcal{F}^{*\alpha}\ (18_0),\\ \qquad\qquad \text{avec}\quad \Phi(E^n) < \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

A cause de (17_0), $Y = \Delta(\mathcal{F}_n)$. En posant

$$(20_0)\qquad \gamma_n = S(\mathcal{F}_n) = \sum(\mathcal{F}_n)E_n\quad (n \text{ fixe}),\qquad X_n = \gamma_n - Y,$$

il vient $\gamma_1 \supset \gamma_2 \supset \ldots$ et $\gamma_n \supset Y$ et

$$(21_0)\qquad X_n \downarrow X_0 = \prod_1^{\infty} X_n = \prod \gamma_n - Y.$$

Si $x \in X_0$, $x \in \gamma_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et x est étranger à Y. Pour tout entier $n > 0$, x est dans un E^n de $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}^{*\alpha}$; on a (19_0) $\Phi(E^n) \to 0$; donc $x \in \Delta(\mathcal{F}^{*\alpha}) - Y$ et (17_0) :

$$(22_0)\qquad X_0 \subset \Delta(\mathcal{F}^{*\alpha}) - Y = 0\qquad \text{(l'ensemble vide).}$$

Les X_n sont mesurables. Par la raison de (21_0), (22_0) la condition $(8.9a)$ du théorème donne

$$(8.12)\qquad \lim_n \Phi\left(\sigma_{\alpha,\frac{1}{n}}\right)((X_n)) = 0\quad (8.8a).$$

Tout E^n (pour n fixe) qui intervient dans $\gamma_n(20_0)$ est contenu dans γ_n; $E^n = E^nX_n + E^nY$; E^n satisfait à la seconde relation (18_0), d'où

$$\Phi(E^nY) \leqq \Phi(E^nX(\alpha)) < (1-\alpha)\Phi(E^n);$$

par là

$$(23_0)\qquad \Phi(E^nX_n) = \Phi(E^n) - \Phi(E^nY) > \alpha\Phi(E^n).$$

On a $Y \subset \gamma_n = \sum(\mathcal{F}_n)E^n$, où les E^n (pour n fixe) sont certains ensembles tels que $[(19_0), (23_0)]$:

$$E^n \in \mathcal{F},\qquad \Phi(E^n) < \frac{1}{n},\qquad \Phi(E^nX_n) > \alpha\Phi(E^n).$$

D'autre part (8.8 *a*) $\sigma_{\alpha,\frac{1}{n}}(X_n)$ est la réunion de *tous* les E de $\mathcal{F}$ pour lesquels

$$\Phi(E) < \frac{1}{n}, \qquad \Phi(EX_n) > \alpha\Phi(E).$$

Les E^n qui interviennent dans la réunion d'ensembles pour γ_n sont parmi les ensembles survenant dans (8.8 *a*) pour $\sigma_{\alpha,\frac{1}{n}}(X_n)$. Donc $Y \subset \sigma_{\alpha,\frac{1}{n}}(X_n)$ et, d'après (8.12), $\Phi(Y) = 0$. Enfin, en tenant compte de la constatation en italique à la suite de (8.11 *b*), on voit que le *théorème* 8.9 *est vérifié.*

9. **Théorème dans le genre de Lusin sur mesurabilité.** — En examinant d'un peu plus près les sortes d'ensembles qui surviennent dans la définition de la « *moyenne régularité* » de Denjoy, soit comme dans (5.15)-(5.15, II), soit comme dans la définition 8.5 [le caractère R. M., qui présuppose la simple régularité selon la définition 8.1], on est mené à envisager :

DÉFINITION 9.1. — *Soit* $\mathcal{F} = \{E\}$ *une famille, avec* $\Phi_e(S(\mathcal{F})) < \infty$, *satisfaisant à une des deux hypothèses suivantes* :

(9.A) $\mathcal{F}$ *est régulière au sens de la définition* 4.18;

(9.B) $\mathcal{F}$ *est simplement régulière* (*définition* 8.1).

Alors on envisage *la classe* $K(\mathcal{F})$ *d'ensembles* H, $\subset \Phi(\mathcal{F})$, *pour chacun desquels une famille* $\mathcal{F}^*$, $\subset \mathcal{F}$, *existe de sorte que* $H = \Delta(F^*)$.

Si $H \in K(\mathcal{F})$, e. g. $H = \Delta(\mathcal{F}^*)$ pour une famille $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$, il se voit que *les* E *de* $\mathcal{F}^*$ *disjoints de* H *ne couvrent indéfiniment aucun point*; dans un tel cas on dira que la famille $\mathcal{F}^*$ *est essentiellement contenue dans* $\mathcal{F}$ (H) (la famille des E de $\mathcal{F}$ joints à H) et l'on écrira

$$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}'(H) \subset^* \mathcal{F}(H). \tag{9.1'}$$

Dans le sens d'inclusion $\subset^*$ essentielle, $\mathcal{F}^*$ est une réduction de $\mathcal{F}$ (H).

(9.2) L'ensemble vide et $F = \Delta(\mathcal{F})$ sont dans $K(\mathcal{F})$. Tout H de $K(\mathcal{F})$ est mesurable. Les compléments, relativement à F, les réunions *finies* et les produits *finis* d'ensembles dans $K(\mathcal{F})$ sont dans $K(\mathcal{F})$.

La mesurabilité s'ensuit par le théorème de couverture, au cas de (9.A), et d'après (8.4) au cas de (9.B). Si H, $\in K(\mathcal{F})$, de sorte que $H = \Delta(\mathcal{F}'(H))$ pour une famille $\mathcal{F}'(H) \subset^* \mathcal{F}(H)$, posons $Q = F - H$ et notons que

$$F = \Delta(\mathcal{F}) = \Delta(\mathcal{F}'(H)) + \Delta[\mathcal{F} - \mathcal{F}'(H)];$$

ainsi $Q = \Delta(\mathcal{F}'(Q))$, où $\mathcal{F}'(Q) = \mathcal{F} - \mathcal{F}'(H)$ est une famille $\subset^* \mathcal{F}(Q)$, d'où Q est dans $K(\mathcal{F})$. Si $H_i = \Delta(\mathcal{F}'(H_i))$ $(i = 1, 2)$ sont des ensembles dans $K(\mathcal{F})$, on observe que

$$\Delta(\mathcal{F}'(H_1)) + \Delta(\mathcal{F}'(H_2)) = \Delta[\mathcal{F}'(H^1) + \mathcal{F}'(H_2)],$$

ce qui se vérifie aisément; donc $H_1 + H_2 = \Delta[\mathcal{F}'(H_1 + H_2)]$ où $\mathcal{F}'(H_1 + H_2) = \mathcal{F}'(H_1) + \mathcal{F}'(H_2)$ est une réduction (au sens de $\subset^*$) de $\mathcal{F}(H_1 + H_2)$, e. g. $H_1 + H_2 \in K(\mathcal{F})$. Cela s'étend à une réunion finie d'ensembles de $K(\mathcal{F})$. Le résultat analogue pour un produit fini d'ensembles de $K(\mathcal{F})$ s'obtient par les complémentaires. *L'énoncé* (9.2) *est prouvé.*

DÉFINITION 9.3. — Les produits et les sommes ci-après d'ensembles étant *au plus dénombrablement infinis*, les notations

$$(9.3a)\qquad K_\delta(\mathcal{F}),\quad K_\sigma(\mathcal{F}),\quad K_{\delta\sigma}(\mathcal{F}),\quad K_{\sigma\delta}(\mathcal{F}),\quad \ldots$$

désigneront respectivement les produits d'ensembles de $K(\mathcal{F})$, les sommes d'ensembles de $K(\mathcal{F})$, les sommes d'ensembles de $K_\delta(\mathcal{F})$, les produits d'ensembles de $K_\sigma(\mathcal{F})$, ...

En général les ensembles de $K_\delta(\mathcal{F})$ et de $K_\sigma(\mathcal{F})$ ne sont pas dans $K(\mathcal{F})$. Les ensembles (9.3 *a*) sont tous mesurables.

DÉFINITION 9.4. — Soit A un ensemble, mesurable ou non, $A \subset F = \Delta(\mathcal{F})$. Il s'agit de fonctions $f(x)$ réelles de point x sur A. On dira que f est *sur* A dans une des *classes* $C_0^+(\mathcal{F})$, $C_0^-(\mathcal{F})$, si *pour tout nombre réel* c les ensembles

$$(9.4a)\qquad H_c^+ = \{x \in A; f(x) \geq c\},\qquad H_c^- = \{x \in A; f(x) \leq c\}$$

sont de la forme

$$(9.4b)\qquad \begin{cases} H_c^+ = A.P_c^+, & P_c^+ \in K(\mathcal{F}) \quad [\text{pour } C_0^+(\mathcal{F})]; \\ H_c^- = A.P_c^-, & P_c^- \in K(\mathcal{F}) \quad [\text{pour } C_0^-(\mathcal{F})]; \end{cases}$$

La classe $C_0(\mathcal{F})$ *est l'intersection de* $C_0^+(\mathcal{F})$ *et* $C_0^-(\mathcal{F})$ (sur l'ensemble A considéré). Nous désignerons par $C_1^+(\mathcal{F})$, sur un ensemble $A \subset F$, la classe de fonctions $f(x)$ telles que pour tout nombre c (9.4 *a*) :

$$(9.4c)\qquad \begin{cases} & H_c^+ = A.P_c^+ \quad [\text{avec } P_c^+ \in K_\delta(\mathcal{F})]; \\ f \in C_1^-(\mathcal{F}) \ \textit{sur}\ A, & \textit{si}\ H_c^- = A.P_c^-, \quad \text{où } P_c^- \in K_\delta(\mathcal{F}). \end{cases}$$

Si, comme dans la définition 8.5, il s'agit d'une famille $\mathcal{F}$, d'un ensemble X, $\Delta \subset (\mathcal{F})$, mesurable et d'une réduction de la famille $\mathcal{F}$ (X) (d'ensembles de $\mathcal{F}$ joints à X) à une famille $\mathcal{F}'(X) \subset \mathcal{F}(X)$, on aura

$$(1^0) \qquad X.\Delta[\mathcal{F}(X) - \mathcal{F}'(X)] = 0.$$

Par un raisonnement de la sorte survenant à la suite de (5.15, II) il s'ensuit que

$$(2^0) \qquad O = \Delta(\mathcal{F}(X)) \supset X.$$

Les ensembles de $\mathcal{F}'$ (X) sont joints à X, donc ils sont joints à O ($\supset$ X); d'où ils forment une famille $\mathcal{F}'(O) \subset \mathcal{F}(O)$; par conséquent *l'ensemble* O dans (2^0), ainsi que dans (8.5, 2^0), *est dans la classe* K ($\mathcal{F}$). Nous avons remarqué que (1^0) entraîne (2^0). Réciproquement, étant donné un ensemble X, $\subset$ F, si pour une famille $\mathcal{F}'$ (X) contenue dans $\mathcal{F}'$ (X) l'inclusion (2^0) est valide, on aura

$$X.\Delta[\mathcal{F}(X) - \mathcal{F}'(X)] = X.[\Delta(\mathcal{F}(X)) - \Delta(\mathcal{F}'(X))]$$
$$= X.[\Delta(\mathcal{F}(X)) - O] = 0 \qquad (\text{car } O \supset X).$$

Ainsi on voit qu'une *relation comme* (1^0) *équivaut à l'inclusion* (2^0). On conclut comme il suit.

(9.5) *Dire qu'une famille* $\mathcal{F}$ *est R. M. d'accord avec la définition* 8.5 *équivaut à ceci.* $\mathcal{F}$ est simplement régulière [définition 8.1, $\Phi(S(\mathcal{F})) < \infty$]; à tout ensemble X, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, mesurable et à tout $\varepsilon > 0$ il correspond un *ensemble* O *de la classe* K ($\mathcal{F}$), telle que

$$(9.5a) \qquad O \supset X, \qquad \Phi(O - X) < \varepsilon.$$

On peut faire une constatation pareille à (9.5), (9.5 *a*) au cas où $\mathcal{F}$ satisfait à (9.A) et à l'hypothèse de la moyenne régularité selon la définition 5.15.

HYPOTHÈSE 9.6. — *Dès lors nous procédons dans une des deux conditions suivantes* [avec $\Phi(S(\mathcal{F})) < \infty$].

(9.6 A) $\mathcal{F}$ régulière (définition 4.18) possède la moyenne régularité (définition 5.15);

(9.6 B) $\mathcal{F}$ est R. M. (définition 8.5).

Les développements (2_0)-(11_0) à la suite de (8.10) s'appliquent pour un ensemble mesurable *quelconque* Z, $\subset \Delta(\mathcal{F})$; les W_n qui surviennent sont de la classe K ($\mathcal{F}$). En tenant compte de (8.11_0) et du fait que les compléments d'ensembles dans K ($\mathcal{F}$) appartiennent à K ($\mathcal{F}$), on conclut ainsi.

(9.7) Dans l'hypothèse 9.6, pour tout ensemble mesurable X, $\subset F = \Delta(\mathfrak{F})$, et tout $\varepsilon > 0$ deux ensembles Z, Y, existent tels que

$$(9.7a) \quad Z \in K(\mathfrak{F}), \quad Y \in K(\mathfrak{F}), \quad Z \supset X \supset Y, \quad \Phi(Z - Y) < \varepsilon;$$

de plus des Z_n, Y_n ($n = 1, 2, \ldots$) existent de sorte que

$$(9.7b) \quad \begin{cases} Z_n \in K(\mathfrak{F}), \quad Y_n \in K(\mathfrak{F}), \quad Z_n \supset X \supset Y_n, \\ Z_n \downarrow, \quad Y_n \uparrow, \quad X = \prod Z_n - X^0 = \sum Y_n + X_0, \end{cases}$$

où X^0 ($\subset F - X$), X_0 ($\subset X$) sont des ensembles minces.

L'énoncé (9.7 *b*) découle aisément de (9.7 *a*), en tant que les produits finis et les sommes finies d'ensembles de $K(\mathfrak{F})$ sont dans $K(\mathfrak{F})$. Tout ensemble mesurable $X(\subset F)$ est un ensemble de $K_\delta(\mathfrak{F})$ diminué d'un ensemble mince, ainsi qu'il est un ensemble de $K_\sigma(\mathfrak{F})$ augmenté d'un ensemble mince.

(9.8) *Si $f(x)$ est constante sur un* H *de* $K(\mathfrak{F})$, *$f(x)$ sera* $C_0(\mathfrak{F})$ *sur* H.

En effet, si $f(x) = a$ sur H, en posant

$$H_c^+ = \{x \in H; f(x) \geqq c\}, \qquad H_c^- = \{x \in H; f(x) \leqq c\},$$

on obtient

$$\begin{array}{ll} H_c^+ = H \quad (c \leqq a), & H_c^+ = 0 \quad (c > a), \\ H_c^- = H \quad (c \geqq a), & H_c^- = 0 \quad (c < a), \end{array}$$

e. g. ce sont des ensembles $K(\mathfrak{F})$ pour toutes les valeurs de c; (9.8) en résulte.

(9.9) *Si* A *et* B *disjoints sont dans* $K(\mathfrak{F})$ *et si $f(x)$ est* $C_0(\mathfrak{F})$ *sur* A *et est* $C_0(\mathfrak{F})$ *sur* B, *alors* $f \in C_0(\mathfrak{F})$ *sur* A + B.

Les ensembles

$$\bar{\alpha} = \{x \in A; f(x) \geqq c\}, \qquad \bar{\beta} = \{x \in B; f(x) \geqq c\}$$

sont dans $K(\mathfrak{F})$. Pour l'ensemble $\bar{\gamma} = \{x \in A + B; f(x) \geqq c\}$ on a $\bar{\gamma} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$, d'où $\bar{\gamma} \in K(\mathfrak{F})$. De même on montre que

$$\underline{\gamma} = [x \in A + B; f(x) \leqq c\} = \{x \in A; f(x) \leqq c\} + \{x \in B; f(x) \leqq c\};$$

les deux ensembles au troisième membre sont dans $K(\mathfrak{F})$, donc $\underline{\gamma}$ l'est. La conclusion dans (9.9) en découle.

Supposons qu'une suite de $f_n(x)$, définie sur un ensemble N, y converge vers une $f(x)$ finie; on dira que la convergence est *sup.-*

uniforme [*inf.-uniforme*] si des constantes $\varepsilon_n, > 0, \to 0$ existent de sorte que, sur N,

$$f_n(x) > f(x) - \varepsilon_n \qquad [f(x) + \varepsilon_n > f_n(x)]$$

pour $n = 1, 2, \ldots$. La *convergence uniforme* équivaut à ce que la convergence est simultanément sup.-uniforme et inf.-uniforme.

(9.10) *Si* $N \in K_\delta(\mathcal{F})$ *et* $f_n \in C_1^+(\mathcal{F})$ $[C_1^-(\mathcal{F})]$ *sur* N *et si les* f_n *convergent sur* N *sup.-uniformément* [*inf.-uniformément*] *vers une fonction* f, *on aura*

$$f \in C_1^+(\mathcal{F}) \quad sur\ N \qquad [C_1^-(\mathcal{F}) \quad sur\ N].$$

Si les $f_n \in C_1(\mathcal{F})$ *sur* N *et* $f_n \to f$ *uniformément sur* N, *on aura* $f \in C_1(\mathcal{F})$.

Considérons le cas $f_n \in C_1^+(\mathcal{F})$ et posons $f(x) = f_n(x) + r_n(x)$, où $r_n(x) < \varepsilon_n$ sur N (e. g. $f_n > f - \varepsilon_n$). En suivant le procédé utilisé pour établir le lemme 17.2 dans [(T); p. 88 et 89] et en écrivant

$$H_c^+ = \{ x \in N; f(x) \geqq c \}, \qquad H_{n,c}^+ = \{ x \in N; f_n(x) \geqq c - \varepsilon_n \},$$

il vient $H_c^+ = H_{1,c}^+ . H_{2,c}^+, \ldots$. D'après la définition 9.4 :

$$H_{n,c}^+ = NP_{n,c}^+, \qquad P_{n,c}^+ \in K_\delta(\mathcal{F}),$$

d'où $H_{n,c}^+ \in K_\delta(\mathcal{F})$. Par conséquent H_c^+ est dans $K_\delta(\mathcal{F})$; cela étant pour tout c réel, $f \in C_1^+(\mathcal{F})$ sur N. Si $f_n \in C_1^-(\mathcal{F})$ sur N et la convergence est inf.-uniforme, on envisage les ensembles

$$H_c^- = \{ x \in N; f(x) \leqq c \}, \qquad H_{n,c}^- = \{ x \in N; f_n(x) \leqq c + \varepsilon_n \}$$

on obtient $H_c^- = H_{1,c}^- . H_{2,c}^- \ldots$; les $H_{n,c}^-$ sont dans $K_\delta(\mathcal{F})$, ainsi que H_c^-, d'où $f \in C_1^-(\mathcal{F})$ sur N dans ce cas. Le reste de l'énoncé (9.10) s'ensuit immédiatement.

Nous sommes prêts maintenant d'établir le théorème ci-après, qui ressemble d'assez loin à un théorème bien connu de Lusin.

THÉORÈME 9.11. — *Admettons pour la famille* $\mathcal{F}$ *l'hypothèse* 9.6. *Pour qu'une fonction* $f(x)$, *finie sur un ensemble mesurable* H, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, *soit mesurable il faut et il suffit que pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un ensemble* N *de sorte que*

$$(9.11\,a) \qquad \left\{ \begin{array}{l} N \in K_\delta(\mathcal{F}) \qquad N \subset H, \qquad \Phi(H - N) < \varepsilon, \\ \qquad\qquad f(x) \in C_1(\mathcal{F}) \quad sur\ N \end{array} \right.$$

[voir *les définitions* 9.3, 9.4].

Nécessité. — *Supposons que* f (*finie*) *est mesurable sur* H. Considérons le cas de f simple, $f = \{ c_1, H_1, \ldots; c_q, H_q \}$, où les H_ν sont disjoints (mesurables), $H = \sum_{1}^{q} H_\nu$. D'après (9.7) des ensembles N_ν existent, tels que

$$(1_0) \qquad N_\nu \in K(\mathcal{F}), \qquad N_\nu \subset H_\nu, \qquad \Phi(H_\nu - N_\nu) < \frac{\varepsilon}{q}.$$

On aura

$$(2_0) \qquad N = N_1 + \ldots + N_q \subset H, \qquad N \in K(\mathcal{F}), \qquad \Phi(H - N) < \varepsilon.$$

Les N_ν [dans $K(\mathcal{F})$] sont disjoints, de plus f est constante sur chacun d'eux, e. g. (9.8) $f(x) \in C_0(\mathcal{F})$ sur N_ν ($\nu = 1, \ldots, q$); en raison de (9.9), $f(x) \in C_0(\mathcal{F})$ sur N [donc $f(x) \in C_1(\mathcal{F})$ aussi]. Au cas général $f(x) = \lim f_\nu(x)$ sur H, où $f_\nu(x)$ est finie, simple et mesurable sur H. D'après ce qui précède des N_ν existent tels que

$$(3_0) \qquad \begin{cases} N_\nu \in K(\mathcal{F}), \qquad N_\nu \subset H, \qquad \Phi(H - N_\nu) < \dfrac{\varepsilon}{2^{\nu+1}}, \\ \qquad f_\nu(x) \in C_0(\mathcal{F}) \quad \text{sur } N_\nu. \end{cases}$$

Selon le théorème de Egoroff [(S); p. 18] il existe un ensemble Q mesurable, $Q \subset H$, $\Phi(H - Q) < \frac{\varepsilon}{4}$, tel que $f_\nu(x) \to f(x)$ uniformément sur Q. Encore d'après (9.7) on peut trouver un N', tel que

$$(4_0) \qquad N' \in K(\mathcal{F}), \qquad N' \subset Q, \qquad \Phi(Q - N') < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ainsi $N' \subset H$, $\Phi(H - N') < \frac{\varepsilon}{2}$, On observe que

$$N = N' N_1 N_2 \ldots \in K_\delta(\mathcal{F}), \qquad N \subset N' \quad (\subset Q \subset H),$$
$$f_\nu(x) \to f(x) \text{ uniformément sur } N.$$

En tant que $H - N = (H - N') + \sum (H - N_n)$, il vient (3_0) $\Phi(H - N) < \varepsilon$. Notons que $f_\nu(x)$ est $C_0(\mathcal{F})$ sur N_ν, donc l'est sur N. L'énoncé (9.10) s'applique à N et à f, car $C_0(\mathcal{F}) \subset C_1(\mathcal{F})$. Par conséquent $f \in C_1(\mathcal{F})$ sur N. *La nécessité est établie.*

Suffisance. — Admettons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $N \in K_\delta(\mathcal{F})$, $N \subset H$, $\Phi(H - N) < \varepsilon$, tel que $f(x)$ est $C_1(\mathcal{F})$ sur N. Alors pour $\nu = 1, 2, \ldots$, on peut trouver un N_ν tel que

$$(1^0) \qquad N_\nu \in K_\delta(\mathcal{F}), \qquad N_\nu \subset H, \qquad \Phi(H - N_\nu) < \frac{1}{\nu}, \qquad f \in C_1(\mathcal{F}) \quad \text{sur } N_\nu.$$

D'après (9.4 *c*) tous les ensembles $\{x \in N_\nu;\ f(x) \geqq c\}$ seront dans $K_\delta(\mathcal{F})$. Il vient

$$(2^0) \qquad H = \sum_{\nu=1}^{\infty} N_\nu + H_0, \qquad H_0 = H - \sum N_\nu \quad \text{mince}$$

Envisageons les ensembles

$$E_c = \{x \in H;\ f(x) \geqq c\}, \qquad E_c^\nu = \{x \in N_\nu;\ f(x) \geqq c\},$$

$$E_c^0 = \{x \in H_0;\ f(x) \geqq c\}, \qquad E^c = E_c^0 + \sum_1^{\infty} E_c^\nu.$$

Les E_c^ν sont dans $K_\delta(\mathcal{F})$; sauf pour un sous-ensemble mince, E^c est dans $K_{\delta\sigma}(\mathcal{F})$ donc E^c est mesurable. D'autre part on vérifie que $E_c = E^c$. Puisque E_c est mesurable pour tout c, la fonction $f(x)$ est mesurable sur H, *ce qui établit la suffisance.*

REMARQUE 9.12. — Si, avec l'hypothèse 9.6 admise, tout ensemble de $K_\delta(\mathcal{F})$ est dans $K(\mathcal{F})$, d'après (9.2) tous les ensembles de $K_\sigma(\mathcal{F})$ seront dans $K(\mathcal{F})$; la réciproque est vraie. Dans ce cas $K(\mathcal{F})$ sera une famille « complètement additive » (au sens de [(S); p. 7]). D'après (9.7 *b*) il s'ensuivra que $f(x)$ est mesurable sur un ensemble mesurable $H[\subset \Delta(\mathcal{F})]$ équivaut à ceci : il existe un ensemble mince $H_0 \subset H$, tel que $H - H_0 \subset K(\mathcal{F})$ et f est $C_0(\mathcal{F})$ sur $H - H_0$. Par conséquent, dans ce cas spécial le théorème 9.11 est sans intérêt.

Avec la famille $G = \{\gamma\}$ parfaitement régulière au sens originellement donné par Denjoy (D_1), cet auteur a démontré [(D_1); p. 353] que pour *tout ensemble* H, $\subset \Delta = \Delta(G)$, *mesurable il existe une famille* g (H), $\subset$ G, *de sorte que, en posant*

$$(9.13) \qquad \omega(H) = \Delta(g(H)),$$

il vient que

$$(9.13\,a) \qquad \Phi(H - H\,\omega(H)) = \Phi(\omega(H) - \omega(H)\,H) = 0.$$

Ce résultat s'appuie sur certaines inclusions [(D_1); p. 349; 4°] qui font intervenir un ensemble-noyau et un ensemble-enveloppe.

La question s'élève si une constatation analogue à (9.13), (9.13 *a*) puisse être formulée, lorsque au lieu de la parfaite régularité (au sens ancien) on admet l'hypothèse 9.6, e. g. essentiellement la moyenne régularité. La réponse est affirmative au moins si l'on ajoute l'hypothèse suivante, qui est assez peu restrictive.

HYPOTHÈSE 9.14. — *Admettons l'hypothèse* 9.6, *par exemple* (9.6 B). *Si* Y *quelconque est de la classe* $K(\mathcal{F})$ (*définition* 9.1), *e. g. s'il existe une famille* $\mathcal{F}'(Y)[\subset \mathcal{F}(Y)]$ *telle que* $Y = \Delta(\mathcal{F}'(Y))$, *envisageons la famille* h^* *des* E *de* $\mathcal{F}'(Y)$ *joints à* $\Delta - Y\, [\Delta = \Delta(\mathcal{F})]$; *on suppose que l'ensemble* $\Delta(h^*)$ *est de mesure zéro.*

Voici un énoncé analogue à la proposition [(D_1); p. 349; 4°].

(9.15) Dans l'hypothèse 9.14, soient Y, Z des ensembles dans $K(\mathcal{F})$, tels que $Y \subset Z$; ainsi des familles $\mathcal{F}'(Y) \subset \mathcal{F}'(Z)$ existent de sorte que

$$Y = \Delta(\mathcal{F}'(Y)), \qquad Z = \Delta(\mathcal{F}'(Z)).$$

Désignons par g la famille des E de $\mathcal{F}'(Y)$, disjoints de $\Delta - Z$, et par h la famille des E de $\mathcal{F}'(Y)$ joints à $\Delta - Z$. Alors

$$(9.15\,a) \qquad Y - \Delta(h) = \Delta(g) \subset Y \quad \text{et} \quad \Phi(\Delta(h)) = 0.$$

En effet, selon la définition de h et de g,

$$Y - \Delta(h) = \Delta(\mathcal{F}'(Y) - h) = \Delta(g);$$

en outre, $g \subset \mathcal{F}'(Y)$, d'où $\Delta(g) \subset \Delta(\mathcal{F}'(Y)) = Y$. Or $\Delta - Z \subset \Delta - Y$, donc tout ensemble E joint à $\Delta - Z$ est joint à $\Delta - Y$; par là $h \subset h^*$, h^* désignant la famille dont il s'agit à l'hypothèse 9.14; $\Delta(h^*)$ est mince, d'où $\Delta(h)$ mesurable l'est; (9.15), (9.15 a) *est vérifié.*

THÉORÈME 9.16. — *Admettons l'hypothèse* 9.14. *Si* H, $\subset \Delta = \Delta(\mathcal{F})$, *est mesurable, il existe une famille* g (H), $\subset \mathcal{F}$, *telle que* H *est identique avec* $\Delta(g(H))$, *sauf possiblement pour des ensembles minces.*

En tenant compte de (9.7)-(9.7 b) on peut trouver des ensembles Y_n, Z_n et des familles $\mathcal{F}'(Y_n)$, $\mathcal{F}'(Z_n)$ tels que

$$Y_n \in K(\mathcal{F}), \quad Z_n \in K(\mathcal{F}); \qquad Y_n = \Delta(\mathcal{F}'(Y_n)), \qquad Z_n = \Delta(\mathcal{F}'(Z_n));$$
$$Y_n \subset H \subset Z_n; \qquad Y_n \uparrow H - H^0, \quad Z_n \downarrow H + H_0;$$
$$H^0 \subset H, \quad H_0 \subset \Delta - H; \qquad \Phi(H^0) = \Phi(H_0) = 0; \qquad \mathcal{F}'(Y_n) \subset \mathcal{F}'(Z_n).$$

Introduisons les familles d'ensembles E :

$$g_n = \{ E \in \mathcal{F}'(Y_n);\ E.(\Delta - Z_n) = 0 \},$$
$$h_n = \mathcal{F}'(Y_n) - g_n = \{ E \in \mathcal{F}'(Y_n);\ E.(\Delta - Z_n) \neq 0 \}.$$

D'après (9.15), (9.15 a) :

$$(1^\circ) \qquad Y_n - \Delta(h_n) = \Delta(g_n) \subset Y_n, \qquad \Phi(\Delta(h_n)) = 0.$$

Posons [comme dans un endroit analogue dans (D_1)] :

$$(2^0) \qquad g(H) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n = g_1 + \ldots + g_p + \rho_p, \qquad \rho_p = \sum_{n>p} g_n.$$

Alors pour la réunion *finie* au troisième membre :

$$(3^0) \qquad \Delta(g(H)) = \Delta(g_1) + \ldots + \Delta(g_p) + \Delta(\rho_p).$$

Introduisons la famille

$$Q(\Delta - Z_n) = \{ E \in \mathcal{F};\ E.(\Delta - Z_n) = 0 \}$$

(les E de $\mathcal{F}$ disjoints de $\Delta - Z_n$). Pour $n > p$, $\Delta - Z_n \supset \Delta - Z_p$; les E disjoints de $\Delta - Z_n$ seront disjoints de $\Delta - Z_p$, d'où $Q(\Delta - Z_n) \subset Q(\Delta - Z_p)$ $(n > p)$. Or, pour $n > p$:

$$g_n = \mathcal{F}'(Y_n)\, Q(\Delta - Z_n) \subset Q(\Delta - Z_n) \subset Q(\Delta - Z_p)$$

et (2^0) $\rho_p \subset Q(\Delta - Z_p)$. Tout E de la famille ρ_p étant disjoint de $\Delta - Z_p$ et $\Delta(\rho_p)$ étant contenu dans $\Delta = \Delta(\mathcal{F})$, il en résulte que $\Delta(\rho_p) \subset Z_p$. Ainsi [($3^0$), ($1^0$)] :

$$\Delta(g(H)) \subset Y_1 + \ldots + Y_p + Z_p = Z_p.$$

De plus (1^0) :

$$\Delta(g(H)) \supset \Delta(g_1) + \ldots + \Delta(g_p) = \sum_{n=1}^{p} [Y_n - \Delta(h_n)] \supset Y_p - \sum_{1}^{p} \Delta(h_n).$$

Conséquemment en laissant $p \to \infty$ et en tenant compte des relations imites pour les Y_n et les Z_n, il vient

$$H - H^0 - \sum_{1}^{\infty} \Delta(h_n) \subset \Delta(g(H)) \subset H + H_0$$

ou les ensembles H^0, H_0, $\Delta(h_n)$ (1^0) sont minces. *Le théorème est établi.*

Remarque 9.17. — Le théorème 9.16 revient à ce que, dans l'hypothèse 9.14, *tout ensemble mesurable* H, *contenu dans* $\Delta(\mathcal{F})$, *est identique avec un ensemble de la classe* K ($\mathcal{F}$), *sauf pour des ensembles minces*; *e. g. il existe un* $Q \in K(\mathcal{F})$ *tel que*

$$\Phi(H - HQ) = \Phi(Q - QH) = 0.$$

10. Théorème de la sorte de Vitali-Carathéodory. — Dans la section présente on admet l'hypothèse 9.6.

(10.1) *Si* $Q \in K(\mathcal{F})$, *la fonction caractéristique* $c(x) = c_Q(x)$ *est* $C_0(\mathcal{F})$ (définition 9.4) *sur* $F = \Delta(\mathcal{F})$.

En effet, $F - Q \in K(\mathcal{F})$ et $c(x)$ est constante sur Q et sur $F - Q$, donc (9.8) $c(x)$ est $C_0(\mathcal{F})$ sur Q et sur $F - Q$, ce qui d'après (9.9) mène à la conclusion dans (10.1).

(10.2) Si $q(x) = \{\alpha_1, H_1, \ldots; \alpha_\nu, H_\nu\}$ est simple sur F, avec les H_j (disjoints) dans $K(\mathcal{F})$ et $F = H_1 + \ldots + H_\nu$, alors $q(x)$ est de la classe $C_0(\mathcal{F})$ sur F.

D'après (9.8) $q(x)$, constante sur H_1, est $C_0(\mathcal{F})$ sur H. Si $\nu > 1$, supposons qu'on a établi que

$$q(x) \in C_0(\mathcal{F}) \quad \text{sur } H_1 + \ldots + H_k \qquad (\text{un } 1 \leq k < \nu).$$

On a $H_1 + \ldots + H_k \in K(\mathcal{F})$; $q(x) \in C_0(\mathcal{F})$ sur H_{k+1} [en effet $q(x)$ est constante sur H_{k+1}]. En raison de (9.9) $q(x)$ sera $C_0(\mathcal{F})$ sur $H_1 + \ldots + H_{k+1}$. Ainsi (10.2) est démontré.

Lemme 10.3. — *Si $q_n(x) \in C_1^-(\mathcal{F})$ sur un $A \subset F$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et $q_n(x) \uparrow q(x)$ sur A, on aura $q(x) \in C_1^-(\mathcal{F})$ sur A.*

Notons la relation

$$H_c^- = \{x \in A;\ q(x) \leq c\} = \prod_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad A_n = \{x \in A;\ q_n(x) \leq c\}.$$

Ici $A_n = A . P_{c,n}^-$, $P_{c,n}^- \in K_\delta(\mathcal{F})$, d'où

$$H_c^- = A . P_c^-, \qquad P_c^- = \prod P_{c,n}^- \in K_\delta(\mathcal{F}),$$

e. g., d'après la définition 9.4, $q \in C_1^-(\mathcal{F})$ sur A. Si $q_n(x) \in C_0(\mathcal{F})$, la conclusion sera la même.

(10.4) Soient $X_n \in K(\mathcal{F})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\sum_1^{\infty} X_n = X$, β_n des constantes positives. Alors la fonction

$$(10.4a) \qquad q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n c_n(x), \qquad \text{où} \quad c_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } X_n, \\ 0 & \text{sur } F - X_n, \end{cases}$$

sera $C_1^-(\mathcal{F})$ sur F.

Posons $q_n(x) = \beta_1 c_1(x) + \ldots + \beta_n c_n(x)$; d'après (10.1) $q_1(x) \in C_0(\mathcal{F})$ sur F. Les ensembles

$$H_1 = X_1 - X_1X_2, \qquad H_2 = X_2 - X_1X_2, \qquad H_3 = X_1X_2, \qquad H_4 = F - (X_1 + X_2)$$

sont disjoints, appartiennent à $K(\mathcal{F})$ et leur réunion est F. Pour $q_2(x)$ on a

$$q_2(x) = \{\beta_1, H_1;\ \beta_2, H_2;\ \beta_1 + \beta_2, H_3;\ 0, H_4\}.$$

En raison de (10.2) $q_0(x) \in C_0(\mathcal{F})$ sur F. En succession il vient que toutes les $q_n(x)$ sont simples, de la forme

$$q_n(x) = \{ \alpha_1, H_{n,1}; \alpha_2, H_{n,2}; \ldots \alpha_{m_n}, H_{n,m_n} \}, \qquad \alpha_j = \alpha_{n,j},$$

où les $H_{n,j}$ ($j \leqq m_n$), pour n fixe, sont disjoints, $H_{n,j} \in K(\mathcal{F})$ et $\sum_j H_{n,j} = F$. Ainsi $q_n(x) \in C_0(\mathcal{F})$ sur F pour tout n. Or $q_n(x) \uparrow q(x)$ et $C_0(\mathcal{F}) \subset C_1^-(\mathcal{F})$; d'où, en vertu du lemme (10.3), $q(x)$ est $C_1^-(\mathcal{F})$ sur F. *L'énoncé* (10.4), (10.4 *a*) *est vérifié.*

(10.5) *Si sur un ensemble* A, $\subset$ F, $a(x)$ *est* $C_1^-(\mathcal{F})$ *et* $b(x)$ *est* $C_1^-(\mathcal{F})$, *on aura* $a(x) + b(x) \in C_1^-(\mathcal{F})$ *sur* A.

Pour démontrer posons (c étant un nombre réel quelconque) :

$$(1^0) \qquad H_c^- = \{ x \in A;\ a(x) + b(x) \leqq c \}, \qquad d(x) = c - b(x);$$

$d(x)$ sera dans $C_1^+(\mathcal{F})$ sur A. On a

$$(2_0) \qquad \begin{cases} \Gamma = \{ x \in A;\ a(x) > d(x) \} = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \cdot D_{m,n}; \\ A_{m,n} = \left\{ x \in A;\ a(x) > \dfrac{m}{n} \right\}, \qquad D_{m,n} = \left\{ x \in A;\ d(x) < \dfrac{m}{n} \right\}; \end{cases}$$

$A - A_{m,n}$ est l'ensemble des points de A pour lesquels $a(x) \leqq \frac{m}{n}$; donc $A - A_{m,n} = A . A^{m,n}$, $A^{m,n} \in K_\delta(\mathcal{F})$; $A - D_{m,n}$ est l'ensemble $\left\{ x \in A;\ d(x) \geqq \frac{m}{n} \right\}$, d'où $A - D_{m,n} = A . D^{m,n}$, $D^{m,n} \in K_\delta(\mathcal{F})$. Le complément relativement à F d'un ensemble $K_\delta(\mathcal{F})$ est un $K_\sigma(\mathcal{F})$; ainsi

$$A_{m,n} = A . (F - A^{m,n}); \qquad F - A^{m,n} \in K_\sigma(\mathcal{F});$$

de plus

$$D_{m,n} = A . (F - D^{m,n}); \qquad F - D^{m,n} \in K_\sigma(\mathcal{F}).$$

Le produit de deux ensembles $K(\mathcal{F})$ est un $K(\mathcal{F})$, de là, le produit d'un $K_\sigma(\mathcal{F})$ par un $K_\sigma(\mathcal{F})$ est un $K_\sigma(\mathcal{F})$; par conséquent $A_{m,n} . D_{m,n}$ est l'intersection de A avec un $K_\sigma(\mathcal{F})$; d'après (2_0) on aura $\Gamma = A . \Gamma^*$, où Γ^* est un $K_\sigma(\mathcal{F})$. Enfin (1_0) :

$$H_c^- = A - \Gamma = A - A\Gamma^* = A . (F - \Gamma^*), \qquad F - \Gamma^* \in K_\delta(\mathcal{F}),$$

cela étant pour tout c réel, il vient que $a(x) + b(x)$ est dans $C_1^-(\mathcal{F})$ sur A, *ce qui établit* (10.5).

(10.6) *Soit* $f(x)$, $\geqq 0$, *finie et mesurable sur* F $[= \Delta(\mathcal{F})]$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe une fonction* $h(x)$ *telle que, sur* F :

$$(10.6\,a) \qquad h(x) \in C_1^-(\mathcal{F}), \qquad h(x) \geqq f(x), \qquad \int_F (h-f)\,d\Phi < \varepsilon.$$

En procédant un peu comme dans [(S); p. 73 et 74], posons .

$$(1^0) \qquad H_k = \{x \in F;\ (k-1)\eta \leqq f(x) < k\eta\} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

où $0 < \eta < \varepsilon[1 + \Phi(F)]^{-1}$. Les H_k mesurables sont disjoints et $F = H_1 + H_2 + \ldots$. Selon (9.7) des X_k existent tels que

$$(2^0) \qquad X_k \in K(\mathcal{F}), \qquad X_k \supset H_k, \qquad \Phi(X_k - H_k) \leqq \frac{1}{k2^k}.$$

Désignons par $c_k(x)$ la fonction caractéristique de X_k et envisageons la fonction

$$(3^0) \qquad h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\eta c_k(x) \qquad \text{(définie sur F).}$$

Par la raison de (10.4), (10.4 *a*) $h(x) \in C_1^-(\mathcal{F})$ sur F, de plus $h(x) > f(x)$. On obtient (pareillement à [(S); p. 74] :

$$\int_F h(x)\,d\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\eta \int_F c_k(x)\,d\Phi(x) = \sum k\eta\Phi(X_k)$$

$$= \sum (k-1)\eta\Phi(H_k) + \sum \eta\Phi(H_k) + \sum k\eta\Phi(X_k - H_k);$$

par conséquent [(1⁰), (2⁰)] :

$$\int_F h(x)\,d\Phi(x) \leqq \int_F f(x)\,d\Phi(x) + \eta\Phi(F) + \eta < \int_F f(x)\,d\Phi(x) + \varepsilon.$$

L'énoncé (10.6) *est vérifié.*

Remarque 10.7. — *Si dans* (10.6) $f(x)$ *est bornée sur* F (plutôt que finie) *la conclusion* (10.6 *a*) *aura lieu avec une* $h(x) \in C_0(F)$ *sur* F. En effet dans ce cas $h(x)$, donnée par (3⁰), est une somme finie; $h(x)$ sera de la forme de $q_n(x)$, qui intervient dans la démonstration de (10.4), (10.4 *a*); par conséquent $h(x) \in C_0(\mathcal{F})$ sur F.

Théorème 10.8. — *Admettons l'hypothèse* 9.6. *Soit* $f(x)$, $\geqq 0$, *mesurable sur* F $[= \Delta(\mathcal{F})]$, *possiblement infinie. Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe une fonction* $h(x)$ *de sorte que, sur* F :

$$(10.8\,a) \qquad h(x) \in C_1^-(\mathcal{F}), \qquad h(x) \geqq f(x), \qquad \int_F (h(x) - f(x))\,d\Phi(x) < \varepsilon,$$

[ici on pose $h(x) - f(x) = 0$ pour les x pour lesquels $h(x) = \infty$ et $f(x) = \infty$].

En suivant en partie les développements utilisés dans [(S); p. 74] pour un but analogue, nous procédons comme il suit. Pour tout entier $n > 0$ posons

$$(1_1) \qquad s_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{sur } [x \in F; f(x) \leqq n], \\ n & \text{sur } [x \in F; f(x) > n]; \end{cases}$$

on a

$$(2_1) \qquad s_n(x) \uparrow f(x), \qquad f(x) = \sum_1^{\infty} f_n(x),$$

$$f_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x) \geqq 0, \qquad s_0(x) = 0.$$

Toute $s_n(x)$ est finie, en effet bornée, sur F et satisfait aux conditions de la remarque 10.7. Ainsi il existe une $h_n(x)$, telle que, sur F,

$$(3_1) \qquad h_n(x) \in C_0(\mathcal{F}), \qquad h_n(x) \geqq f_n(x) \geqq 0,$$

$$\int_E (h_n(x) - f_n(x))\, d\Phi(x) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Pour la fonction $h(x) = \sum h_n(x)$ on aura $h(x) \geqq f(x)$, qui est la seconde relation (10.8 *a*). En tant que $h_n(x) - f_n(x) \geqq 0$, il vient (3_1) :

$$\int_F (h(x) - f(x))\, d\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_F (h_n(x) - f_n(x))\, d\Phi(x) < \varepsilon;$$

e. g. la troisième relation (10.8 *a*) est vérifiée. La classe $C_0(\mathcal{F})$ est contenue dans $C_1^-(\mathcal{F})$, donc d'après (3_1) et (10.5) on déduit que $h_1(x) + h_2(x) \in C_1^-(\mathcal{F})$ sur F. Supposons que pour un $k \geqq 2$ on a $h_1(x) + \ldots + h_k(x) \in C_1^-(\mathcal{F})$; alors d'après (3_1) (pour $n = k + 1$) et (10.5) :

$$(h_1(x) + \ldots + h_k(x)) + h_{k+1}(x) \in C_1^-(\mathcal{F}) \quad \text{sur F}.$$

toutes les sommes $h_1(x) + \ldots + h_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) représentent des fonctions dans $C_1^-(\mathcal{F})$ sur F. Puisque $h_1(x) + \ldots + h_n(x) \uparrow h(x)$, d'après le lemme 10.3 il en résulte que $h(x) \in C_1^-(\mathcal{F})$ sur F, *ce qui achève la preuve du théorème* 10.8.

(10.9) *Soient* $f \in C_1^-(\mathcal{F})$ *sur* $A \in K_\delta(\mathcal{F})$ *et* $f \in C_1^-(\mathcal{F})$ *sur* $B \in K_\delta(\mathcal{F})$, A *et* B *étant disjoints. Alors* $f \in C_1^-(\mathcal{F})$ *sur* $A + B$.

Notons d'abord que $H = \prod_{1}^{\infty} F_\nu$, $Q = \prod_{1}^{\infty} F^m$ entraînent

$$(10.9\,a) \qquad H + Q = \prod_{\nu, m=1}^{\infty} (F_\nu + F^m).$$

Soit C la notation pour le complément d'un ensemble. On obtient

$$C\,(H+Q) = (CH)\,(CQ) = \Big(\sum_{\nu} CF_\nu\Big)\Big(\sum_{m} CF^m\Big) = \sum_{\nu, m} (CF_\nu)\,(CF^m)$$

$$= C\prod_{\nu, m} C\,[(CF_\nu)\,(CF^m)] = C\prod_{\nu, m} (CF_\nu + F^m),$$

ce qui vérifie (10.9 *a*); (10.9 *a*) se voit aussi directement. Posons
$\underline{\alpha} = \{ x \in A \,;\, f(x) \leqq c \}$, $\underline{\beta} = \{ x \in B \,;\, f(x) \leqq c \}$, $\underline{\gamma} = \{ x \in A+B \,;\, f(x) \leqq c \}$.

Or $\underline{\alpha} = A\,\alpha$, $\underline{\beta} = B\,\beta$, où α et β sont $K_\delta(\mathcal{F})$; par conséquent $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ sont dans $K_\delta(\mathcal{F})$. Ainsi $\underline{\alpha} = \prod F_\nu$, $\underline{\beta} = \prod F^m$, les F_ν, F^m étant dans $K(\mathcal{F})$. D'après (10.9 *a*) $\underline{\alpha} + \underline{\beta} = \underline{\gamma}$ est l'intersection des $(F_\nu + F^m)$ $(\nu, m = 1, 2, \ldots)$; $F_\nu + F^m \in K(\mathcal{F})$; d'où $\underline{\alpha} + \underline{\beta} \in K_\delta(\mathcal{F})$; cela étant pour tout c réel, *la conclusion dans* (10.9) *en découle* [$A + B$ sera un $K_\delta(\mathcal{F})$].

(10.10) *Soient* $a(x)$ *et* $b(x)$ *dans* $C_1^-(\mathcal{F})$ *sur* F [$= \Delta(\mathcal{F})$]; $d(x) = \min(a(x), b(x))$ *sur* F. *On aura* $d(x) \in C_1^-(\mathcal{F})$ *sur* F, *sauf sur un ensemble mince.*

Posons

$$A = \{ x \in F \,;\, b(x) \geqq a(x) \}, \qquad B = \{ x \in F \,;\, a(x) > b(x) \} = F - A.$$

Alors

$$(1') \qquad d(x) = \begin{cases} a(x) & \text{sur } A, \\ b(x) & \text{sur } B. \end{cases}$$

D'après (9.7)-(9.7 *b*), des ensembles A_n, B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ existent, de sorte que

$$(2') \qquad \begin{cases} A_n \text{ et } B_n \in K(\mathcal{F})\,; \quad A_n \subset A, \quad B_n \subset B\,; \\ A_n \uparrow, \quad B_n \uparrow\,; \quad A = \sum A_n + A_0\,; \quad B = \sum B_n + B_0\,; \\ A_0 = A - \sum A_n \quad \text{et} \quad B_0 = B - \sum B_n \quad \text{minces.} \end{cases}$$

En raison de (10.9) et (1′) :

$$(3') \qquad d(x) \in C_1^-(\mathcal{F}) \quad \text{sur } A_n + B_n \qquad [\in K(\mathcal{F})].$$

Pour $n = 1, 2, \ldots$ définissons une fonction

$$(4') \qquad d_n(x) = \begin{cases} d(x) & \text{sur } A_n + B_n, \\ k_n & \text{sur } C_n = F - A_n - B_n, \end{cases}$$

où $k_n = \inf(C_n)\, d(x)$. La constante k_n sur l'ensemble C_n de $K(\mathcal{F})$ est (9.8) une fonction $C_0(\mathcal{F})$ sur C_n. Ainsi par la vertu de (3′), (4′), (10.9) $d_n(x)$ *appartient à* $C_1^-(\mathcal{F})$ *sur* $(A_n + B_n) + C_n = F$. De plus

$$(5') \quad d_n(x) \leqq d(x) \quad \text{sur } F; \qquad \lim_n d_n(x) = d(x) \quad \text{sur } F - A_0 - B_0;$$

puisque $k_n \uparrow$ et selon (4′), (2′) on obtient

$$(6') \qquad d_n(x) \uparrow D(x) = \begin{cases} d(x) & \text{sur } F - A_0 - B_0, \\ \lim k_n & \text{sur } A_0 + B_0; \end{cases}$$

$D(x) \leqq d(x)$ sur F. En raison du lemme 10.3 $D(x) \in C_1^-(\mathcal{F})$ sur F. *La conclusion dans l'énoncé* (10.10) *en découle au sens qu'il existe une fonction* $D(x)$, $\leqq d(x)$, *de la classe* $C_1^-(\mathcal{F})$ *sur* F, *telle que* $D(x) = d(x)$. *sur* $F - C_0$, C_0 *étant mince et* $D(x)$ *valant sur* C_0 *une constante* (qui peut être $+\infty$).

Nous sommes prêts maintenant d'aborder la démonstration du théorème suivant qui est dans le genre d'un théorème de Vitali-Carathéodory [(S); p. 75].

THÉORÈME 10.11. — *Admettons l'hypothèse* 9.6. *Soit* $f(x)$ *mesurable sur* $F\,[= \Delta(\mathcal{F})]$. *On peut trouver alors deux suites de fonctions* $\{ i_n(x) \}$, $\{ s_n(x) \}$ *et un ensemble mince* F_0 *de sorte que*

$$(10.11\,a) \qquad \begin{cases} i_n(x) \in C_1^-(\mathcal{F}) \quad \text{sur } F - F_0; \qquad s_n(x) \in C_1^+(\mathcal{F}) \quad \text{sur } F - F_0; \\ i_n(x) \downarrow, \quad s_n(x) \uparrow; \qquad s_n(x) \leqq f(x) \leqq i_n(x); \end{cases}$$

$$(10.11\,b) \qquad \lim s_n(x) = \lim i_n(x) = f(x) \quad \text{sur } F,$$

sauf sur un ensemble mince; si $f(x)$ *est intégrable sur un* E, $\subset F$,

$$(10.11\,c) \qquad \int_E f(x)\, d\Phi(x) = \lim_n \int_E s_n(x)\, d\Phi(x) = \lim_n \int_E i_n(x)\, d\Phi(x).$$

On peut choisir toute $i_n(x)\,[s_n(x)]$ *bornée inférieurement* [*supérieurement*].

En supposant d'abord que $f(x) \geqq 0$, par la raison du théorème 10.8 on peut construire des fonctions $h_n(x)$ telles que, sur F,

$$(a_1)\quad h_n(x) \in C_1^-(\mathcal{F}),\qquad h_n(x) \geqq f(x),\qquad \lim \int_F (h_n(x) - f(x))\, d\Phi(x) = 0.$$

Posons

$$(a_2)\qquad i_n(x) = \min[h_1(x), \ldots, h_n(x)],\qquad \text{d'où}\qquad i_n(x) \downarrow.$$

On observe que $i_1(x) = h_1(x) \in C_1^-(\mathcal{F})$ sur F et, d'après (10.10) :

$$(a_3)\quad i_2(x) = \min(i_1(x), h_2(x)) \in C_1^-(\mathcal{F})\quad \text{sur } F - F_2,\qquad \Phi(F_2) = 0;$$

il existe une $D_2(x) \in C_1^-(\mathcal{F})$ sur F, $D_2(x) \leqq i_2(x)$ sur F, $D_2(x) = i_2(x)$ sur $F - F_2$. Démontrons par induction que, pour tout $k \geqq 2$:

$$(a_4)\quad \left\{\begin{array}{ll} i_k(x) = \min(i_{k-1}(x), h_k(x)) \in C_1^-(\mathcal{F}) \quad \text{sur } F - F_k, & \Phi(F_k) = 0, \\ F_k \supset F_{k-1};\quad i_k^*(x) = \min(D_{k-1}(x), h_k(x)) \in C_1^-(\mathcal{F}) & \text{sur } F - F_k; \end{array}\right.$$

une $D_k(x)$ de $C_1^-(\mathcal{F})$ sur F existe, telle que

$$D_k(x) \leqq i_k^*(x) \leqq i_k(x)\quad \text{sur } F,\qquad D_k(x) = i_k(x)\quad \text{sur } F - F_k.$$

Pour $k = 2$ (a_4) a lieu, d'après (a_3), avec

$$F_1 = 0\ \text{(l'ensemble vide)},\qquad D_1(x) = i_1(x)\quad [= h_1(x)],\qquad i_2^*(x) = i_2(x).$$

Admettons (a_4) pour un $k > 2$. En raison de (10.10) et puisque $D_k(x)$ et $h_{k+1}(x)$ sont dans $C_1^-(\mathcal{F})$ sur F,

$$(a_5)\qquad i_{k+1}^* = \min(D_k(x), h_{k+1}(x)) \in C_1^-(\mathcal{F})\quad \text{sur } F - F_{k+1},$$

où F_{k+1} est un ensemble mince qu'on peut choisir de sorte que $F_{k+1} \supset F_k$; selon la remarque en italique à la suite de (6′) la relation (a_5) peut être réalisée au sens qu'il existe une $D_{k+1}(x)$, $\in C_1^-(\mathcal{F})$ sur F, $D_{k+1}(x) \leqq i_{k+1}^*(x)$ sur F, $D_{k+1}(x) = i_{k+1}^*(x)$ sur $F - F_{k+1}$. Or (a_2) :

$$i_{k+1}(x) = \min(i_k(x), h_{k+1}(x)) \geqq i_{k+1}^*(x)\quad (a_5)\quad \text{sur } F,$$

car $i_k(x) \geqq D_k(x)$ sur F [*voir* (a_4) pour k]. On a

$$(a_6)\qquad i_{k+1}(x) = i_{k+1}^*(x)\quad \text{sur } \{x \in F;\ i_k(x) = D_k(x)\} = P_k;$$

l'ensemble P_k inclut $F - F_k$ [car d'après (a_4) (pour k) $D_k(x) = i_k(x)$ sur $F - F_k$], d'où $P_k \supset F - F_{k+1}$. De (a_6) (sur $F - F_{k+1}$) et de (a_5) il vient que $i_{k+1}(x) \in C_1^-(\mathcal{F})$ sur $F - F_{k+1}$. Enfin $D_{k+1}(x) = i_{k+1}(x)$ sur $F - F_{k+1}$ [car sur cet ensemble $D_{k+1} = i_{k+1}^*$ et (a_6) $i_{k+1}^* = i_{k+1}$].

Ainsi *l'énoncé* (a_4) *est valide pour tout* $k \geqq 2$, avec $F_1 = 0$, $D_1 = i_1 = h_1$, $i_2^* = i_2$.

Revenons à (a_1), (a_2), la fonction $f(x)$ étant non négative. On a $h_n(x) \geqq i_n(x) \geqq f(x)$; par conséquent [avec $i_n(x) \downarrow$] :

$$(a_7) \qquad \lim \int_F (i_n(x) - f(x))\, d\Phi(x) = 0,$$

$$\lim (i_n(x) - f(x)) = \lim i_n(x) - f(x) \geqq 0;$$

selon un lemme de Fatou :

$$0 = \lim \int_F (i_n(x) - f(x))\, d\Phi(x) \geqq \int_F (\lim i_n(x) - f(x))\, d\Phi(x) \quad (\geqq 0)$$

[ici on pose $\lim i_n(x) - f(x) = 0$ aux points où $f(x) = +\infty$]; nécessairement

$$(a_8) \qquad \lim_n i_n(x) = f(x) \quad \text{sur } F - I_0, \qquad \Phi(I_0) = 0.$$

Si $f(x)$ est intégrable sur un E, $\subset$ F, mesurable, la relation (10.11 c) s'ensuivra pour $f(x) \geqq 0$ et pour les i_n; *cela reste vrai même si* $\int_E f\, d\Phi = +\infty$ (car $i_n \geqq f \geqq 0$), *Ainsi, au cas* $f(x) \geqq 0$ *le théorème est vérifié pour les* $i_n(x)$, *avec* $F_0 = \sum_1^\infty F_n$ *mince.*

$f(x)$ étant encore $\geqq 0$, posons (comme dans [(S); p. 75], $F(x) = f^{-1}(x)$, $F(x) = +\infty$, où $f(x) = 0$. En tenant compte de la partie du théorème déjà établie, il existe une suite de fonctions $\{ I_n(x) \}$, telles que

$$(b_1) \quad I_n(x) \in C_1^-(\mathcal{F}) \quad \text{sur } F - F^0, \qquad \Phi(F^0) = 0, \qquad I_n(x) \downarrow\ ; \qquad F(x) \leqq I_n(x);$$

$$(b_2) \qquad \lim I_n(x) = F(x) \quad \text{sur } F - I^0, \qquad \text{où} \quad \Phi(I^0) = 0;$$

$$(b_3) \qquad \int_F F(x)\, d\Phi(x) = \lim_n \int_F I_n(x)\, d\Phi(x).$$

Envisageons les fonctions (chacune bornée et $\geqq 0$) :

$$(b_4) \quad s_n(x) = \frac{1}{I_n(x)} \quad \left[\text{où} \quad \frac{1}{I_n(x)} \leqq n\right], \quad = n \quad \left[\text{où} \quad \frac{1}{I_n(x)} > n\right],$$

On obtient $[(b_1)\text{-}(b_3)]$:

$$(b_5) \quad s_n(x) \uparrow; \quad s_n(x) \leqq f(x); \quad \lim s_n(x) = f(x) \quad \text{sur } F - I^0 \quad [\Phi(I^0) = 0];$$

$$(b_6) \quad \lim_n \int_E s_n(x)\, d\Phi(x) = \int_E f(x)\, d\Phi(x) \quad \text{(pour tout E, } \subset \text{F, mesurable)},$$

Démontrons que *toute fonction* $s(x) = s_n(x)$, de la sorte spécifiée plus haut, *est dans* $C_1^+(\mathcal{F})$ *sur* $F - H^0$, *où* H^0 *est un ensemble mince.*

Ainsi soit β (> 0) une constante finie; envisageons une fonction

$$(c_1) \qquad g(x) \geqq 0 \quad \text{sur } F; \qquad g(x) \in C_1^-(\mathcal{F}) \quad \text{sur } F - H_0; \qquad \Phi(H_0) = 0;$$

posons

$$(c_2) \quad s(x) = \frac{1}{g(x)} \quad \text{sur } \left\{ x \in F; \frac{1}{g(x)} \leqq \beta \right\}, \qquad s(x) = \beta \quad \text{sur } \left\{ x \in F; \frac{1}{g(x)} > \beta \right\}$$

$\left[\frac{1}{g(x)} = +\infty \text{ lorsque } g(x) = 0\right]$. La deuxième relation ($c_1$) veut dire qu'il existe une $G(x) \geqq 0$, telle que

$$(c_3) \qquad G(x) \in C_1^-(\mathcal{F}) \quad \text{sur } F, \qquad G(x) = g(x) \quad \text{sur } F - H_0;$$

on obtient

$$(c_4) \qquad \begin{cases} s(x) = G^{-1}(x) & \text{sur } \{ x \in F - H_0;\ G^{-1}(x) \leqq \beta \}, \\ s(x) = \beta & \text{sur } \{ x \in F - H_0;\ G^{-1}(x) > \beta ; \end{cases}$$

$$(c_5) \qquad H_c^+ = \{ x \in F;\ G^{-1}(x) \geqq c \} = \left\{ x \in F;\ G(x) \leqq \frac{1}{c} \right\},$$

où c réel est quelconque; puisque $G(x) \geqq 0$, on peut prendre $c \geqq 0$ et l'on pose $\frac{1}{c} = +\infty$ pour $c = 0$. En tant que $G(x)$ est $C_1^-(\mathcal{F})$ sur F, l'ensemble au troisième membre dans (c_5) est un $K_\delta(\mathcal{F})$, d'où $q(x) = G^{-1}(x) \in C_1^+(\mathcal{F})$ sur F. Désignons par $q_\beta(x)$ la fonction qui vaut $q(x)$ sur $\{ x \in F;\ q(x) \leqq \beta \}$ et vaut β sur $\{ x \in F;\ q(x) > \beta \}$; *on voit que* $s(x) = q_\beta(x)$ *sur* $F - H_0$. Posons $Q_c^+ = \{ x \in F;\ q_\beta(x) \geqq c \}$. Puisque $0 \leqq q_\beta(x) \leqq \beta$ sur F, on a

$$Q_c^+ = 0 \quad (\text{pour } c > \beta), \qquad Q_c^+ = F \quad (\text{pour } c \leqq 0).$$

Pour $0 < c \leqq \beta$ il vient

$$Q_c^+ = \{ x \in F;\ q(x) \geqq c \} = H_c^+ \in K_\delta(\mathcal{F});$$

Par conséquent $q_\beta(x) \in C_1^+(\mathcal{F})$ sur F et $s(x) \in C_1^+(\mathcal{F})$ sur $F - H_0$, avec $\Phi(H_0) = 0$; *tous les* $s_n(x)$ (b_4) *sont* $C_1^+(\mathcal{F})$ *sur* $F - H^0$, *où* H^0 *mince peut être choisi indépendant de* n. En tenant compte de ce fait, ainsi que de (b_5) et de (b_6), *la vérité du théorème s'ensuit pour les* $s_n(x)$, *au cas* $f(x) \geqq 0$.

Le théorème étant vérifié pour $f(x) \geqq 0$ (sur F), admettons maintenant que $f(x)$ puisse être de signe variable; $f = f' - f''$, $f' \geqq 0$, $f'' \geqq 0$. On trouve des fonctions

$$i'_n,\ s'_n \text{ relativement à } f', \qquad i''_n,\ s''_n \text{ relativement à } f'',$$

qui satisfont aux conditions du théorème. Soit E ($\subset$F) un ensemble mesurable sur lequel f est intégrable, e. g.

$$(d_1) \qquad \int_E f\,d\Phi = \int_E f'\,d\Phi - \int_E f''\,d\Phi$$

a une valeur déterminée (une au moins des intégrales au second membre est finie). Le théorème dans sa forme générale est vérifié en posant

$$(d_2) \qquad s_n(x) = s'_n(x) - i''_n(x), \qquad i_n(x) = i'_n(x) - s''_n(x).$$

On remarque que toute $s_n(x)$ $[i_n(x)]$ est bornée sur F supérieurement [inférieurement]; de plus

$$(d_3) \quad s_n(x) \in C_1^+(\mathcal{F}) \quad \text{et} \quad i_n(x) \in C_1^-(\mathcal{F}) \quad \text{(sauf sur un ensemble mince).}$$

Pour démontrer la relation (d_3) pour $i_n(x)$, par exemple, notons que des fonctions $L_n(x)$, $U_n(x)$ existent, telles que

$$L_n^{(x)} \in C_1^-(\mathcal{F}) \text{ sur F}, \qquad U_n(x) \in C_1^+(\mathcal{F}) \text{ sur F};$$

$$L_n(x) = i'_n(x) \quad \text{et} \quad U_n(x) = s''_n(x) \text{ sur } F - F_n, \qquad \Phi(F_n) = 0.$$

En tant que $-U_n(x) \in C^-(\mathcal{F})$ sur F, l'énoncé (10.5) s'applique à $L_n(x) - U_n(x)$. On voit que $L_n(x) - U_n(x)$ est $C_1^-(\mathcal{F})$ sur F; d'autre part, $i_n(x)$ (d_2) vaut $L_n(x) - U_n(x)$ sur F, sauf sur un ensemble mince, e. g. $i_n(x)$ *a la propriété* (d_3). Tous les autres caractères dans (10.11 *a*)-(10.11 *c*) s'ensuivent sans difficulté. *Le théorème* 10.11 *est complètement démontré.*

(10.12) *En admettant l'hypothèse* 9.6, *considérons une suite* $\{h_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *de fonctions telles que*

$$(e_1) \quad h_n(x) \in C_1^+(\mathcal{F}) \text{ sur F}; \qquad \lim h_n(x) = h(x) \textit{ existe sur } F.$$

Alors $h(x)$ *possède la propriété*

$$(e_2) \qquad \{x \in F;\ h(x) > c\} \in K_{\delta\sigma}(\mathcal{F}) \qquad \text{(pour tout } c \text{ réel).}$$

Si dans (e_1) $C_1^+(\mathcal{F})$ *est remplacée par* $C_1^-(\mathcal{F})$, *on aura*

$$(e_3) \qquad \{x \in F;\ h(x) < c\} \in K_{\delta\sigma}(\mathcal{F}).$$

En effet l'existence de $\lim h_\nu(x) = h(x)$ entraîne une relation bien connue :

$$H_c = \{ x \in F ; h(x) > c \} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{n,k}, \qquad H_{n,k} = E_{n,k} E_{n+1,k} \ldots,$$

où $E_{n,k} = \left\{ x \in F;\ h_n(x) \geqq c + \frac{1}{k} \right\}$. Si les $h_n(x) \in C_1^+(\mathcal{F})$ sur F, on aura $E_{n,k} \in K_\delta(\mathcal{F})$, d'où $H_{n,k} \in K_\delta(\mathcal{F})$ et $H_c \in K_{\delta\sigma}(\mathcal{F})$. Au cas où $h_n(x) \in C_1^-(\mathcal{F})$ sur F, il vient $-h_n(x) \in C_1^+(\mathcal{F})$, $-h_n(x) \to -h(x)$ sur F et, d'après (e_1) déjà démontrée, $\{ x \in F;\ -h(x) > -c \} \in K_{\delta\sigma}$, ce qui est la conclusion (e_3).

Revenons maintenant au théorème 10.11 au cas général, où $f(x)$, mesurable sur F, est possiblement de signe variable. Choisissons l'ensemble mince F_0 ($\subset F$), indépendant de n, de sorte que à la fois les relations (10.11 a) aient lieu, tandis que (10.11 b),

$$(f_1) \qquad \lim s_n(x) = \lim i_n(x) = f(x) \quad \text{sur } F - F_0.$$

En raison de (9.7) (pour l'ensemble mesurable $X = F - F_0$) on peut trouver une suite d'ensembles X_n ($n = 1, 2, \ldots$), tels que

$$(f_2) \qquad \begin{cases} X_n \in K(\mathcal{F}), \qquad X_n \subset F - F_0, \qquad X_n \uparrow \sum_1^{\infty} X_n = F - F^0, \\ F^0 \supset F_0, \qquad \Phi(F^0) = 0. \end{cases}$$

Posons

$$h_n(x) = \begin{cases} i_n(x) & \text{sur } X_n & [\in K(\mathcal{F})], \\ 0 & \text{sur } F - X_n & [\in K(\mathcal{F})]. \end{cases}$$

Puisque $X_n \subset F - F^0 \subset F - F_0$, il découle [(10.11 a), (9.8)] :

$$(f_3) \qquad h_n(x) \in C_1^-(\mathcal{F}) \quad \text{sur } X_n, \qquad h_n(x) \in C_0(\mathcal{F}) \quad \text{sur } F - X_n.$$

Parce que $C_0(\mathcal{F}) \subset C_1^-(\mathcal{F})$, en raison de (10.9) les relations (f_3) entraînent $h_n(x) \subset C_1^-(\mathcal{F})$ sur F; de plus

$$(f_4) \qquad h_n(x) = 0 \quad \text{sur } F^0 \qquad \text{et} \qquad h_{n'}(x) \geqq h_{n'+1}(x) \geqq \ldots \quad \text{sur } F,$$

où n' ($\geqq 1$) est un entier fini dépendant de x. Donc $\lim h_n(x) = h(x)$ existe sur F. Par la vertu de (10.12), $h(x)$ *possède la propriété* (e_3); *d'autre part*, $h(x) = f(x)$ *sur* $F - F^0$. De la même façon en utilisant les $s_n(x)$ on démontre l'existence d'une $g(x)$, avec le caractère (e_2), telle que $g(x) = f(x)$ sur $F - F^0$.

Il nous convient d'introduire les définitions :

(10.13) $C_2^-(\mathcal{F})$ est la classe de fonctions $h(x)$, définies sur F, telles que

(10.13 *a*) $H_c^- = \{x \in F\,;\ h(x) \leqq c\} \in K_{\sigma\delta}$ (pour tout c réel);

$C_2^+(\mathcal{F})$ est la classe de $h(x)$, sur F, telles que

(10.13 *b*) $$H_c^+ = \{x \in F\,;\ h(x) \geqq c\} \in K_{\sigma\delta}.$$

Les caractères (10.13 *a*), (10.13 *b*) équivalent respectivement aux propriétés (e_2), (e_1) (car le complément d'un $K_{\sigma\delta}$ est un $K_{\delta\sigma}$). Pour les fonctions $h(x)$, $g(x)$, dont il s'agit à la suite de (f_1), on a $h(x) \in C_2^+(\mathcal{F})$ sur F, $g(x) \in C_2^-(F)$ sur F. On est amené au résultat suivant, conséquence du théorème 10.11.

THÉORÈME 10.14. — *Dans l'hypothèse* 9.6, *une fonction* $f(x)$ *mesurable sur* F *étant donnée, deux fonctions*

$$h(x) \in C_2^+(\mathcal{F}) \quad \text{sur F}, \qquad g(x) \in C_2^-(\mathcal{F}) \quad \text{sur F}$$

existent telles que $f(x) = h(x) = g(x)$ *sur* F, *sauf sur un ensemble mince.*

11. **Sur les divisions alvéolaires.** — Nous allons vérifier la constatation suivante :

(11.1) *Soit* $G = \{\gamma\}$ *une famille régulière* (définition 4.18) *jouissant de la moyenne régularité* (définition 5.15). Alors la mesure $\Phi(H)$ de tout ensemble H de $K(\mathcal{F})$ (définition 9.1) provient des mesures des γ moyennant *deux passages à la limite*, tandis que la mesure $\Phi(H)$ de tout ensemble mesurable H, $\subset \Delta(G)$, est calculable à partir des mesures des γ moyennant *trois passages à la limite.*

Si $H \in K(\mathcal{F})$, e. g. s'il existe une famille $G^* \subset G$ telle que $H = \Delta(G^*)$, on note que G^* est régulière et possède la moyenne régularité. Prenons une suite de nombres $\delta_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\delta_k \downarrow 0$. D'après le théorème de couverture, pour tout k il existe une suite de γ_j^k $(j = 1, 2, \ldots)$ *disjoints*, tels que [en tant que $H = \Delta(G^*)$] :

$$(1_0) \qquad \gamma_j^k \in G^*, \qquad \Phi(H) - \delta_k < \Phi\left(\sum_j \gamma_j^n\right) < \Phi(H) + \delta_k.$$

Donc

$$(2_0) \qquad \Phi(H) = \lim_k \Phi\left(\sum_j \gamma_j^k\right),$$

ce qui vérifie (11.1) pour H de K ($\mathcal{F}$), *même sans l'hypothèse de la moyenne régularité.* Si H, $\subset \Delta$ (G), est mesurable (et la moyenne régularité de G est admise), l'énoncé (9.7) s'applique parce que G satisfait à (9.6 A); donc (9.7 *b*) des Y_n de K ($\mathcal{F}$) ($n = 1, \ldots$) existent tels que $Y_n \subset H$, $Y_n \uparrow$, $H = \sum Y_n + H_0$, où $H_0 \subset H$ et $\Phi(H_0) = 0$. Par conséquent

$$(3_0) \qquad \Phi(H) = \lim_n \Phi(Y_n);$$

Y_n étant dans K ($\mathcal{F}$), $\Phi(Y_n)$ est calculable à partir des $\Phi(\gamma)$ par deux passages à la limite, d'où l'*énoncé* (11.1) *est vérifié.*

Denjoy [(D$_3$); p. 291 et 295] a envisagé dans un espace abstrait des « divisions alvéolaires » d'un ensemble Δ [une division alvéolaire est un réseau, e. g. une suite illimitée de grilles de rangs $k = 1, 2, \ldots$; les alvéoles de même rang k constituent les mailles de la grille de rang k], La sorte de division alvéolaire qu'on emploie et les hypothèses, relativement à une telle division, qu'on introduit, dépendent, bien entendu. des problèmes qu'on a en vue (*voir* par exemple [(T); sections 18 et 19]).

Les conditions [(D$_3$); p. 291] d'une division alvéolaire [dans un espace muni d'une mesure borélienne Φ] d'un ensemble Δ sont les suivantes :

(11.2) (1°) les alvéoles θ^k de rang k sont disjoints, $\Delta = \sum \theta^k$ (k invariant); (2°) chaque θ^k est la réunion (possiblement illimitée) de certains alvéoles θ^{k+1} (de rang $k+1$); pour $k > 1$ chaque θ^k est dans une θ^{k-1}; (3°) $\lim \Phi(\theta^k) = 0$ (pour $k \to \infty$).

(11.3) *Si* $G = \{\gamma\}$ *est régulière* (définition 4.18) *et* $\varepsilon > 0$ *est donné, on peut trouver un ensemble* R, $\subset \Delta$ (G), *tel que* $\Phi(R) < \varepsilon\, [< \Phi(\Delta(G))]$, *de sorte qu'une division alvéolaire, au sens de* (11.2), *de l'ensemble* $\Delta' = \Delta(G) - R$ *peut être obtenue à partir des* γ.

Étant donné un $\varepsilon > 0$, d'après le théorème de couverture (approximatif) une suite de γ_i^k ($i = 1, 2, \ldots$), *disjoints* pour k invariant, existe, tels que

$$(1_1) \qquad \gamma_i^k \in G; \quad \Phi(\Delta(G) - \Delta(G)\Gamma^k) < \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad \text{où } \Gamma^k = \sum_i \gamma_i^k, \quad \Phi(\gamma_i^k) < \frac{1}{k}.$$

Posons

$$(2_1) \qquad \begin{cases} R^k = \Delta(G) - \Delta(G)\Gamma^k, & \rho = R^1 + R^2 + \ldots, \qquad \delta = \Delta(G) - \rho, \\ \alpha_i^k = \gamma_i^k\,\delta; & \beta^k = \beta^k_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = \alpha^1_{i_1}\alpha^2_{i_2}\ldots\alpha^k_{i_k} \end{cases}$$

pour tous les $i_1, i_2, \ldots, i_k$ positifs. Désignons par $\beta^k_{p_1 p_2 \ldots p_k}$ et $\beta^k_{q_1 q_2 \ldots q_k}$ respectivement les β^k épais et les β^k minces. En posant

$$(3_1) \qquad \beta_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q_1, \ldots, q_k} \beta^k_{q_1, \ldots, q_k}$$

il vient $\Phi(\beta_0) = 0$; de plus $\rho \subset \Delta(G)$ et (1_1) $\Phi(\rho) < \varepsilon$. Formons les θ^k comme il suit :

$$(4_1) \qquad \begin{cases} \eta^k_i = \gamma^k_i \Delta', \qquad \text{où} \quad \Delta' = \delta - \beta_0 \\ [\text{donc } \Delta' = \Delta(G) - R,\ R = \rho + \beta_0 \subset \Delta(G),\ \Phi(R) < \varepsilon]; \end{cases}$$

$\theta^k = \theta^k_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = \eta^1_{i_1} \eta^2_{i_2} \ldots \eta^k_{i_k}$ (pour tous les $i_1, i_2, \ldots, i_k$ positifs pour lesquels $\theta^k \neq 0$). Or $[(2_1), (3_1)]$:

$$\theta^k_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = \beta^k_{i_1, i_2, \ldots, i_k} - \beta^k_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \beta_0 (\gamma^1_{i_1} + \gamma^1_{i_2} + \ldots + \gamma^k_{i_k}),$$
$$\beta^k_{q_1, \ldots, q_k} \subset \beta_0 \gamma^1_{q_1} \ldots \gamma^k_{q_k} \subset \beta_0 (\gamma^1_{q_1} + \ldots + \gamma^k_{q_k}),$$

ainsi

$$(5_1) \quad \theta^k_{p_1, \ldots, p_k} \subset \beta^k_{p_1, \ldots, p_k}, \qquad \Phi(\theta^k_{p_1, \ldots, p_k}) = \Phi(\beta^k_{p_1, \ldots, p_k}) > 0; \qquad \theta^k_{q_1, \ldots, q_k} = 0.$$

$\theta^k_{i_1, \ldots, i_k}$ est vide, dès que $\beta^k_{i_1, \ldots, i_k}$ est vide ou bien est mince, e. g. *tout* θ^k *qui existe est épais.* On a $\theta^k_{p_1, p_2, \ldots, p_k} \subset \gamma^\nu_{p_\nu}$ ($\nu = 1, \ldots, k$). Donc si $\theta^k_{p'_1, p'_2, \ldots, p'_k}$ ($\neq 0$) est une autre θ^k, il existe un ν ($\leqq k$) tel que $p_\nu \neq p'_\nu$; les deux θ^k seront contenus respectivement dans les deux ensembles $\gamma^\nu_{p_\nu}$, $\gamma^\nu_{p'_\nu}$ disjoints; ainsi *les* θ^k *de rang* k *invariant sont disjoints.* Or $[(4_1), (2_1)]$:

$$\Delta' = \Delta(G) - \sum_k R^k - \beta_0 = \Delta(G) \prod \Gamma^k - \beta_0.$$

Si $x \subset \Delta'$, on aura $x \in \sum_i \gamma^k_i$ ($k = 1, 2, \ldots$), d'où $x \in \gamma^\nu_{i_\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) et, en particulier (pour un $k > 0$ quelconque)

$$x \in \gamma^1_{i_1} \gamma^2_{i_2} \ldots \gamma^k_{i_k}, \qquad \text{par la} \quad x \in \theta^k_{i_1 i_2, \ldots, i_k} \quad (\text{épais});$$

par suite

$$(6_1) \qquad \Delta' \subset \sum_{p_1, \ldots, p_k} \theta^k_{p_1, \ldots, p_k} \qquad (k \text{ invariant}).$$

Si x appartient au second membre dans (6_1), e. g. si $x \in \theta^k_{p_1,\ldots,p_k}$ pour quelques p_j $(j = 1, 2, \ldots, k) > 0$, d'après (4_1) on aura $x \in \Delta'$; ainsi

$$(7_1) \qquad \sum_{p_1,\ldots,p_k} \theta^k_{p_1,\ldots,p_k} \subset \Delta'.$$

Par conséquent *le caractère* (11.2, (1°)], *avec* Δ' (4_1) *pour* Δ, *est vérifié.* En tenant compte de [11.2, (1°)] pour Δ', il vient

$$\theta^k_{p_1,p_2,\ldots,p_k} = \sum_i \theta^{k+1}_{p_1,p_2,\ldots,p_k,i};$$

en outre, si $k > 1$:

$$\theta^k_{p_1,\ldots,p_k} = \theta^{k-1}_{p_1,\ldots,p_{k-1}} \eta^k_{p_k} \subset \theta^{k-1}_{p_1,\ldots,p_{k-1}};$$

ainsi *la propriété* [11.2, (2°)] *a lieu.* D'après (4_1) et (1_1) :

$$\Phi(\theta^k_{i_1,\ldots,i_k}) \leqq \Phi(\eta^k_{i_k}) \leqq \Phi(\gamma^k_{i_k}) < \frac{1}{k};$$

par conséquent le caractère [11.2, (3°)] *est vérifié.* On voit maintenant que *la constatation* (11.3) *est vraie*, avec une division alvéolaire (4_1), *où toutes les alvéoles qui existent sont épaisses.* Dans [(D_3); p. 291] M. Denjoy envisage une famille $G = \{\gamma\}$ pour laquelle le théorème exact de couverture de Denjoy-Vitali s'applique; *dans ce cas un résultat comme l'énoncé* (11.3) *est obtenu avec* R *mince.*

Hypothèse 11.4. — *Soit* $\mathfrak{U}$ *un espace qui possiblement n'est pas muni d'une mesure.* Δ étant un ensemble dans $\mathfrak{U}$, envisageons une division alvéolaire de Δ jouissant des caractères :

[(11.2), (1°); (11.2), (2°)], chaque θ^k étant une réunion *illimitée* de certains alvéoles de rang $k+1$;

(3°) si θ^k $(k = 1, 2, \ldots)$ est une suite décroissante, $\prod \theta^k$ est un point unique de Δ.

La propriété [11.4, (3°)] est suggérée par la condition : « si la suite θ^k décroît, $\prod \theta^k$ est vide ou élément unique de Δ », donnée par Denjoy dans [(D_3); p. 295]; pourtant nous supposons que $\prod \theta^k$ (θ^k étant une suite décroissante) n'est jamais vide.

En admettant l'hypothèse 11.4, supposons qu'un *procédé déterminé de numération* est établi de sorte que

$$(1') \quad \theta^0 = \Delta = \sum_{i_1} \theta^1_{i_1}, \quad \theta^1_{i_1} = \sum_{i_2} \theta^2_{i_1, i_2}, \quad \ldots, \quad \theta^k_{i_1, \ldots, i_k} = \sum_{i_{k+1}} \theta^{k+1}_{i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}}, \quad \ldots,$$

où les i_j parcourent tous les entiers positifs. Les alvéoles dans chaque réunion (1′) sont disjointes. Soit $(j_1, j_2, \ldots)$ une suite illimitée quelconque d'entiers positifs; on aura

$$(2') \qquad \theta^1_{j_1} \supset \theta^2_{j_1, j_2} \supset \ldots \supset \theta^k_{j_1, j_2, \ldots, j_k} \supset \ldots.$$

La suite d'alvéoles $\theta^k_{j_1, \ldots, j_k}$ étant décroissante, d'après [(11.4), (3°)] leur produit est un point unique x de Δ. Réciproquement, si x est un point de Δ, on trouve l'alvéole unique $\theta^1_{j_1}$ de rang 1 qui contient x; puis dans la décomposition $\theta^1_{j_1} = \sum_{i_2} \theta^2_{j_1, i_2}$ on trouve l'alvéole unique $\theta^2_{j_1, j_2}$ de rang 2 contenant x; dans la décomposition de $\theta^2_{j_1, j_2}$ il y a un alvéole unique $\theta^3_{j_1, j_2, j_3}$ de rang 3 qui contient x, et ainsi de suite; on obtient une suite décroissante d'alvéoles (2′) dont le produit (qui est un point unique) est précisément x. Ainsi on a établi *une correspondance entre les points x de Δ et les suites illimitées $(j_1, j_2, \ldots)$ d'entiers positifs.* Si deux suites $(i_1, i_2, \ldots)$, $(j_1, j_2, \ldots)$ sont distinctes, c'est que pour un indice $k\,(\geqq 1)$ minimal $i_k \neq j_k$; des points x et y sont définis par ces deux suites; si $k = 1$, x et y se trouvent dans les alvéoles $\theta^1_{i_1}$ et $\theta^1_{j_1}$ disjointes; si $k > 1$, on aura

$$x \in \theta^k_{i_1, \ldots, i_{k-1}, i_k}, \qquad y \in \theta^k_{i_1, \ldots, i_{k-1}, j_k};$$

les deux alvéoles qui surviennent ici sont disjoints. Ainsi $x \neq y$. On voit que la correspondance entre les points de Δ et les suites illimitées d'entiers positifs est *biunivoque.* Introduisons :

DÉFINITION 11.5. — Admettons l'hypothèse 11.4 et une numération d'alvéoles de la division alvéolaire selon (1′). On a la correspondance, spécifiée plus haut, entre les points x de Δ et les suites $(i) = (i_1, i_2, \ldots)$ illimitées d'entiers positifs. Si x et y sont deux points distincts de Δ et $(j) = (j_1, j_2, \ldots)$ est la suite qui correspond à y, posons

$$(11.5a) \quad d(x, y) = \frac{1}{k} \qquad [\text{où } k\,(\geqq 1) \text{ est l'indice minimal tel que } i_k \neq j_k];$$

de plus pour x dans Δ posons

$$(11.5b) \qquad d(x, x) = 0.$$

On note que pour x, y de Δ distincts les deux suites (i), (j), qui correspondent, sont distinctes, de sorte que l'indice minimal fini k existe tel que $i_k \neq j_k$. Si $x = y$, on aura $(i) = (j)$ et l'on peut regarder k comme $+\infty$, ce qui serait d'accord avec la définition (11.5 *b*). Si $x (\in \Delta)$ est fixe et $y (\in \Delta) \neq x$, les suites correspondantes étant (i) et (j), dire que $d(x, y) \to 0$ équivaut à $(j) \to (i)$ au sens que

$$(j) = (i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, j_k, j_{k+1}, \ldots) \qquad (j_k \neq i_k, \text{ tandis que } k \to \infty).$$

Pour x, y dans Δ on a les propriétés :

$$(11.6) \quad \begin{cases} d(x, y) \text{ (finie)} > 0 \quad \text{si} \quad x \neq y; \\ d(x, y) = 0 \text{ équivaut à } x = y; \quad d(x, y) = d(y, x). \end{cases}$$

Soient x, y, z des points distincts dans Δ, avec les suites correspondantes (i), (j), (n). Alors pour un $k > 0$ et un $\nu > 0$, on a

$$(1_1) \quad x \sim (i_1, i_2, \ldots), \qquad y \sim (i_1, \ldots, i_{k-1}, j_k, j_{k+1}, \ldots) \qquad (j_k \neq i_k);$$
$$(2_1) \qquad z \sim (i_1, \ldots, i_{\nu-1}, n_\nu, n_{\nu+1}, \ldots) \qquad (n_\nu \neq i_\nu);$$

il vient

$$(3_1) \qquad d(x, y) = \frac{1}{k}, \qquad d(x, z) = \frac{1}{\nu},$$

y et z étant distincts, il existe un entier $\alpha \geqq 1$ tel que $d(y, z) = \frac{1}{\alpha}$. Si $\alpha \geqq k$, on aura (3_1) :

$$d(y, z) = \frac{1}{\alpha} \leqq \frac{1}{k} = d(x, y) < d(x, y) + d(x, z).$$

Au cas où $1 \leqq \alpha < k$:

$$z \sim (i_1, \ldots, i_{\alpha-1}, n_\alpha, n_{\alpha+1}, \ldots), \qquad n_\alpha \neq i_\alpha;$$

en tenant compte de (2_1) on voit que nécessairement $\alpha = \nu$; donc (3_1) :

$$d(z, y) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\nu} = d(x, z) \leqq d(x, y) + d(x, z).$$

Ainsi $d(x, y)$ *satisfait à l'inégalité triangulaire*. On conclut comme il suit :

(11.7) *Dans l'hypothèse* 11.4, *et avec une numération déterminée selon* (1') *admise, l'ensemble* Δ *est un espace métrique, muni d'une distance qui peut être définie selon la définition* 11.5 *et qui satisfait à l'inégalité triangulaire.*

On remarque que, pour x, y, z dans Δ, deux des trois distances $d(x, y)$, $d(x, z)$, $d(y, z)$ sont égales et valent au moins l'autre. On note que, $\delta(\ldots)$ désignant le diamètre de $(\ldots)$:

$$\delta(\theta^k_{i_1,\ldots,i_k}) = \frac{1}{k+1}. \tag{11.8}$$

En effet, si x, y sont deux points distincts dans une $\theta^k_{i_1,\ldots,i_k}$, on aura

$$x \sim (i_1, \ldots, i_k, j_{k+1}, j_{k+2}, \ldots), \qquad y \sim (i_1, \ldots, i_k, n_{k+1}, n_{k+2}, \ldots);$$

soit ν l'indice minimal des entiers distincts dans ces suites; $\nu \geqq k+1$ et $d(x, y) = \frac{1}{\nu} \leqq \frac{1}{k+1}$; on obtient $d(x, y) = \frac{1}{k+1}$, lorsque $j_{k+1} \neq n_{k+1}$; (11.8) *s'ensuit.*

(11.9) *L'espace* Δ *est séparable.*

Envisageons la suite $\eta = \{x^k_{i_1,\ldots,i_k}\}$, k et les i_j étant variables, où

$$x^k_{i_1,\ldots,i_k} \sim (i_1, \ldots, i_{k-1}, i_k, i_k, i_k, \ldots);$$

il vient $x^k_{i_1,\ldots,i_k} \in \theta^k_{i_1,\ldots,i_k}$; on a associé avec toute alvéole un point unique de η; η est dénombrable. Si $y \sim (j_1, j_2, \ldots)$ est un point quelconque de Δ, on aura

$$y \in \theta^\nu_{j_1,j_2,\ldots,j_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots);$$

$\theta^\nu_{j_1,\ldots,j_\nu}$ contient le point $x^\nu_{j_1,\ldots,j_\nu}$ de η; d'après (11.8) :

$$d(y, x^\nu_{j_1,\ldots,j_\nu}) \leqq \delta(\theta^\nu_{j_1,\ldots,j_\nu}) = \frac{1}{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Par conséquent η est partout dense sur Δ, *ce qui vérifie* (11.9).

Envisageons une *suite de Cauchy* :

$$(1^\circ) \qquad x^n \in \Delta \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad x^n \sim (i^n_1, i^n_2, \ldots);$$
$$(2^\circ) \quad d(x^n, x^m) < \varepsilon \quad (\text{dès que } n \geqq \mathrm{N},\ m \geqq \mathrm{N}), \qquad \text{avec} \quad \mathrm{N} = \mathrm{N}(\varepsilon).$$

On dira que pour un k donné la suite d'entiers i^n_k $(n = 1, 2, \ldots)$ *se stabilise*, s'il existe un entier $n_k (\geqq 1)$, qu'on prend minimal, tel que

$$(3^\circ) \qquad i^{n_k}_k = i^{n_k+\nu}_k \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

La suite i^n_1 $(n \geqq 1)$ se stabilise, sinon il existe une suite infinie d'entiers $1 < \alpha(1, 1) < \alpha(1, 2) < \ldots < \alpha(1, j) < \ldots$, tels que

$$i^1_1 = \ldots = i^{\alpha(1,1)-1}_1 \neq i^{\alpha(1,1)}_1 = \ldots = i^{\alpha(1,2)-1}_1 \neq i^{\alpha(1,2)}_1 = \ldots = i^{\alpha(1,3)-1}_1 \neq i^{\alpha(1,3)}_1 = \ldots.$$

Il s'ensuit que

$$(4^0) \qquad d(x^{\alpha(1,j)-1}, x^{\alpha(1,j)}) = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots);$$

en tant que $\alpha(1, j) \to \infty$, il y a contradiction à (2°) pour $\varepsilon < 1$; d'où *la suite* i_1^n *se stabilise,* de sorte qu'un n_1 ($\geqq 1$) minimal existe satisfaisant à (3°; $k = 1$). Supposons que pour un $k > 1$ les $k - 1$ suites i_q^n ($q = 1, 2, \ldots, k - 1$) se stabilisent, e. g. que les entiers n_q ($q = 1, \ldots, k - 1$) existent tels que $i_q^{n_q} = i_q^{n_q+\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) (3°). Posons $n' = \max(n_1, \ldots, n_{k-1})$; alors $i_q^{n'} = i_q^{n'+\nu}$ ($q = 1, \ldots, k-1$; $\nu = 0, 1, \ldots$). Si la suite i_k^n ($n = 1, 2, \ldots$) ne se stabilise pas, il en sera de même pour la suite i_k^n ($n = n', n' + 1, \ldots$). On peut trouver une suite infinie d'entiers

$$(5^0) \qquad n' < \alpha(k, 1) < \alpha(k, 2) < \ldots < \alpha(k, j) < \ldots,$$

de sorte que

$$i_k^{n'} = \ldots = i_k^{\alpha(k,1)-1} \neq i_k^{\alpha(k,1)} = \ldots = i_k^{\alpha(k,2)-1} \neq i_k^{\alpha(k,2)} = \ldots$$
$$= i_k^{\alpha(k,3)-1} \neq i_k^{\alpha(k,3)} = \ldots;$$

par là [puisque $i_q^{n'} = i_q^{n'+\nu}$, $q < k$, $\nu \geqq 0$] :

$$(6^0) \qquad d(x^{\alpha(k,j)-1}, x^{\alpha(k(j))}) = \frac{1}{k} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Les $\alpha(k, j)$ (4°) tendant vers $+\infty$ avec j, il se voit que (5°) présente une contradiction à (2°) pour $\varepsilon < \frac{1}{k}\cdot$ Par conséquent la suite i_k^n ($n \geqq n'$), et donc la suite i_k^n ($n \geqq 1$), se stabilise. Par induction il s'ensuit que *toutes les suites* i_k^n ($n = 1, 2, \ldots$) *se stabilisent,* e. g. (3°) a lieu pour $k = 1, 2, \ldots$. Posons

$$(7^0) \qquad x \sim (i_1^{n_1}, i_2^{n_2}, \ldots, i_k^{n_k}, i_{k+1}^{n_{k+1}}, \ldots).$$

Il vient

$$i_q^n = i_q^{n_q} \qquad (q = 1, \ldots, k),$$

dès que $n \geqq n'_k = \max(n_1, \ldots, n_k)$; par suite

$$x^n \sim (i_1^{n_1}, i_2^{n_2}, \ldots, i_k^{n_k}, i_{k+1}^n, i_{k+2}^n, \ldots) \qquad (\text{pour } n \geqq n'_k).$$

Ainsi $d(x, x^n) \leqq \frac{1}{k+1}$ ($n \geqq n'_k$), $k = 1, 2, \ldots$, d'où $\lim\limits_n d(x, x^n) = 0$, e. g. la suite (x^n) ($n = 1, 2, \ldots$) (1°) de Cauchy converge vers le point x (6°). On a établi la propriété suivante :

(11.10) *L'espace* Δ *est complet.*

A présent nous laissons de côté l'étude plus approfondie de la division alvéolaire selon l'hypothèse 11.4 et des applications possibles de l'espace correspondant Δ.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. Denjoy, *Une extension du théorème de Vitali* (*Amer. J. Math.*, vol. 73, 1951, p. 314-356); désigné dans la suite par D_1).

[2] A. Denjoy, *Théorème de Vitali et intégrations* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 1385); désigné dans la suite par (D_2).

[3] A. Denjoy, *Un demi-siècle* (1907-1956) *de Notes communiquées aux Académies*; II. *Le champ réel*, Paris, 1957, p. 225-589; désigné par (D_3). En particulier, à la fin de (D_3) : *Observations*..., p. 61-89; désigné par (OD).

[4] W. J. Trjitzinsky, *Théorie métrique dans les espaces où il y a une mesure* (*Mémor. Sc. math.*, fasc. 143, 1960, p. 1-116); désigné dans la suite par (T).

[5] S. Saks, *Theory of the Integral*, Warszawa-Lwow, 1937; désigné par (S).

TABLE DES MATIÈRES.