MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

W. J. TRJITZINSKY

Totalisations dans les espaces abstraits

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 155 (1963)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1963__155__1_0>

W. J. TRJITZINSKY
Urbana, Illinois, U. S. A.

TOTALISATIONS DANS LES ESPACES ABSTRAITS

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CLV

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & Cie, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, Quai des Grands-Augustins 55,
1963

TOTALISATIONS
DANS LES ESPACES ABSTRAITS

Par W. J. TRJITZINSKY

Urbana, Illinois, U. S. A.

1. **Introduction.** — Notre objet est d'abord d'examiner les conditions dans les espaces abstraits U, *généralement non distanciés,* qui conviennent pour la réalisation des totalisations appropriées dans $\mathfrak{U}$. Ces conditions sont de nature métrique et topologique [sections (2)-(6)]. Il faut que l'espace U soit séparable ainsi que complet dans de certains sens; on a besoin du théorème de Cantor-Baire. Dans les conditions dont nous faisons usage la théorie topologique du genre survenant dans le livre de M. Denjoy [1], *désigné par* (D), a lieu [*voir* notamment les sections (5) et (6)]. C'est le genre de topologie que M. Denjoy, qui est à l'origine des méthodes totalisantes, a déjà employée avec beaucoup de succès dans les problèmes de totalisation et dans maintes autres questions d'Analyse. Dans les considérations des aspects métriques nous nous appuyons sur l'*Ouvrage* (D*), relativement au théorème de Vitali (Denjoy-Vitali), de Denjoy [2] et sur le *fascicule* (T) de l'auteur [3].

Quand on essaie de développer une totalisation nouvelle on trouve un guide utile dans [(D); livre 4], où il s'agit d'indications et de remarques générales qui conviennent à toutes les totalisations. Actuellement nous présentons deux totalisations, à savoir la *totale*-D, que nous appelons totale de Denjoy, et la *totale*-(S). Les deux totales, et surtout la première, sont modelées sur la totale étudiée dans l'*Ouvrage* (R), un Mémoire de la première valeur, dû à P. Romanovski [4]. La totale-D est en rapport avec dérivation relativement à une certaine famille d'ensembles, qui ressemblent aux intervalles d'un espace euclidien (mais, en effet, beaucoup plus généraux). La théorie de cette totale se trouve dans les sections (7)-(10). Dans notre théorie, *nous laissons de côté l'hypothèse de compacticité,* dont on a fait usage dans (R). *La totale-*(S) *représente une totalisation symétrique,* liée avec dérivation par rapport aux « pseudo-sphères », qui sont de certains ensembles ressemblant aux sphères d'un espace distancié; la théorie de cette totale est développée dans les sections (11)-(15). *La théorie de la totale-*(S) *ne fait pas intervenir le caractère de compacticité.* Dans les sections (11) et (12), préliminaires à la totalisation (S), nous faisons usage de quelques idées qui interviennent dans notre Ouvrage (T′) [5] sur la totalisation de laplaciens. La totalisation (S) est considérablement plus difficile que la totalisation D.

2. **Quelques considérations métriques et topologiques.** — Soit U un espace pour lequel l'existence d'une distance n'est pas nécessairement affirmée; en outre, admettons qu'une *mesure* Φ (E) *borélienne* soit donnée; Φ (E) est une fonction d'ensemble E (dans U), non négative; Φ jouit des propriétés de complète additivité et de soustractivité. Envisageons une famille $\mathcal{F} = \{E\}$ d'ensembles E simplement régulière au sens de (T; définition 11.5); ainsi :

(2.1) les E sont mesurables-Φ, $0 < \Phi(E) < +\infty$;

$$\mathcal{F} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{F}_\nu; \qquad \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots;$$

(2.1 *a*) si $\mathcal{F}'_\nu$ est une famille contenue dans $\mathcal{F}_\nu$, l'ensemble S ($\mathcal{F}'_\nu$), réunissant les E de $\mathcal{F}'_\nu$, est mesurable-Φ; $\Phi(S(\mathcal{F}_\nu)) < +\infty$. Une famille $\mathcal{F}$ simplement régulière peut être constituée par un seul $\mathcal{F}_\nu$, soit $\mathcal{F}_1$; $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$, $\Phi(S(\mathcal{F})) < \infty$.

Un point p est indéfiniment couvert par une famille $\mathcal{F} = \{E\}$, s'il existe une suite infinie E_j ($j = 1, 2, \ldots$), $\in \mathcal{F}$, telle que

$$(2.2) \qquad E_j \ni p, \qquad \Phi(E_j) \to 0.$$

On dira qu'un ensemble A *est indéfiniment couvert* par une famille $\mathcal{F}$, si tout point de A est indéfiniment couvert par $\mathcal{F}$.

NOTATION 2.3. — Si $\mathcal{F}$ est une famille d'ensembles (au moins simplement régulière, avec $\Phi(S(\mathcal{F}))$ finie ou non), $\Delta(\mathcal{F})$ désignera l'ensemble des points indéfiniment couverts par $\mathcal{F}$.

Selon le théorème 11.8 de (T) tout ensemble $\Delta(\mathcal{F}_\nu)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) est mesurable-Φ, de mesure-Φ finie, si les $\mathcal{F}_\nu$ *sont les familles* d'ensembles dont il s'agit dans [(2.1), (2.1 *a*)].

Dans la suite, sauf mention contraire, $\mathcal{F}$ sera une famille au moins simplement régulière et composée d'une seule famille $\mathcal{F}_\nu$, soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$; ainsi on aura $\Phi(S(\mathcal{F})) < +\infty$; de plus, *admettons que $\Delta(\mathcal{F})$ soit épais-Φ* [ainsi $0 < \Phi(\Delta(\mathcal{F})) < +\infty$].

Dans les développements dans (D*), en rapport avec le théorème exact de Denjoy-Vitali, M. Denjoy a introduit les notions fondamentales de *noyau* et d'*enveloppe*. Nous envisageons de telles notions relativement à une famille simplement régulière $\mathcal{F}$ [T; définition 12.5, avec $\Phi(S(\mathcal{F})) < \infty$]. Ainsi on dira qu'un ensemble X est un *noyau, relativement à $\mathcal{F}$*, si

$$(2.3)\quad X \subset \Delta(\mathcal{F}) \qquad \text{et} \qquad \Phi(\sigma(X)) = 0, \qquad \text{où}\quad \sigma(X) = \Delta(\mathcal{F}(X)) - X,$$

$\mathcal{F}(X)$ étant la famille des E de $\mathcal{F}$ joints à X (il se voit que $\sigma(X)$ est l'ensemble des points étrangers à X et indéfiniment couverts par les E de $\mathcal{F}$ joints à X]. On dira que X, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, est une *enveloppe*, relativement à $\mathcal{F}$, si $\Delta(\mathcal{F}) - X$ est un noyau. $\mathcal{F}$ étant simplement régulière, la famille partielle $\mathcal{F}(X)$ jouit de la même propriété; donc $\Delta(\mathcal{F}(X))$ est mesurable-Φ; $\sigma(X)$ étant mince, si X est un noyau, il s'ensuit que tout noyau (relativement à $\mathcal{F}$) est mesurable-Φ; dont les enveloppes sont aussi mesurables-Φ.

$\mathcal{F} = \{E\}$ est *complètement régulière* [(T); définition 12.8], si $\mathcal{F}$ est simplement régulière et si à tout X, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, mesurable-$\Phi$ et à tout $\epsilon > 0$ il correspond un noyau Y, tel que

$$(2.4)\qquad Y \subset X,\ \Phi(X - Y) < \varepsilon.$$

Pour les familles d'ensembles considérées dans (D*), M. Denjoy a déjà remarqué que les enveloppes et les noyaux ressemblent, mais d'assez loin, aux ensembles ouverts et fermés respectivement.

(2.5) D'accord avec le *livre* (HR) de H. Hahn et A. Rosenthal [6] un espace F est *topologique*, s'il existe une famille $G = \{O\}$ d'ensembles O, $\subset F$, qu'on appelle « *ouverts* », satisfaisant aux conditions suivantes :

(2.5 *a*) G contient l'ensemble vide;
(2.5 *b*) Tout point p de F est contenu dans un O de G;
(2.5 *c*) $O_1 O_2 \in G$, si O_1 et O_2 sont dans G;
(2.5 *d*) Toute réunion, même indénombrable, d'ensembles de G est dans G;
(2.5 *e*) Si x_1, x_2 sont des points distincts dans F, il existe O_1 et O_2 dans G, tels que $O_1 \ni x_1$, $O_2 \ni x_2$, $O_1 O_2 = 0$.

$\mathcal{F}$ étant simplement régulière, la famille $G = \{O\}$ d'enveloppes (relativement à $\mathcal{F}$) ne satisfait pas, en général, à tous les caractères (2.5 *a*-2.5 *e*) pour l'espace $F = \Delta(\mathcal{F})$. Pourtant *la famille* G *d'enveloppes jouit toujours des trois premières propriétés.* En effet, $F = \Delta(\mathcal{F})$ est à la fois une enveloppe et un noyau; le complément d'ensemble vide est F, qu'on considère comme un noyau, donc l'ensemble vide est une enveloppe, d'où (2.5 *a*) est satisfait. D'autre part, (2.5 *b*) aussi a lieu, car F peut être considéré comme une enveloppe. Enfin (2.5 *c*) est valide pour la famille G d'enveloppes en raison des indications données dans (D*), pour le cas y considéré, ainsi que dans (T) au cas où $\mathcal{F}$ est simplement régulière.

Quant à (2.5 *d*), on note que toute réunion, au plus dénombrable, d'enveloppes est une enveloppe, tandis qu'il se peut que la réunion indénombrable d'un système d'enveloppes ne soit pas une enveloppe.

HYPOTHÈSE TOPOLOGIQUE 2.6. — On suppose que la famille $\mathcal{F} = \{E\}$ (avec $\Phi(S(\mathcal{F})) < +\infty$), au moins simplement régulière, est telle que la famille $G = \{O\}$ d'enveloppes, relativement à $\mathcal{F}$, jouisse des propriétés (2.5 *d*) et (2.5 *e*).

Sauf mention contraire, l'*hypothèse* 2.6 *sera toujours admise.* On voit sans difficulté que cette hypothèse entraîne la possibilité de la formulation de la plupart de notions usuelles de la théorie d'ensembles [*voir* (HR); p. 4-7]. Nous allons indiquer ceux de ces développements qui nous seront utiles dans la suite; nous le ferons d'une façon différente de celle comprise dans (HR).

Un point p, $\in F = \Delta(\mathcal{F})$, est *intérieur* à un ensemble $H\ (\subset F)$, s'il existe une enveloppe (relativement à $\mathcal{F}$) O, telle que

$$O \ni p, \qquad O \subset H,$$

p est *extérieur à* $H\ (\subset F)$, si p est intérieur à $F - H$; p est un point *frontière* de H, si p n'est ni intérieur à H ni extérieur à H. Si p est un point de la frontière de H, toute enveloppe contenant p aura des points sur H et sur $F - H$. D'accord avec (D; p. 88) nous désignons par $\overline{H}$, la *fermeture* de H, l'ensemble des points non extérieurs à H; ainsi, si $p \in \overline{H}$, toute enveloppe O contenant p aura des points sur H; p, $\in H$, est *isolé* dans H, s'il existe une enveloppe O contenant p et disjoint de $H - p$. On dira que H_1, $\subset H$, est *isolé* dans H si tout point p de $\overline{H}_1$ est intérieur à $F - H + H_1$ [e. g. une enveloppe $O = O(p)$ existe, telle que $O \ni p$, $O.(H - H_1) = 0$].

DÉFINITION 2.7. — Soit $\mathcal{F} = \{E\}$ simplement régulière; $\Phi(S(\mathcal{F})) < \infty$; admettons l'hypothèse 2.6. On dira que $F = \Delta(\mathcal{F})$ est un *espace séparé*-

rable, si dans tout ensemble d'une infinité de points H, $\subset$ F, il existe un ensemble dénombrable h, tel que $\bar{h} = \bar{\mathrm{H}}$.

En employant l'idée générale dans [(D); p. 88 et 89] de la démonstration de la séparabilité des espaces cartésiens, nous vérifions le fait suivant.

(2.8) Admettons qu'il existe une famille *dénombrable* $G' = \{ O' \}$ partielle d'enveloppes épaisses-Φ, relativement à $\mathcal{F}$, telle que : (1°) $\Delta(G') = F$ [e. g. tout point de $F = \Delta(\mathcal{F})$ est indéfiniment couvert au sens de la métrique Φ par G'] et telle que (2°) si O est une enveloppe quelconque de G et p est un point dans O, alors il existe un nombre $\eta = \eta(p, O) > 0$ de sorte que

$$(2.8\,a)\qquad O' \in G', \qquad O' \ni p, \qquad \Phi(O') < \eta \qquad \text{entraînent} \quad \bar{O}' \subset O.$$

Dans ces conditions F *est séparable.*

En effet, si H ($\subset$ F) est un ensemble quelconque, désignons par $O'_1, O'_2, \ldots, O'_n, \ldots$, les enveloppes de G' jointes à H. En raison de (1°) tout point de H est contenu dans une suite infinie partielle des O'_n de mesure-Φ tendant vers zéro. Soient p un point sur H et O une enveloppe le contenant. Il existe une infinité de O'_{jk}, tels que

$$(1_0)\qquad O'_{jk} \in G', \qquad O'_{jk} \ni p, \qquad \Phi(O'_{jk}) \to 0 \qquad (\text{pour } k \to \infty).$$

Vu [(2°), (2.8 a)], il existe un k', tel que $O'_{jk} \subset O$ pour tout $k > k'$. Or par construction O'_n contient un point p_n de H. Donc il existe des points p_{n_k}, en sorte que

$$(2_0)\qquad p_{n_k} \in H, \qquad p_{n_k} \in O'_{jk} \subset O, \qquad \text{dès que} \quad k > k'.$$

Considérons l'ensemble $h = \{ p_1, p_2, \ldots \}$; on a $h \subset H$; en outre, toute enveloppe O contenant le point p considéré de H contient des points de h (2_0); d'où $\bar{h} = \bar{\mathrm{H}}$. Vu la définition 2.7 *la constatation* 2.8 *est vérifiée.*

Dans la suite, nous admettrons toujours les hypothèses de 2.8; ainsi $F = \Delta(\mathcal{F})$ sera toujours séparable. Dans ces conditions, en tant que $G' \subset G$ et

$$F = \Delta(G') \subset \Delta(G) \qquad \text{et} \qquad \Delta(G) \subset F$$

(car les O de G sont dans F), on aura

$$(2.9)\qquad \Delta(G) = F.$$

En tenant compte de la définition [(2.1), (2.1 *a*)] et de l'hypothèse 2.6, on s'aperçoit que *la famille des ensembles épais-Φ de* G *est simplement régulière*, avec la métrique-Φ [on note que toute réunion, même indénombrable, d'ensembles de G, est une enveloppe relativement à $\mathcal{F}$ (2.5 *d*) et, par conséquent, est mesurable-Φ].

On dira que p est un *point d'accumulation* de H ($\subset$ F), si toute enveloppe O contenant p contient des points de H distincts de p. *Si p est un point d'accumulation de* H, *toute enveloppe* O *contenant p contient une infinité de points de* H (distincts de p). En effet, selon la définition, O contient un point p_1 tel que $p_1 \in \mathrm{H}$, $p_1 \neq p$. Vu (2.5 *e*), il existe une enveloppe O$'$ contenant p, telle que p_1 est étranger à O$'$; $\mathrm{O}_1 = \mathrm{O}\mathrm{O}'$ est une enveloppe, $\mathrm{O}_1 \ni p$, p_1 est hors de O_1; dans O_1 il y a un point p_2, $\in \mathrm{H}$, tel que $p_2 \neq p$; nécessairement $p_2 \neq p_1$; en raison de (2.5 *e*) on trouve une enveloppe O^2 contenant p et ne contenant pas p_2; posons $\mathrm{O}_2 = \mathrm{O}_1\mathrm{O}^2$; p est dans l'enveloppe O^2 et p_1, p_2 sont étrangers à O^2. Moyennant induction, on montre l'existence d'une suite infinie d'enveloppes O_n ($n = 1, 2, \ldots$) et de points p_n, de sorte que

$$(2.10)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{O} = \mathrm{O}_0 \supset \mathrm{O}_1 \supset \mathrm{O}_2 \supset \ldots; \\ p \in \mathrm{O}_n; \quad p_n \in \mathrm{HO}(n = 1, 2, \ldots); \quad p_n \neq p; \\ p_n \in \mathrm{O}_{n-1}(n = 1, 2, \ldots) \\ {[p_1, p_2, \ldots, p_n \text{ sont étrangers à } \mathrm{O}_n(n = 1, 2, \ldots)],} \end{array}\right.$$

L'énoncé en italiques, donné plus haut, est démontré.

(2.11) *Si p* ($\in$ F) *est un point d'accumulation de* H ($\subset$ F), *on peut réaliser* (2.10) *avec un choix des enveloppes O_n de manière que $\Phi(\mathrm{O}_n) \to 0$* (*pour $n \to \infty$*).

On note que $\Delta(\mathrm{G}) = \mathrm{F}$ (2.9), donc il existe une suite d'enveloppes E_n ($n = 1, 2, \ldots$), telles que $\mathrm{E}_n \ni p$, $\Phi(\mathrm{E}_n) \to 0$. En reprenant la démonstration présentée au-dessus, avec

$$\mathrm{O}_1 = \mathrm{O}\mathrm{O}^1\mathrm{E}_1, \qquad \mathrm{O}_2 = \mathrm{O}_1\mathrm{O}^2\mathrm{E}_2, \qquad \ldots;$$

nous constatons encore une fois la validité de (2.10), mais avec

$$\Phi(\mathrm{O}_n), \leqq \Phi(\mathrm{E}_n), \to 0 \qquad \text{pour} \quad n \to \infty;$$

ainsi (2.11) *est vérifié.*

On dira que p est un *point limite* de H ($\subset$ F), si p est un point isolé dans l'ensemble de points d'accumulation de H (e. g. est contenu dans une enveloppe sans autres points d'accumulation de H).

DÉFINITION 2.12. — On dira que la suite de points p $(n = 1, 2, \ldots)$ *converge vers le point* p, *et l'on écrira* $p_n \rightarrow p$, *ou bien* $\lim_n p_n = p$, si l'ensemble de points d'accumulation de $\{p_n\}$ est le seul point p.

Un ensemble H $(\subset F)$ est *fermé*, si H contient tous ses points d'accumulation, ce qui équivaut à dire : $H = \overline{H}$. On dira que H est *ouvert*, si tout point de H est intérieur à H, e. g. $H = (H)^0$, où $(H)^0$ est l'ensemble des points de H intérieurs à H. Il s'ensuit que $F - H$ est fermé (ouvert), si H est ouvert (fermé).

Il faut vérifier que la nouvelle définition d'ensembles ouverts est équivalente à la définition présentée dans (2.5)-(2.5 *e*), e. g. que les enveloppes (relativement à $\mathcal{F}$) sont identiques avec les ensembles ouverts selon la définition que nous venons de donner. Si H est ouvert d'accord avec l'hypothèse 2.6, e. g. si H est une enveloppe, tout point p de H est intérieur à H, parce que H est une enveloppe contenue dans H et contient p; donc H est ouvert selon la seconde définition. Réciproquement, si tout point de H est intérieur à H, associons avec tout point p dans H une enveloppe O (p), telle que

$$O(p) \ni p, \qquad O(p) \subset H.$$

L'ensemble $\sum O(p)$ (p parcourant H) est identique avec H et il est une enveloppe en vertu de (2.5 *d*). On conclut ainsi :

(2.13) *La famille d'enveloppes est identifiée avec la famille d'ensembles* H, *tels que* $H = (H)^0$.

Or, le complément [relativement à $F = \Delta(\mathcal{F})$] d'une enveloppe est un noyau; donc on conclut comme il suit.

(2.14) *La famille de noyaux* (relativement à $\mathcal{F}$) *est identique avec les ensembles* $(\subset F)$ *fermés.*

Les réunions et les intersections finies d'ensembles ouverts (fermés) sont ouvertes (fermées); toute réunion, même indénombrable, d'ensembles ouverts est ouverte [(2.15), (2.5 *d*)]; toute intersection denombrable d'ensembles fermés est fermée (si elle est non vide).

En général, *dans l'espace* $F = \Delta(\mathcal{F})$ *il n'y a pas de compacticité*, c'est-à-dire le théorème (valide dans les espaces cartésiens et avec la formulation ordinaire), constatant que « tout ensemble formé d'une infinité de points appartenant à un ensemble fermé E admet un point d'accumulation appartenant à E » [*voir* (D); p. 90], ce théorème est en défaut. Conséquemment, *le théorème classique de couverture de Borel-Lebesgue est aussi en défaut.*

3. **La pseudo-distance et les espaces complets-G′.** — L'hypothèse dans (2.8) et (2.8 *a*) étant admise, ajoutons les conditions suivantes :

HYPOTHÈSE 3.1. — Si x_1, x_2 [dans $F = \Delta(\mathcal{F})$] sont des points, tels que des O, $\subset G'$ (2.8), existent contenant x_1, x_2, alors on définit le nombre

$$(3.1\,a)\quad \rho(x_1, x_2) = \min \Phi(O) \qquad (\text{pour O de G}' \text{ contenant } x_1, x_2).$$

On a $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1) \geqq 0$. *Admettons qu'une famille* G′, *satisfaisant à* (2.8), (2.8 *a*), *existe, de sorte que*

$$(3.1\,b)\quad \rho(x_1, x_2) > 0, \qquad \textit{dès que} \quad x_1 \neq x_2 \qquad \textit{et} \qquad \rho(x_1, x_2) \quad \textit{existe.}$$

De plus, admettons la condition suivante de continuité de ρ.

(3.1 *c*) *Le point* x_2 *et le nombre* $\sigma = \rho(x_2, x_3) > 0$ *étant fixes,* x_3 *ayant la possibilité de varier, on a* $\rho(x_1, x_3) \to \sigma$, *lorsque* $\rho(x_1, x_2) \to 0$.

On note que $\rho(x_1, x_2)$ ne s'annule que si $x_1 = x_2$.

Dans la suite, la partie (3.1 *b*) *de cette hypothèse sera toujours admise. Le théorème* 12.1 *sera le premier endroit où nous faisons usage de la condition* (3.1 *c*) *de continuité de* ρ.

La fonction $\rho(x_1, x_2)$ n'est pas en général une distance au sens usuel, car il se peut que $\rho(x_1, x_2)$ ne satisfasse pas à l'inégalité triangulaire. Vu [(2.8; (1°)], à tout point x de f, des O_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) correspondent, de sorte que

$$(1_0) \qquad O_\nu \in G', \qquad O_\nu \ni x, \qquad \Phi(O_\nu) \to 0.$$

En conséquence de (2.8 *a*), la suite d'enveloppes $\{O_\nu\}$ contient une suite partielle infinie, soit $\{O_{\nu_i}\}$ ($\nu_1 < \nu_2 < \ldots$), de manière que

$$(2_0) \qquad O_{\nu_1} \supset O_{\nu_2} \supset \ldots; \qquad O_{\nu_i} \ni x; \qquad \Phi(O_{\nu_i}) \to 0.$$

(3.2) *L'intersection d'une suite infinie d'enveloppes qui satisfait à* (1_0) *est nécessairement le seul point x.*

En effet, si $\prod O_\nu$ contenait un point $x_1 (\in F)$ distinct de x, la formule (3.1 *a*) donnerait $\rho(x, x_1) = 0$, ce qui serait contraire à (3.1 *b*).

On observe que *les deux constatations suivantes s'équivalent :*

$$(3_0) \quad x_\nu \in O_\nu, \qquad x \in O_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots); \qquad O_\nu \in G'; \qquad \Phi(O_\nu) \to 0;$$

$$(4_0) \qquad \rho(x, x_\nu) \to 0.$$

En effet, (3_0) entraîne $\rho(x, x_\nu) \leqq \Phi(O_\nu) \to 0$. En outre, si ($4_0$) a lieu, on pourra trouver, pour $\nu = 1, 2, \ldots$, une $O_\nu \in G'$, de sorte que

$$O_\nu \ni x_\nu, \qquad O_\nu \ni x, \qquad (\rho(x, x_\nu) \leqq) \, \Phi(O_\nu) < \rho(x, x_\nu) + \frac{1}{\nu},$$

ce qui implique $\Phi(O_\nu) \to 0$.

En tant que l'inégalité triangulaire pour ρ peut être en défaut, on ne peut pas affirmer que les deux relations

$$\rho(x, x_\nu) \to 0, \qquad \rho(y, x_\nu) \to 0$$

entraînent nécessairement l'identité des points x, y.

(3.4) Si $H \subset F \, (= \Delta(\mathcal{F})$ et p est un point *intérieur* à H au sens spécifié à la suite de l'hypothèse (2.6), alors p est intérieur à H selon une définition de points intérieurs, qui fait intervenir seulement les enveloppes de la famille G'; la réciproque est aussi vraie.

En effet, soit p intérieur à H au sens de la section 2. Il existe une enveloppe $O \, (\in G)$ telle que $O \ni p$, $O \subset H$; p est contenu dans une suite d'enveloppes O' de G' dont la mesure $\Phi(O')$ tend vers zéro; donc (2.8 *a*), il existe une $O' \in G'$ telle que

$$O' \ni p, \qquad O' \subset O \subset H.$$

Ainsi p est intérieur à H au second sens. La réciproque est immédiate. (3.4) *est vérifié.*

De la même manière, on peut établir les faits suivants :

(3.5) Les notions d'un point extérieur, de la frontière, de la fermeture d'un ensemble, d'un point (ou ensemble) isolé, de la séparabilité, d'un point d'accumulation, d'un point limite, introduites avec l'aide seulement des enveloppes de G', sont équivalentes aux notions correspondantes présentées dans la section 2.

En établissant les propositions (3.4) *et* (3.5) *on n'a pas usé de l'hypothèse* 3.1.

Nous allons montrer que (2.11) a lieu avec $O_n \in G'$, c'est-à-dire la proposition suivante est valide.

(3.6) *Si* $p (\in F)$ *est un point d'accumulation de* $H \, (\subset F)$ *et une enveloppe* O' *de* G' *contient* p, *alors des* O_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *et des points* p_n *existent de sorte que*

$$(3.6\,a) \quad \begin{cases} O_n \in G'; \quad O' = O_0 \supset O_1 \supset O_2 \supset \ldots; \\ p \in O_n; \quad p_n \in HO' \quad (n = 1, 2, \ldots); \quad p_n \in O_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots); \end{cases}$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont étrangers à O_n, $\Phi(O_n \to 0$.

Selon la définition dans la forme nouvelle, toute enveloppe de G′, contenant p, contient un point de H distinct de p. Ainsi il existe un point p_1, tel que

$$p_1 \in \mathrm{H}, \qquad p_1 \neq p, \qquad p_1 \subset \mathrm{O}' = \mathrm{O}_0.$$

D'après (2.5 e), il existe une enveloppe O^1 contenant p et disjoint de p_1. Par un raisonnement déjà employé, $\mathrm{O}_0\mathrm{O}^1$ contient une enveloppe O_1, telle que

$$\mathrm{O}_1 \in \mathrm{G}', \qquad p \in \mathrm{O}_1, \qquad \Phi(\mathrm{O}_1) < \frac{1}{2};$$

nécessairement, p_1 est étranger à O_1 et $\mathrm{O}' = \mathrm{O}_0 \supset \mathrm{O}_1$. Dans O_1 il y a un point p_2, $\neq p$, appartenant à H. Vu (2.5 e), il existe une O^2 de G, telle que $\mathrm{O}^2 \ni p$ et que p_2 soit étranger à O^2; l'enveloppe $\mathrm{O}_1\mathrm{O}^2$ contient une O_2 de G′, telle que

$$p \in \mathrm{O}_2, \qquad \Phi(\mathrm{O}_2) < \frac{1}{2^2};$$

nécessairement p_2 est étranger à O_2 et $\mathrm{O}_0 \supset \mathrm{O}_1 \supset \mathrm{O}_2$. *L'énoncé* [(3.6), (3.6 a)] *s'établit par induction* (avec $\Phi(\mathrm{O}_n) < 2^{-n}$).

DÉFINITION 3.7. — On dira qu'une suite de points $p_n\,(\in \mathrm{F})$ ($n = 1, 2, \ldots$) *tend vers un point* p ($\in$ F), *au sens de* G′, et l'on écrira

$$(3.7\,a) \qquad p_n \sim (\mathrm{G}')p,$$

si des O'_n existent en sorte que

$$(3.7\,b) \qquad \mathrm{O}'_n \in \mathrm{G}', \qquad p \in \mathrm{O}'_n, \qquad p_n \in \mathrm{O}'_n, \qquad \Phi(\mathrm{O}'_n) \to 0.$$

En tenant compte de (3_0) et (4_0) on conclut ainsi :

$$(3.8) \qquad p_n \sim (\mathrm{G}')p \quad \text{veut dire} \quad \rho(p, p_n) \to 0 \quad [(3,1\,a)].$$

Nous avons déjà remarqué [*voir* le texte qui précède (3.4)] que, avec la notation actuelle, les relations

$$(1^\circ) \qquad p_n \sim (\mathrm{G}')p, \qquad p_n \sim (\mathrm{G}')q$$

n'entraînent pas, en général, que $p = q$. Voici une condition suffisante pour que (1°) implique $p = q$.

HYPOTHÈSE 3.9. — Supposons que tout couple A, B d'ensembles *joints* de G′ peut être enfermé dans un ensemble C de G′, de sorte que

$$(3.9\,a) \qquad \Phi(\mathrm{A} + \mathrm{B}) \to 0 \quad \text{entraîne} \quad \Phi(\mathrm{C}) \to 0.$$

(3.10) *Dans l'hypothèse* 3.9 *les relations* (1°) *entraînent* $p = q$.

En effet, des A_n et des B_n existent, telles que

$$A_n \in G', \quad B_n \in G', \quad p_n \in A_n, \quad p_n \in B_n, \quad p \in A_n, \quad q \in B_n$$

et

$$\Phi(A_n) \to 0, \quad \Phi(B_n) \to 0.$$

On a $A_n B_n \neq 0$. Il existe une enveloppe C_n de G', telle que

$$(2^\circ) \qquad A_n + B_n \subset C_n, \quad \Phi(C_n) \to 0.$$

Pourtant, C_n contient les points p, q pour $n = 1, 2, \ldots$ (car cela est vrai pour $A_n + B_n$). La seconde relation (2°) signifie que (3.1 *a*) $\rho(p, q) = 0$, donc (3.1 *b*) $p = q$, *ce qui démontre* (3.10).

En vertu de [(3.6), (3.6 *a*)], si p est un point d'accumulation de H, on peut trouver une suite de points $p_n \in H$ ($p_n \neq p$), tels que $p_n \sim (G')p$.

(3.11) *Désignons par* $A(G')\{p_n\}$ *l'ensemble des points* q, *tels que* $p_n \sim (G')\, q$. $A(G')\{p_n\}$ peut être vide; pourtant, si $A(G')\{p_n\}$ n'est pas vide et *si l'hypothèse* 3.9 *a lieu*, $A(G')\{p_n\}$ *sera un point unique.*

Si $p_n \sim (G')\, p$ et $\{p_{n_i}\}$ est une suite infinie partielle de $\{p_n\}$, on aura $p_{n_i} \sim (G')\, p$ [car (3.8) $\rho(p, p_n) \to 0$, donc $\rho(p, p_{n_i}) \to 0$, d'où (3.8) la conclusion] :

(3.12) *Dans l'hypothèse* 3.9, *si* $p_n \sim (G')\, p$, *on aura* $p_n \to p$, *e. g.* $\lim p_n = p$, *au sens de la définition* 2.12.

En effet, si la conclusion est en défaut, l'ensemble de points d'accumulation de l'ensemble $\{p_n\}$ contiendra un point q distinct de p. En vertu de [(3.6), (3.6 *a*)], on pourra trouver une suite d'ensembles A_i, $\in G'$, et une suite de points q_i, $\in \{p_n\}$, de sorte que pour $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$q \in A_i, \quad q_i \in A_i; \quad A_1 \supset A_2 \supset \ldots; \quad \Phi(A_i) \to 0.$$

Nécessairement, $q_i = p_{n_i}$, avec $n_i \to \infty$, et $q_i \sim (G')\, q$. Pourtant, vu la remarque antérieure à (3.12), $p_{n_i} \sim (G')\, p$. On a abouti à une contradiction à (3.10) [les relations (1°), qui interviennent dans (3.10), étant pour les p_{n_i}]. Ainsi (3.12) *est vérifié.*

(3.13) *Au cas de compacticité, si* $p_n \to p$ (définition 2.12), *on aura* $p_n \to (G')\, p$.

En effet, si l'on admet la compacticité, toute suite infinie de points q_j ($\in F$) aura au moins un point d'accumulation. Si la conclusion dans (3.13) est en défaut, il ne sera pas vrai que $\rho(p, p_n) \to 0$. Il existe une suite infinie $\{p_{\nu_j}\}$ ($j = 1, 2, \ldots$) et un nombre positif α

de sorte que $\rho(p, p_{\nu_j}) \geqq \alpha$ ($j = 1, 2, \ldots$). Alors il se voit que lès relations

$$O \in G', \qquad O \ni p, \qquad \Phi(O) < \alpha$$

entraînent que les p_{n_j} sont tous étrangers à O (sinon O contient un $r = p_{\nu_j}$ et l'on aura $\rho(p, r) \leqq \Phi(O) < a$). Évidemment p n'est pas un point d'accumulation de la suite $\{p_{\nu_j}\}$. Ayant admis le caractère de compacticité, on s'aperçoit qu'il existe un point q, $\neq p$, qui est un point d'accumulation de $\{p_{\nu_j}\}$; q sera aussi un point d'accumulation de la suite originelle $\{p_n\}$. Pourtant, $p_n \to p$ veut dire que p est le seul point d'accumulation de $\{p_n\}$. Il y a contradiction, *ce qui établit* (3.13).

La compacticité est une condition trop restrictive de notre point de vue actuel. Donc dans la suite, *nous ne faisons pas usage d'une hypothèse de compacticité.*

Avec les points d'accumulation et les points intérieurs, définis moyennant la famille G′ particulière d'enveloppes, on peut définir un ensemble *fermé* H, comme un ensemble contenant ses points d'accumulation (e. g. $H = \overline{H}$) et l'on peut définir un ensemble ouvert comme un ensemble dont tout point lui est intérieur [e. g. $H = (H)^0$]. En tenant compte de (2.13) et (2.24), on conclut ainsi :

(3.14) *Les noyaux et les enveloppes* (relativement à $\mathcal{F}$) *sont correspondamment identiques avec les ensembles* ($\subset$ F) *fermés et ouverts, quand ces ensembles-ci sont définis comme on vient de l'indiquer.*

Nous introduisons la notion fondamentale suivante :

Définition 3.15. — On dira que l'espace $F = \Delta(\mathcal{F})$ est *complet*-G′, si les hypothèses (2.8), (3.1) et (3.9) ont lieu et si toute suite de points p_n ($\in$ F) ($n = 1, 2, \ldots$), telle que

(3.15 *a*) $\rho(p_n, p_m) < \varepsilon$ pour tout $n \geqq n(\varepsilon)$ et tout $m \geqq n(\varepsilon)$ [un $n(\varepsilon)$ fini correspondant à tout $\varepsilon > 0$], nécessairement tend vers un point p, au sens de G′ (définition 3.7), e. g. :

(3.15 *b*) $$p_n \sim (G')p.$$

Dans la suite on admet que F ($= \Delta(\Phi)$) *est complet*-G′.

En tant que la fonction ρ n'est pas une vraie distance, cette notion d'un espace *complet*-G′ ressemble d'assez loin à la notion usuelle d'un espace métrique (e. g. distancié) complet. En raison de l'hypothèse (3.9) [*voir* (3.10)] *le point p dont il s'agit dans* (3.15 *b*) *est unique.*

Étant donné un ensemble H ($\subset$F), le nombre

(3.16) $$\rho(\mathrm{H}) = \max \rho(p_1, p_2) \qquad (p_1, p_2 \text{ sur } \mathrm{H})$$

sera analogue au diamètre d'un ensemble dans un espace distancié.

THÉORÈME 3.17. — *Soit* $\mathrm{F} = \mathrm{A}(\mathcal{F})$ *complet*-G′ (définition 3.15). *Si les* F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *sont fermés, non vides, tels que*

(3.17 a) $$\mathrm{F}_1 \supset \mathrm{F}_2 \supset \ldots, \qquad \rho(\mathrm{F}_n) \to 0,$$

alors l'intersection $\mathrm{F}^* = \mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\ldots$ *est un seul point.*

Choisissons un point p_n sur F_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Pour $m \geqq n$ on a $p_n \in \mathrm{F}_m \subset \mathrm{F}_n$, donc (3.16),

$$\rho(p_n, p_m) \leqq \rho(\mathrm{F}_n) \qquad (m \geqq n).$$

L'espace F étant complet-G′ et $\rho(\mathrm{F}_n) \to 0$, il s'ensuit qu'il existe un point p unique, de sorte que $p_n \sim (\mathrm{G}')\, p$. En vertu de (3.12) l'ensemble de points d'accumulation de $\{p_n\}$ est le seul point p. Si k (> 0) est fixe, la suite $p_k, p_{k+1}, \ldots$ est dans F_k; le seul point d'accumulation de cette suite est p; F_k est fermé, donc $p \in \mathrm{F}_k$, cela étant pour $k = 1, 2, \ldots$. Par conséquent, $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\ldots$ contient p. Si q était un autre point de l'intersection des F_n, on aurait p et q sur F_n $(n = 1, 2, \ldots)$, d'où $\rho(p, q) \leqq \rho(\mathrm{F}_n)$ et nécessairement on aurait $\rho(p, q) = 0$; selon l'hypothèse 3.1, cela veut dire que $q = p$. *Le théorème est démontré.*

Soit P *parfait* (e. g. fermé, sans points isolés) et supposons que l'ensemble E est contenu dans P. Nous empruntons à M. Denjoy les termes « interne » et « frontalier » au sens suivant. Un point p sur E est un point *interne* de E, relativement à P, s'il existe une enveloppe ω (e. g. un ensemble ouvert), telle que

$$p \in \omega, \qquad \omega(\mathrm{P} - \mathrm{E}) = 0.$$

p, $\in$P, est un point *frontalier* de E, relativement à P, si pour toute enveloppe ω contenant p on a

$$\omega\mathrm{E} \neq 0, \qquad \omega.(\mathrm{P} - \mathrm{E}) \neq 0.$$

Nous désignons par O (E) et f(E) les ensembles, respectivement, des points internes de E et des points frontaliers de E. On dira que $\overline{\omega}$ est une *portion de* P, si

(3.18) $\overline{\omega} = \overline{\omega\mathrm{P}}$ (fermeture de ωP), où ω est une enveloppe et $\omega\mathrm{P} \neq 0$.

(3.19) *Soit* P ($\subset$F) *parfait. Il existe une suite dénombrable de portions* $\overline{\omega}_i$ ($i = 1, 2, \ldots$) *de* P *de sorte que, si p est un point quelconque sur* P, *on peut trouver une suite partielle de* $\{\overline{\omega}_i\}$, *soit* $\overline{\omega}_{i_\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), *en sorte que p soit interne* (relativement à P) *à* $\overline{\omega}_i$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), $\Phi(\overline{\omega}_{i_\nu}) \to 0$ *(pour* $\nu \to \infty$) *et* $\rho(\overline{\omega}_{i_\nu})$ (3.16) $\to 0$.

Les enveloppes de la famille G′ (2.8) sont en nombre dénombrablement infini. Soient les O_i ($i = 1, 2, \ldots$) les ensembles de G′ joints à P. Les portions $\overline{\omega}_i = \overline{O_i P}$ ($i = 1, 2, \ldots$) répondent à toutes les propriétés de l'énoncé (3.19). En effet, si p est un point quelconque sur P, alors [en tant que $\Delta(G') = F \supset P$] il existe une suite infinie d'enveloppes A_j ($j = 1, 2, \ldots$) de G′ telle que $A_j \ni p$ et $\Phi(A_j) \to 0$. Puisque $\Phi(A_j)$ est arbitrairement petit pour j grand, en raison de (2.8 a) on peut trouver une suite d'entiers positifs j_k, $\to \infty$, de sorte que

$$B_k = A_{j_k} \supset \overline{A}_{j_{k+1}} = \overline{B}_{k+1}, \qquad B_k \in G', \qquad B_k \ni p, \qquad \Phi(B_k) \to 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots; j_1 = 1).$$

Or B_k, contenant p, est joint à P, donc B_k est un O_i; e. g. une suite O ($\nu_{i_\nu} = 1, 2, \ldots$) existe telle que

$$(a_1) \quad O_{i_\nu} \subset G', \qquad O_{i_\nu} \ni p, \qquad O_{i_\nu} \supset \overline{O}_{i_{\nu+1}}, \qquad \Phi(O_{i_\nu}) \to 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

en vertu de la troisième relation on obtient $\Phi(\overline{O}_{i_\nu}) \to 0$; $p \in P$ et $p \in O_{i_\nu}$, d'où $p \in O_{i_\nu} P \subset \overline{O_{i_\nu} P} = \overline{\omega}_{i_\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$); de plus

$$(a_2) \qquad \overline{\omega}_{i_\nu} \subset \overline{O}_{i_\nu}, \qquad \Phi(\overline{\omega}_{i_\nu}) \left(\leqq \Phi(\overline{O}_{i_\nu})\right) \to 0.$$

Aussi se voit-il que p est interne (relativement à P) à toute portion $\overline{\omega}_{i_\nu}$ de P. Soit ν, $\geqq 2$, un entier particulier, et envisageons deux points p_1, p_2 sur $\overline{O}_{i_\nu}$. Comme une conséquence de la troisième relation (a_1), on aura p_1, p_2 dans $O_{i_{\nu-1}}$. Or (3.1 a) $\rho(p_1, p_2) = \min \Phi(O)$ pour O de G′ contenant p_1, p_2, d'où $\rho(p_1, p_2)$ ne surpasse pas $\Phi(O_{i_{\nu-1}})$; par là (3.16) :

$$\rho(\overline{O}_{i_\nu}) = \max \rho(p_1, p_2) \left(p_1, p_2 \text{ sur } \overline{O}_{i_\nu}\right) \leqq \Phi(O_{i_{\nu-1}}) \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

et, en raison de la quatrième relation (a_1),

$$\rho(\overline{O}_{i_\nu}) \to 0 \qquad (\text{pour } \nu \to \infty).$$

Il suit de la définition que $\rho(A) \leqq \rho(B)$, dès que A et B sont deux ensembles quelconques tels que $A \subset B$ ($\subset$F); ainsi (a_2),

$$\rho(\overline{\omega}_{i_\nu}) \left[\leqq \rho(\overline{O}_{i_\nu})\right] \to 0.$$

La constatation (3.19) *est vérifiée. Ce résultat reste vrai même si* P *est seulement fermé.*

Le théorème de couverture de *Borel-Lebesgue* a, dans le cas actuel, une forme plus faible comme il suit.

(3.20) *Si un ensemble fermé* H ($\subset F = \Delta(\mathcal{F})$) *est couvert par la réunion d'une famille* $\Gamma = \{ O \}$ *d'enveloppes, il est couvert par la réunion finie ou dénombrable d'ensembles de* Γ.

Selon l'énoncé (3.19), qui s'applique avec P = H seulement fermé, il existe une suite *dénombrable* de portions

$$(b_1) \qquad \overline{\omega}_i = \overline{O_i H} \qquad [i = 1, 2, \ldots;\ O_i \in G']$$

de H, de sorte que tout p, $\in$ H, est contenu dans une suite partielle de $\{ \omega_i \}$, soit $\{ \overline{\omega}_{i_\nu} \}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), avec $\Phi(\overline{\omega}_{i_\nu}) \to 0$; les i_ν en général dépendent de p. Avec tout point p sur H associons une enveloppe particulière O (p) de la famille Γ, telle que $O(p) \ni p$. Considérons une suite $\{ \overline{\omega}_{i_\nu} \}$ associée avec p comme on vient de l'indiquer. On peut faire en sorte que $p \in O_{i_\nu} H$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) [*voir* le texte qui précède (a_2)], tandis que (a_1) $\Phi(O_{i_\nu}) \to 0$. En vertu de (2.8 *a*) [où l'on pose $O = O(p)$, $O' = O_{i_\nu}$, l'entier ν (> 0) étant variable] on obtient $\overline{O}_{i_\nu} \subset O(p)$ pour un $\nu = \nu(p)$ suffisamment grand. Ainsi

$$(b_2) \quad p \in [O_{s(p)} H \subset \overline{O_{s(p)} H} =] \, \overline{\omega}_{s(p)} \subset [\overline{O}_{s(p)} \subset] \, O(p) \qquad (s(p) = i_{\nu(p)}).$$

Un choix de l'entier $s(p)$ (> 0) peut être fait pour tout p sur H de manière que (b_2) ait lieu. On obtient

$$(b_3) \qquad H = \sum \overline{\omega}_{s(p)}, \qquad p \text{ parcourant H.}$$

La réunion dont il s'agit ici n'est indénombrable qu'en apparence, car les $\overline{\omega}_{s(p)}$ (p décrivant H) sont contenus dans la suite (b_1) $\{ \omega_i \}$ ($i = 1, 2, \ldots$) *dénombrable.* En retenant dans (b_3) seulement les ensembles mutuellement distincts, on s'aperçoit qu'il existe une suite de points p_j ($j = 1, 2, \ldots$), tels que

$$p_j \in H, \qquad H = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\omega}_{s(p_j)}.$$

Or (b_2) $\overline{\omega}_{s(p_j)} \subset O(p_j)$, donc $H \subset \sum_j O(p_j)$, *ce qui démontre* (3.20).

4. Les théorèmes du genre de Cantor-Baire et de Cantor-Bendixon. — Si A, B sont des ensembles, on écrit $A > B$, si $A \supset B$ et $A - B$ est non vide. Nous démonstrons le résultat suivant (le théorème de *Cantor-Baire*).

THÉORÈME 4.1. — *Soient* F_α *fermés* (e. g. des noyaux relativement à $\mathcal{F}$) *tels que*

$$F_1 > F_2 > \ldots > F_\omega > \ldots > F_\alpha > \ldots \tag{4.1 a}$$

(énumération transfinie). *Cette suite* $\{ F_\alpha \}$ *est dénombrable au plus : nécessairement il existe un* α' *de classe* I *ou de classe* II (la première classe des nombres transfinis) *pour lequel* $F_{\alpha'} = 0$.

Envisageons la famille *dénombrable* $G' = \{ O_1, O_2, \ldots \}$ dont il s'agit dans [(2.8), (2.8 *a*)]. Je dis qu'il existe un entier i_1 ($\geqq 1$) minimal tel que

$$O_{i_1} F_1 \neq 0, \qquad O_{i_1} \subset F - F_2 \qquad (F = \Delta(\mathcal{F})). \tag{a_1}$$

En effet, au cas contraire, tout O_i ($i = 1, 2, \ldots$) satisferait à

$$O_i \subset F - F_1, \qquad \text{ou bien} \quad O_i F_2 \neq 0; \tag{a_2}$$

soit p un point sur $F_1 - F_2$; p étant dans l'enveloppe $F - F_2$, il existe un O_k tel que $O_k \ni p$, $O_k \subset F - F_2$; O_k ne satisfait pas à la seconde relation (a_2), donc O_k devrait satisfaire à la première relation (a_2), e. g. O_k est disjoint de F_1; mais O_k contient le point p, qui est dans F_1; il y a contradiction, *ce qui vérifie l'existence d'un* i_1 ($\geqq 1$) *minimal tel que* (a_1) *ait lieu.* De même il existe un i_2 ($\geqq 1$) minimal pour lequel

$$O_{i_2} F_2 \neq 0, \qquad O_{i_2} \subset F - F_3.$$

Évidemment $i_2 \neq i_1$. En général, il existe un i_α minimal en sorte que

$$O_{i_\alpha} F_\alpha \neq 0, \qquad O_{i_\alpha} \subset F - F_{\alpha+1}. \tag{a_3}$$

Les i_α sont distincts et la suite des O_{i_α} est contenue dans la suite dénombrable $G' = \{ O_1, O_2, \ldots \}$. Or les F_α sont dans une correspondance biunivoque avec les O_{i_α}, e. g. avec les éléments d'une suite dénombrable; donc la suite $\{ F_\alpha \}$ est dénombrable. Enfin le raisonnement bien connu dans la théorie classique mène à la conclusion que pour un α' de classe I ou de classe II on aura $F_{\alpha'} = 0$ (on use du fait que l'ensemble des nombres de la classe II est indénombrable). *Le théorème est établi.*

Notons que ce théorème est établi au moyen de l'hypothèse [(2.8), (2.8 *a*)] sur la famille G'; c'est une condition qui mène à une sorte de séparabilité. Donc la conclusion du théorème n'est pas surprenante, si l'on tient compte de la remarque de M. Denjoy [(D); p. 448], selon laquelle le théorème de Cantor-Baire a lieu dans tout espace qui est (1°) *distancié* et (2°) *séparable*. Pourtant, dans le cas actuel, l'espace n'est pas vraiment distancié.

D'accord avec la définition classique nous dirons qu'un ensemble H est *clairsemé*, si tout sous-ensemble de H contient des points isolés.

(4.2) *Un ensemble* H *clairsemé est dénombrable.*

Notre démonstration de cette proposition est modelée sur celle d'une preuve de ce résultat au cas classique, donnée par Sierpinski. Au lieu d'un réseau, nous usons de la famille G' (2.8). Soient O_i $(i = 1, 2, \ldots)$ les enveloppes de G', dénombrées d'une façon quelconque. Les points isolés de H (et en effet d'un ensemble quelconque dans F) sont au plus dénombrables, car à tout point p de cette sorte on peut associer une $O_{k(p)}$ $(\in G')$ d'indice minimal, telle que $O_{k(p} \ni p$ et $O_{k(p)}$ est disjointe de $H - p$. Soit H_1 l'ensemble des points non isolés de H. Nous enfermons tout point isolé de H dans une O_i de G' d'indice minimal i, de sorte que O_i contienne le point considéré et ne contienne pas de points de H_1 distincts de ce point. L'ensemble des points isolés de H_1 est au plus dénombrablement infini. Les O_i, dont on fait usage pour enfermer les points isolés de H_1, sont distincts entre eux et ils sont distincts des O_k employées pour enfermer les points isolés de H. En procédant de cette manière, on obtient une suite d'ensembles

$$H > H_1 > H_2 > \ldots$$

[où $H_i - H_{i+1}$ est non vide, $H_0 = H$]. Il est concevable que H soit vide pour un n fini; alors H est dénombrable. Supposons que $H_n \neq 0$ pour tout $n < \omega$ (ω étant le premier nombre transfini). Désignons par H_ω l'ensemble des points de H qui restent après qu'on a retranché successivement les points isolés de tout ensemble H_n $(n < \omega)$. En procédant ainsi transfiniment, on obtient une suite d'ensembles

$$H > H_1 > \ldots > H_\omega > \ldots > H_\alpha > \ldots.$$

Les H_α sont en une correspondance biunivoque avec une certaine suite partielle, nécessairement dénombrable, de G' [à la façon de (a_1), (a_3), avec H_α pour F_α]; donc la suite des H_α est au plus dénombrable, e. g. il existe un α' des classes I, II pour lequel $H_{\alpha'} = 0$. D'autre part, à chaque pas (e. g. en procédant d'un H_α non vide à $H_{\alpha+1}$, qui peut être vide) on retranche un nombre dénombrable (au plus) de points de l'ensemble envisagé; donc H clairsemé est dénombrable dans tous les cas, et *l'énoncé* (4.2) *est vérifié.*

Dans la théorie actuelle [e. g. les conditions qui interviennent dans (2.8), (2.8 *a*) étant admises] le théorème suivant de Cantor-Bendixon a lieu.

THÉORÈME 4.3. — *Si* $H\ (\subset F = \Delta(\mathcal{F}))$ *fermé n'est pas dénombrable,* H *est la réunion d'un ensemble parfait* P *et d'un ensemble dénombrable, en effet clairsemé,* H_0.

Si $p\ (\in F)$ est un point particulier et $Q\ (\subset F)$ un ensemble, deux alternatives se présentent :

(1°) Il existe un O de G′ tel que $O \ni p$ et OQ est clairsemé.

(2°) Pour tout O de G′, tel que $O \ni p$ l'ensemble OQ n'est pas clairsemé (e. g. OQ contient un sous-ensemble dense en lui-même).

En tenant compte de l'emploi du terme « point de condensation » dans le cas classique, nous dirons que p est un *point de condensation* de Q, si l'alternative (2°) a lieu.

Si H est clairsemé, H sera dénombrable (4.2). Admettons donc que H n'est pas clairsemé. Posons

$$H = N + (H - N), \tag{4.4}$$

où N est l'ensemble de points de condensation de H. La décomposition (4.4) est analogue à celle donnée dans le livre de M. de la Vallée-Poussin [*Intégrales de Lebesgue,* Paris, 1934] afin d'établir le théorème 4.3 au cas classique. Tout point de condensation est un point d'accumulation (la réciproque n'est pas vraie). Par hypothèse, H contient ses points d'accumulation, donc $H \supset N$; l'écriture (4.4) est justifiée. Soit p un point d'accumulation de N; tout O, $\in G'$, qui contient p, contient des points q de N; q de N est un point de condensation de H, donc [(2°), avec q, H au lieu de p, Q] l'ensemble OH n'est pas clairsemé; d'où p est un point de condensation de H, e. g. $p \in N$; par là, N *est fermé.* Notons le fait suivant : si $Q \supset Q_0$ et Q_0 est dense en lui-même, tout point de Q_0 sera un point de condensation de Q_0, ainsi que de Q. Supposons, si c'est possible, que N [dans (4.4)] possède un point isolé r. Il existe un O de G′, tel que

$$O \ni r, \qquad O(N - r) = 0; \tag{3°}$$

r étant un point de condensation de H, il s'ensuit que (2°) OH n'est pas clairsemé; il existe donc un ensemble Q, $\subset OH\ (Q \neq 0)$ dense en lui-même; tout point de Q est un point de condensation de Q, donc de H (qui contient Q). Il y a un s de Q, $s \neq r$; $s\ (\in O)$ étant un point de condensation de H, on aura $s \in N - r$, ce qui est contraire à la seconde relation (3°). Par suite N *est parfait.*

Si $H - N$ n'était pas clairsemé, on pourrait trouver un Q, $\subset H - N$, dense en lui-même; tout point p de Q étant un point de condensation de Q sera un point de condensation de H; donc $p \in N$. Cette contradiction établit le fait que $H - N$ est clairsemé, *ce qui démontre le théorème.*

5. **Des théorèmes topologiques généraux.** — Nous dirons que $H (\subset F = \Delta(\mathcal{F}))$ est *non dense* sur P parfait, si toute enveloppe O, jointe à P, contient une enveloppe O′, jointe à P et dépourvue de points de HP. On dira que H, contenu dans P, est *dense* sur P (e. g. « non non dense » selon l'usage de M. Denjoy), si H est *partout dense* sur une portion (3.18) $\overline{\omega}$ de P, c'est-à-dire, si $\overline{H\overline{\omega}} = \overline{\omega}$. Un ensemble *gerbé* (ou une *gerbe*) de P est une réunion au plus dénombrable d'ensembles dont chacun est non dense sur P (autrement dit c'est un ensemble de la première catégorie). H, $\subset$ P parfait, est un *résiduel* de P, si $P - H$ est une gerbe de P. Ces locutions sont d'accord avec l'emploi de ces termes par M. Denjoy [(D); p. 137 et 138].

Nous procédons toujours dans l'hypothèse de définition 3.15, qui signifie que $F = \Delta(\mathcal{F})$ *est un espace complet*-G′ [cette hypothèse fait intervenir les conditions (2.8), (3.1) et (3.9)].

On sait que dans un espace *distancié* et complet au sens ordinaire, le théorème, généralement connu sous le nom de Baire (*voir* S. Saks, *Theory of the integral,* Warszawa-Lwow, 1937, p. 54) est valide. Notre espace n'est pas strictement distancié et il n'est pas vraiment complet. Néanmoins il est naturel de s'attendre à ce que, dans le cas actuel, le théorème, que nous venons de mentionner, reste vrai dans une formulation convenable. Au lieu de donner tout de suite une démonstration d'un tel théorème nous préférons suivre le mode des développements topologiques de M. Denjoy, comme présentés dans [(D); livre II]. Parmi certains autres résultats, une telle théorie va entraîner un analogue du théorème indiqué dans le livre de Saks.

Le résultat [(D); p. 135] suivant a lieu dans le cas actuel.

(5.1) *Si* H, $\subset$ P *parfait, est fermé, l'ensemble* f(H) (des points frontaliers de H relativement à P) *est non dense sur* P.

La démonstration de (5.1), qui est assez proche de celle donnée dans [(D); p. 135], sera omise.

(5.2) *Dire qu'un ensemble* H *est clairsemé au sens donné antérieurement à* (4.2) *équivaut à ce que* H *est non dense sur tout ensemble parfait.*

La preuve est comme au cas classique [(D); p. 136) et nous la laissons de côté.

(5.3) Étant donnés un ensemble P parfait, des points a_n, $\in P$ ($n = 1, 2, \ldots$), partout denses sur P et des enveloppes ω_n, $\ni a_n$, *l'ensemble*

$$(5.3\,a)\qquad R = P\,\overline{\lim_n}\,\omega_n$$

(des points sur P, contenus dans une infinité des ω_n) *est partout dense sur* P.

Éventuellement, nous montrons que R (5.3 *a*) est un résiduel de P. La démonstration de [(5.3), (5.3 *a*)] est partiellement modelée sur celle d'un théorème fondamental analogue dans [(D); p. 139]. Il n'y a pas de compacticité au cas actuel; pourtant nous allons user du fait que F $(= \Delta(\mathcal{F}))$ est complet-G'. L'énoncé (5.3) est démontré, si l'on montre que toute enveloppe (ou bien sa fermeture) $O = O_0$ de G', jointe à P, contient un point de R. Soit O une telle enveloppe. Une infinité des a_n se trouve dans O; a_{n_1} d'indice minimal est dans O; $O\omega_{n_1}$ est une enveloppe contenant a_{n_1}. En raison de [(2.8), (2.8 *a*)], il existe une enveloppe O_1, telle que

$$(1_0)\qquad O_1 \in G', \qquad O_1 \ni a_{n_1}, \qquad \Phi(O_1) < 1_1, \qquad \overline{O} \subset O\,\omega_{n_1}.$$

Soit a_{n_2} le point d'indice minimal parmi les a_n dans O_1; $n_2 > n_1$; l'enveloppe $O_1\omega_{n_2}$ contient a_{n_2}. Encore [(2.8), (2.8 *a*)] on trouve une enveloppe O_2, telle que

$$(2_0)\qquad O_2 \in G', \qquad O_2 \ni a_{n_2}, \qquad \Phi(O_2) < \frac{1}{2}; \qquad \overline{O}_2 \subset O_1\,\omega_{n_2}.$$

En procédant ainsi, on trouve successivement les indices (chacun étant minimal) $n_1 < n_2 < \ldots$ et des ensembles O_j ($j = 1, 2, \ldots$) de sorte que

$$(3_0)\quad O_j \in G'; \qquad O_{j-1} \supset \overline{O}_j; \qquad a_{n_j}\ (\text{sur P}) \in O_j \subset \overline{O}_j \subset \omega_{n_j}; \qquad \Phi(O_j) < \frac{1}{j}.$$

Posons $F_j = \overline{O_j P}$; on a

$$a_{n_j} \in O_j P \subset F_j, \qquad \text{donc} \quad F_j \neq 0;$$

les F_j sont parfaits et (3_0)

$$(4_0)\qquad F_1 \supset F_2 \supset \ldots.$$

En tenant compte de la définition (3.16) on note que

$$(5_0)\qquad \rho(A) \leqq \rho(B), \qquad \text{dès que} \quad A \subset B.$$

Or (3_0) $F_j \subset \overline{O}_j \subset O_{j-1}$, donc

$$(6_0) \qquad \rho(F_j) \leqq \rho(O_{j-1}) \qquad (j \geqq 1).$$

Lorsque x_1, x_2 sont des points dans O_{j-1}, $\rho(x_1, x_2)$ (3.1 *a*) vaut $\min \Phi(O')$ pour O', $\in G'$, contenant x_1, x_2; O_{j-1} étant dans la famille G', on obtient $\rho(x_1, x_2) \leqq \Phi(O_{j-1})$ (x_1, x_2 dans O_{j-1}); donc (3.16) $\rho(O_{j-1}) \leqq \Phi(O_{j-1})$ [en effet, si $A \in G'$, on aura toujours $\rho(A) \leqq \Phi(A)$]; conséquemment [(6_0), (3_0)]

$$\rho(F_j) < (j-1)^{-1} \quad (j \geqq 2) \qquad \text{et} \qquad \rho(F_j) \to 0.$$

En tenant compte de (4_0) il se voit que le théorème 3.17 s'applique aux ensembles $F_j = \overline{O_j P}$; ainsi il existe un point unique a, tel que

$$F_1 F_2 \ldots = a \in P.$$

On observe que $a \in F_j \subset P$ (car F_j est une portion de P). En outre (3_0)

$$(7_0) \qquad a \in \overline{O}_j \subset O_{j-1}, \qquad \text{d'où} \qquad a \in \prod_1^\infty O_j;$$

en tant que $O_j \in G'$ et $\Phi(O_j)\left(< \frac{1}{j}\right) \to 0$, (3.2) entraîne la relation $a = O_1, O_2, \ldots$. On peut écrire $a_{n_j} \sim (G')\, a$ (définition 3.7). En raison de (3.12) on obtient $a_{n_j} \to a$ (définition 2.12); e. g. l'*ensemble de points d'accumulation de l'ensemble* $\{a_{n_j}\}$ *existe et consiste du seul point* a ($\in$ P). Or [(7_0), (3_0)]

$$a \in \overline{O}_j \subset \omega_{n_j} \quad (j = 1, 2, \ldots), \qquad a \in \overline{O}_0 = \overline{O};$$

c'est-à-dire, a (sur P) est un point de R (5.3 *a*) contenu dans $\overline{O}$. *L'énoncé* [(5.3), (5.3 *a*)] *est vérifié.*

L'énoncé suivant a été démontré pour la première fois au cas classique par Baire.

THÉORÈME 5.4. — *Soient* P ($\subset F = \Delta(\mathcal{F})$) *parfait et les* H_n, $\subset P$ ($n = 1, 2, \ldots$), *non denses sur* P. *Alors* $R' = P - \sum H_n$ *est partout dense sur* P.

On note que, selon la définition, R' (étant le complément relativement à P d'une gerbe située sur P) est un résiduel. Il suffit d'établir que, si une enveloppe O de G' est jointe à P, R' aura un point sur $\overline{O}$. Or H_1 étant non dense sur P, toute enveloppe A jointe à P contient une enveloppe B, jointe à P et disjointe de H_1; en raison de (2.8 *a*) *on peut choisir* B *dans la famille* G′ [car, si q est un point de P dans B et l'enveloppe B n'est pas dans G′, on pourra trouver une B_1 de G′ contenant q et telle que $\overline{B}_1 \subset B$; $\overline{B}_1$ est disjointe de H_1, puisque B l'est]. Ainsi il existe une enveloppe O_1, telle que

$$O_1 \subset G', \qquad \overline{O}_1 \subset O, \qquad O_1 P \neq 0, \qquad \overline{O}_1 H_1 = 0, \qquad \Phi(O_1) < 1;$$

soit b_1 un point de O_1P. Puisque H_2 est non dense sur P il existe une O_2 telle que

$$O_2 \in G', \qquad \overline{O}_2 \subset O_1, \qquad O_2 P \neq 0, \qquad \overline{O}_2 H_2 = 0; \qquad \Phi(O_2) < \frac{1}{2};$$

désignons par b_2 un point de O_2P; on a $\overline{O}_2 H_1 = 0$, e. g. $\overline{O}_2.(H_1 + H_2) = 0$. En procédant ainsi indéfiniment, on obtient successivement des enveloppes O_j ($j = 1, 2, \ldots$) et des points b_j de sorte que (avec $O_0 = O$)

$$(1^\circ) \qquad \begin{cases} O_j \in G'; \quad O_{j-1} \supset \overline{O}_j; \quad b_j \in O_j P; \\ \overline{O}_j(H_1 + \ldots + H_j) = 0; \quad \Phi(O_j) < \dfrac{1}{j}. \end{cases}$$

Posons $F_j = \overline{O_j P}$ et suivons le raisonnement donné plus haut à la suite de (3_0) jusqu'à (6_0). Dans le cas actuel on obtiendra encore

$$(2^\circ) F_j \quad (\neq 0) \quad \text{parfait}; \qquad F_1 \supset F_2 \supset \ldots, \qquad \rho(F_j) \leqq \rho(O_{j-1}) \leqq \Phi(O_{j-1}),$$

si l'on tient compte du fait que $O_{j-1} \in G'$ et d'une remarque à la suite de (6_0) (à propos de l'inégalité $\rho(A) \leqq \Phi(A)$, valide si $A \in G'$; vu (1°) $\rho(F_j)$, $< (j-1)^{-1}$ $(j \geqq 1) \to 0$ pour $j \to \infty$. Conséquemment (2°) et le théorème 3.17 mènent à la conclusion que l'intersection des portions F_j de P est un point unique b; ainsi (1°) :

$$(3^\circ) \qquad F_1 F_2 \ldots = b \in P, \qquad b \in \overline{O}_j \subset O_{j-1}, \qquad b \in \prod O_j.$$

$\Phi(O_j)$ tendant vers zéro, (3.2) implique que $O_1 O_2 \ldots = b$, ce qui signifie que b_j $(1^\circ) \sim (G')$ b et (3.12) $b_j \to b$. Comme à la suite de (7_0) (avec a et les a_{n_j}), on conclut que l'*ensemble* $\{ b_j \}$ *a un point d'accumulation unique* b ($\in$ P). Si j est un entier quelconque, > 0, les relations (1°) entraînent que $\overline{O}_j$ est disjoint de $H_1 + \ldots + H_j$; d'autre part (3°) : $b \subset O_j \subset \overline{O}_j$, donc b est étranger à $H_1 + \ldots + H_j$, cela étant pour $j = 1, 2, \ldots$, le point b sur P est étranger à la réunion des H_j ($j = 1, 2, \ldots$); d'où b est un point du résiduel R′; de plus, b est dans l'enveloppe O de G′ jointe à P et autrement considérée au hasard. *Le théorème* 5.4 *est démontré.*

Nous pouvons maintenant compléter l'énoncé (5.3) ainsi.

THÉORÈME 5.5. — *Les* a_n, $\in$ P *parfaits* ($n = 1, 2, \ldots$), *étant partout denses sur* P *et une enveloppe* ω_n *contenant* a_n (*pour* $n = 1, 2, \ldots$), *l'ensemble* $R = P\,\overline{\lim_n}\,\omega_n$ *est partout dense sur* P *et* R *est un résiduel de* P.

Cela s'établit au moyen du théorème de Baire (5.4) d'une manière suggérée par une démonstration analogue [(D); p. 144 et 145] au cas classique. Nous posons $A_n = \omega_n + \omega_{n+1} + \ldots$; A_n est une enveloppe; on a

$$(5.5\,a)\qquad R = P\prod A_n = P - \sum H_n, \qquad \text{ou}\quad H_n = P - PA_n;$$

H_n est fermé (e. g. est un noyau) et non dense sur P (car A_n est partout dense sur P); le théorème s'ensuit en vertu du théorème 5.4.

(5.6) *Les théorèmes* 5.4 *et* 5.5 *s'équivalent.*

Nous venons d'indiquer que le théorème 5.4 entraîne le théorème 5.5. Pour démontrer la réciproque, nous suivons les lignes de raisonnement présentées pour un but analogue dans [(D); p. 143 et 144]. Il y a assez de modification pour justifier l'inclusion ci-après des détails. Notons d'abord les deux propositions suivantes :

(a_1) Si H, $\subset$ P parfait, est non dense sur P, $\overline{H}$ le sera.

(a_2) Toute réunion finie d'ensembles non denses sur P est non dense sur P.

Admettons le théorème 5.5 et envisageons les conditions du théorème 5.4. Ainsi H_n, $\subset$ P parfait ($n = 1, 2, \ldots$), est non dense sur P. Posons

$$(a_3)\qquad F_n = \overline{H}_1 \ldots + \overline{H}_n \quad (\text{fermé}), \qquad A_n = F - F_n \quad (\text{ouvert}),$$
$$\text{où}\quad F = \Delta(\mathcal{F});$$

on a $A_1 \geqq A_2 \geqq \ldots$. Soient O_n ($n = 1, 2, \ldots$) les enveloppes de la famille G' jointes à P. En raison de (a_1) et (a_2), F_n fermé est non dense sur P. Par là, O_n contient un point p_n, $\in$ P, dans A_n ouvert ($p_n \in PO_nA_n$), Or $\Delta(G') = F$ et $\Delta\{O_1, O_2, \ldots\} \supset P$, e. g. tout point p de P est contenu dans une infinité de O_n ($\in$ G') de mesure tendant vers zéro :

$$(a_4)\qquad p\ (\text{sur P}) \in O_{n_j}\quad (j = 1, 2, \ldots), \qquad O_{n_j} \ni p_{n_j}. \qquad \Phi(O_{n_j}) \to 0.$$

Vu (3.2), $\prod O_{n_j} = p$; on a $p_{n_j} \sim (G')\,p$ (définition 3.7); de plus (3.12) $p_{n_j} \to p$ (définition 2.12), e. g. p est le seul point d'accumulation des p_{n_j}. Il se voit que les p_n [$\in$ P ($n = 1, 2, \ldots$)] sont partout denses sur P, tandis que $p_n \in A_n$ ouvert. Selon le théorème 5.5, à présent admis, $R = P\,\overline{\lim} A_n$ est partout dense sur P (et R est un résiduel). Puisque $A_1 \geqq A_2 \geqq \ldots$ on a $R = P \prod A_n$; ainsi (a_3) R est disjoint des F_n et, en particulier, des H_n ($n = 1, 2, \ldots$); donc $R \subset P - \sum H_n = R'$ et R' ($\subset$ P) est nécessairement partout dense sur P. (5.6) *est vérifié.*

La proposition suivante est un analogue du corollaire dans [(D); p. 147], elle s'ensuit de (5.1) et du théorème 5.4 et nous la présentons sans démonstration.

(5.7) *Si* F_n ($n = 1, 2, \ldots$) *est fermé et* P *parfait est la réunion* $\sum F_n$. *l'ensemble* $P - \sum \circ(F_n)$ [où $\circ(F_n)$ est l'ensemble des points internes à F_n relativement à P] *sera non dense sur* P.

(5.8) Dans les conditions de l'énoncé (5.7), si Q est une portion de P disjointe de $K = P - \sum \circ(F_n)$ on aura

$$Q \subset \sum \overline{\omega}_j, \qquad \text{avec} \quad \overline{\omega}_j = \overline{B_j P}, \qquad B_j \in G' \quad (j = 1, 2, \ldots), \qquad \overline{\omega}_j \subset \circ(F_{n_j}),$$

où les n_j sont des entiers positifs.

C'est une proposition analogue à un résultat au cas classique [(D); p. 147 et 148] mais dans une forme plus faible en raison du défaut possible de la compacticité. Q étant disjointe de K, on a $Q \in \sum \circ(F_n)$. Si p est un point de Q, $p \in \circ(F_n)$ pour un $n = n(p)$; p est interne à F_n, relativement à P, donc dans G' il y a un A (p) et un B (p), tels que $A(p) \ni p$, $B(p) \ni p$, A (p) est disjoint de $P - F_{n(p)}$, $A(p) \supset \overline{B}(p)$; d'où la portion $\overline{\omega}(p) = \overline{B(p)P}$ est disjointe de $P - F_{n(p)}$; $\overline{\omega}(p) \subset F_{n(p)}$. Or, si r est un point sur $\overline{\omega}(p)$, on aura $r \in P$ et $r \in \overline{B}(p) \subset A(p)$, e. g. r sera contenu dans un A (p) de G' disjoint de $P - F_{n(p)}$, e. g. r sera interne à $F_{n(p)}$, relativement à P, et $\overline{\omega}(p) \subset \circ(F_{n(p)})$. Les B ($p$), p décrivant Q, étant dans la famille G', sont au plus en nombre dénombrable; ainsi

$$Q \subset \sum B(p) \;(p \text{ parcourant } Q) = \sum B(p_j),$$

où les p_j ($j = 1, 2, \ldots$) sont des points sur Q ($\subset$ P). *La conclusion dans* (5.8) *s'ensuit,* avec $B_j = B(p_j)$ et $n_j = n(p_j)$.

6. **Des théorèmes topologiques généraux** (*suite*). — Nous introduisons une définition de la continuité de fonctions numériques (réelles) sur des sous-ensembles de l'espace F $(= \Delta(\mathcal{F}))$.

DÉFINITION 6.1. — $f(x)$, définie (finie) sur un ensemble parfait P $(\subset F)$ sera dite *continue* (*continue*-(G')) à un point a, $\in P$, si, étant donné un $\varepsilon > 0$, on peut trouver une enveloppe

$$A(= A(\varepsilon) = A(a, \varepsilon))$$

de G', telle que

$$(6.1\,a)\qquad A \ni a,\qquad f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon \qquad \text{pour tout } x \text{ sur } AP;$$

$f(x)$ est continue sur P, si $f(x)$ l'est en tout point de P.

(6.2) Si $f(x)$ est continue-G' sur P $(\subset F)$ parfait, les ensembles

$$(6.2\,a)\qquad H_c^+ = \{x \in P; f(x) \geqq c\},\qquad H_c^- = \{x \in P; f(x) \leqq c\}$$

sont fermés (s'ils existent) pour tout c réel.

En effet, supposons b un point d'accumulation de H_c^+ (H_c^+ est contenu dans P fermé, donc $b \in P$). Tout A de G' contenant b contient un point de H_c^+ distinct de b. Or $f(x)$ est continue au point b (sur P). Selon (6.1 a) il existe un A_n tel que

$$(1^\circ)\qquad A_n \in G',\qquad A_n \ni b,\qquad f(x) < f(b) + \frac{1}{n}\qquad \text{pour tout } x \in A_n P,$$

Dans A_n il y a un x_n, $\in H_c^+$, $x_n \neq b$; donc

$$(2^\circ)\qquad c \leqq f(x_n) < f(b) + \frac{1}{n}\qquad \text{et}\qquad f(b) > c - \frac{1}{n};$$

cela étant pour $n = 1, 2, \ldots$, il s'ensuit que $f(b) \geqq c$, e. g. $b \in H_c^+$ et H_c^+ est bien fermé. Pour H_c^- on procède avec l'inégalité $f(b) - \frac{1}{n} < f(x)$; *l'énoncé* (6.2) *est vérifié*. On peut envisager la *semi-continuité supérieure* (inférieure), caractérisée par les relations $A \ni a$, $f(x) < f(a) + \varepsilon$ [ou bien $f(a) - \varepsilon < f(x)$] sur AP; alors il se voit que H_c^+ (6.2 a) [ou bien H_c^-] est fermé.

(6.3) Soit $f(x)$ une fonction numérique définie (et finie) sur P $(\subset F)$ parfait; si H_c^- (6.2 a) (quand il existe) est fermé pour tout c réel, alors à tout point a de f et à tout $\varepsilon > 0$, un $A = A(a, \varepsilon)$ correspond, tel que

$$(6.3\,a)\qquad A \in G',\qquad A \ni a,\qquad f(x) < f(a) + \varepsilon\qquad \text{sur } AP.$$

Si H_c^- (6.2 *a*) est fermé pour tout *c* réel, une constatation du genre donné relativement à (6.3 *a*) aura lieu avec l'inégalité remplacée par la suivante : $f(a) - \varepsilon < f(x)$ sur AP.

Démontrons la prmière partie de cet énoncé. Ainsi H_c^+ est fermé. Soit *a* un point sur P et $\varepsilon > 0$; posons $b = f(a) + \varepsilon$. On note que

$$(3^o) \qquad Q_b^+ = \{x \in P; f(x) < b\} = P - H_b^+;$$

Q_b^+ est interne à P_n, e. g. une enveloppe O existe, telle que $G_b^+ = OP$. Or au point *a* (sur P) on a $f(a) < b$, donc (3°) $a \in Q_b^+$ et $O \ni a$. Vu (2.8 *a*), on peut trouver un $A = A(a, \varepsilon)$ tel que $A \in G'$, $A \ni a$, $A \subset O$; en tant que $AP \subset Q_b^+$, toutes les relations (6.3 *a*) auront lieu. La deuxième partie de (6.3) s'établit de la même manière. (6.3) *est vérifié.*

(6.4) *Soit $f(x)$ définie (et finie) sur* P ($\subset$F) *parfait; si* H_c^+, H_c^- (6.2 *a*) *(quand ils existent) sont fermés pour tout c réel, alors $f(a)$ est continue*-G′ *sur* P *selon la définition* 6.1.

En effet, H_c^+ étant fermé et *a* étant un point quelconque sur P, on a la conclusion (6.3 *a*). Puisque H_c^- est aussi fermé, il s'ensuit qu'un $B = B(a, \varepsilon)$ existe, tel que

$$(6.3\,a') \qquad B \in G', \qquad B \ni a, \qquad f(a) - \varepsilon < f(x) \qquad \text{sur BP.}$$

L'enveloppe $AB = D(a, \varepsilon)$ contient le point *a*; vu (2.8 *a*) on peut trouver un C, $\subset D(a, \varepsilon)$, tel que

$$C \in G', \qquad C \ni a, \qquad f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon \qquad \text{sur CP;}$$

nous avons établi (6.4).

Les définitions de continuité et de semi-continuité, présentées plus haut, équivalent (dans les hypothèses de l'Ouvrage actuel) aux définitions de ces caractères données dans [(T); *section* 16].

(6.5) *Dire que $f(x)$, définie et finie sur* P ($\subset$F) *est continue* (-(G′)) *à un point x_0 de* P *équivaut à ce que $f(x) \to f(x_0)$, lorsque x, variant sur* P, $\sim$ (G′) x_0 [e. g. [(3.8), (3.1 *a*)] $\rho(x, x_0) \to 0$, *x* variant sur P].

Admettons $f(x)$ continue au point x_0 selon la définition 6.1. Si la conséquence indiquée dans (6.5) est en défaut, il existe un nombre $\alpha > 0$ et une suite de points $x_j \in P$ ($j = 1, 2, \ldots$), de sorte que $\rho(x_j, x_0) \to 0$ et $|f(x_j) - f(x_0)| > \alpha$. On peut trouver des enveloppes O_j ($j = 1, 2, \ldots$), telles que

$$O_j \in G', \qquad O_j \ni x_0, \qquad O_j \ni x_j, \qquad \Phi(O_j) \to 0.$$

Soit ε (> 0) inférieur à α; il existe une $A = A(x_0, \in)$, telle que

$$A \in G', \qquad A \ni x_0, \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{pour } x \text{ sur AP.}$$

Pour j' suffisamment grand, afin que $\Phi(O_{j'})$ soit suffisamment petite, en vertu de (2.8 a) on obtient $\overline{O}_{j'} \subset A$; pour $x = x_j$, $j = j'$ nous avons abouti à deux inégalités contradictoires. Donc, si $f(x)$ est continue au point x_0, on aura $f(x) \to f(x_0)$ quand $x\ (\in P) \sim (G')\, x_0$. Réciproquement, supposons que

$$|f(x) - f(x_0)| \to 0 \qquad \text{quand} \quad \rho(x, x_0)\,(x \in P) \to 0;$$

ainsi il existe un $\delta(\varepsilon)$, > 0, tel que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, dès que $\rho(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$ $(x \in P)$. Choisissons une $A = A(x_0, \varepsilon)$, telle que

$$A \in G', \qquad A \ni x_0, \qquad \Phi(A) < \delta(\varepsilon);$$

pour tout x sur AP on aura

$$\rho(x, x_0) = \min_{B}(B, \in G', \ni (x, x_0))\, \Phi(B) \leqq \Phi(A) < \delta(\varepsilon),$$

e. g. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Par là $f(x)$ est continue au point x_0 selon la définition 6.1, *ce qui achève la démonstration de* (6.5).

Il est possible maintenant d'aborder la considération des résultats, dans les conditions actuelles, analogues aux trois théorèmes fondamentaux topologiques [(D); p. 174, 175, 199 et 208] dus à M. Denjoy.

(6.6) *Soit* $f(x, t)$ *continue* (définition 6.1) *en* x *sur* P, $\subset$F, parfait, pour tout t, situé sur un ensemble e *d'un espace euclidien*, e possédant un point d'accumulation (au sens ordinaire) t_0, étranger à e; on désigne par $h(x)$ l'ensemble des points d'accumulation (au sens usuel) de la fonction $f(x, \varepsilon)$, lorsque x est sur P et t, εe, $\to t_0$.

Voici l'analogue du théorème général [(D); p. 174 et 175].

(6.7) *Admettons que* λ *soit un nombre réel, pouvant être infini, et que des points* x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *partout denses sur* P *et des* t_n, εe, $\to t_0$ *existent de sorte qu'une des trois relations ci-après ait lieu :*

(1°) $$f(x_n, t_n) \to \lambda;$$

(2°) $$\overline{\lim_{n}} f(x_n, t_n) \leqq \lambda \text{ fini};$$

(3°) $$\underline{\lim_{n}} f(x_n, t_n) \geqq \lambda \text{ fini}.$$

Alors il existe un résiduel R *de* P, *tel que sur* R, *dans le cas envisagé :*

(1_0) $$h(x) \ni \lambda;$$

(2_0) $$\underline{\lim_{t \to t_0}} f(x, t) \leqq \lambda;$$

(3_0) $$\overline{\lim_{t \to t_0}} f(x, t) \geqq \lambda.$$

Toute fonction $f(x, t_n)$ est continue sur P, donc il existe une enveloppe A_n de G', telle que (6.1 *a*)

$$(a_1) \qquad A_n \ni x_n, \qquad f(x_n, t_n) - \frac{1}{n} < f(x, t_n) < f(x_n, t_n) + \frac{1}{n}$$

pour tout x sur $A_n P$. En raison du théorème 5.5 l'ensemble $R = P \overline{\lim} A_n$ (e. g. l'ensemble des points de P contenus dans une infinité des A_n) est un résiduel de P. Au cas (1°), si x est un point sur R, vu (a_1) pour une suite n_i ($n_i \to \infty$ avec i), on obtient $\lim f(x, t_{n_i}) = \lambda$; (1_0) s'ensuit sur R. Dans le cas (2°), x étant sur R, d'où $x \in A_{n_i}$ ($i = 1, 2, \ldots$), on obtient

$$\underline{\lim_t} f(x_0 t) \leqq \overline{\lim_i} f(x, t_{n_i}) \leqq \overline{\lim} \left[f(x_{n_i}, t_{n_i}) + \frac{1}{n_i} \right] \leqq \overline{\lim_n} f(x_n, t_n) \leqq \lambda,$$

e. g. (2_0) en résulte. De même pour le cas (3°). (6.7) *est vérifié.*

Dans (D) le théorème inverse (relations fermées) est présenté sous deux formes alternatives, à savoir [(D); p. 199 et 200]. Notre énoncé, analogue à [(D); p. 200] est comme il suit.

(6.8) Admettons (6.6) et soit λ un nombre réel, qui peut être infini. *Toute portion* $\bar{\omega}'$ $[= \overline{A'P}$, où A' est une enveloppe] *de* P *contient une portion* $\bar{\omega}$ $[= \overline{AP}$, A étant une enveloppe] *de* P, *à laquelle il correspond un* $\eta = \eta(\bar{\omega}, \varepsilon)$ (> 0), de sorte que l'inégalité $|t - t_0| < \eta$ $(t \in e)$ et l'une des relations suivantes, valide sur P,

$$(1') \qquad \lim_t f(x, t) = \lambda,$$

$$(2') \qquad \overline{\lim_t} f(x, t) \leqq \lambda \text{ fini},$$

$$(3') \qquad \underline{\lim_t} f(x, t) \geqq \lambda \text{ fini},$$

entraînent correspondamment sur $\bar{\omega}$:

$$(1_1) \qquad \begin{cases} |f(x, t) - \lambda| < \varepsilon \quad (\lambda \text{ fini}), \qquad f(x, t) > \frac{1}{\varepsilon} \ (\lambda = +\infty), \\ \qquad f(x, t) < -\frac{1}{\varepsilon} \quad (\lambda = -\infty); \end{cases}$$

$$(2_1) \qquad f(x, t) < \lambda + \varepsilon;$$

$$(3_1) \qquad f(x, t) > \lambda - \varepsilon.$$

Notons d'abord que, *si une portion* $\bar{\omega} = \overline{AP}$ *de* P *est contenue dans une portion* $\bar{\omega}_0 = \overline{A_0 P}$ *de* P, $\bar{\omega}$ *sera une portion de* $\bar{\omega}_0$. En effet, on peut vérifier que

$$(b_1) \qquad \overline{AP} = \overline{A\,\overline{A_0 P}}, \qquad \text{e. g. } \bar{\omega} = \overline{A\bar{\omega}_0}.$$

On a $\overline{A_0P} \subset P$ et $A\overline{A_0P} \subset AP \subset \overline{AP}$, donc

$$(b_2) \qquad \overline{A\,\overline{A_0P}} \subset \overline{AP};$$

en outre, $AP\,[\subset \overline{AP}] \subset \overline{A_0P}$ (car $\omega \subset \overline{\omega}_0$ selon l'hypothèse) et $AP \subset A$, d'où

$$(b_3) \qquad AP \subset A\,\overline{A_0P} \subset \overline{A\,\overline{A_0P}} \quad \text{et} \quad \overline{AP} \subset \overline{A\,\overline{A_0P}};$$

(b_1) et (b_2) entraînent (b_1), *ce qui établit la constatation en italique.*

Si l'énoncé (6.8) est en défaut, on peut trouver un $\varepsilon > 0$ et une portion $\overline{\omega}' = \overline{A'P}$, telle que pour toute portion $\overline{\omega} = \overline{AP}$ de P, contenue dans $\overline{\omega}'$ [$\overline{\omega}$ donc étant une portion de $\overline{\omega}'$], le nombre $\eta(\overline{\omega}, \varepsilon)\,(> 0)$ n'existe pas. A l'ensemble $\overline{\omega}'$ $(\neq 0)$ parfait la constatation (3.19) (où l'on pose $P = \overline{\omega}'$) s'applique. En tenant compte d'une remarque à la suite de (3.19), il se voit qu'il existe une infinité dénombrable de portions $\overline{\omega}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ de $\overline{\omega}'$, de la forme $\overline{\omega}_i = \overline{O_i \overline{\omega}'}$ $(O_i \in G')$, en sorte que, si x est un point sur $\overline{\omega}'$, il y aura une suite partielle $\overline{\omega}_{i_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ telle que, pour $\nu = 1, 2, \ldots,$

$$(b_4) \qquad x \text{ est interne à } \overline{\omega}_{i_\nu}, \qquad \Phi(\overline{\omega}_{i_\nu}) \to 0, \qquad \rho(\overline{\omega}_{i_\nu}) \;(3.16) \to 0.$$

En général, toute portion d'une portion de P est une portion de P. Donc *les $\overline{\omega}_i$ sont des portions de* P, *contenues dans $\overline{\omega}'$.* Selon une remarque faite plus haut, les nombres $\eta(\overline{\omega}_i, \varepsilon)$ n'existent pas.

Pour t_i sur e, avec $|t_i - t_0| < \frac{1}{i}$, un x_i sur $\overline{\omega}_i$ existe tel que dans le cas envisagé [parmi (1'), (2') et (3')], la conclusion correspondante [parmi (1_1), (2_1) et (3_1)] est en défaut :

$$(1_2) \qquad \begin{cases} |f(x_i, t_i) - \lambda| \geqq \varepsilon \quad (\lambda \text{ fixe}), \qquad f(x_i, t_i) \leqq \frac{1}{\varepsilon}\,(\lambda = +\infty), \\ \qquad\qquad f(x_i, t_i) \geqq -\frac{1}{\varepsilon} \quad (\lambda = -\infty); \end{cases}$$

$$(2_2) \qquad f(x_i, t_i) \geqq \lambda + \varepsilon;$$

$$(3_2) \qquad f(x_i, t_i) \leqq \lambda - \varepsilon$$

[comme dans (D); p. 200], cela étant pour $i = 1, 2, \ldots$. Soient x un point quelconque sur $\overline{\omega}'$ et O une enveloppe contenant x. La suite $\overline{\omega}_{i_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ (b_4) étant associée avec x, en raison de (2.8 *a*) il existe un $\nu = \nu_1$ (minimal) tel que $\overline{\omega}_{i_\nu} = \overline{O_i \overline{\omega}'} \subset \overline{O}_{i_\nu} \subset O$ pour $\nu = \nu_1$. Le point x_{i_ν} $(\nu = \nu_1)$ sera dans O. Donc *les x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ sont partout denses sur $\overline{\omega}'$* : $x_i \in O_i$. Considérons par exemple (6.8, 1'),

$\lim f(x, t) = \lambda$ avec λ fini. En supposant que (6.8) est en défaut, nous avons obtenu (1_2) $|f(x_i, t_i) - \lambda| \geqq \varepsilon$ ($i = 1, 2, \ldots$), donc

$$(1_3) \qquad \underline{\lim}_{t} |f(x_i, t_i) - \lambda| \geqq \varepsilon.$$

La fonction $g(x, t) = |f(x, t) - \lambda|$ est continue-G′ en x sur P, pour tout $t \in e$, comme $f(x, t)$ l'est par hypothèse [cela est facile à vérifier, en employant la définition de continuité selon (T); section 16]. Le théorème (6.7) s'applique avec $\overline{\omega}'$, $g(x, t)$, ε au lieu de [P, $f(x, t)$, λ; l'hypothèse (6.7, 3°) $\underline{\lim}\, g(x_i, t_i) \geqq \varepsilon$ est satisfaite; donc *sur un résiduel* R *de* $\overline{\omega}'$ *on a*

$$(6.8, 3_0) \qquad \overline{\lim_{t}}\, g(x, t) = \overline{\lim_{t}} |f(x, t) - \lambda| \geqq \varepsilon,$$

ce qui est contraire à (6.8, 1′) (pour λ fini). De la même façon on obtient des contradictions dans tous les autres cas. *Le théorème* (6.8) *est démontré.*

Reprenons la remarque en rapport avec (b_4), mais avec P au lieu de $\overline{\omega}'$; ainsi, soit A_i ($i = 1, 2, \ldots$) la totalité de toutes les enveloppes, telles que

$$(6.9) \qquad A_i \in G', \qquad A_i P \neq 0;$$

posons $\overline{\alpha}_i = \overline{A_i P}$; alors, si $x \in P$, il existe une suite i_ν ($\to \infty$ avec ν) d'entiers positifs, tels que (pour $\nu = 1, 2, \ldots$)

$$(6.9\,a) \qquad x \text{ est interne à } \overline{\alpha}_{i_\nu}, \qquad \Phi(\overline{\alpha}_{i_\nu}) \to 0, \qquad \rho(\alpha_{i_\nu}) \ (3.16) \to 0.$$

Dans la constatation (6.8), *on peut affirmer que toute portion* $\overline{\omega}' = \overline{H'P}$ *de* P *contient une portion* $\overline{\alpha} = \overline{BP}$ *de* P, *où* $B \in G'$ *et qui possède un* $\eta(\overline{\alpha}, \varepsilon) > 0$ (pour tout $\varepsilon > 0$); *toute portion* $\overline{\alpha}$ *de telle sorte est parmi les* $\overline{\alpha}_i$ [(6.9), (6.9 *a*)]. Pour établir l'existence d'une $\overline{\alpha}$ dans $\overline{\omega}'$ il suffit (2.8 *a*) de choisir une $B \in G'$, avec $\overline{B} \subset A$, où A est l'enveloppe intervenant dans la définition de $\overline{\omega}$ dans (6.8); on peut poser

$$\eta(\overline{\alpha}, \varepsilon) = \eta(\overline{\omega}, \varepsilon).$$

La forme alternative de (6.8), analogue au théorème dans [(D); p. 199], est un peu plus faible qu'au cas classique (cela est dû au fait que dans la théorie actuelle le théorème de Borel-Lebesgue peut être en défaut).

(6.10) Admettons (6.6) et envisageons les hypothèses, pour x sur P :

$$(1^*) \qquad \lim_{t} f(x, t) = \lambda;$$

$$(2^*) \qquad \overline{\lim_{t}} f(x, t) \leqq \lambda \text{ fini};$$

$$(3^*) \qquad \underline{\lim_{t}} f(x, t) \geqq \lambda \text{ fini}.$$

Dans chacun des trois cas respectifs et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $K(P, \varepsilon)$, $\subset P$, fermé et non dense sur P (pouvant être vide), de sorte que tout point x_0 sur $P - K(P, \varepsilon)$ est interne à une portion $\overline{\omega}_0$ (de P), contenue dans $P - K(P, \varepsilon)$ et possédant un nombre $\eta(\overline{\omega}_0, \varepsilon) > 0$, de sorte que, sur $\overline{\omega}_0$ et dès que $|t - t_0| < \eta(\overline{\omega}_0, \varepsilon)$ $(t \in e)$, la conclusion appropriée parmi les suivantes ait lieu :

$$(1_*) \quad \begin{cases} |f(x, t) - \lambda| < \varepsilon \quad (\lambda \text{ fini}), \qquad f(x, t) > \frac{1}{\varepsilon} \quad (\lambda = +\infty), \\ \qquad f(x, t) < -\frac{1}{\varepsilon} \quad (\lambda = -\infty); \end{cases}$$

$$(2_*) \qquad f(x, t) < \lambda + \varepsilon;$$

$$(3_*) \qquad f(x, t) > \lambda - \varepsilon.$$

En tenant compte de la remarque en italique à la suite de (6.9 *a*), il se voit que la suite $\overline{\alpha}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ contient une suite partielle infinie, soit $\overline{\alpha}_{n_j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, telle que pour toute $\overline{\alpha}_{n_j}$, le nombre $\eta(\overline{\alpha}_{n_j}, \varepsilon)$ (> 0) existe; parmi les $\overline{\alpha}_{n_j}$ nous incluons toutes les $\overline{\alpha}_i$ possédant le nombre $\eta(\overline{\alpha}_{i\nu}, \varepsilon)$. Or, $\overline{\alpha}_{n_j} = \overline{A_{n_j} P}$ (A_{n_j}, $\in G'$, jointe à P); $\sum A_{n_j} P$ est interne (relativement à P) à P; $K(P, \varepsilon) = P - \sum A_{n_j} P$ *est fermé*. Dans le théorème (6.8), avec la modification indiquée à la suite de (6.9 *a*), on peut regarder la portion $\overline{\omega}$ y mentionnée, comme étant dans la suite $\overline{\alpha}_{n_j}$; donc $\sum A_{n_j} P$ est partout dense sur P et $K(P, \varepsilon)$ est *non dense* sur P. Soit x_0 un point sur $P - K(P, \varepsilon)$, e. g. dans $\sum A_{n_j} P$; donc

$$(c_1) \qquad x_0 \in A_{n'} \quad (n' = n_{j'}) \qquad \text{pour un } j'; \qquad x_0 \in P;$$

pour la portion $\overline{\alpha}_{n'} = \overline{A_{n'} P}$ le nombre $\eta(\overline{\alpha}_{n'}, \varepsilon)$ (> 0) existe. $A_{n'}$ est disjointe de $K(P, \varepsilon)$, mais $\overline{\alpha}_{n'}$ peut être jointe à $K(P, \varepsilon)$. En raison de (2.8 *a*), il existe une enveloppe B_0, telle que

$$(c_2) \qquad B_0 \in G', \qquad B_0 \ni x_0, \qquad \overline{B}_0 \subset A_{n'};$$

la portion $\overline{\omega}_0 = \overline{B^0 P}$ $(\subset \overline{B}_0)$ est disjointe de $K(P, \varepsilon)$, donc *elle est contenue dans* $P - K(P, \varepsilon)$, de plus (c_2) $x_0 \in B_0 P$, e. g. x_0 est *interne à* $\overline{\omega}_0$; enfin pour $\overline{\omega}_0$ *le nombre* $\eta(\overline{\omega}_0, \varepsilon) > 0$ *existe*, en tant que $\overline{\omega}_0 \subset \overline{\alpha}_{n'}$, de sorte qu'on peut prendre $\eta(\bar{\omega}_0, \varepsilon) = \eta(\bar{\alpha}_{n'}, \varepsilon)$. *Le théorème* (6.10) *est vérifié* [on note que nécessairement $\bar{\omega}_0$ est parmi les portions $\bar{\alpha}_{n_j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$].

Nous abordons maintenant la considération des deux formes alternatives [*voir* (D); p. 208 et 209] du théorème inverse, faisant intervenir des inégalités ouvertes. Le théorème [(D); p. 209] est valide dans la théorie actuelle; ainsi l'on démontre l'énoncé suivant :

(6.11) Admettons (6.6) et considérons les hypothèses, *valides sur* P :

$$(\bar{1}) \qquad \overline{\lim_t} f(x, t) < \lambda \quad (-\infty < \lambda);$$

$$(\bar{2}) \qquad \underline{\lim_t} f(x, t) > \lambda \quad (\lambda < +\infty).$$

Toute portion $\bar{\omega}'$ [$= \overline{A'P}$, A′ une enveloppe] de P contient une portion $\bar{\omega}$ [$= \overline{AP}$] de P, telle qu'il existe deux nombres $\gamma(\bar{\omega}) > 0$, $\eta(\bar{\omega}) > 0$ de sorte que l'inégalité $|t - t_0| < \eta(\bar{\omega})$ $(t \in e)$ entraîne *sur* $\bar{\omega}$ au cas $(\bar{1})$:

$$(\underline{1}) \qquad f(x, t) < \lambda - \gamma(\bar{\omega}) \quad (\lambda \text{ fini}), \qquad f(x, t) < \frac{1}{\gamma(\bar{\omega})} \quad (\lambda = +\infty),$$

et au cas $(\bar{2})$:

$$(\underline{2}) \qquad f(x, t) > \lambda + \gamma(\bar{\omega}) \quad (\lambda \text{ fini}), \qquad f(x, t) > -\frac{1}{\gamma(\bar{\omega})} \quad (\lambda = -\infty).$$

La démonstration suit les lignes données dans [(D); p. 209], en supposant (s'il est possible) le théorème en défaut; ainsi il y aurait une portion $\bar{\omega}'$ de P, telle que pour toute portion $\bar{\omega} = \overline{AP}$, contenue dans $\bar{\omega}'$, les nombres $\eta(\bar{\omega})$, $\gamma(\bar{\omega})$ manquent; on fait usage des portions $\bar{\omega}_l$ de $\bar{\omega}'$, d'accord avec (b_4), et l'on obtient, dans les cas respectifs, certaines relations qui sont parmi les hypothèses du théorème (6.7); les conclusions correspondantes de ce théorème présentent, dans tous les cas, une contradiction aux hypothèses dans (6.11), *ce qui établit* (6.11).

La forme alternative de l'énoncé (6.11), qui correspond au théorème [(D); p. 208] est plus faible que celui-ci.

(6.12) Dans les conditions (6.6), envisageons une des deux hypothèses suivantes, *valide sur* P :

$$(a) \qquad \overline{\lim} f(x, t) < \lambda \quad (-\infty < \lambda);$$

$$(b) \qquad \underline{\lim} f(x, t) > \lambda \quad (\lambda < +\infty).$$

Il existe alors un ensemble K (P) (pouvant être vide), $\subset$P, *fermé* et *non dense* sur P, tel que tout x_0 sur P — K (P) est interne à une portion $\overline{\omega}_0$ (de P), $\subset P - K(P)$, possédant deux nombres $\gamma(\overline{\omega}_0)$, $\eta(\overline{\omega}_0)$, de sorte que l'inégalité $|t - t_0| < \eta(\overline{\omega}_0)$ $(t \in e)$ entraîne *sur* $\overline{\omega}_0$ l'inégalité appropriée parmi les suivantes :

$$(a)\quad f(x, t) < \lambda - \gamma(\overline{\omega}_0)\quad (\lambda \text{ fini}),\qquad f(x, t) < \frac{1}{\gamma(\overline{\omega}_0)}\quad (\lambda = +\infty);$$

$$(b)\quad f(x, t) > \lambda + \gamma(\overline{\omega}_0)\quad (\lambda \text{ fini}),\qquad f(x, t) > -\frac{1}{\gamma(\overline{\omega}_0)}\quad (\lambda = -\infty).$$

Soient A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ des enveloppes satisfaisant à (6.9); les portions $\overline{\alpha}_i = \overline{A_i P}$ jouissent des propriétés (6.9 *a*). *Vu* (2.8 *a*), *on peut admettre que dans la constatation* (6.11) *la portion* $\overline{\omega} = \overline{AP}$ *de* P (contenue dans $\overline{\omega}' = \overline{A'P}$ quelconque) *soit d'un caractère spécial, à savoir avec* A *dans la famille* G'; A est alors une enveloppe parmi les A_i (6.9). Soient les $\overline{\alpha}_{n_j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ les $\overline{\alpha}_i$ chacun possédant deux nombres $\gamma(\overline{\alpha}_{n_j})$, $\eta(\overline{\alpha}_{n_j})$; les $\overline{\alpha}_{n_j}$ constituent une suite infinie. $\sum A_{n_j} P$ est interne à P et partout dense sur P [*vu* (6.11) et la remarque en italiques à la suite de (*b*)]; $K(P) = P - \sum A_{n_j} P$ *fermé* est *non dense sur* P. Soit x_0 un point sur $P - K(P)$, donc $x_0 \in \sum A_{n_j} P$ et $x_0 \in A_{n_{j'}} P$ pour un j'. En raison de (2.8 *a*), il y a une B_0 de G', contenant x_0, telle que $\overline{B}_0 \subset A_{n_{j'}}$; donc $\overline{\omega}_0 = \overline{B_0 P}$ $(\subset A_{n_{j'}})$ est disjointe de K(P) et x_0 est interne à $\overline{\omega}_0$; $\overline{\omega}_0$ (étant contenue dans $\overline{\alpha}_{n_{j'}}$) possède les nombres $\gamma(\overline{\omega}_0)$, $\eta(\overline{\omega}_0)$. Comme dans la démonstration de (6.10), on voit que $\overline{\omega}_0$ est nécessairement parmi les $\overline{\alpha}_j$. *L'énoncé* (6.12) *est établi.*

Notons que le corollaire dans [(D); p. 176] reste vrai dans la théorie actuelle, comme une conséquence du théorème (6.7). Nous laissons de côté la démonstration, qui est pareille à celle dans (D), en remarquant seulement que dans le cas présent, comme au cas classique, si Q est partout dense sur P, une suite de points $x_1, x_2, \ldots$ sur Q existe, partout denses sur P [en effet, vu (2.8), l'espace $F = \Delta(\mathcal{F})$ est séparable selon la définition 2.7].

Le théorème direct de *Baire* [*voir* (D); p. 212 et 213] a lieu.

(6.13) *Soit* $f_n(x)$ (fonction numérique) *définie sur* P $(\subset F)$ *parfait et y continue* (définition 6.1) $(n = 1, 2, \ldots)$; *supposons que*

$$\lim f_n(x) = f(x)$$

finie existe sur P. *Alors il existe un résiduel* R *de* P, *en tout point duquel* $f(x)$ *est continue spécialement à* P.

La démonstration se fait comme au cas classique, en s'appuyant sur les théorèmes (6.8) et (6.10). Pourtant l'énoncé (6.10), qui est plus faible que le théorème correspondant [(D); p. 199], et la notion de continuité dans la théorie actuelle exigent certaines modifications. Nous présentons donc les détails. Soit e l'ensemble des points $t = \left\{ \frac{1}{m}, \frac{1}{p} \right\}$ $(n, p = 1, 2, \ldots)$ du plan, $t_0 = (0, 0)$,

$$f(x, t) = |f_n(x) - f_p(x)|; \qquad \lim_t f(x, t) = 0 \qquad (x \in \mathrm{P})_t;$$

l'hypothèse (6.8.1′) est satisfaite avec $\lambda = 0$, d'où toute portion $\overline{\omega}' = \overline{\mathrm{A'P}}$ de P contient une portion $\overline{\omega}\ (= \overline{\mathrm{AP}})$ pour laquelle $\eta = \eta(\overline{\omega}, \varepsilon) > 0$ existe, de sorte que (6.8, 1_1) ait lieu, dès que $|t| < \eta$; ainsi $f(x, t) < \varepsilon$ sur $\overline{\omega}$, si $|t| < \eta$. Par là

$$|f_n(x) - f(x)| \leqq \varepsilon \qquad (x \in \overline{\omega},\ n^{-1} < \eta)$$

et

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x)| &\leqq |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leqq 2\varepsilon + |f_n(x') - f_n(x)| \qquad (x \text{ et } x' \text{ sur } \overline{\omega},\ n^{-1} < \eta). \end{aligned}$$

En tenant x fixe sur $\overline{\omega}$, laissons $x'\ (\in \overline{\omega}) \sim (\mathrm{G}')\, x$. En vertu de la continuité-G′ de $f_n(x)$ et de (6.5), on déduit

$$(d_1) \qquad \overline{\lim}\, |f(x') - f(x)| \leqq 2\varepsilon, \qquad \text{quand} \quad x'(\in \overline{\omega}) \sim (\mathrm{G}')x.$$

En tant que $\lim\limits_t f(x, t) = 0$ sur P, (6.10, 1^*) a lieu (avec $\lambda = 0$), donc il existe un K(P, ε) (vide ou non), $\subset$P, fermé et non dense sur P, tel que, si $x_0 \in \mathrm{P} - \mathrm{K}(\mathrm{P}, \varepsilon)$, on peut trouver une portion $\overline{\omega}_0$, disjointe de K(P, ε) et contenant x_0 comme un point interne et possédant un nombre $\eta_0 = \eta_0(\overline{\omega}_0, \varepsilon)$, de sorte que (6.10, 1_*) : $f(x, t) = |f_n(x) - f_p(x)| < \varepsilon$ sur $\overline{\omega}_0$, si $|t| < \eta_0$. Par le raisonnement menant à (d_1) on obtient

$$(d_2) \qquad \overline{\lim}\, |f(x') - f(x_0)| \leqq 2\varepsilon, \qquad \text{lorsque} \quad x'(\in \overline{\omega}_0) \sim (\mathrm{G}')x_0.$$

Soit x_0 un point sur le résiduel $\mathrm{R} = \mathrm{P} - \sum\limits_1^{\infty} \mathrm{K}(\mathrm{P}, n^{-1})$; soit $\overline{\omega}_{0,n}$ la $\overline{\omega}_0$ associée avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$ [x_n interne à $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_0$ disjointe de K(P, n^{-1})]. On note que pour tout entier positif n :

$$\begin{aligned} &\overline{\lim_{x'}}\, |f(x') - f(x_0)|\, (x',\ \in \mathrm{P},\ \sim (\mathrm{G}')x_0) \\ &= \overline{\lim_{x'}}\, |f(x') - f(x_0)|\, (x',\ \in \overline{\omega}_{0,n},\ \to x_0); \end{aligned}$$

donc (d_2) :

$$\overline{\lim_{x'}}\, |f(x') - f(x_0)|\, (x',\ \in \mathrm{P},\ \sim (\mathrm{G}')x_0) \leq \frac{2}{n}.$$

Conséquemment, $|f(x') - f(x_0)| \to 0$, lorsque x', $\in \mathrm{P}$, $\sim (\mathrm{G}')\, x_0$, dès que $x_0 \in \mathrm{R}$. En raison de (6.5), il s'ensuit qu'en tout point du résiduel R, $f(x)$ est continue-G', spécialement à P; (6.13) *est vérifié.*

7. **La totale-D, l'unicité et quelques-unes de ses propriétés.** — Dès lors, admettons que la famille simplement régulière $\mathcal{F}$ d'ensembles, qui interviennent dans la définition de $\mathrm{F} = \Delta(\mathcal{F})$ $(\Phi(\mathrm{F}) < \infty)$, soit *complètement régulière* [définition 12.8 dans (T)]; cela revient à ce que, étant donnés un ensemble H mesurable-Φ et un $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ensemble ouvert O (enveloppe) et un ensemble fermé Q (noyau), tels que

$$\mathrm{Q} \subset \mathrm{H} \subset \mathrm{O}, \qquad \Phi(\mathrm{O} - \mathrm{Q}) < \varepsilon. \tag{7.1}$$

Ci-après, parmi les propriétés d'une certaine famille $\mathfrak{M}$ d'ensembles il y en aura une, à savoir (7.4, 7°), qui sera aussi en rapport avec le caractère de la régularité complète.

Propriété 7.2. — La famille $\mathrm{G}' = \{\mathrm{O}'\}$ *dénombrable* d'enveloppes O' (relativement à $\mathcal{F}$) épaisses-Φ, dont il s'agit dans (2.8), possède le caractère suivant :

A toute enveloppe O il correspond une suite de O_j $(j = 1, 2, \ldots)$, telles que

$$\mathrm{O} = \sum_j \mathrm{O}_j, \qquad \mathrm{O}_j \in \mathrm{G}'. \tag{7.2 a}$$

Dans la terminologie de (R) cette propriété veut dire que F satisfait au second axiome de dénombrabilité (G' étant une « famille dénombrable complète de voisinages »). D'autre part, le caractère (2.8, 2°) de G' entraîne la *régularité*, selon (R), de l'espace topologique F. *Nous ne faisons pas d'hypothèse de compacticité,* comme M. Romanovski l'a fait dans (R); par conséquent, le théorème de Borel-Lebesgue de couverture n'est pas disponible dans la théorie actuelle. La mesure $\Phi(e)$ est une fonction, ≥ 0, complètement additive d'ensemble borélien *e*, *sans qualification que e soit à fermeture compacte.* La mesure-Φ est supposée étendue de sorte que, *si* E_0 *est mince-*Φ, *tout sous-ensemble de* E_0 *sera mince-*Φ; on suppose que $\Phi(\mathrm{O}) > 0$, *si* O *est une enveloppe non vide.*

Nous vérifions ceci.

(7.3) *Tout noyau* (relativement à $\mathcal{F}$) *est l'intersection d'une suite non croissante d'enveloppes.*

Nous introduisons une famille $\mathfrak{M} = \{ R \}$ d'ensembles R ($\subset$F), *qui correspond à la famille d'ensembles fondamentaux dans* (R) et qui satisfait aux conditions de l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 7.4. — (1°) Les R de $\mathfrak{M}$ sont des enveloppes. Il y a une famille $\mathfrak{M}^* = \{ r_j^* \}$, $\subset \mathfrak{M}$, *dénombrable*, telle que tout O ouvert est la réunion d'ensembles d'une sous-famille de $\mathfrak{M}^*$. En effet, *si* $G' \subset \mathfrak{M}$ *et si* G′ *satisfait à* [(2.8), (2.8 *a*)], *on peut poser* $\mathfrak{M}^* = G'$. On dira qu'un ensemble E possède une *décomposition dans* $\mathfrak{M}$, si $E = E_0 + R_1 + \ldots + R_m$, $R_j \in \mathfrak{M}$, $\Phi(E_0) = 0$, les ensembles au second membre étant disjoints; si, de plus, E_0 est contenu dans les frontières des R_j, on dira que la décomposition $\{ R_j \}$ de E est une *décomposition-f dans* $\mathfrak{M}$. (2°) Si $R \in \mathfrak{M}$, $r \in \mathfrak{M}$ et $R \supset r$, alors il y a une décomposition-*f* dans $\mathfrak{M}$ de R, dont r est un composant. (3°) Si $R_i \in \mathfrak{M}$ ($i = 1, 2$), $R_1 R_2 \neq 0$, alors $R_1 R_2$ aura une décomposition-*f* dans $\mathfrak{M}$. (4°) Toute décomposition dans $\mathfrak{M}$ d'un R, $\in \mathfrak{M}$, est une décomposition-*f* dans $\mathfrak{M}$; de plus, si R de $\mathfrak{M}$ et $\varepsilon > 0$ sont donnés, il existe une décomposition-*f* dans $\mathfrak{M}$ de R, dont les composants sont de mesure inférieure à ε [donc $\Phi(x) = 0$, si x est un point dans F]. D'accord avec les notations dans (R), si $S = \{ r_j \}$ est un système fini d'ensembles r_j, $\in \mathfrak{M}$, disjoints, on posera

$$M(S) = \max_j \Phi(r_j), \qquad \Phi(S) = \sum \Phi(r_j)$$

et, en général, $\Psi(S) = \sum \Psi(r_j)$, si Ψ est définie dans $\mathfrak{M}$. (5°) r, r_j, R étant dans $\mathfrak{M}$, si $\{ r_j \}$ est une décomposition-*f* dans $\mathfrak{M}$ de r et $r_j \subset R$, on aura $r \subset R$. (6°) A tout R de $\mathfrak{M}$ et $\varepsilon > 0$, correspondent un $r (\in \mathfrak{M})$ et un $\rho (\in \mathfrak{M})$, tels que $\bar{r} \subset R$, $\bar{R} \subset \rho$, $\Phi(R - r) < \varepsilon$, $\Phi(\rho - R) < \varepsilon$. (7°) Étant donnés un H fermé et un $\varepsilon > 0$, il existe un O ouvert et un $\delta (= \delta(\varepsilon, H, O)) > 0$, tels que $O \supset H$, $\Phi(O - H) < \varepsilon$, tandis que les relations $r \in \mathfrak{M}$, $\bar{r} H \neq 0$, $\Phi(r) < \delta$ entraînent $r \subset O$; étant donnés un r (de $\mathfrak{M}$) et un point $y \in r$, il existe un r_0 (de $\mathfrak{M}$), tel que $r_0 \ni y$, $\bar{r}_0 \subset r$, et un $\sigma = \sigma(r, r_0, y) > 0$ de sorte que les relations $\rho \in \mathfrak{M}$, $\bar{\rho}\, \bar{r}_0 \neq 0$, $\Phi(\rho) < \sigma$ entraînent $\rho < r$. (8°) E étant fermé, deux nombres $1 < a < b$ existent tels que les relations r (de $\mathfrak{M}$) fixe $\subset E$, ρ (de $\mathfrak{M}$) variable $\subset E$, $\bar{r} \bar{\rho} \neq 0$, $\Phi(\rho) < a \Phi(r)$ entraînent

$$\Phi_e\left(\sum \bar{\rho}\right) < b \Phi(r).$$

(9°) Si $r \in \mathfrak{M}$, les relations $\Phi(r) \to 0$, $\rho(r)$ [(3.16), (3.1 *a*)] $\to 0$ s'équivalent.

Notons que l'existence de $\mathfrak{M}^*$ s'ensuit de [(2.8), (2.8 *a*)], si $G' \subset \mathfrak{M}$, et que (7°) et (8°) diffèrent essentiellement des hypothèses correspondantes dans (R). Ces conditions sont des analogues des caractères VIII, IX dans (R) (la 1re et la 2e conditions de régularité). En outre, (6°) se rattache aux propriétés de continuité de la mesure-Φ.

Soit $\Psi(r)$ *une fonction* (possiblement non additive) *finie pour tout* $r \in \mathfrak{M}$. Les intégrales supérieure, inférieure et exacte (si elle existe) de Ψ, au sens de *Burkill*, sont définies, d'accord avec (R), ainsi : soient $r \in \mathfrak{M}$ et $S = \{r_i\}$, une décomposition dans $\mathfrak{M}$ de r; on pose $\Psi(S) = \sum \Psi(r_i)$ et

$$(7.5) \quad \begin{cases} \displaystyle\overline{\int_r} \Psi = \overline{\lim}\, \Psi(S), \qquad \underline{\int_r} \Psi = \underline{\lim}\, \Psi(S), \\ \displaystyle\int_r \Psi = \lim \Psi(S) \qquad [(\text{si } \lim\ldots \text{ existe}) \text{ pour } M(S) \to 0]. \end{cases}$$

Les deux théorèmes dans [(R); § 2] restent vrais. Il n'y a rien à modifier dans les démonstrations. Les deux énoncés sont les suivants :

(7.6) Si $\int_R \Psi$ existe, alors $\Gamma(r) = \int_R \Psi$ existe pour tout r, $\in \mathfrak{M}$, $\subset R$ et $\Gamma(r)$ *est additive*; si $\int_R \Psi$ existe, il y a un $\eta = \eta(\varepsilon)$, > 0 pour $\varepsilon > 0$, tel que $|\Psi(S) - \Gamma(S)| < \varepsilon$ dès que $S = \{r_i\}$ est un système fini de r_i, $\in \mathfrak{M}$, disjoints, contenus dans r, avec $M(S) [= \max \Phi(r_i)] < \eta$.

Selon (R) on dit qu'un point x de R est « isolé au sens spécial », s'il existe un ensemble ouvert O, $\ni x$, tel que EO soit un sous-ensemble de la frontière d'un r de $\mathfrak{M}$; *nous dirons, dans ce cas, que* x *de* E *est isolé-s*. On dira que E est *parfait-s*, si E est un noyau sans points isolés-*s*. Tout ensemble parfait-*s* est parfait au sens ordinaire. Ψ est *intérieurement continue* [terminologie de (R)] *pour un* r de $\mathfrak{M}$, si un η, > 0 pour $\varepsilon > 0$, existe tel que $|\Psi(r) - \Psi(r')| < \varepsilon$ dès que $r' \in \mathfrak{M}$, $r' \subset r$ et $\Phi(r - r') < \eta$; Ψ est *intérieurement continue sur un* R *de* $\mathfrak{M}$, si Ψ est intérieurement continue pour tout r, $\in \mathfrak{M}$, $\subset$ R.

Définition 7.7. — *Soit* $\mathfrak{M}'$ *la famille d'ensembles de la forme* $H + e$, où H est un ensemble de $\mathfrak{M}$ (donc ouvert) et e est un ensemble quelconque, contenu dans $\overline{H} - H$. Soit $\widetilde{\mathfrak{M}}$ *la famille minimale contenant* $\mathfrak{M}'$ telle que si H_1, H_2 sont dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$, les ensembles $H_1 + H_2$, $H_1 H_2$, $H_1 - H_1 H_2$ seront dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$.

Hypothèse 7.8. — La mesure-Φ est supposée étendue de sorte que tout sous-ensemble d'un ensemble mince-Φ sera mince-Φ. Admettons que les frontières (donc aussi les sous-ensembles des frontières) d'ensembles de $\mathfrak{M}$ (aussi de $\mathfrak{M}'$) sont minces-Φ. Soit $\Psi(H)$ une fonction *complètement additive* (et finie) *dans* $\widetilde{\mathfrak{M}}$ $\left[\text{e. g. } \Psi(H) = \sum \Psi(H_n)\right.$, dès que $H \in \widetilde{\mathfrak{M}}$, $H_n \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, les H_n sont disjoints et $H = H_1 + H_2 + \ldots$, la réunion pouvant être dénombrablement $\left.\text{infinie}\right]$ $\cdot$ *$\Psi(e) = 0$ dès que e est contenu dans la frontière d'un ensemble de* $\mathfrak{M}'$ (de $\mathfrak{M}$).

Dans la suite, on admettra toujours l'hypothèse 7.8 (sauf avis contraire). Si Q et les $Q_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ sont dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$ et $Q_\nu \uparrow Q$, ou bien $Q_\nu \downarrow Q$, alors $\Psi(Q_\nu) \to \Psi(Q)$. On observe le fait suivant :

En vertu de l'hypothèse 7.4 *tout ensemble* H *de* $\widetilde{\mathfrak{M}}$ *possède une décomposition dans* $\mathfrak{M}$:

$$(7.9) \qquad H = \sum_{i=1}^{k} Q_i + e_0, \qquad \text{les } Q_i, \in \mathfrak{M} \text{ étant disjoints,}$$

où e_0 (mince-Φ) est contenu dans une réunion *finie* de frontières de quelques ensembles de $\mathfrak{M}$ (ayant la possibilité de comprendre des ensembles de $\mathfrak{M}$ qui ne sont pas parmi les Q_i); on dira que (7.9) est une *décomposition-$\tilde{f}$* dans $\mathfrak{M}$; $e_0 \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ et $\Psi(e_0) = 0$, donc

$$\Psi(H) = \sum \Psi(Q_i)$$

(le même est vrai pour Φ).

LEMME 7.10. — Soient $\mathfrak{N}$ une famille partielle de $\mathfrak{M}$ et $\tilde{r}$ un ensemble de $\widetilde{\mathfrak{M}}$. Supposons que $\tilde{r} \subset \sum \rho$, ρ parcourant $\mathfrak{N}$. On pourra trouver des r_ν, $\in \mathfrak{N}$, des $\tilde{\rho}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ et des $q_{\nu,i}$ $(i = 1, \ldots, k_\nu$ fini), tels que

$$(7.10\,a) \qquad \text{les } \tilde{\rho}_\nu \text{ disjoints sont dans } \widetilde{\mathfrak{M}}, \qquad \tilde{\rho}_\nu \subset \tilde{r}\, r_\nu \qquad \tilde{r} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\rho}_\nu;$$

$$(7.10\,b) \qquad \tilde{\rho}_\nu = \sum_{i=1}^{k_\nu} q_{\nu,i} + e_\nu \text{ est une décomposition-}\tilde{f} \text{ dans } \mathfrak{M}, \qquad \Phi(e_\nu) = 0;$$

$$(7.10\,c) \qquad \Psi(\tilde{r}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Psi(\tilde{\rho}_\nu), \qquad \text{où} \quad \Psi(\tilde{\rho}_\nu) = \sum_{i=1}^{k_\nu} \Psi(q_{\nu,i}).$$

En effet, en vertu de nos hypothèses de séparabilité, il existe une suite finie ou dénombrablement infinie d'ensembles de $\mathfrak{N}$ couvrant $\tilde{r}$; soient les r_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ les ensembles de cette suite joints à $\tilde{r}$:

$$(1_0) \qquad \tilde{r} \subset \sum r_\nu, \qquad \tilde{r}\, r_\nu \neq 0, \qquad r_\nu \in \mathfrak{N}.$$

On aura $\tilde{r} = \sum \tilde{r}\, r_\nu$, $\tilde{r}\, r_\nu \in \widetilde{\mathfrak{M}}$; (7.10 *a*) s'ensuit en posant

$$\tilde{\rho}_1 = \tilde{r}\, r_1, \qquad \tilde{\rho}_2 = \tilde{r}\, r_2 - \tilde{r}\, r_2 \tilde{\rho}_1, \qquad \tilde{\rho}_3 = \tilde{r}\, r_3 - \tilde{r}\, r_3(\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2), \qquad \ldots$$

Or tout $\tilde{\rho}_\nu$ possède (7.9) une décomposition-$\tilde{f}$ dans $\mathfrak{M}$; la conclusion (7.10 *b*) en résulte. La partie (7.10 *c*) du lemme s'ensuit de l'*additivité complète* (7.8) de Ψ dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$ et du fait que $\Psi(e) = 0$ pour tout ensemble contenu dans la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$. *Le lemme a été vérifié.*

Voici une modification du lemme dans [(R); § 3].

Lemme 7.11. — Soit $\mathfrak{N}$, $\subset \mathfrak{M}$, une famille d'ensembles contenus dans un R de $\mathfrak{M}$ et jouissant des caractères suivants :
(1_0) si r, $\subset$ R, est dans $\mathfrak{M}$ et si r^n ($n = 1, 2, \ldots$) épais de $\widetilde{\mathfrak{M}}$ possède une *décomposition-$\tilde{f}$ dans $\mathfrak{M}$ avec composants dans $\mathfrak{N}$* $\Big[$ e. g. $r^n = \sum_1^{\nu_n} q_i^n + e^n$, où les q_i^n (pour n fixe) $\in \mathfrak{N}$ et sont disjoints et e^n est contenu dans une réunion finie de frontières d'ensembles de $\mathfrak{M}\Big]$, si $r^n \subset r^{n+1}$ et $\lim_n r^n = r$, alors $r \in \mathfrak{N}$;
(2_0) tout ensemble r de $\mathfrak{M}$, contenu dans un R′ de $\mathfrak{N}$, est dans $\mathfrak{N}$;
(3_0) si tout r de $\mathfrak{M}$, dont la fermeture est contenue dans un R′ de $\mathfrak{M}$, est dans $\mathfrak{N}$, alors R′ $\in \mathfrak{N}$;
(4_0) si $\mathfrak{N}_1$, $\subset \mathfrak{N}$, ne couvre pas R, alors il existe un R′ de $\mathfrak{N}$ non couvert par $\mathfrak{N}_1$.

Dans les conditions (1_0)-(4_0) *il s'ensuit que* R $\in \mathfrak{N}$.

En vertu de (4_0) R $= \sum \rho$, ρ décrivant $\mathfrak{N}$. Soit r un ensemble de $\mathfrak{M}$, avec $\bar{r} \subset$ R. Selon le lemme 7.10 des r_ν, des $\tilde{\rho}_\nu$ et $q_{\nu,i}$ existent tels que

$$(1_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} r_\nu, \qquad r_\nu \in \mathfrak{N}, \qquad r = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\rho}_\nu, \\ \text{les } \tilde{\rho}_\nu \text{ sont disjoints}, \qquad \tilde{\rho}_\nu \subset r\, r_\nu, \quad \tilde{\rho}_\nu \in \widetilde{\mathfrak{M}}; \end{array} \right.$$

$$(2_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}_\nu = \sum_{i=1}^{k_\nu} q_{\nu,i} + e_\nu \qquad (\text{décomposition-}\tilde{f} \text{ dans } \mathfrak{M}), \\ q_{\nu,i} (\nu \text{ fixe}) \text{ disjoints}, \qquad q_{\nu,i} \subset r\, r_\nu, \qquad q_{\nu,i} \in \mathfrak{M}, \qquad \Phi(e_\nu) = 0. \end{array} \right.$$

Il se voit (2_0) que $q_{\nu,\iota} \in \mathfrak{N}$. Posons (1_1) :

$$(3_1) \qquad r = r^n + \rho^n, \qquad r^n = \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{\rho}_\nu, \qquad \rho^n = \sum_{\nu > n} \tilde{\rho}_\nu;$$

on note que $r^n \in \widetilde{\mathfrak{M}}$, $\rho^n = r - r^n \in \widetilde{\mathfrak{M}}$, $r^n \uparrow r$. En tant que r (de $\mathfrak{M}$) est épais, on peut supposer que les r^n sont épais. Or $[(3_1), (2_1)]$:

$$r^n = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\iota=1}^{k_\nu} q_{\nu\,\iota} + e^n \qquad (\text{décomposition-}\tilde{f}\text{ dans } \mathfrak{M}),$$

où les $q_{n\,\iota}$ (disjoints) sont dans $\mathfrak{N}$. D'après (1_0) $r \in \mathfrak{N}$, ce qui est une conséquence des hypothèses $r \in \mathfrak{M}$, $\bar{r} \subset \mathrm{R}$; donc (3_0) $\mathrm{R} \subset \mathfrak{N}$. *Le lemme est établi.*

Nous allons justifier la définition suivante, pareille à la définition, donnée dans [(R); § 4], de la totale de Denjoy.

DÉFINITION 7.12. — On dira qu'une fonction $f(x)$, définie sur une plénitude d'un ensemble R de $\mathfrak{M}$, est *totalisable*-D sur R, s'il existe une fonction Ψ *complètement additive dans* $\widetilde{\mathfrak{M}}$, telle que Ψ est *intérieurement continue, dans* $\mathfrak{M}$, sur R et telle que, si p est parfait-s et r, $\subset \mathrm{R}$, de $\mathfrak{M}$ est joint à p, il existe un r', $\subset r$, de $\mathfrak{M}$ joint à p, de sorte que pour tout r_1, $\in \mathfrak{M}$, r' on ait

$$(7.12\,a) \qquad \int_{r_1} \Psi_p = \int_{r_1 p} f(x)\, d\Phi(x), \qquad \text{où} \quad \Psi_p(r) = \begin{cases} \Psi(r) & (\text{si } \bar{r}p \neq 0), \\ 0 & (\text{si } \bar{r}p = 0), \end{cases}$$

l'intégrale au second membre étant *lebesguienne*. Le résultat du calcul (dont les règles seront établies dans la suite) de $\Psi(\mathrm{R})$ à partir de la fonction $f(x)$, totalisable-D sur R, sera appelée *totale*-D de $f(x)$ sur R,

$$(7.12\,b) \qquad \Psi(\mathrm{R}) = (\mathrm{D}) \int_{\mathrm{R}} f(x)\, d\Phi(x).$$

Nous allons établir l'unicité de la totale-D moyennant les lemme 7.10 et 7.11. Supposons, s'il est possible, qu'à une fonction $f(x)$ totalisable-D deux fonctions Ψ_1, Ψ_2 (de la sorte spécifiée dans la définition) correspondent; posons $\Psi = \Psi_1 - \Psi_2$. Soit $\mathfrak{N} = \{\rho\}$ la famille de tous les ensembles ρ, telles que (R de $\mathfrak{M}$ étant donné) :

$$(1') \qquad \rho \in \mathfrak{M}, \qquad \rho \subset \mathrm{R}, \qquad \Psi(\rho_1) = 0 \quad \text{pour tout } \rho_1, \in \mathfrak{M}, \subset \rho$$

(e. g. Ψ *est identiquement nulle* dans $\mathfrak{M}$ *sur* ρ). Il s'ensuit immédiatement que $(7.11.2_0)$ *a lieu.*

Supposons pour le présent que tout r (de $\mathfrak{M}$), avec $\bar{r}$ contenu dans un R' (de $\mathfrak{M}$), est dans $\mathfrak{N}$. Soit R_1 (de $\mathfrak{M}$) $\subset R'$. Selon l'hypothèse (7.4, 6°) pour $n = 1, 2, \ldots$ on trouve un r_n (de $\mathfrak{M}$), avec $\bar{r}_\nu \subset R_1$, tel que $\Phi(R_1 - r_n) < \frac{1}{n}$; nécessairement $r_n \in \mathfrak{N}$. Or Ψ est intérieurement continue dans $\mathfrak{M}$ pour R_1; donc

$$|\Psi(R_1) - \Psi(r_n)| = |\Psi(R_1 - r_n)| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad n \geqq n_\varepsilon$$

(n_ε suffisamment grand). En tant que $\Psi(r_n) = 0$, on déduit

$$|\Psi(R_1)| = |\Psi(R_1 - r_n)| < \varepsilon (n \geqq n_\varepsilon), \qquad \text{d'où} \quad \Psi(R_1) = 0.$$

Par suite, $R' \in \mathfrak{N}$, *ce qui vérifie la condition* (7.11, 3_0).

Supposons maintenant que r (de $\mathfrak{M}$) $\subset R$ et r^n (de $\widetilde{\mathfrak{M}}$) épais a une décomposition-$\tilde{f}$ dans $\mathfrak{M}$:

$$r^n = \sum_{i=1}^{k'} q_i^n + e^n, \qquad k' = k_n, \quad \text{les } q_i^n \text{ disjoints}, \quad q_i^n \in \mathfrak{N},$$

tandis que $r^n \subset r^{n+1}$ ($n = 1, 2, \ldots$) et $\lim\limits_n r^n = r$. Soit r_1 (de $\mathfrak{M}$) $\subset r$. Alors les $r_1 r^n$, $\in \mathfrak{M}$, constituent une suite non décroissante, telle que $\lim r_1 r^n = r_1$. Or

$$r_1 r^n = \sum_{i=1}^{k'} r_1 q_i^n + r_1 r^n, \qquad \Psi(r_1 e^n) = 0,$$

où [(7.4, 3°)] :

$$r_1 q_i^n = \sum_{j=1}^{\nu'} q_{n,i,j} + e_i^n \qquad (\text{décomposition-}f \text{ dans } \mathfrak{M}),$$

avec

$$q_{n,i,j} \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset q_i^n \text{ (de } \mathfrak{N}), \qquad \Psi(e_i^n) = 0.$$

D'après (7.11, 2_0), déjà établie, il s'ensuit que $q_{n,i,j} \in \mathfrak{N}$, donc $\Psi(q_{n,i,j}) = 0$ et $\Psi(r_1 q_i^n) = 0$; enfin $\Psi(r_1 r^n) = 0$. En tant que $r_1 r^n \uparrow r_1$ d'après le caractère de l'additivité complète dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$ de Ψ, on obtient $\Psi(r_1) = \lim\limits_n \Psi(r_1 r^n) = 0$ pour tout r_1 (de $\mathfrak{M}$) contenu dans r. Donc $r \subset \mathfrak{N}$, *ce qui vérifie la condition* (7.11, 1_0) pour la famille $\mathfrak{N}$.

En résumé : *la famille* $\mathfrak{N}$ (1') *satisfait aux conditions* (7.11, 1_0-3_0).

Soit $\mathfrak{N}_1 = \{\rho_1\}$, $\subset \mathfrak{N}$, une famille qui ne couvre pas R. L'ensemble fermé $E = F - \sum \rho_1$ (ρ_1 décrivant $\mathfrak{N}_1$) est joint à R.

Si RE *possède un point x isolé-s,* il existe un ensemble ouvert r_0, $\ni x$, $r_0 \subset \mathrm{R}$, tel que $r_0\mathrm{E}$ est contenu dans la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$; à cause de (7.4, 1°) on peut supposer que $r_0 \in \mathfrak{M}$; $r_0\mathrm{E}$ étant dans $\tilde{\mathfrak{M}}$, l'ensemble $r_0 - r_0\mathrm{E}$ sera dans $\tilde{\mathfrak{M}}$; de plus, $r_0 - r_0\mathrm{E} \subset \sum \rho_1$ (ρ_1 décrivant $\mathfrak{N}_1$). D'après le lemme 7.10 il existe des r_ν, $\in \mathfrak{N}_1$, des $\tilde{\rho}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), des $q_{\nu,i}$ ($i = 1, \ldots, k_\nu$) tels que

$$(4') \qquad r_0 - r_0\mathrm{E} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\rho}_\nu, \qquad \tilde{\rho}_\nu \subset (r_0 - r_0\mathrm{E}) r_\nu, \qquad \tilde{\rho}_\nu (\in \tilde{\mathfrak{M}}) \text{ disjoints;}$$

$$\tilde{\rho} = \sum_{i=1}^{k_\nu} q_{\nu\, i} + e_\nu \quad (\text{décomposition-}\tilde{f} \text{ dans } \mathfrak{M}), \qquad \Phi(e_\nu) = 0.$$

Or $q_{\nu,i}$ (de $\mathfrak{M}$) $\subset r_\nu \in \mathfrak{N}_1$ ($\subset \mathfrak{N}$); donc (7.11, 2₀) $q_{\nu,i} \in \mathfrak{N}$. On obtient

$$r^n = r_0\mathrm{E} + \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{\rho}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_\nu} q_{\nu,i} + e^n \in \tilde{\mathfrak{M}},$$

$$r^n \subset r_0 \subset \mathrm{R}, \qquad e^n = \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu + r_0\mathrm{E},$$

où r^n est contenu dans une réunion finie de frontières d'ensembles de $\mathfrak{M}$, le troisième membre représente une décomposition-$\tilde{f}$ dans $\mathfrak{M}$ de r^n, avec les composants $q_{\nu\, i} \in \mathfrak{N}$; de plus $r^n \uparrow r_0$ ($\subset \mathrm{R}$). A cause de (7.11, 1₀), déjà établi, on déduit que $r_0 \in \mathfrak{N}$. Ainsi :

(5′) *Si* RE *possède un point x isolé-s, il existe un r_0 de $\mathfrak{N}$ non couvert par $\mathfrak{N}_1$.*

L'alternative de l'hypothèse dans (5′) est le cas où E *est parfait-s dans* R (e. g. E fermé n'a pas de points isolés-s dans R). Nous nous souvenons que $\Psi = \Psi_1 - \Psi_2$, Ψ_1 et Ψ_2 étant de la sorte indiquées dans la définition 7.12. En vertu de cette définition (avec $p = \mathrm{E}$ et pour Ψ_1), R (de $\mathfrak{M}$) étant joint à E, il existe un r', $\subset \mathrm{R}$, de $\mathfrak{M}$, joint à E, tel que

$$\int_{r_1} \Psi_{1\mathrm{E}} = \int_{r_1\mathrm{E}} f(x)\, d\Phi(x) \qquad \left[\Psi_{1\mathrm{E}}(r) = \begin{cases} \Psi_1(r) & (si\ \bar{r}\mathrm{E} \neq 0) \\ 0 & (si\ \bar{r}\mathrm{E} = 0) \end{cases} \right],$$

pour tout r_1 (de $\mathfrak{M}$) $\subset r'$. Dans r' il se trouve *un* ρ' (de $\mathfrak{M}$), *joint à* E, tel que

$$\int_{\rho} \Psi_{2\mathrm{E}} = \int_{\rho\mathrm{E}} f(x)\, d\Phi(x) \qquad \text{pour tout} \quad \rho \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset \rho';$$

nous choisissons ρ' *avec* $\bar\rho' \subset R$. On aura

$$\int_{\rho} \Psi_E = 0 \qquad \text{pour tout} \quad \rho \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset \rho'$$

Cela veut dire

$$(6') \qquad \lim \sum_{j=1}^{n} \Psi_E(q_j) = \lim \sum_{\bar q_j E \neq 0} \Psi(q_j) = 0,$$

lorsque $S = \{q_j\}$ est une décomposition dans $\mathfrak{M}$ de ρ et $M(S) \to 0$. Selon (7.4, 4°) S est nécessairement une décomposition-f dans $\mathfrak{M}$, e. g.

$$\rho = \sum_{j=1}^{n} q_j + e_0, \qquad q_j \ (\in m) \text{ disjoints},$$

e_0 étant contenu dans les frontières des q_j; $\Psi(\rho) = \sum \Psi(q_j)$. Considérons un q_k tel que $\bar q_k E = 0$; alors $\bar q_k \subset \bar\rho - \bar\rho E \subset R - RE$, donc $\bar q_k \subset \sum \rho_1$ (ρ_1 parcourant $\mathfrak{N}_1$). Selon le lemme 7.10 (avec $\mathfrak{N}_1$ pour $\mathfrak{N}$ et $\bar q_k$ pour $\bar r$) on déduit l'existence des r_ν ($\in \mathfrak{N}_1$), des $\tilde\rho_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) et des $q_{\nu i}$ ($i = 1, \ldots, k$), tels que

$$(6_1) \qquad \bar q_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde\rho_\nu \qquad [\tilde\rho_\nu \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}) \text{ disjoints}; \ \tilde\rho_\nu \subset r_\nu];$$

$$(6_2) \qquad \tilde\rho_\nu = \sum_{i=1}^{k_\nu} q_{\nu,i} + e_\nu \qquad (\text{décomposition-}\tilde f \text{ dans } \mathfrak{M});$$

$$(6_3) \qquad \Psi(\bar q_k) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Psi(\tilde\rho_\nu), \qquad \Psi(\tilde\rho_\nu) = \sum_{i=1}^{k_\nu} \Psi(q_{\nu,i}).$$

Or $q_{\nu,i}$ (de $\mathfrak{M}) \subset \tilde\rho_\nu \subset r_\nu$ (de $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}$); d'après (7.11, 2_0) on aura $q_{\nu,i} \in \mathfrak{N}$, d'où $\Psi(q_{\nu,i}) = 0$, $\Psi(\tilde\rho_\nu) = 0$ et *enfin* $\Psi(\bar q_k) = 0$, *dès que* $\bar q_k$ *est disjoint de* E. Donc (6′)

$$\Psi(\rho) = \sum (\bar q_j E \neq 0) \Psi(q_j) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad \rho \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset \rho'$$

(ρ', $\in \mathfrak{M}$, est joint à E). *Ainsi*, $\rho' \in \mathfrak{N}$; tout point de $\rho' E$ (non vide) est non couvert par $\mathfrak{N}_1$, donc ρ' de $\mathfrak{N}$ est non couvert par $\mathfrak{N}_1$, si E est parfait-s; e. g., en tenant compte de (5′), on conclut que *dans les deux cas il existe un ensemble de* $\mathfrak{N}$ *non couvert par* $\mathfrak{N}_1$. La condition (4_0) du lemme 7.11 est satisfaite, ainsi que les autres. Conséquemment $R \in \mathfrak{N}$, e. g. $\Psi(r) = 0$ et $\Psi_1(r) = \Psi_2(r)$ pour tout r (de $\mathfrak{M}$) $\subset R$. On peut donc conclure comme il suit :

THÉORÈME 7.13. — *La totale*-D *de Denjoy, spécifiée selon la définition* 7.12, *est unique.*

Examinons maintenant les analogues des propriétés d'une totale-D, données pour le cas considéré par M. Romanovski dans [(R); § 5]. D'abord on note immédiatement le fait suivant :

(7.13 *a*) Si f est totalisable-D sur un R de $\mathfrak{M}$, f sera totalisable-D sur tout r (de $\mathfrak{M}$) $\subset R$; (D)$\int_r f\,d\Phi$ sera complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ (sur R) et intérieurement continue sur R.

(7.13*b*) Soit $\{q_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ une décomposition dans $\mathfrak{M}$ d'un R (de $\mathfrak{M}$); admettons que f soit totalisable-D sur q_i $(i = 1, \ldots, n)$ et supposons que la fonction $\Gamma(r) = \sum_i (D)\int_{rq_i} f\,d\Phi$ soit intérieurement continue sur R. Alors f est totalisable-D sur R.

La démonstration est accomplie à peu près comme dans [(R); § 5] en notant que, si une fonction Ψ' est complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ et si $q \in \mathfrak{M}$, la fonction $\Psi'(qr)$ de r (de $\mathfrak{M}$) le sera aussi; de plus, si un r (de $\mathfrak{M}$), $\subset R$, est joint à un ensemble p parfait-s, pr sera joint à un q_k $\left(\text{on note que} \sum q_i = R - e_0,\ \text{où } e_0 \text{ est contenu dans les frontières des } q_i\right)$.

(7.13 *c*) *La classe des fonctions totalisables*-D *est linéaire.*

En effet il est immédiat que si c est une constante et f est totalisable-D sur un R de $\mathfrak{M}$, cf aura la même propriété;

$$(D)\int cf\,d\Phi = c\,(D)\int f\,d\Phi.$$

Il suffit maintenant d'établir que $f_1 + f_2$ sera totalisable-D sur R, si les f_i $(i = 1, 2)$ le sont. Ceci se démontre comme dans [(R); § 5]. On aura

$$(D)\int (f_1 + f_2)\,d\Phi = (D)\int f_1\,d\Phi + (D)\int f_2\,d\Phi.$$

(7.13 *d*) (D)$\int_R f\,d\Phi \geqq 0$, *si* $f \geqq 0$ (*sur une plénitude de* R) *est totalisable*-D.

Soit Ψ la fonction qui correspond à f selon la définition 7.12. Introduisons la famille $\mathfrak{N}'$, $\subset \mathfrak{M}$, d'ensembles ρ, $\subset R$, tels que

$\Psi(\rho_1) \geqq 0$ pour tout ρ_1 (de $\mathfrak{M}$) $\subset \rho$. $\mathfrak{N}'$ satisfait à la condition (7.11, 2_0). Or à la suite de la définition 7.12, nous avons introduit une famille $\mathfrak{N}$ et nous avons démontré que $\mathfrak{N}$ satisfait à (7.11, 1_0). En reprenant cette démonstration, avec $\mathfrak{N}'$ au lieu de $\mathfrak{N}$, on obtient $\Psi(q_{n,i,j}) \geqq 0$ (au lieu de $= 0$), donc $\Psi(r_1 q_i^n) \geqq 0$ et $\Psi(r_1 r^n) \geqq 0$. Enfin, puisque $r_1 r^n$ (de $\widetilde{\mathfrak{M}}$) $\uparrow r_1$ (de $\mathfrak{M}$) et en vertu de l'additivité complète dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$ de Ψ, il s'ensuit que $\Psi(r_1) = \lim \Psi(r_1 r^n) \geqq 0$. On vérifie ainsi que $\mathfrak{N}'$ satisfait à (7.11, 1_0). En reprenant la preuve de (7.11, 3_0) pour $\mathfrak{N}$, avec $\mathfrak{N}'$ au lieu de $\mathfrak{N}$, on fait l'emploi de (7.4, 6°) et de la continuité intérieure de Ψ, ce qui donne $\Psi(r_n) \geqq 0$ (au lieu de $= 0$) et

$$\Psi(R_1) = \Psi(R_1 - r_n) + \Psi(r_n) \geqq \Psi(R_1 - r_n),$$

où $|\Psi(R_1 - r^n)| < \varepsilon$ pour $n \geqq n_\varepsilon$; donc $\Psi(R_1) \geqq 0$ (au lieu de $= 0$); d'où $\mathfrak{N}'$ remplit (7.11, 3_0). Soit $\mathfrak{N}'_1$, $\subset \mathfrak{N}'$, une famille ne couvrant pas R. L'ensemble $E = F - \sum \rho_1$ $(\rho_1 \in \mathfrak{N}'_1)$ est fermé, $E \supset F - R$ et $ER \neq 0$. Reprenons les développements donnés pour $\mathfrak{N}_1$ (dans le texte qui précède le théorème 7.13), avec $\mathfrak{N}'_1$ au lieu de $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}'$ au lieu de $\mathfrak{N}$. On montre que, *si* E *a un point isolé-s, il existe un* r_0 *de* $\mathfrak{N}'$ *non couvert par* $\mathfrak{N}'_1$. Si $E = p$ est parfait-*s*, en tant que $Rp \neq 0$, il existe un ρ' de $\mathfrak{M}$, joint à p, avec $\bar{\rho}' \subset R$, tel que $\int_\rho \Psi_p = \int_{\rho p} f\, d\Phi \geqq 0$ pour tout ρ (de $\mathfrak{M}$) $\subset \rho'$. Donc [au lieu de (6′)] :

$$(6'') \qquad \lim \sum_{j=1}^{n} \Psi_p(q_j) = \lim \sum (\bar{q}_j p \neq 0)\, \Psi(q_j) \geqq 0$$

pour $M(S) \to 0$, où $S = \{q_j\}$ est une décomposition (nécessairement-*f*) dans $\mathfrak{M}$ de ρ. Si $\bar{q}_k E = 0$, on aura (vu le lemme 7.10) des r_ν $(\in \mathfrak{N}'_1)$, des $\tilde{\rho}_\nu$ et des $q_{\nu,i}$ $(i = 1, \ldots, k_\nu)$, de sorte que les formules (6_1), (6_2) et (6_3) aient lieu. On aura $q_{\nu,i}$ (de $\mathfrak{M}$) $\subset \tilde{\rho}_\nu \subset r_\nu$, où $r_\nu \in \mathfrak{N}'_1 \subset \mathfrak{N}'$, donc $q_{\nu,i} \in \mathfrak{N}'$ et $\Psi(q_{\nu,i}) \geqq 0$, $\Psi(\tilde{\rho}_\nu) \geqq 0$; par conséquent $\Psi(\bar{q}_k) \geqq 0$, lorsque $\bar{q}_k p = 0$; ainsi (6″) :

$$\Psi(\rho) = \sum (\bar{q}_j p \neq 0)\, \Psi(q_j) \dotplus \sum (\bar{q}_j p = 0)\, \Psi(q_j) \geqq \sum (q_j p \neq 0)\, \Psi(q_j).$$

En laissant $M(S) \to 0$ on obtient (6″) : $\Psi(\rho) \geqq 0$ dès que ρ $(\in \mathfrak{M}) \subset \rho'$; donc $\rho' \in \mathfrak{N}'$. En tant que $\rho' p \neq 0$ et $p = E$ est l'ensemble des points non couverts par $\mathfrak{N}'_1$, l'ensemble ρ' sera non couvert par $\mathfrak{N}'_1$. La condition (7.11, 4_0) est satisfaite pour $\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}'$. Selon le lemme 7.11 on conclut que $R \in \mathfrak{N}'$, *ce qui démontre l'énoncé* (7.13 *d*). En particulier :

$$(7.13\,d') \quad (D)\int_R f\,d\Phi = 0 \qquad \text{si } f = 0 \text{ sur une plénitude de R (de } \mathfrak{M}).$$

Nous allons établir la proposition suivante :

(7.13 *e*) *Si f est sommable* (au sens lebesguien) *sur un* R *de* $\mathfrak{M}$, *on aura*

$$\int_R f\,d\Phi = (D)\int_R f\,d\Phi.$$

Selon l'hypothèse 7.8, les frontières d'ensembles de $\mathfrak{M}$ sont minces-Φ. Avec f sommable sur R il se voit que $\Psi(\tilde{r}) = \int_{\tilde{R}} f\,d\Phi$ est complètement additive dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$ (sur R), Ψ est nulle pour tout ensemble contenu dans la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$, Ψ est intérieurement continue sur R. Il suffit de montrer que, si p est parfait-s et si un r (de $\mathfrak{M}$), $\subset R$, est joint à p, on aura

$$(7') \qquad \nu = \int_{r_1} \Psi_p = \int_{r_1 p}^{\bullet} f\,d\Phi \qquad [\text{pour tout } r_1 \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset r].$$

Or $\nu = \lim \nu'$, pour $M(S) \to 0$, où $S = \{\rho_j\}$ est une décomposition dans $\mathfrak{M}$ de r_1 et $\nu' = \sum' (\bar{\rho}_k p \neq 0)\ \Psi(\rho_k)$; on a $\nu' = \int_h f\,d\Phi$ avec $h = \sum' \rho_k$. Si $\bar{r}_1 p = 0$, on aura $h = 0$, $\nu' = 0$, $\nu = 0$, donc (7′) sera vérifié pour ce r_1. Si $r_1 p \neq 0$, nous notons que $h_0 = r_1 p - hp$ est vide ou bien mince-Φ, $h + h_0 \supset r_1 p$. Selon (7.4, 7°) il existe un ensemble ouvert O_n et un $\delta_n > 0$, tels que $O_n \supset \bar{r}_1 p$, $\Phi(O_n - \bar{r}_1 p) < \frac{1}{n}$, tandis que les relations $\rho \in \mathfrak{M}$, $\bar{\rho}\,\bar{r}_1 p \neq 0$, $\Phi(\rho) < \delta_n$ entraînent $\rho \subset O_n$; on aura $h \subset O_n$, donc $h + h_0 \subset O_n$ (car $h_0 \subset r_1 p \subset O_n$), dès que $M(S) < \delta_n$; par là, $\Phi(h + h_0 - r_1 p) < \frac{1}{n}$ pour $M(S) < \delta_n$. Conséquemment

$$\left|\nu' - \int_{r_1 p} f\,d\Phi\right| = \left|\int_{h - r_1 p} f\,d\Phi\right| \to 0, \qquad \text{quand } M(S) \to 0,$$

ce qui établit (7′); *l'énoncé* (7.13 *c*) *est vérifié.*

8. **Dérivation de la totale**-D. — Considérons un R particulier de $\mathfrak{M}$. *Soit* $\mathfrak{N}$ *la famille d'ensembles de* $\mathfrak{M}$ *contenus dans* R. En vertu de (7.4, 4°) tout point sur $\overline{R}$ est contenu dans les fermetures d'une

suite d'ensembles r, $r \subset \mathfrak{N}$, de mesure-Φ tendant vers zéro, e. g. tout point de $\overline{\mathrm{R}}$ est indéfiniment couvert (au sens de la métrique-Φ) par *la famille* $\overline{\mathfrak{N}} = \{\bar{r}\}$, où r parcourt la famille $\mathfrak{N}$; on dira que $\overline{\mathrm{R}}$ est indéfiniment couvert par $\overline{\mathfrak{N}}$; $\overline{\mathrm{R}} = \Delta\{\overline{\mathfrak{N}}\}$ veut dire que $\overline{\mathrm{R}}$ est l'ensemble des points indéfiniment couverts par $\overline{\mathfrak{N}}$. Un $\bar{r}$ de $\overline{\mathfrak{N}}$ est noyau relativement à $\overline{\mathfrak{N}}$ [e. g. l'ensemble des points de $\overline{\mathrm{R}}$ [en effet de $\mathrm{F} = \Delta(\mathcal{F})$] étrangers à $\bar{r}$ et indéfiniment couverts par les ensembles de $\overline{\mathfrak{N}}$ joints à $\bar{r}$ est mince-Φ]. Pour tout $\bar{r}$ de $\overline{\mathfrak{N}}$ on a $0 < \Phi(\bar{r}) < \infty$; de plus $\sum \bar{r}\,(\bar{r} \in \overline{\mathfrak{N}}) = \overline{\mathrm{R}}$, donc $\Phi\left(\sum \bar{r}\right) < \infty$. Soient $\bar{r}$ un ensemble de $\overline{\mathfrak{N}}$ et $\Omega(\bar{r})$ la réunion des $\bar{\rho}$ de $\overline{\mathfrak{N}}$, joints à $\bar{r}$, avec $\Phi(\rho) < a\Phi(r)$; d'après la condition (7.4, 8°) on aura $\Phi_e(\Omega(\bar{r})) < b\,\Phi(r)$ $(1 < a < b)$. Conséquemment, *la famille* $\overline{\mathfrak{N}}$ *est régulière au sens de Denjoy*, donné dans son Mémoire (D*) (où se trouve le théorème exact de Denjoy-Vitali). Ainsi pour la famille $\overline{\mathfrak{N}}$ le théorème de Denjoy-Vitali est valide. Toute famille partielle $\overline{\mathfrak{N}}'$ de $\overline{\mathfrak{N}}$ qui couvre indéfiniment $\overline{\mathrm{R}}$ [donc $\overline{\mathrm{R}} = \Delta(\overline{\mathfrak{N}}')$] jouira des mêmes propriétés que $\overline{\mathfrak{N}}$, e. g. $\overline{\mathfrak{N}}'$ sera régulière au sens de Denjoy en même temps que $\overline{\mathfrak{N}}$. Bien entendu, si $\overline{\mathfrak{N}}'$ couvre indéfiniment $\overline{\mathrm{R}} - h_0$, où h_0 est mince-Φ, le théorème de Denjoy-Vitali sera encore valide pour $\overline{\mathfrak{N}}_1$. En vertu de l'hypothèse relative à 7.1, il s'ensuit que la famille $\overline{\mathfrak{N}}$ est en effet *parfaitement régulière au sens de Denjoy.* Donc tous les résultats du Mémoire (D*) s'appliquent à $\overline{\mathfrak{N}}$. Indiquons en quelques-uns parmi eux.

(8.1) Le théorème de Denjoy-Vitali. — *Soit* $\overline{\mathfrak{N}}_1$ *une famille partielle de* $\overline{\mathfrak{N}}$. *Supposons que l'ensemble* $\Delta(\overline{\mathfrak{N}}_1)$ $(\subset \overline{\mathrm{R}})$ *des points indéfiniment couverts par* $\overline{\mathfrak{N}}_1$ *n'est pas mince-*Φ. *Alors* $\Delta(\overline{\mathfrak{N}}_1)$ *sera mesurable-*Φ $(\Phi(\Delta(\overline{\mathfrak{N}}_1)) > 0)$. *On pourra trouver une suite dénombrable de* $\bar{\rho}_l$, $\in \overline{\mathfrak{N}}_1$, *disjoints, tels que* $\Phi(\Delta(\overline{\mathfrak{N}}_1) - \Delta(\overline{\mathfrak{N}}_1)\Gamma) = 0$, *où* $\Gamma = \sum_1^{\infty} \bar{\rho}_l$. *Étant donné un* $\varepsilon > 0$, *les* ρ_l *peuvent être choisis, tels que* $\Phi(\Gamma) < \Phi(\Delta(\overline{\mathfrak{N}}_1)) + \varepsilon$.

Si Ψ est une fonction définie (et finie) pour tout ensemble de $\overline{\mathfrak{N}}$ $(\subset \overline{\mathfrak{M}})$, introduisons *les dérivées* et *la dérivée unique* (si elle existe) :

$$(8.2) \qquad \overline{\mathrm{D}}\,\Psi(x) = \overline{\lim}\,\frac{\Psi(\bar{r})}{\Phi(\bar{r})}, \qquad \underline{\mathrm{D}}\,\Psi(x) = \underline{\lim}\,\frac{\Psi(\bar{r})}{\Phi(\bar{r})}$$

et $D\Psi = \overline{D}\,\Psi = \underline{D}\,\Psi$ (si $\overline{D} = \underline{D}$), pour $\bar{r}$ (de $\overline{\mathfrak{N}}$) contenant le point x (considéré sur $\overline{R}$) et $\Phi(\bar{r})$ tendant vers zéro.

(8.3) *Les dérivés* $\overline{D}\,\Psi(x)$, $\underline{D}\,\Psi(x)$ (8.2) *sont mesurables-*Φ (le même est vrai pour toute dérivée intermédiaire).

Avec l'ensemble $\overline{R}$ de $\overline{\mathfrak{M}}$ encore fixe et E étant un ensemble mesurable-Φ, $E \subset \overline{R}$, on introduit les *épaisseurs extrêmes* et *unique*, relativement à la famille $\overline{\mathfrak{N}}$ et pour le point x sur $\overline{R}$,

$$(8.4)\qquad \begin{cases} & \bar{\eta}(E, x) = \overline{D}\,\Psi^{E}(x), \qquad \underline{\eta}(E, x) = \underline{D}\,\Psi^{E}(x) \\ \text{et} & \eta(E, x) = D\,\Psi^{E}(x) \quad (\text{si } \bar{\eta} = \underline{\eta}), \\ \text{ou} & \Psi^{E}(\bar{r}) \;= \Phi(Er) = \Phi(E\bar{r}) \qquad \text{pour} \quad \bar{r} \in \overline{\mathfrak{N}}. \end{cases}$$

(8.5) Le théorème d'épaisseur. — Soit E ($\subset \overline{R}$) un ensemble mesurable-Φ. La famille $\mathfrak{N}$ (*voir* le début de la section actuelle) parfaitement régulière contient une sous-famille $\mathfrak{N}_1$ (nécessairement parfaitement régulière), telle que les ensembles $\Delta(\mathfrak{N}_1)$, E sont identiques sauf pour des ensembles minces-Φ; *l'épaisseur* $\eta(E, x) = 1$ *sur une plénitude-*Φ *de* E *et* $\eta(E, x) = 0$ *sur une plénitude-*Φ *de* $\overline{R} - E$ (les épaisseurs sont relativement à $\overline{\mathfrak{N}}$).

On dira qu'une fonction $\Psi(e)$ *complètement additive* d'ensemble mesurable-Φ $e(\subset \overline{R})$ est *absolument continue-*Φ, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $\Phi(e) < \delta (e \subset \overline{R})$ entraîne $|\Psi(e)| < \varepsilon$. Pour une telle fonction on aura les résultats suivants :

(8.6) la dérivée $D\,\Psi(x)$ (relativement à $\mathfrak{N}$) existe et est finie sur une plénitude-Φ de R;

(8.6 *a*) la fonction $D(x) = D\,\Psi(x)$ [où $D\,\Psi(x)$ existe], $= 0$ (ailleurs) est sommable-Φ sur $\overline{R}$ et $\Psi(e) = \int_e D(x)\,d\Phi(x)$ pour tout $e(\subset \overline{R})$ mesurable-Φ.

On a aussi une constation suivante :

(8.6 *b*) Soit $f(x)$ sommable-Φ sur $\overline{R}$; la fonction $I(e) = \int_e f(x)\,d\Phi(x)$ d'ensemble mesurable-Φ e, $\subset \overline{R}$, est absolument continue-Φ (dans $\overline{R}$) et $D\,I(x)$ (relativement à $\overline{\mathfrak{N}}$) vaut $f(x)$ sur une plénitude-Φ de $\overline{R}$.

Moyennant le théorème 8.1, on obtient la proposition suivante [analogue à un résultat dans (R; § 10)] :

(8.7) R (de $\mathfrak{M}$) étant donné et Ψ étant une fonction d'ensemble de $\mathfrak{N}$ [la famille d'ensembles r (de $\mathfrak{M}$) $\subset$ R], si $\int_r \Psi = 0$ dans $\mathfrak{N}$, on aura $\mathrm{D}\,\Psi(x) = 0$ sur une plénitude de R.

La démonstration de (8.7) est comme celle contenue dans [(R); § 10] et elle sera omise. De la même manière s'établit le résultat suivant.

(8.7 *a*) Si $\int_{\mathrm{R}} \Psi$ existe, alors $\overline{\mathrm{D}}\,\Psi(x) = \overline{\mathrm{D}}_x \int \Psi$ (de même pour $\underline{\mathrm{D}}$) sur une plénitude de R.

THÉORÈME 8.8. — *Si f est totalisable*-D *sur un* R (de $\mathfrak{M}$), *on aura*

$$\mathrm{D}_x\left[(\mathrm{D})\int f\,d\Phi\right] = f(x) \qquad \textit{sur une plénitude de } \mathrm{R}.$$

Désignons par $\mathfrak{N}$ la famille d'ensembles de $\mathfrak{M}$ contenus dans R et tels que, si $r \in \mathfrak{N}$, on aura $\mathrm{D}\,\Psi(x) = f(x)$ sur une plénitude de r, où $\Psi(r) = (\mathrm{D})\int_r f\,d\Phi$. $\mathfrak{N}$ satisfait à la condition $(7.11, 2_0)$. $(7.11, 3_0)$ est aussi vérifiée, comme une conséquence du caractère (7.4, 6°) de Φ. Afin de vérifier $(7.11, 1_0)$ envisageons un r (de $\mathfrak{M}$), $\subset$ R, et des r^n, tels que r^n, $\in \widetilde{\mathfrak{M}}$, $\subset r^{n+1}$, avec $\lim\limits_n r^n = r$, tandis que

$$r^n = \sum_{i=1}^{\nu_n} q_{n,i} + e_n \qquad (\Phi(e_n) = 0)$$

est une décomposition-$\tilde{f}$ dans $\mathfrak{M}$ de r^n, avec $q_{n,i} \in \mathfrak{N}$. $\mathrm{D}\Psi = f$ sur une plénitude de $q_{n,i}$, donc de r^n et de r [car $r = r' + (r^2 - r') + \ldots$]; ainsi $r \in \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}$ satisfait à $(7.11, 1_0)$. Soit $\mathfrak{N}_1$, $\subset \mathfrak{N}$, une famille telle que $p = \mathrm{R} - \sum \rho\,(\rho \in \mathfrak{N}_1)$ possède des points dans R. Si x_0 est un point isolé-*s* de p on peut trouver un ρ_0 (de $\mathfrak{M}$) $\subset$ R, tel que $\rho_0 \ni x_0$ et que $p\rho_0$ soit contenu dans la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$; $\Phi(p\rho_0) = 0$ et $\rho_0 - p\rho_0$ est couvert par une réunion (qu'on peut prendre dénombrable) d'ensembles de $\mathfrak{N}_1$, donc $\mathrm{D}\,\Psi(x) = f(x)$ sur une plénitude de ρ_0, *e. g.* $\rho_0 \in \mathfrak{N}$, *tandis que* $\mathfrak{N}_1$ *ne couvre pas* ρ_0. Si p est parfait-*s* dans R, on trouve un r' (de $\mathfrak{M}$) $\subset$ R, $r'p \neq 0$, tel que pour tout r_1 (de $\mathfrak{M}$), $\subset r'$, on ait (7.12 *a*), e. g. $\int_{r_1} \Psi_p = \int_{r_1} f_p\,d\Phi\,(f_p = f$ sur p, $= 0$ ailleurs); moyennant (8.6 *b*) et (8.7 *a*) on conclut, comme dans [(R); § 10], que $r' \in \mathfrak{N}$ et r' *n'est pas couvert par* $\mathfrak{N}_1$. La condition $(7.11, 4_0)$ est satisfaite, d'où $\mathrm{R} \in \mathfrak{N}$, *ce qui est la conclusion du théorème.*

9. **Les caractères A. C. G., I. G.** — Comme dans [(R); § 12], nous dirons qu'une fonction $\Psi(r)$ d'ensemble r (de $\mathfrak{M}$) $\subset R$ (de $\mathfrak{M}$) est à *variation borrée* sur R, $\Psi \in$ V. B. (sur R), s'il existe un $\eta > 0$ tel que

$$\sum |\Psi(q_j)| \leqq B < \infty \qquad \text{pour} \quad M(\{q_j\}) < \eta,$$

où B est une constante indépendante de tout système fini $S = \{q_j\}$ de q_j (de $\mathfrak{M}$), $\subset R$, disjoints. Si Ψ est additive dans $\mathfrak{M}$ (sur R) et si $\Psi(e) = 0$ dès que e est dans la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$, alors $\Psi \in$ V. B. (sur R) entraînera

$$(9.1) \qquad |\Psi(\tilde{r})| \leqq B (< \infty) \qquad \text{pour tout} \quad \tilde{r} \left(\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}\right) \subset R.$$

C'est une conséquence du fait que tout $\tilde{r}$ de $\tilde{\mathfrak{M}}$ possède une décomposition-$\tilde{f}$ (7.9) dans $\mathfrak{M}$ et qu'on peut faire en sorte que les mesures-Φ des composantes de cette décomposition soient aussi petites qu'on veut. Réciproquement, si (9.1) a lieu pour une fonction Ψ additive dans $\mathfrak{M}$ (sur R) et jouissant de la propriété indiquée plus haut relativement aux frontières d'ensembles de $\mathfrak{M}$, on verra que $\Psi \in$ V. B. (sur R), avec n'importe quel $\eta > 0$ (et avec B remplacé par 2B).

Les développements, se rattachant à un *théorème de Lusin*, que l'auteur a donnés dans le Mémoire [(T); *cf.* § 17], dans la théorie actuelle, mènent au résultat suivant :

(9.2) Soit $f(x)$ mesurable-Φ et finie sur une plénitude-Φ d'un ensemble mesurable E, contenu dans un $\overline{R}$ de $\overline{\mathfrak{M}}$; alors à tout $\varepsilon > 0$ il correspond un H_ε, $\subset E$, fermé, tel que $\Phi(E - H_\varepsilon) < \varepsilon$ et que $f(x)$ soit continue sur H_ε.

Le caractère de continuité d'une fonction $f(x)$ sur un ensemble H est entendu au sens de (6.1) [*voir* (6.1)-(6.5)]. En vertu de l'hypothèse (7.4, 9°), *cette espèce de continuité, par exemple en un point x_0 de* H, *équivaut à ce que, étant donné un $\varepsilon > 0$, il existe un r de $\mathfrak{M}$, tel que*

$$(9.3) \qquad r \ni x_0, \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{pour tout } x \text{ sur } rH;$$

si $f(x)$ est continue sur H et x_0 est un point de H, alors, étant donné un $\varepsilon > 0$, il existe un r (de $\mathfrak{M}$), $\ni x_0$, tel que $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ pour x', x'' sur rH, e. g. tel que osc. $(r\text{H})\, f(x) \leqq \varepsilon$ [*l'oscillation de $f(x)$* sur rH]; en effet *il y a un* $\eta_0 = \eta(x_0, \varepsilon) > 0$, *tel que si* $\bar{r}$ (de $\overline{\mathfrak{M}}$) $\ni x_0$ et $\Phi(\bar{r}) < \eta_0$, *on aura* osc. $(\bar{r}\,\text{H})\, f(x) \leqq \varepsilon$.

Le théorème dans [(R; § 12)] aura lieu dans notre cas; ainsi :

$$(9.4)\quad \begin{cases} \Psi \in \text{V. B. } (\textit{sur } \mathrm{R}) \\ \textit{entraîne que les dérivées de } \Psi \textit{ soient sommables sur } \mathrm{R}. \end{cases}$$

Soit $D^* \Psi(x)$ une dérivée intermédiaire (qui peut être une dérivée extrême). On démontre, moyennant le théorème 8.1 de Denjoy-Vitali [en suivant la méthode indiquée dans (R); § 12] que

(1_0) $D^* \Psi(x)$ *est fini sur une plénitude de* R. Nous allons donner le reste de la démonstration de (9.4), en tant qu'elle diffère considérablement de la preuve correspondante dans [(R); § 12], ce qui résulte du défaut possible de compacticité (donc de l'uniformité de la continuité sur certains ensembles fermés). Soient $\varepsilon > 0$ et $h = h_\varepsilon, \subset \mathrm{R}$, fermé, tels que

$$(2_0)\quad 2\Phi(\mathrm{R})\,\varepsilon < 1, \qquad \Phi(\mathrm{R} - h) < \varepsilon, \qquad f(x) = D^* \Psi(x) \text{ est continu sur } h$$

[c'est une conséquence de (9.2)]. Il existe un $\eta' > 0$, tel que

$$(3_0)\quad \begin{cases} \sum |\Psi(q_j)| \leqq \mathrm{B}(<\infty), \\ \text{dès que les } q_j \text{ (de } \mathfrak{M}) \quad (j = 1, \ldots, \nu \text{ fini}) \quad \text{sont disjoints,} \\ q_j \subset \mathrm{R} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}\{q_j\} < \eta'. \end{cases}$$

La continuité de $f(x)$ (2_0) sur h entraîne l'existence d'une fonction $\eta(x) = \eta(x, \varepsilon)$ *positive*, qu'on peut supposer telle que $\eta(x) \leqq \eta'$ et qui est définie sur h, de sorte que :

$$(4_0)\quad \begin{cases} \text{les relations} \quad x \in h, \qquad x \in \bar{r}\,(\in \mathfrak{M}), \\ \Phi(r) < \eta(x) \quad \text{entraînent osc. } (\bar{r}\,h)\, f < \varepsilon. \end{cases}$$

Or la dérivée (intermédiaire) $f(x)$ est finie sur h; donc à tout point x de h, il correspond une suite $\rho_j(x)\,(j = 1, 2, \ldots)$, $\subset \mathrm{R}$, telle que

$$(5_0)\quad \begin{cases} \bar{\rho}(x)\,(\in \mathfrak{M}) \ni x, \qquad \Phi(\rho_j(x) \to 0, \qquad \dfrac{\Psi(\rho_j(x)}{\Phi(\rho_j(x)} \to f(x); \\ \text{on peut supposer que} \quad \Phi(\rho_j(x)) < \eta(x)\,(\leqq \eta'), \end{cases}$$

D'après le théorème (8.1) de Denjoy-Vitali de la famille $\{\rho_j(x)\}$ $(j = 1, 2, \ldots, x$ parcourant $h)$ on peut extraire une suite de r_i $(i = 1, 2, \ldots)$ disjoints, tels que

$$(6_0)\quad \begin{cases} \Phi\left(h - h\sum_1^\infty r_i\right) = 0; \qquad r_i \in \mathfrak{M}; \qquad \bar{r}_1 \text{ contient un } x_i \text{ de } h, \\ \text{tel que} \quad \Phi(r_i) < \eta(x_i)\,(\leqq \eta'); \qquad \left| f(x_i) - \dfrac{\Psi(r_i)}{\Phi(r_i)} \right| < \varepsilon \\ (i = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Donc [(4_0), (2_0)], avec un $\nu = \nu_\varepsilon$ fini et $h_\nu = h(r_1 + \ldots + r_\nu)$:

$$(7_0) \quad \begin{cases} \Phi(h - h_\nu) < \varepsilon, \qquad \Phi\left(\sum_1^\nu r_i\right) \geqq \Phi(h_\nu) > \Phi(h) - \varepsilon > \Phi(\mathrm{R}) - 2\varepsilon; \\ \qquad\qquad \text{osc. } (\bar{r}_i h_\nu) f \leqq \text{osc. } (\bar{r}_i h) f < \varepsilon. \end{cases}$$

Sur $r_1 + \ldots + r_\nu (\supset h_\nu)$ on définit la fonction (simple)

$$\varphi(x) = \frac{\Psi(r_i)}{\Phi(r_i)} \, (x \in r_i).$$

D'après (6_0) et (7_0),

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqq |f(x) - f(x_{i(x)})| + \left| f(x_{i(x)}) - \frac{\Psi(r_{i(x)})}{\Phi(r_{i(x)})} \right| < 2\varepsilon \text{ sur } h_\nu,$$

où $i(x)$ est un entier $\leqq \nu$. Ainsi (2_0),

$$\begin{aligned} \int_{h_\nu} |f(x)| \, d\Phi(x) &< \int_{h_\nu} |\varphi(x)| \, d\Phi(x) + 2\varepsilon \Phi(\mathrm{R}) \\ &< \sum_1^\nu \int_{hr_i} |\varphi| \, d\Phi + 1 \\ &\leqq \sum_1^\nu \int_{r_i} |\varphi| \, d\Phi + 1 = \sum_1^\nu |\Psi(r_i)| + 1. \end{aligned}$$

Or les $r_i (\in \mathfrak{M})$, $\subset \mathrm{R}$, sont disjoints et (6_0) $\Phi(r_i) < \eta'$, donc (3_0),

$$\int_{h_\nu} |f| \, d\Phi < \mathrm{B} + 1 \qquad (\mathrm{B} \text{ fini, est indépendant de } \nu = \nu_\varepsilon).$$

En tant que [(2_0), (7_0)]: $\Phi(\mathrm{R} - h_\nu) < 2\varepsilon$, *la conclusion dans* (9.4). *s'ensuit.*

La *continuité absolue* d'une fonction $\Psi(r)$ de r (de $\mathfrak{M}$), $r \subset \mathrm{R}$, (de $\mathfrak{M}$), exprimée en écrivant $\Psi \in$ A. C. (sur R), est un caractère spécifié comme il suit : à tout $\varepsilon > 0$, il correspond un $\eta(\varepsilon) > 0$, tel que :

(9.5) les relations $q_i (i = 1, \ldots, \nu$ fini$) \in \mathfrak{M}$, $g_i \subset \mathrm{R}$, les g_i étant disjoints,

$$\Phi\left(\sum_1^\nu q_i\right) < \eta(\varepsilon) \quad \text{entraînent} \quad \left|\sum_1^\nu \Psi(q_i)\right| < \varepsilon.$$

Comme dans [(R); § 13] on dira que $\Psi \in$ A. C. I., si $\sum \Psi(q_i) > -\varepsilon$, et que $\Psi \in$ A. C. S., si $\sum \Psi(q_i) < \varepsilon$. Notons que, si Ψ est additive (sur R) dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$ et si $\Psi(e) = 0$, dès que e est contenu dans la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$, alors

$$(9.5\,a)\qquad \left\{ \begin{array}{lll} \Psi \in \text{A. C. (sur R)} & \text{entraîne} & |\Psi(\tilde{r})| < \varepsilon, \\ \text{dès que}\ \tilde{r}\ (\text{de}\ \widetilde{\mathfrak{M}}) \subset \text{R} & \text{et} & \Phi(\tilde{r}) < \eta(\varepsilon). \end{array} \right.$$

La réciproque de cette remarque pour Ψ, de la sorte indiquée, est aussi vraie. Comme dans [(R); § 13], on note que la définition du caractère A. C. (9.5) n'est pas modifiée si l'on remplace $\left|\sum \Psi(q_i)\right|$ par $\sum |\Psi(q_i)|$. On vérifie que $\Psi \in$ A. C. (sur R) entraîne $\Psi \in$ V. B. (sur R).

(9.6) $\Psi \in$ A. C. I. (sur R) *entraîne*

$$(9.6\,a)\qquad \underline{\int_{\text{R}}} \Psi \geqq \int_{\text{R}} \underline{\text{D}}\, \Psi(x)\, d\Phi(x), \qquad \overline{\int_{\text{R}}} \Psi \geqq \int_{\text{R}} \overline{\text{D}}\, \Psi(x)\, d\Phi(x);$$

si $\Psi \in$ A. C. (sur R), (9.6 *a*) *aura lieu avec le signe d'égalité; dans* (9.6 *a*) *une désignation* $\int \underline{\text{D}}\, \Psi\, d\Phi$ *veut dire soit une intégrale lebesguienne, soit* $+\infty$.

Si s est un *système fini* dans R [e. g. $s = \{q_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots$, fini), $q_i (\in \mathfrak{M}) \subset$ R, q_i étant *disjoints*], on pose

$$(9.7)\qquad \Psi^-(s) = \min_{\sigma} \Psi(\sigma), \qquad \Psi^+(s) = \max_{\sigma} \Psi(\sigma)$$

pour désigner respectivement les bornes inférieure et supérieure de $\Psi(\sigma)$ pour les systèmes finis σ, contenus dans s; on a

$$(9.7\,a)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} \Psi^+(s) \geqq 0 \geqq \Psi^-(s), & \Psi^+(s) \geqq \Psi(s) \geqq \Psi^-(s), \\ \overline{\text{D}}\, \Psi^+(x) \geqq \text{D}^* \Psi(x) \geqq \underline{\text{D}}\, \Psi^-(x) & (x \text{ sur R}), \end{array} \right.$$

D* désignant n'importe quelle dérivée intermédiaire. Si $\Psi \in$ A. C. I. (sur R) on aura $\Psi^- \in$ A. C. donc V. B. sur R et $\underline{\text{D}}\, \Psi^-(x)$ sera sommable sur R, *ce qui vérifie la remarque à la fin de* (9.6). En vertu de (9.7 *a*), du fait que $\Psi^- \in$ V. B. et de (8.1) on conclut, comme dans [R; § 13)], que (au cas $\Psi \in$ A. C. I.) :

$$(1_1)\qquad \overline{\text{D}}\, \Psi(x) = +\infty \ (\text{sur un ensemble épais} \subset \text{R}) \qquad \text{entraîne} \qquad \overline{\int_{\text{R}}} \Psi = +\infty.$$

L'alternative de l'hypothèse dans (1_1) est $\overline{D}\Psi(x) = f(x)$ fini sur une *plénitude de* R. *D'après* (9.2) *il existe un* e', $\subset R$, *fermé tel que* $\Phi(R - e') < \frac{\varepsilon}{2}$ et $f(x)$ est continue sur e'. Sans compacticité on ne peut pas affirmer que $|f(x)|$ est bornée sur e'. Pourtant $f(x)$ étant continue (et finie) sur e', on aura

$$e' = \sum_{n=1}^{\infty} e_n, \qquad \text{où} \quad e_n = \{ x \in e' ; |f(x)| \leqq n \} \text{ est fermé et } \quad e_n \subset e_{n+1}.$$

Il existe donc un $n = n(\varepsilon)$ tel que

$$\Phi(e' - e_n) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad |f(x)| \leqq n(\varepsilon) \, (< \infty)$$

sur e_n. En résumé, il existe un e $(= e_{n(\varepsilon)})$ fermé, $\subset R$, tel que :

$$(2_1) \quad \Phi(R - e) < \varepsilon, \qquad f(x) \text{ est continue sur } e, \qquad |f(x)| \leqq n(\varepsilon) \text{ sur } e,$$

Soit $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$; il existe un $\eta(x, \varepsilon_1)$, positif pour x sur e, tel que osc. $(\bar{r}_1 e) f < \varepsilon_1$, dès que $\bar{r}$ (de $\overline{\mathfrak{M}}$) contient un x de e et $\Phi(r) < \eta(x, \varepsilon_1)$; $\eta > 0$ étant donné, on peut supposer que $\eta(x, \varepsilon_1) \leqq \eta$. Or $\frac{\Psi(\rho_j(x))}{\Phi(\rho_j(x))} \to f(x)$ pour tout x sur e, avec $\bar{\rho}_j(x)$ (de $\overline{\mathfrak{M}}$) $\ni x$ $(j = 1, 2, \ldots)$ et $\Phi(\rho_j(x)) \to 0$; nous faisons en sorte que $\Phi(\rho_j(x)) < \eta(x, \varepsilon_1)$. D'après (8.1) de la famille $\{ \rho_j(x) \}$ $(j = 1, 2, \ldots,$ x décrivant e) on peut choisir un système fini $S = \{ r_i \}$ $(i \leqq \nu)$, tel que :

$$(3_1) \qquad \Phi\left(e - e\sum_{1}^{\nu} r_i\right) < \frac{\varepsilon_1}{2}, \qquad \Phi\left(\sum_{1}^{\nu} r_i - e\sum_{1}^{\nu} r_i\right) < \frac{\varepsilon_1}{2};$$

$\bar{r}_i$ (de $\overline{\mathfrak{M}}$) contient un x_i de e tel que

$$\Phi(r_i) < \eta(x_i, \varepsilon_1) \, (\leqq \eta); \qquad \left| \frac{\Psi(r_i)}{\Phi(r_i)} - f(x_i) \right| < \varepsilon_1; \qquad \text{osc.} \, (\bar{r}_i e) f(x) < \varepsilon_1$$

[la dernière inégalité résulte de la remarque à la suite de (2_1)]. En posant $\varphi(x) = \frac{\Psi(r_i)}{\Phi(r_i)}$ sur r_i, on obtient $[(3_1), (2_1)]$:

$$|\varphi(x) - f(x)| < 2\varepsilon_1 \qquad \text{sur} \quad h_\nu = e\sum_{1}^{\nu} r_i,$$

$$|\varphi(x)| < n(\varepsilon) + \varepsilon_1 \qquad \text{sur} \quad r' = \sum_{1}^{\nu} r_i;$$

donc (avec $S = \{r_\iota\}$) :

$$\left|\Psi(S) - \int_e^* f\,d\Phi\right| = \left|\int_{I'} \varphi\,d\Phi - \int_e f\,d\Phi\right|$$
$$= \left|\int_{h_\nu} (\varphi - f)\,d\Phi + \int_{I' - h_\nu} \varphi\,d\Phi - \int_{e - h_\nu} f\,d\Phi\right|$$
$$< 2\varepsilon_1 \Phi(R) + (n(\varepsilon) + \varepsilon_1)\frac{\varepsilon_1}{2} + n(\varepsilon)\frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon$$

pour ε_1 assez petit.

Or $M(\{r_\iota\}) < \eta(\mathfrak{z}_1)$, d'où il existe une décomposition

$$\sigma = \{r^k\} + \{r_\iota\}$$

(dans $\mathfrak{M}$) de R, telle que $M(\sigma) < \eta$. On trouve que $\Psi(\sigma)$ surpasse $\int_e f\,d\Phi - \varepsilon + \Psi^-(\{r^k\})$; $\Psi^- \in$ A. C. et $\Phi\left(\sum r^k\right) \to 0$ avec ε; *on établit la seconde inégalité* (9.6 *a*) *dans tous les cas*, comme dans [(R); p. 84], en laissant ε et η tendre vers zéro.

La première inégalité (9.6 *a*) se démontre essentiellement comme dans [(R); § 13]. Le cas où $\underline{D}\,\Psi(x) = +\infty$ sur un ensemble épais exige l'emploi du théorème de Egoroff; le cas où $\underline{D}\,\Psi(x)$ est fini sur une plénitude de R fait intervenir l'épaisseur moyenne sur certains ensembles de $\mathfrak{M}$. *Le reste du théorème* (9.6) *est immédiat.*

R étant un ensemble de $\mathfrak{M}$, on dira [d'accord avec (R); § 14] que

(9.8) $\Psi \in$ A. C. G., *absolument continue généralisée sur* R,

si

(9.8 *a*) p parfait-s, $r \in \mathfrak{M}$, $r \subset R$, $rp \neq 0$

entraîne que $\Psi_p \in$ A. C. sur un r_1 (de $\mathfrak{M}$), $\subset r$, tel que $r_1 p \neq 0$.

L'analogue du théorème dans [(R); § 14] sera comme il suit :

(9.9) $\Psi \in$ A. C. G. (sur R) *équivaut à ce que* $R = \sum_1^\infty \lambda(n)$, *où les* $\lambda(n)$ *sont fermés,* $\lambda(n)$ *est dans la frontière d'un ensemble de* $\mathfrak{M}$, *ou bien* $\Psi_{\lambda(n)} \in$ A. C. sur R.

La condition donnée dans (9.9) *entraîne* $\Psi \in$ A. C. G.; ceci se démontre comme dans [(R); § 14] avec des modifications évidentes dues au fait que les $\lambda(n)$ sont seulement fermés (plutôt que compacts). Le raisonnement est du genre employé dans le théorème de Baire (qui s'applique dans la théorie actuelle).

Si $\Psi \in$ A.C. G. (*sur* R), *d'accord avec la définition* (9.8, 8 *a*), *la condition dans* (9.9) *s'ensuivra.* En tant que la démonstration de cette proposition dépend de la condition (7.4, 7°), qui diffère essentiellement de l'axiome correspondant VIII dans (R), nous donnerons quelques détails de la preuve. Posons $e_0 = \mathrm{F}$ (l'espace) et formons une suite transfinie d'ensembles fermés e_α de la façon suivante. Si α est de la première espèce et $e_{\alpha-1}$ a un point x' isolé-*s* (α de type 1), on trouve un $r_{\alpha-1}$ (de $\mathfrak{M}$) contenant x', tel que $\bar{r}_{\alpha-1}\, e_{\alpha-1}$ est dans la frontière $g_{\alpha-1}$ d'un ensemble de $\mathfrak{M}$; $e_\alpha = e_{\alpha-1} - r_{\alpha-1}\, e_{\alpha-1}$. Si α est de la première espèce et $e_{\alpha-1}$ est parfait-*s* et $e_{\alpha-1}\mathrm{R} \neq 0$ (α de type 2), alors (9.8, 9.8 *a*) il existe un $r'_{\alpha-1}$ (de $\mathfrak{M}$)$\subset$R, joint à $e_{\alpha-1}$, tel que (1′) $\Psi_{e_{\alpha-1}} \in$ A. C. sur $r'_{\alpha-1}$. Soit $y_{\alpha-1}$ un point de $r'_{\alpha-1}\, e_{\alpha-1}$. En vertu de (7.4, 7°) il existe un $r_{\alpha-1}$ (de $\mathfrak{M}$), tel que :

$$(2') \qquad \begin{cases} \bar{r}_{\alpha-1} \subset r'_{\alpha-1}, \qquad r_{\alpha-1} \ni y_{\alpha-1}, \\ \text{le nombre } \sigma = \sigma(r'_{\alpha-1} r_{\alpha-1}, y_{\alpha-1}) > 0 \text{ existe}; \end{cases}$$

on aura

$$(3') \qquad \begin{cases} r_{\alpha-1}\, e_{\alpha-1} \neq 0; \\ \text{les relations } \rho \in \mathfrak{M}, \quad \bar{\rho}\, \bar{r}_{\alpha-1} \neq 0, \qquad \Phi(\rho) < \sigma, \qquad \text{entraînent} \quad \rho \subset r'_{\alpha-1}. \end{cases}$$

Posons (*avec* α *de type* 2), $e_\alpha = e_{\alpha-1} - r_{\nu-1}\, e_{\alpha-1}$. Or (1′) veut dire que $|\Psi_{e_{\alpha-1}}(\mathrm{S}')| < \varepsilon$ pour tout système fini $\mathrm{S}' = \{\rho'_j\}$, $\subset r'_{\alpha-1}$, avec $\Phi(\mathrm{S}') < \eta_{\alpha-1}(\varepsilon)$; on peut choisir $\eta_{\alpha-1}(\varepsilon)$ ne surpassant pas σ(2′). Soit $\mathrm{S} = \{\rho_i\}$ un système fini dans R avec $\Phi(\mathrm{S}) < \eta_{\alpha-1}(\varepsilon)$; alors $\Phi(\rho_i) < \sigma$. On obtient (3′) :

$$\Psi_{\bar{r}_{\alpha-1} e_{\alpha-1}}(\mathrm{S}) = \sum_j{}' \Psi(\rho_j)\,(\bar{\rho}_j\, \bar{r}_{\alpha-1}\, e_{\alpha-1} \neq 0), \qquad \rho_j \left(\text{dans } \sum{}'\right) \subset r'_{\alpha-1};$$

les $\bar{\rho}_j$ intervenant dans $\sum'$ sont joints à $e_{\alpha-1}$, ils forment un système fini S′, $\subset r'_{\alpha-1}$, avec $\Phi(\mathrm{S}') \leqq \Phi(\mathrm{S}) < \eta_{\alpha-1}(\varepsilon)$; donc

$$|\Psi_{\bar{r}_{\alpha-1} e_{\alpha-1}}(\mathrm{S})| = |\Psi_{e_{\alpha-1}}(\mathrm{S}')| < \varepsilon;$$

c'est-à-dire

$$(4') \qquad \Psi_{\bar{r}_{\alpha-1} e_{\alpha-1}} \in \text{A. C. sur R, si } \alpha \text{ est de type 2.}$$

Si α est de première espèce, si $e_{\alpha-1}$ est parfait-*s* et $e_{\alpha-1}\mathrm{R} = 0$, alors $e_\alpha = e_{\alpha-1}$. Pour α de la seconde espèce, $e_\alpha = \prod(\beta < \alpha)\, e_\beta$. *Le reste de la démonstration du théorème* (9.9) *est comme dans* [(R); § 14], en employant des ensembles K_m fermés, plutôt que compacts, et avec l'aide du théorème 4.1 (Cantor-Baire).

La classe de fonctions $\Psi \in$ A. C. G. (sur R) *est additive.*

Selon la locution dans (R), une fonction $\Psi(r)$, définie pour $r (\in \mathfrak{M}) \subset \mathrm{R}$, sera dite I. G., *intégrale Burkill généralisée,* si les relations p parfait-s, r(de $\mathfrak{M}) \subset \mathrm{R}$, $rp \neq 0$ entraînent que $\int_{r_1} \Psi_p$ existe pour un r_1 (de $\mathfrak{M}$), $\subset r$, joint à p. Avec l'aide des considérations en rapport avec (1')-(4') on vérifie le fait suivant (indiqué dans [(R); § 14] dans l'hypothèse de compacticité) :

(9.10) *Si* $\Psi \in$ I. G. *sur* R, *alors* $\mathrm{R} = \sum_{1}^{\infty} \lambda_n$ *où les* λ_n *sont fermés et* λ_n *est dans la frontière d'un ensemble de* $\mathfrak{M}$, *ou bien pour un* r_n (*de* $\mathfrak{M}$), $\lambda_n \subset r_n \subset \mathrm{R}$, *l'intégrale* $\int_{r_n} \Psi_{\lambda_n}$ *existe.*

En se rapprochant de la terminologie de *M. Denjoy,* on peut considérer l'intégrale $\int_{r_1} \Psi_p$ (avec $r_1 p \neq 0$), si elle existe, comme une sorte de variation de Ψ sur (ou autour de) $r_1 p$. $\Psi \in$ I. G. (sur R) signifierait que la variation de Ψ est réductible sur tout ensemble p parfait-s ($p\mathrm{R} \neq 0$), ç'est-à-dire que toute partie $rp \neq 0$ (r (de $\mathfrak{M}) \subset \mathrm{R}$) de p contient une partie $r_1 p = 0$ (r_1 (de $\mathfrak{M}) \subset r$), sur laquelle la variation est définie.

10. Quelques caractérisations de la totale-D, classifications de fonctions D-totalisables.

— Une conséquence assez immédiate de (9.6) est la suivante :

(10.1) Si $\Psi \in$ A. C. sur un r (de $\mathfrak{M}$), alors pour que $\int_r \Psi$ existe il faut et il suffit que $\mathrm{D}\,\Psi(x)$ existe (et est finie) sur une plénitude de r.

Moyennant (10.1) et le lemme 7.11, on conclut comme il suit :

(10.2) *Les caractères* A. C. G. *et* I. G. *sur* R *pour* Ψ *entraînent l'existence de* $\mathrm{D}\,\Psi(x)$ *sur une plénitude de* R. *Si* $\Psi \in$ A. C. G. *sur* R *et* $\mathrm{D}\,\Psi(x)$ *existe sur une plénitude de* R, *alors* $\Psi \in$ I. G. *sur* R.

Nous obtenons l'énoncé suivant [analogue au théorème dans (R); § 15].

(10.3) *Admettons que* Ψ *soit complètement additive dans* $\widetilde{\mathfrak{M}}$ *sur un* R *de* $\mathfrak{M}$, *ainsi qu'intérieurement continue* (dans $\mathfrak{M}$) *sur* R. *Pour que* Ψ *soit une* D-*totale* [pour tout $r (\in \mathfrak{M}) \subset \mathrm{R}$], *il faut et il suffit que*

(10.3 *a*) $\Psi \in$ A. C. G. *et* I. G. *sur* R;

aussi [en vertu de (10.2)] *il faut et il suffit que*

(10.3 *b*) $\Psi \in$ A. C. G. *sur* R *et* $D\,\Psi(x)$ (*finie*) *existe sur une plénitude de* R.

La nécessité de (10.3 *a*) s'ensuit avec l'aide de la remarque à la suite de (7.6); la suffisance de (10.3 *a*) résulte de (10.2) et de (9.6).

Notons la constatation suivante, donnée dans [(R); § 15], qui, dans notre cas, s'ensuit de (8.1). On aura $\Psi(R) = 0$, dès que

(10.4) p est fermé, Ψ est additive sur R, $D\,\Psi(x) = 0$ sur une plénitude de R, $\Psi(r) = 0$ pour tout $\bar{r}(\subset \bar{R})$ disjoint de p, $\Psi_p \in$ A. C. sur R.

Soit $f(x)$ définie sur une plénitude d'un R (de $\mathfrak{M}$); soit $\Psi(r)$ une fonction de $r(\in \mathfrak{M})$, $\subset$ R, avec les caractères :

(10.5) Ψ est complètement additive dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$ et est intérieurement continue dans $\mathfrak{M}$ sur R, $\Psi \in$ A. C. G. (sur R) et $D\,\Psi(x) = f(x)$ sur une plénitude de R; *pour une f donnée, si une telle fonction Ψ existe, Ψ sera unique.*

En tant que $\Psi \in$ A. C. G. entraîne que $\underline{D}\,\Psi(x)$, $\overline{D}\,\Psi(x)$ sont finis sur une plénitude on peut supposer dans (10.5) que $D\,\Psi(x) = f(x)$ *fini* sur une plénitude, de R. Si Ψ_i $(i = 1, 2)$, de la sorte ainsi indiquée, correspond à une même f, alors $\Psi = \Psi_1 - \Psi_2 \in$ A. C. G. (sur R) et $D\,\Psi(x) = 0$ sur une plénitude H de R. Soit $\mathfrak{N} = \{ r' \}$ la famille des $r'(\subset R)$ de $\mathfrak{M}$ tels que $\Psi(r_1) = 0$ pour tout r_1 (de $\mathfrak{M}$) $\subset r'$. $\mathfrak{N}$ satisfait à (7.11, 2_0), ainsi qu'à (7.11, 3_0) [en vertu de (7.4, 6°) et de la continuité intérieure]. Avec (7.11, 1_0) en vue, supposons (pour le présent) que r est un ensemble de $\mathfrak{M}$, $r \subset R$, tandis que $r^n \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et

$$(1_1) \qquad r^n \subset r^{n+1}, \qquad \sum r^n = r$$

et que, de plus, r^n possède une décomposition-$\tilde{f}$ dans $\mathfrak{M}$ (7.9), dont les composants $q_{n,i}$ sont dans $\mathfrak{N}$, $r^n = \sum_i q_{n,i} + e_n (\Phi(e_n) = 0)$. Soit ρ (de $\mathfrak{M}$) $\subset r$. Alors en raison de (7.4, 3°) on obtient

$$\rho r^n (\in \overline{\mathfrak{M}}) = \sum_i \rho q_{n,i} + \rho e_n = \sum_i \sum_j h^n_{i,j} + e^n \qquad (\Phi(e^n) = 0),$$

où le troisième membre représente une décomposition-$\tilde{f}$ dans $\mathfrak{M}$ de ρr^n; on a $h^n_{i,j} \subset q_{n,i} (\in \mathfrak{N})$, donc $h^n_{i,j} \in \mathfrak{N}$ et $\Psi(\rho r^n) = 0$. On note que ρr^n (de $\widetilde{\mathfrak{M}}$) $\uparrow \rho r = \rho$; Ψ étant complètement additive dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$, il en résulte que $\Psi(\rho) = \lim_{n} \Psi(\rho r'') = 0$, donc $r \in \mathfrak{N}$ [dans les conditions données en rapport avec (1_1)]; $\mathfrak{N}$ vérifie $(7.11, 1_0)$. Soit $\mathfrak{N}_1 = \{\rho\}$, $\subset \mathfrak{N}$, une famille ne couvrant pas R;

$$p = F - \sum \rho(\rho \in \mathfrak{N}_1).$$

Si p a un point x_0 isolé-s, il existe un r_0 (de $\mathfrak{M}) \ni x_0$, $r_0 \subset R$, tel que $r_0 p$ soit dans la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$; soit ρ_0 (de $\mathfrak{M}) \subset r_0$. On aura $\rho_0 - \rho_0 p$ (de $\widetilde{\mathfrak{M}}) \subset \sum \rho(\rho \in \mathfrak{N}_1)$; d'après le lemme 7.10 (avec $\mathfrak{N}_1$ pour $\mathfrak{N}$ et $\rho_0 - \rho_0 p$ pour $\tilde{r}$, Ψ étant *complètement additive* dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$) on peut trouver des r_ν, $\in \mathfrak{N}_1$ des $\tilde{\rho}_\nu$, $\in \widetilde{\mathfrak{M}}$ disjoints, et des $q_{\nu, i}$ ($i = 1, \ldots, k$, fini) disjoints, tels que

$$\Psi(\rho_0 - \rho_0 p) = \sum_{\nu=1}^{\sigma} \Psi(\tilde{\rho}_\nu), \qquad \text{où} \quad \Psi(\tilde{\rho}_\nu) = \sum_{i} \Psi(q_{\nu, i}), \qquad q_{\nu, i} \in \mathfrak{M};$$
$$q_{\nu, i} \subset \tilde{\rho}_\nu \subset r_\nu [\in \mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}];$$

donc

$$q_{\nu, i} \in \mathfrak{N}, \qquad \Psi(q_{\nu, i}) = 0, \qquad \Psi(\tilde{\rho}_\nu) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Psi(\rho_0) = \Psi(\rho_0 p) = 0.$$

Par là, $r_0 \in \mathfrak{N}$; mais $r_0 \ni x_0$, d'où r_0 est non couvert par $\mathfrak{N}_1$. Il reste à considérer le cas où p est parfait-s; $pR \neq 0$; vu [(9.8), (9.8 *a*)], pour $\Psi = \Psi_2 - \Psi_1$ et R, il résulte que

(2_1) $\qquad \Psi_p \in$ A. C. sur un r_1 (de $\mathfrak{M}$), $\subset R$, joint à p.

De plus, (3_1) si r (de $\mathfrak{M}) \subset r_1$, $\bar{r} p = 0$, on aura $\Psi(r) = 0$ $\Big[$en effet, le lemme 7.10 s'applique encore en vertu de l'additivité complète dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$ de Ψ; on note que $r \subset \sum \rho(\rho \in \mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N})\Big]$. A cause de (10.4) (avec r_1 pour R) et de (2_1), en tant que $D\Psi(x) = 0$ sur une plénitude, on déduit que $\Psi(r_1) = 0$; en effet, $\Psi(r_2) = 0$ pour tout r_2 (de $\mathfrak{M}) \subset r_1$; donc $r_1 \in \mathfrak{N}$ et r_1 n'est pas couvert par $\mathfrak{N}_1$ (car $r_1 p \neq 0$). La condition $(7.11, 4_0)$ est vérifiée; par conséquent $R \in \mathfrak{N}$, e. g. $\Psi = 0$ sur R, *ce qui démontre l'énoncé relativement à* (10.5).

Le résultat suivant correspond à la remarque à la fin de [(R); § 15].

THÉORÈME 10.6. — *Pour qu'une fonction Ψ complètement additive dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$ et intérieurement continue dans $\mathfrak{M}$ sur un* R (*de* $\mathfrak{M}$) *soit* D-*totale d'une fonction $f(x)$. définie sur une plénitude de* R, *il faut et* *il suffit que* (10.6 *a*) $\Psi \in$ A. C. G. *sur* R *et* $\mathrm{D}\Psi(x) = f(x)$ *sur une plénitude de* R.

Adoptons les deux définitions contenues dans [(R); § 16] :

(10.7) Ψ *est dite continue dans* $\mathfrak{M}$ *pour un* r (de $\mathfrak{M}$) $\subset$ R (de $\mathfrak{M}$), si $|\Psi(r) - \Psi(\rho)| < \varepsilon$, dès que ρ (de $\mathfrak{M}$) $\subset$ R,

$$\Phi(r - r\rho) + \Phi(\rho - \rho r) < \eta(\varepsilon);$$

Ψ *est continue dans* $\mathfrak{M}$ *sur* R, si elle l'est pour tout $r \subset$ R, (10.7 *a*) $\mathfrak{M}$ satisfait à *la condition de mobilité*, si (ρ, r, r', R étant dans $\mathfrak{M}$) $\bar{\rho} \subset r$, $\bar{r} \subset$ R, $x \in \bar{r}$ entraînent l'existence d'un r' tel que $\bar{\rho} \subset r'$, $\bar{r}' \subset$ R, $x \in r'$, $\Phi(r') = \Phi(r)$ (si $x \in r$, on peut prendre $r' = r$).

Théorème 10.8. — R *étant un ensemble de* $\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{M}$ *satisfaisant à* (10.7 *a*), *si* Ψ *complètement additive dans* $\widetilde{\mathfrak{M}}$ *est continue dans* $\mathfrak{M}$ *sur* R (10.7) *et si* (10.8 *a*) $-\infty < \underline{\mathrm{D}}\Psi(x), \overline{\mathrm{D}}\Psi(x) < +\infty$ *sur* R $-$ H_0 *et* $\mathrm{D}\Psi(x)$ *existe sur une plénitude de* R, H_0 *étant dans une infinité dénombrable de frontières d'ensembles de* $\mathfrak{M}$, *alors*

$$\Psi = (\mathrm{D})\int \mathrm{D}\Psi(x)\, d\Phi(x)$$

sur R, *e. g.* Ψ *est la totale*-D *de sa dérivée.*

Ce résultat est analogue au théorème contenu dans [(R); § 16]. La démonstration est assez différente pour justifier la présentation des détails. En vertu de (7.3), moyennant les complémentaires, on conclut que des F_m ($m = 1, 2, \ldots$) fermés existent, tels que

$$(1') \qquad \mathrm{F}_m \subset \mathrm{F}_{m+1}, \qquad \sum_{1}^{\infty} \mathrm{F}_m = \mathrm{R}.$$

Soit E_m l'ensemble des points x de F_m tels que les relations

$$(2') \qquad \rho \in \mathfrak{M}, \qquad \Phi(\rho) < \frac{1}{m}, \qquad \bar{\rho} \ni x$$

entraînent

$$(3') \qquad |\Psi(\rho)| \leq m\,\Phi(\rho), \qquad \rho \subset \mathrm{R}.$$

D'après (7.4, 9°) il existe sur R une fonction $\nu(x)$ positive, telle que

$$(4') \qquad \rho \in \mathfrak{M}, \qquad \bar{\rho} \ni x, \qquad \Phi(\rho) < \nu(x)$$

entraînent

$$(5') \qquad \rho \subset \mathrm{R}.$$

En vertu de (10.8 *a*), il existe sur $R - H_0$ une fonction $0 < b(x) < +\infty$, de sorte que

$$(6') \qquad -b(x) < \underline{D}\,\Psi(x), \qquad \overline{D}\,\Psi(x) < b(x) \quad \text{sur} \quad R - H_0.$$

Sur $R - H_0$ est définie une fonction $\tau(x) > 0$, telle que

$$(7') \qquad \rho \in \mathfrak{M}, \qquad \bar{\rho} \ni x, \qquad \Phi(\rho) < \tau(x)$$

impliquent

$$(8\ ) \qquad |\Psi(\rho)| \leqq b(x)\,\Phi(\rho).$$

Pour $x \in R$ les F_m contiennent x à partir d'un m. Si x est un point sur $R - H_0$, on peut trouver un entier m_x, tel que

$$(9') \qquad x \in F_{m_x}, \qquad m_x \geqq b(x), \qquad \frac{1}{m_x} \leqq \nu(x), \qquad \frac{1}{m_x} \leqq \tau(x);$$

envisageons ρ comme dans (2′), mais avec $m = m_x$; alors (9′) :

$$\bar{\rho} \ni x, \qquad \Phi(\rho) < \tau(x), \qquad \Phi(\rho) < \nu(x);$$

on aura [(7′) et (8′), (4′) et (5′)] :

$$|\Psi(\rho)| \leqq b(x)\,\Phi(\rho) \leqq m_x\,\Phi(\rho), \qquad \rho \subset R;$$

donc [(2′) et (3′)] x sera sur E_{m_x}. Conséquemment,

$$(10') \qquad R - H_0 \subset \sum E_m.$$

Si x est un point sur $\overline{E}_m$, on aura $x \in F_m$; *considérons un* ρ *satisfaisant à* (2′); selon (7.4, 6°), on trouve ρ_1, ρ_2 (de $\mathfrak{M}$), tels que

$$(11') \quad \bar{\rho}_1 \subset \rho, \qquad \bar{\rho} \subset \rho_2, \qquad \Phi(\rho_2 - \rho_1) \text{ est arbitrairement petit}, \qquad \Phi(\rho_2) < \frac{1}{m}.$$

En raison de (10.7 *a*), il y a un ρ' de $\mathfrak{M}$, tel que

$$(12') \quad \bar{\rho}_1 \subset \rho', \qquad \bar{\rho}' \subset \rho_2, \qquad \rho' \ni x, \qquad \Phi(\rho') = \Phi(\rho) \qquad \left[< \frac{1}{m}, \text{ vu } (2')\right];$$

un point y de E_m sera dans ρ'; d'après la définition de E_m [(2′) et (3′)] et vu (12′) :

$$(13') \qquad |\Psi(\rho')| \leqq m\,\Phi(\rho') = m\,\Phi(\rho), \qquad \rho' \subset R, \qquad \text{d'où} \quad \bar{\rho}_1 \subset R.$$

Démontrons que $\rho \subset R$; au cas contraire, ρ étant ouvert, l'ensemble $\rho - \rho\overline{R}$ sera non vide; $\rho - \rho\overline{R}$ ouvert est épais, et [(11′), (12′) et (13′)] :

$$\rho - \rho\overline{R} \subset \rho_2 - \rho_1; \qquad 0 < \Phi(\rho - \rho\overline{R}) \leqq \Phi(\rho_2 - \rho_1) \quad \text{arbitrairement petit};$$

c'est impossible, car ρ est indépendant de ρ_1, ρ_2; donc $\rho \subset R$. Ainsi, vu la continuité (10.7) dans $\mathfrak{M}$ de Ψ sur R, on obtient (13') :

$$(14') \qquad |\Psi(\rho)| \leqq m\,\Phi(\rho), \qquad \rho \subset R.$$

En résumé : $x \in \overline{E}_m \subset F_m$, ρ satisfaisant à (2'), entraîne (14'), e. g. (3') Par conséquent, $x \in E_m$; E_m *est fermé. La conclusion du théorème* 10.8 *s'ensuit* [comme dans (R); § 15] en notant que $R = H_0 + \sum_1^\infty E_m [E_m$ fermés], $\Psi_{E_m} \in$ A. C. sur R, $\Psi \in$ A. C. G. sur R [vu (9.9)] et en s'appuyant sur le théorème 10.6.

(10.9) Étant donné un R de $\mathfrak{M}$, admettons que $f(x)$ soit totaisable-D sur tout r (de $\mathfrak{M}$) avec $\bar{r} \subset R$. Posons $\Psi(r) = (D)\int_r f\,d\Phi$ pour $\bar{r} \subset R$ et supposons qu'il existe une fonction $\Psi^*(\rho)$ *complètement additive* (dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$) sur R et intérieurement continue (dans $\mathfrak{M}$) sur R, telle que $\Psi^*(r) = \Psi(r)$ pour tout r (de $\mathfrak{M}$) avec $\bar{r} \subset R$. Alors

$$(D)\int_R f\,d\Phi = \Psi^*(R).$$

Cet énoncé découle de la définition 7.12, comme dans [(R); § 17], en notant que r_0 (de $\mathfrak{M}) \subset R$, $r_0 p \neq 0$ (p parfait-s) entraînent l'existence d'un r (de $\mathfrak{M}$), tel que $\bar{r} \subset r_0$, $rp \neq 0$.

(10.10) Soient $R \in \mathfrak{M}$ et e un ensemble fermé; $S = \{q_i\}$ désignant une décomposition dans $\mathfrak{M}$ de R, considérons la limite, si elle existe :

$$(10.10\,a) \quad \Gamma(R - R_e) = \lim \sum (\bar{q}_i e = 0)\,\Psi(q_i) \qquad (\text{pour } M(S) \to 0).$$

Si l'on pose $\Psi^c(r) = \Psi(r)$ $(\bar{r}e = 0)$, $= 0$ $(\bar{r}e \neq 0)$, où r (de $\mathfrak{M}) \subset R$, e. g. $\Psi^e = \Psi - \Psi_e$, on obtient $\Gamma(R - Re) = \int_R \Psi^e$ (l'intégrale de Burkill). Le second théorème contenu dans [(R); § 17] prend la forme suivante :

THÉORÈME 10.11. — R, $\in \mathfrak{M}$ *et e fermé étant donnés* ($Re \neq 0$), *supposons que* $f(x)$, *définie sur une plénitude de* R, *est sommable sur* Re, $\Psi(r) = (D)\int_R f\,d\Phi$ *existe pour tout* r (*de* $\mathfrak{M}$), $\subset R$, *tel que* $\bar{r}e = 0$, $\Gamma(R - Re)$. (10.10 a) *existe et la fonction* $\Gamma(\rho - \rho e)$ $\Big[= \int_\rho \Psi^e$, ρ

(de $\mathfrak{M}) \subset \mathrm{R}\Big]$ *est complètement additive* $\big($*dans* $\widetilde{\mathfrak{M}}\big)$ *et intérieurement continue (dans* $\mathfrak{M}$*) sur* R. *Alors*

$$(10.11\,a)\qquad (\mathrm{D})\int_{\mathrm{R}} f\,d\Phi = \int_{\mathrm{R}e} f\,d\Phi + \Gamma(\mathrm{R} - \mathrm{R}_e).$$

Cela se démontre, comme dans [(R); § 17], moyennant la définition 7.12 et la remarque à la suite de (7.6), mais en tenant compte du caractère de l'additivité complète $\big($dans $\widetilde{\mathfrak{M}}\big)$, qui intervient au cas actuel.

Définition 10.12. — f étant D-totalisable sur les r (de $\mathfrak{M}$) et α pouvant être transfini (des classes I et II), on dira que $f \in \mathrm{K}_0$, sur un $\tilde{\mathrm{R}}$ de $\widetilde{\mathfrak{M}}$, si f est sommable sur $\tilde{\mathrm{R}}$; pour $\alpha > 0$, *on dira que*

$$(10.12\,a)\qquad f \in \mathrm{K}_\alpha \quad \textit{sur un } \tilde{\mathrm{R}} \textit{ de } \widetilde{\mathfrak{M}},$$

si l'une au moins des conditions suivantes a lieu :

(1°) pour une décomposition-$\tilde{f}$ (dans $\mathfrak{M}$) $\mathrm{S} = \{ q_i \}$ de $\tilde{\mathrm{R}}$ on a

$$f \in \mathrm{K}_{\beta_i} \quad (\beta_i < \alpha) \quad \text{sur } q_i,$$

(2°) des $\tilde{\rho}^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ de $\widetilde{\mathfrak{M}}$ existent, tels que

$$\tilde{\rho}^n \uparrow \tilde{\mathrm{R}} \quad \text{et} \quad f \in \mathrm{K}_{\beta_n} \quad (\beta_n < \alpha) \quad \text{sur } \tilde{\rho}^n,$$

(3°) au cas où $\tilde{\mathrm{R}} \in \mathfrak{M}$, il existe un r (de $\mathfrak{M}$), $\supset \tilde{\mathrm{R}}$, sur lequel f est définie, tel que

$$f \in \mathrm{K}_\beta \quad (\beta < \alpha) \quad \text{sur } r;$$

(4°) au cas où $\tilde{\mathrm{R}} \in \mathfrak{M}$, pour tout r (de $\mathfrak{M}$) avec $\bar{r} \subset \tilde{\mathrm{R}}$, on a

$$f \in \mathrm{K}_\beta \quad (\beta < \alpha) \quad \text{sur } r;$$

(5°) au cas où $\tilde{\mathrm{R}} \in \mathfrak{M}$, il existe un e fermé tel que f est sommable sur $\tilde{\mathrm{R}}e$, de sorte que $f \in \mathrm{K}_\beta$ $(\beta < \alpha)$ sur tout r (de $\mathfrak{M}$), $\subset \tilde{\mathrm{R}}$, tel que $\bar{r}e = 0$, et $\Gamma(\rho - \rho e)$ (10.10 *a*) $\Big| = \int_\rho \Psi^c \Big]$ existe et soit *complètement additive* $\big($dans $\widetilde{\mathfrak{M}}\big)$ et *intérieurement continue* sur $\tilde{\mathrm{R}}$.

Cette définition correspond à une définition dans [(R); § 17]; pourtant il y a des modifications significatives [par exemple, *voir* (10.12, 2°)]. Le résultat suivant [analogue au troisième théorème dans (R); § 17] aura lieu avec la définition actuelle des classes K_α.

THÉORÈME 10.13. — *Toute fonction $f(x)$ D-totalisable sur un* R *de* $\mathfrak{M}$ *appartient sur* R *à une classe* K_α (α des classes I, II).

Soit $\mathfrak{N} = \{\rho\}$, $\subset \mathfrak{M}$, la classe d'ensembles $\rho \subset R$, tels que $f(x) \in K_\alpha$ [pour un $\alpha = \alpha(\rho)$] sur ρ. Si $R' \in \mathfrak{N}$, e. g. $f \in K_{\alpha'}(\alpha' = \alpha(R'))$ sur R', et si r (de $\mathfrak{M}) \subset R'$, il s'ensuivra (10.12, 3°) que $f \in K_{\alpha+1}$ sur r, donc $r \in \mathfrak{N}$; ainsi $\mathfrak{N}$ remplit la condition (7.11, 2_0).

Soient maintenant : $r(\in \mathfrak{M}) \subset R$, $r^n \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $r^n \uparrow r$, r^n possédant une décomposition-$\tilde{f}$ dans $\mathfrak{M}$ avec les composants dans $\mathfrak{N}$, donc

$$r_n = \sum_{i=1}^{k_n} q_{n,i} + e_n \qquad [\Phi(e_n) = 0;\ \text{les } q_{n,i},\ \in \mathfrak{N},\ \text{disjoints pour } n \text{ fixe}].$$

On aura $f \in K_{\beta_{n,i}}$ sur $q_{n,i}$ $(i = 1, \ldots, k_n;\ n = 1, 2, \ldots)$. Prenons $\alpha > \beta_{n,i}$. Selon (10.12, 1°) $f \in K_\alpha$ sur r^n; d'après (10.12, 2°) $f \in K_{\alpha+1}$ sur r et $r \in \mathfrak{N}$; la condition (7.11, 1_0) est vérifiée.

Étant donné un R' $(\subset R)$ de $\mathfrak{M}$, supposons que tout r (de $\mathfrak{M}$), avec $\bar{r} \subset R'$, est dans $\mathfrak{N}$. On aura $f \in K_{\alpha(r)}$ pour de tels r. De la famille $\mathfrak{M}^* = \{r^*\}$ *dénombrable* d'ensembles r^* de $\mathfrak{M}$, qui interviennent dans (7.4, 1°) tirons tous les ensembles tels que $\bar{r}^* \subset R'$; désignons-les par r'_i $(i = 1, 2, \ldots)$; $r'_i \in \mathfrak{N}$. Si r (de $\mathfrak{M}$) est un ensemble, tel que $\bar{r} \subset R'$, on pourra trouver parmi les r'_i une suite $\{r_j\}$ de sorte que

$$(1^*) \quad \bar{r} \subset \sum_1^{\infty} r_j, \qquad \bar{r} r_j \neq 0, \qquad \bar{r}_j \subset R', \qquad f \in K_{\alpha_j} \qquad [(\alpha_j = \alpha(r_j))\ \text{sur } r_j].$$

En vertu du lemme 7.10 [avec $\{r_j\}$ pour $\mathfrak{N}$ et r pour $\bar{r}$] on obtient

$$r = \sum_1^{\infty} \tilde{\rho}; \qquad \tilde{\rho}_\nu,\ \in \widetilde{\mathfrak{M}},\ \text{disjoints}; \qquad \tilde{\rho}_\nu \subset r_\nu; \qquad \tilde{\rho}_\nu \sum_{i=1}^{k_\nu} q_{\nu,i} + e_\nu$$

[une décomposition-$\tilde{f}$ dans $\mathfrak{M}$, $\Phi(e_\nu) = 0$]. Ici les $q_{\nu,i}$ $(\in \mathfrak{M})$ sont disjoints. Or $f \in K_{\beta'_i}$ sur r'_i $(i = 1, 2, \ldots)$; soit un $\alpha > \beta'_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$; posons $\tilde{\rho}^n = \tilde{\rho}_1 + \ldots + \tilde{\rho}_n$; alors

$$\tilde{\rho}^n = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_\nu} q_{\nu,i} + e^n$$

[décomposition-$\tilde{f}$ dans $\mathfrak{M}$, $\Phi(e^n) = 0$],

$$\tilde{\rho}^n(\text{de } \widetilde{\mathfrak{M}}) \uparrow r; \qquad \bar{q}_{\nu,i} \subset R'; \qquad q_{\nu,i} \subset r_\nu$$

(un des r'_j), d'où $f \in K_{\beta_i}$ sur $q_{\nu,i}$, avec $\beta_i = \beta'_i + 1 \leqq \alpha$.

Selon (10.12, 1°), $f \in K_{\alpha+1}$ sur $\tilde{\rho}^n$; d'après (10.12, 2°), $f \in K_{\alpha+2}$ sur r (r de $\mathfrak{M}$ ayant $\bar{r} \subset R'$); enfin (10.12, 4°) $f \in K_{\alpha+3}$ sur R'. Donc $R' \in \mathfrak{N}$ et la condition (7.11, 3_0) est satisfaite.

Supposons qu'une famille $\mathfrak{N}_1 = \{\rho\}$, $\subset \mathfrak{N}$, ne couvre pas R; $p = R - \sum \rho$ (ρ parcourant $\mathfrak{N}_1$) $\neq 0$. *Si p contient un point x_0 isolé-s,* on trouvera un r_0 ($\subset$ R), $r_0 \in \mathfrak{M}$, $r_0 \ni x_0$, $r_0 p \subset g_0$, où g_0 est dans la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$. Avec l'aide du lemme 7.10, nous procédons comme dans le texte qui précède (7.5'); ainsi on trouve des r_ν, $\in \mathfrak{N}_1$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), des $\tilde{\rho}_\nu$ $\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}\right)$ disjoints, tels que

$$r_0 - r_0 p = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\rho}_\nu, \; \tilde{\rho}_\nu \subset r_\nu, \qquad \tilde{\rho}_\nu = \sum_{i=1}^{k_\nu} q_{\nu,i} + e_\nu$$

(décomposition-$\tilde{f}$ dans $\mathfrak{M}$);

$$r^n = r_0 p + \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{\rho}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_\nu} q_{n,i} + e^n\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}},\ \Phi(e^n) = 0\right) \uparrow r_0.$$

Or $f \in K_{\alpha_\nu}$ sur r_ν; soit $\alpha > \alpha_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$); $q_{\nu,i}$ (de $\mathfrak{M}$) $\subset r_\nu$, donc (10.12, 3°) : $f \in K_\alpha$ sur $q_{\nu,i}$; d'après (10.12, 1°) (avec r^n pour $\tilde{R}$) on aura $f \in K_{\alpha+1}$ sur r^n; enfin (10.12, 2°) : $f \in K_{\alpha+2}$ sur r_0, *d'où* $r_0 \in \mathfrak{N}$, *mais r_0 est non couvert par $\mathfrak{N}_1$. Si p est parfait-s dans* R, (e. g. l'intersection de R et d'un ensemble parfait-s), alors f étant D-totalisable sur R (selon l'hypothèse), d'après la définition 7.12, en écrivant

$$\Psi(\rho) = (D)\int_\rho f\,d\Phi\ (\rho \subset R),$$

on conclut comme il suit.

Ψ est complètement additive (dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$) et intérieurement continue sur R; il existe un r' (de $\mathfrak{M}$), $\subset$ R, *joint à p, avec $\bar{r}' \subset$* R, de sorte que

$$\int_{r_1} \Psi_p = \int_{r_1 p} f\,d\Phi \qquad \text{pour tout} \quad r_1 \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset r'.$$

Or

$$\Psi^p = \Psi - \Psi_p, \qquad \Gamma(\rho - p\rho)\left(= \int_\rho \Psi^p\right) = \Psi(\rho) - \int_\rho \Psi_p = \Psi(\rho) - \int_{\rho p} f\,d\Phi$$
$$\text{pour} \quad \rho \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset r'$$

(*f étant sommable sur $r'p$*); donc (I_1) $\Gamma(\rho - p\rho)$ *est complètement additive* (dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$) et *intérieurement continue sur r'*. Soient les r'_s tous les ensembles de $\mathfrak{M}^*$ (7.4, 1°), tels que $\bar{r}'_s \subset R - p$ (ouvert); on aura $\bar{r}'_s \subset \sum \rho$ (ρ parcourant $\mathfrak{N}_1$); d'après le lemme 7.10 (avec $\mathfrak{N}_1$ pour $\mathfrak{N}$ et r'_s pour $\bar{r}$) on conclut ainsi :

Dans $\mathfrak{N}_1$ il y a une suite $\{ r_\nu \}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) telle que

$$r'_s = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\rho}_\nu; \quad \tilde{\rho}_\nu \,(\in \widetilde{\mathfrak{M}}) \text{ disjoints}; \qquad \tilde{\rho}_\nu \subset r_\nu (\in \mathfrak{N}_1);$$

$$\tilde{\rho}_\nu = \sum_{i=1}^{k_\nu} q_{\nu,i} + e_\nu \qquad [q_{\nu,i} (\in \widetilde{\mathfrak{M}}) \text{ disjoints}, \ \Phi(e_\nu) = 0];$$

ici le choix des r_ν, $\tilde{\rho}_\nu$, $q_{\nu,i}$, e_ν dépend de s.

Or $f \in K_{\beta_\nu}$ ($\beta_\nu = \beta_{\nu,s}$) sur $r_\nu = r_{\nu,s}$. *Prenons un* $\alpha > \beta_{\nu,s}$ ($\nu, s = 1, 2, \ldots$). En tant que $q_{\nu,i} \subset r_\nu (= r_{\nu,s})$, il s'ensuit de (10.12, 3°) que $f \in K_\alpha$ sur $q_{\nu,i}$. Le système $\{ q_{\nu,i} \}$ ($i = 1, \ldots, k_\nu$; $\nu = 1, \ldots, n$) représente une décomposition-$\tilde{f}$ (dans $\mathfrak{M}$) de $\tilde{\rho}^n = \tilde{\rho}_1 + \ldots + \tilde{\rho}_n \,(\in \widetilde{\mathfrak{M}})$; d'après (10.12, 1°) $f \in K_{\alpha+1}$ sur $\tilde{\rho}^n$. Or $\tilde{\rho}^n \uparrow r'_s$ (pour $n \to \infty$), d'où (10.12, 2°) : $f \in K_{\alpha+2}$ *sur* r'_s *avec* α *indépendant de* s. Soit un $r \in \mathfrak{M}$, $r \subset r'$, $\bar{r}p = 0$. Soient les r^j ($j = 1, 2, \ldots$) tous les ensembles de la suite $\{ r'_s \}$, tels que

$$r \subset \sum_1^{\infty} r^j, \qquad r r^j \neq 0, \qquad \bar{r}^j p = 0, \qquad f \in K_{\alpha+2} \quad \text{sur } r^j \quad (\text{car } r^j \text{ est un } r'_s).$$

En reprenant le raisonnement à partir de (1*), on trouve des $\tilde{\rho}^n \,(\in \widetilde{\mathfrak{M}}) \uparrow r$ (pour $n \to \infty$), tels que

$$\tilde{\rho}^n = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_\nu} q_{\nu,i} + e^n \quad (\text{décomposition-}\tilde{f} \text{ dans } \mathfrak{M}), \qquad q_{\nu,i} \subset r^\nu;$$

d'après (10.12, 3°), $f \in K_{\alpha+3}$ sur $q_{\nu,i}$; selon (10.12, 1°) $f \in K_{\alpha+4}$ sur $\tilde{\rho}^n$; en vue de (10.12, 2°) :

$$(\mathrm{I}_2) \qquad f \in K_{\alpha+5} \ \textit{sur } r, \qquad \textit{dès que} \ \ r \in \mathfrak{M}, \quad r \subset r', \quad \bar{r}p = 0.$$

En résumé, d'après (I_1), (I_2), f étant sommable sur $r'p$, et en vertu de (10.12, 5°) [avec r' et p pour $\tilde{R}$ et e] *on obtient* $f \in K_{\alpha+6}$ sur r'; donc $r' \in \mathfrak{N}$ et r' n'est pas couvert par $\mathfrak{N}_1$ (car $r'p \neq 0$). Ainsi $\mathfrak{N}$ remplit les conditions (7.11, 1_0, 2_0, 3_0 et 4_0) du lemme 7.11; par conséquent, $R \in \mathfrak{N}$, *ce qui démontre le théorème* 10.13.

Si $\Gamma(r)$, dans la remarque (7.13 *b*), est intérieurement continue sur R [dans (R) il a été noté que pour cela il suffit que $\Psi(qr)$ ($q \in \mathfrak{M}$, $r \in \mathfrak{M}$) ait ce caractère, comme une fonction de r; par exemple, il suffit que toute intersection de deux ensembles de $\mathfrak{M}$ soit dans $\mathfrak{M}$], alors il y aura les opérations suivantes de calcul de la totale-D :

(10.I) l'opération indiquée dans (7.13 *b*);

(10.II) l'opération traduite par le caractère de la continuité intérieure dans $\mathfrak{M}$;

(10.III) l'opération traduite par le caractère de l'additivité complète dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$;

(10. IV) l'intégration lebesguienne sur certains sous-ensembles de R, comme dans (10.11 *a*);

(10.V) le calcul de $\Gamma(\rho - \rho e)$ (10.10 *a*), qui intervient dans (10.11 *a*).

Le calcul de (D) $\int_R f\, d\Phi$ s'échelonne suivant une suite transfinie d'opérations qui termine pour un α des classes I et II.

11. **Les caractères A. C. G., V. B. G.** — Nous désignerons par $S(x, r)$ [$S^0(x, r)$] l'ensemble de points z, tels que

(11.1) $$\rho(x, z)\ (3.1\,a) \leqq r \qquad [\rho(x, z) < r, \text{ si } r > 0].$$

Nécessairement $S(x, r) \subset F\ (= \Delta(\mathcal{F}))$. $S(x, r)$ est une « *sphère* », ou bien une « *pseudo-sphère* ». Soient x, z deux points quelconques dans $F\ (= \Delta(\mathcal{F}))$; $\rho(x, z)$ est le minimum de $\Phi(O)$, où

(1°) $$O \in G', \qquad O \ni x, \qquad O \ni z,$$

s'il y en a de tels O. Or, selon la définition, toute enveloppe est contenue dans F, donc $\Phi(O) \leqq \Phi(F)$ et $\rho(x, z) \leqq \Phi(F)$; conséquemment *le nombre* r, *associé avec une sphère* $S(x, r)$ $(x \in F)$, *ne surpasse jamais* $\Phi(F)$. Si pour un couple de points x, z on a $\rho(x, z) = \Phi(F)$, il s'ensuit que

(2°) $$\Phi(F - O) = 0 \qquad \text{pour tout O satisfaisant à (1°).}$$

En effet, $\Phi(F)\ (= \rho(x, z)) = \min \Phi(O)$ (1°), e. g. $\Phi(F) \leqq \Phi(O)$ (1°) $\leqq \Phi(F)$. Réciproquement, si pour un x et un z (2°) a lieu, il en découle que

(3°) $$\rho(x, z) = \Phi(F)$$

[on note que $\rho(x, z) = \min \Phi(O)$ (1°), où, vu (2°), on a $\Phi(O) = \Phi(F)$]. Définissons par

(11.2) $$C(x, r) = S(x, r) - S^0(x, r) = \{z;\ \rho(x, z) = r\},$$

la « *surface* », si elle existe, de la sphère $S(x, r)$. En vertu de (2°) et (3°) *pour que la surface* $\gamma' = C(x, \Phi(F))$ *soit vide, il faut et il suffit que pour tout* $z (\in F)$ *il existe un* O *de* G′, *contenant* x *et* z *et ayant* $\Phi(O) < \Phi(F)$. Ainsi, γ' sera vide si F n'appartient pas à G′, tandis que la mesure-Φ de chaque O de G′ est inférieure à $\Phi(F)$.

(11.3) Supposons que $\max (G') \Phi(O) = c < \Phi(F)$; *alors toutes les remarques précédentes, à partir de* (1°), *sont valides en remplaçant* $\Phi(F)$ *par* c.

Si F est un ensemble de G′, le nombre $\rho(x, z)$ sera défini pour tout couple de points x, z dans F et l'on aura $c = \Phi(F)$. Nous dirons que r est un « *rayon effectif* » de $S(x, r)$, si à tout $\varepsilon > 0$ il correspond un z dans $S(x, r)$ tel que $\rho(x, r) > r - \varepsilon$. *Nous supposons qu'il existe une constante* c_0, $0 < c_0 (\leqq c)$, *telle que la « surface »* $C(x, r)$ de $S(x, r)$ $(0 < r \leqq c_0)$ *ne soit pas vide*, cela étant pour tout x dans l'espace envisagé. *Les sphères survenant par la suite auront un rayon* $\leqq c_0$. *Ainsi le rayon d'une sphère considérée sera toujours effectif. Admettons que* $\Phi(C(x, r) = 0$.

(11.4) *Si* x *est un point sur* F [*et* r *est un rayon effectif d'une sphère* $S(x, r)$], *alors* $\Phi(S(x, r)) \geqq r$.

En effet, choisissons un point z tel que $r - \varepsilon < \rho(x, z) < r$. Il existe une enveloppe O_ε de G′ de sorte que

$$O_\varepsilon \ni x, \qquad O_\varepsilon \ni z, \qquad r - \varepsilon < [\rho(x, z) \leqq] \Phi(O_\varepsilon) < r.$$

Si y est un point quelconque dans O_ε, il s'ensuit que

$$\rho(x, y) = \min (O' \in G', O' \ni x, O' \ni y) \Phi(O') \leqq \Phi(O_\varepsilon) < r;$$

donc y et O_ε sont contenus dans $S(x, r)$. Ainsi

$$\Phi(S(x, r)) \geqq \Phi(O_\varepsilon) > r - \varepsilon.$$

En laissant $\varepsilon \to 0$, *on déduit la conclusion de* (11.4). Le corollaire suivant en résulte.

(11.4 *a*) $\Phi(S(x, r)) > 0$, *si* r (effectif) *est positif.*

Envisageons l'espace L de points r sur le segment linéaire $[0, c_0]$ et *l'espace produit* $F^* = F \times L$ [où $F = \Delta(\mathcal{F}) \subset \mathcal{U}$]. Avec tout couple de points $v = (x, r)$, $v_1 = (x_1, r_1)$ de F^*, pour lesquels $\rho(x, x_1)$ existe, nous associons le nombre

(11.5) $$\rho^*(v, v_1) = \rho(x, x_1) + |r - r_1|.$$

ρ^* n'est pas une vraie distance, car ρ ne l'est pas. Si $\Gamma(v)$ $(v = (x, r))$ est une fonction numérique définie dans F^*, on dira que $\Gamma(v)$ est *continue au point* v pourvu que

$$(11.5\,a)\quad |\Gamma(v) - \Gamma(v_1)| \to 0, \qquad \text{quand} \quad \rho^*(v, v_1) \to 0 \quad (v_1 \text{ restant dans } F^*).$$

$\Gamma(v)$ est continue dans F^*, si $\Gamma(v)$ est continue en tout point de F^*.

DÉFINITION 11.6. — Soient $\mathcal{M}$, $\widetilde{\mathcal{M}}$ les familles d'ensembles dont il s'agit dans l'hypothèse 7.4 et la définition 7.7. Introduisons les familles $\mathcal{M}^s$, $\mathcal{M}'^s$, $\widetilde{\mathcal{M}}^s$, $\widetilde{\mathcal{M}}_0^s$ comme il suit. $\mathcal{M}^s$ *est la famille comprenant* $\mathcal{M}$ *et toutes les sphères ouvertes*; $\mathcal{M}'^s$ est la famille d'ensembles $H + e$, où H (ouvert) $\in \mathcal{M}^s$ et $e \subset \overline{H} - H$; $\widetilde{\mathcal{M}}^s$ *est la famille minimale contenant* $\mathcal{M}'^s$, *telle que, si* H_1, H_2 *sont dans* $\widetilde{\mathcal{M}}^s$, *les ensembles* $H_1 + H_2$, H_1H_2, $H_1 - H_1H_2$ *seront dans* $\widetilde{\mathcal{M}}^s$; $\widetilde{\mathcal{M}}_0^s$ *est la famille d'ensembles ouverts de* $\widetilde{\mathcal{M}}^s$.

Comme il a été spécifié dans l'hypothèse 7.8, tout sous-ensemble d'un ensemble mince-Φ est mince-Φ. *Tout ensemble contenu dans la frontière d'un ensemble de* $\mathcal{M}^s$ $\big($en effet de $\widetilde{\mathcal{M}}^s\big)$ *est mince*-Φ. On note que la frontière d'un ensemble de $\widetilde{\mathcal{M}}^s$ est contenue dans la réunion d'un nombre fini de frontières d'ensembles de $\mathcal{M}^s$ (e. g. de $\mathcal{M}$ et de sphères).

HYPOTHÈSE 11.7. — Soit $\Psi(H)$ une fonction *additive*, numérique réelle, définie (et finie) dans la famille $\widetilde{\mathcal{M}}^s = \{H\}$ (définition 11.6), possédant les caractères suivants :

(1_0) $\Psi(S(x, r))$ est contenue dans $F^* = F \times L$ comme fonction de point (x, r);

$$\Psi(S(x, 0))\,[= \Psi(x)] = 0; \qquad \Psi(S(x, r)) \to 0$$

uniformément par rapport à x, lorsque $r \to 0$; $\Psi(E) = 0$ dès que E est contenu dans la frontière d'un ensemble de $\mathcal{M}^s$ $\big($donc de $\widetilde{\mathcal{M}}^s\big)$.

(2_0) Ψ est *complètement additive dans* $\widetilde{\mathcal{M}}^s$, cela voulant dire que

$$\Psi(H) = \sum \Psi(H_n),$$

dès que $H \in \widetilde{\mathcal{M}}^s$, $H_n \in \widetilde{\mathcal{M}}^s$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et les H_n sont disjoints $\Big[$donc $\Psi(Q) = \lim\limits_n \Psi(Q_n)$, lorsque Q et Q_n sont dans $\widetilde{\mathcal{M}}^s$ et $Q_n \uparrow Q\Big]$.

(3_0) *La fonction* Φ *est relativement à* $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ *une fonction* Ψ, satisfaisant au moins aux conditions données plus haut.

On note que Φ est une extension d'une mesure borélienne, tandis que Ψ en général ne l'est pas.

Envisageons les dérivées et la dérivée unique (si celle-ci existe) *sphériques, symétriques* ainsi :

$$(11.8)\quad \begin{cases} \overline{D}^s\Psi(x) = \overline{\lim}\, \dfrac{\Psi(S(x, r))}{\Phi(S(x, r))}, \\ \underline{D}^s\Psi(x) = \underline{\lim}\, \dfrac{\Psi(S(x, r))}{\Phi(S(x, r))} \qquad (\text{pour } r(>0) \to 0); \\ D^s\Psi(x) = \overline{D}^s\Psi(x) = \underline{D}^s\Psi(x), \quad \text{si } \overline{D}^s \ldots = \underline{D}^s \ldots, \end{cases}$$

On remarque (11.4 *a*) que $\Phi(S(x, r)) > 0$ pour $r > 0$.

DÉFINITION 11.9. — (A) *est la classe des fonctions* $\Psi(H)$ $[H \in \widetilde{\mathfrak{M}}^s$, *(définition* 11.5)$]$ *satisfaisant à l'hypothèse* 11.7, *telles que la dérivée unique* $D^s\Psi(x)$ *existe et est finie en tout point de* $F = \Delta(\mathfrak{F})$. En outre, (*a*) *est la classe de fonctions* $f(x) = D^s\Psi(x)$, $\Psi(H)$ *parcourant la classe* (A).

(11.10) *La classe* (A) *est additive, e. g. si* Ψ_1, Ψ_2 *appartiennent à* (A) *et* c_1, c_2 sont des constantes, on aura $c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$ dans (A).

DÉFINITION 11.11. — Soit Ψ réelle jouissant du caractère $(11.7, 1_0)$. Si E est un ensemble quelconque dans F, on dira que :

(11.11 *a*) $\Psi \in$ A. C^s. *sur* E (*absolument continue au sens sphérique*), si à tout $\varepsilon > 0$ il correspond un $\eta(\varepsilon) = \eta(\varepsilon, E) > 0$, $\to 0$ avec ε de sorte que les relations

$$(11.11\,a_1)\quad \begin{cases} S(x^j, r_j)\, S(x^i, r_i) = 0 \qquad (i \neq j), \quad \text{les } x^j\ (j = 1, 2, \ldots) \in E. \\ \qquad 0 < r_j, \qquad \sum \Phi(S(x^j, r_j)) \leqq \eta(\varepsilon) \end{cases}$$

entraînent

$$(11.11\,a_2)\qquad \sum_j |\Psi(S(x^j, r_j))| \leqq \varepsilon.$$

Nous dirons que

(11.11 *b*) $\Psi \in V^s$. B. *sur* E (*variation bornée au sens sphérique*), si

$$(11.11\,b_1)\qquad \text{Var.}\,(\Psi;\ E) = \max \sum_j |\Psi(S(x^j, r_j))| < \infty$$

pour toute suite de $S(x^j, r_j)$ disjointes, avec $x^j \in E$. Ψ est *absolument continue généralisée au sens sphérique sur* E,

(11.11 A) $$\Psi \in \text{A. C}^s\text{. G. } sur \text{ E},$$

si $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, de sorte que $\Psi \in$ A. C^s. sur E_n ($n = 1, 2, \ldots$); Ψ est *de variation bornée généralisée au sens sphérique sur* E,

(11.11 B) $$\Psi \in \text{V}^s\text{. B. G. } sur \text{ E},$$

si $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ et $\Psi \in$ V^s. B. sur E_n ($n = 1, 2, \ldots$).

Dans cette définition, les suites de sphères dont il s'agit sont finies. Nous démontrons maintenant l'énoncé suivant :

THÉORÈME 11.12. — *Admettons que* Ψ *satisfasse à la propriété* (11.7, 1_0). *Supposons que sur* $E - d_0$, *où* d_0 *est au plus dénombrable, on ait*

(11.12 *a*) $$-\infty < \underline{D}^s\Psi \leq \overline{D}^s\Psi < +\infty.$$

Alors $\Psi \in$ A. C^s. G. *sur* E.

Pour $n = 1, 2, \ldots$ introduisons les ensembles

(1_0) $$E_n = \left\{ x \in E;\ \frac{1}{\Phi(S(x, r))} \,|\, \Psi(S(x, r)) \,|\, \leq n \text{ pour } r, \text{ tel que } 0 < r \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

On vérifie que, si n_1 est un entier positif quelconque,

(2_0) $$E = d_0 + \sum_{n=n_1}^{\infty} E_n.$$

Soit $\frac{1}{n_0} = c_0$; on aura $\frac{1}{n_0} \leq$ maximum de $\Phi(O_i)$ pour $O_i \in G$. Pour tout entier $n \geq n_0$ envisageons la famille $G'_n = \{ O_{n,1}, O_{n,2}, \ldots \}$ de tous les ensembles de G' de mesure ne surpassant pas $\frac{1}{n}$ [G'_n peut jouer le rôle de la famille G']. Pour un n fixe, retenons parmi les $O_{n,j}$ précisément la suite de tous les ensembles, soient $O_n^1, O_n^2, \ldots$, de sorte que O_n^i ne contienne pas O_n^m, dès que i et m sont des entiers positifs distincts. Soit $G_n = \{ O_n^1, O_n^2, \ldots \}$ cette famille partielle de G'_n. On note que

(3_0) $$\sum_i O_n^i = F, \qquad \Phi(O_n^i) \leq \frac{1}{n}.$$

L'ensemble $E - d_0$ (2_0) peut être exprimé comme la réunion

$$(4_0) \qquad E - d_0 = \sum_{n \geqq n_0} \sum_{i=1}^{\infty} E_{n,i}, \qquad \text{où} \quad E_{n,i} = E_n O_n^i.$$

En distribuant les points de d_0 avec la suite dénombrable d'ensembles $E_{n,i}$ ($n \geqq n_0$; $i = 1, 2, \ldots$), on peut faire en sorte que

$$(5_0) \qquad E = \sum_{n,i} (y_{n,i} + E_{n,i}), \qquad \text{où} \quad \sum_{n,i} y_{n,i} = d_0,$$

$y_{n,i}$ ($\notin E_{n,i}$) étant un seul point, ou bien $y_{n,i}$ étant l'ensemble vide. Considérons un ensemble $y_{n,i} + E_{n,i}$ non vide; soient x^j ($j = 1, 2, \ldots$) des points et r_j des nombres, tels que (avec n, i fixes),

$$(6_0) \quad x^j \in y_{n,i} + E_{n,i}, \qquad 0 < r_j, \qquad S(x^j, r_j)\, S(x^m, r_m) = 0, \qquad (j \neq m);$$

nous supposons qu'il y ait au moins un x^j. Or selon l'hypothèse (11.7, 1_0) à tout $\varepsilon > 0$ il correspond un $\xi(\varepsilon) > 0$, de sorte que $r \leqq \xi(\varepsilon)$ entraîne $|\Psi(S(x, r))| < \frac{\varepsilon}{2}$; vu (11.4), $\Phi(S(x, r) \leqq \xi(\varepsilon)$ implique $r \leqq \xi(\varepsilon)$, d'où

$$(11.13) \qquad \Phi(S(x, r)) \leqq \xi(\varepsilon) \qquad \text{entraîne} \quad |\Psi(S(x, r))| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$\xi(\varepsilon)$ *étant indépendant de* x. En revenant à la situation (6_0), considérons d'abord le cas où $j \leqq 2$ et il n'y a plus qu'un x^j sur $E_{n,i}$. *Avec le* terme $|\Psi(S(x^2, r_2))|$ possiblement absent, on aura

$$(7_0) \qquad |\Psi(S(x^1, r_1))| + |\Psi(S(x^2, r_2))| < \varepsilon,$$

dès que

$$(8_0) \qquad \Phi(S(x^1, r_1)) + \Phi(S(x^2, r_2)) \leqq \xi(\varepsilon).$$

L'alternative de la situation où les formules (7_0) et (8_0) s'appliquent est le cas où deux au moins des x^j sont sur $E_{n,i}$; ainsi, ou bien :

(9_0) $y_{n,i}$ existe et $x^1 = y_{n,i}$ et x^2, x^3, ... (deux au moins) sont sur $E_{n,i}$, ou bien :

(10_0) x^1 n'existe pas et x^2, x^3, ... (deux au moins) sont sur $E_{n,i}$.

Lorsque (9_0) ou (10_0) a lieu, on obtient [(6_0), (4_0)] :

$$(11_0) \qquad \begin{cases} x^j \in E_{n,i} = E_n O_n^i \quad (j = 2, 3, \ldots), \\ S(x^j, r_j)\, S(x^m, r_m) = 0 \quad (j \neq m;\, j \geqq 2,\, m \geqq 2), \end{cases}$$

pour les x^j (deux au moins) qui interviennent. Or (3_0)

$$\rho(x^j, x^m) = \min(O^1 \in G^1, O^1 \ni x^j, O^1 \ni x^m)\,\Phi(O^1) \leqq \Phi(O'_n) \leqq \frac{1}{n}$$
$$(j \geqq 2,\ m \geqq 2).$$

Si pour un $j \geqq 2$ [pour lequel un x^j dans (9_0) ou (10_0) survient] on avait $r_j > \frac{1}{n}$, il s'ensuivrait que $x^m\,(m \neq j;\ m \geqq 2)$ serait contenu dans $S^0(x^j, r_j)$, ce qui serait contraire à la dernière relation (11_0), donc $r_j \leqq \frac{1}{n}\ (j \geqq 2)$. En tant que x^j est sur E_n (11_0) et $r_j \leqq \frac{1}{n}$, il résulte de la définition (1_0) de E_n que

$$|\Psi(S(x^j, r_j))| \leqq n\,\Phi(S(x^j, r_j))\ (j \geqq 2).$$

Donc, *le terme* $\Psi(S(x^1, r_1))$ *pouvant être absent*, il se voit que

$$(12_0)\qquad \sum_{j \geqq 1} |\Psi(S(x^j, r_j))| \leqq |\Psi(S(x^1, r_1))| + n \sum_{j \geqq 2} \Phi(S(x^j, r_j)).$$

Définissons $\eta_n(\varepsilon)$ *comme le minimum des deux nombres* $\xi(\varepsilon)$ *et* $\frac{\varepsilon}{2n}$ [$\eta(\varepsilon)$ est indépendant des x^j et des r_j $(j \geqq 1)$]. La condition

$$(13_0)\qquad \sum_{j \geqq 1} \Phi(S(x^j, r_j))) \leqq \eta_n(\varepsilon),$$

entraînera

$$\Phi(S(x^1, r_1)) \leqq \eta_n(\varepsilon) \leqq \xi(\varepsilon),$$

donc (11.13) :

$$|\Psi(S(x^1, r_1))| < \frac{\varepsilon}{2}$$

[si x^r intervient, e. g. au cas (9_0)] et

$$\sum_{j \geqq 2} \Phi(S(x^j, r_j)) \leqq \eta_n(\varepsilon) \leqq \frac{\varepsilon}{2n}, \qquad \text{donc} \quad n \sum_{j \geqq 2} \Phi(S(x^j, r_j)) \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Conséquemment (12_0) :

$$(14_0)\qquad \sum_{j \geqq 2} |\Psi(S(x^j, r_j))| < \varepsilon,$$

lorsque deux au moins des $x^j \in E_{n,i}$ et (13_0) a lieu, toujours avec (6_0) en vue. Au cas où il n'y a plus qu'un x^j sur $E_{n,i}$ le même choix de $\eta(\varepsilon)$ suffira [car $\eta_n(\varepsilon) \leqq \xi(\varepsilon)$], ce qui s'ensuit de ($7_0$) et ($8_0$). Ainsi ($14_0$)

sera valide, sans exception, lorsque (6_0) et (13_0) ont lieu [le nombre $\eta_n(\varepsilon)$ étant indépendant des x_j et des r_j]. Ainsi (définition 11.11) lorsque $y_{n,i} + E_{n,i} \neq 0$, on aura $\Psi \in$ A. C'. sur $y_{n,i} + E_{n,i}$ (6_0). Or (5_0),

$$E = \sum_{n,i} (y_{n,i} + E_{n,i}),$$

par conséquent (définition 11.11) $\Psi \in$ A. C'. G. sur E, e. g. Ψ est absolument continue généralisée au sens sphérique sur E, *ce qui démontre le théorème* 11.12. Voici une conséquence de ce théorème :

(11.14) *Supposons que* Φ *satisfait à* (11.7, 1_0). *Toute fonction* Ψ *de la classe* (A) (*définition* 11.9) *est absolument continue généralisée au sens sphérique dans* $F = \Delta(\mathcal{F})$: $\Psi \in$ A. C'. G. *sur* F.

Notons que, si Ψ satisfait à (11.7, 1_0), il existe une constante μ telle que

$$(11.15) \qquad |\Psi(S(x, r))| \leqq \mu = \mu(\Psi) < \infty \qquad (x \in F;\ 0 \leqq r \leqq c_0).$$

En effet, selon (11.7, 1_0) on aura

$$|\Psi(S(x, r))| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad 0 < r \leqq \delta(\varepsilon),$$

où $\delta(\varepsilon)$ est indépendant de x; donc il existe une fonction $\eta_1(r)$, > 0 pour $0 < r \leqq c_0$, finie et telle que $\eta_1(r) \downarrow 0$ avec $r \downarrow 0$, de sorte que

$$|\Psi(S(x, r))| < \eta_1(r);$$

(11.15) s'ensuit avec $\mu = \eta_1(c_0)$.

L'inégalité triangulaire étant en général en défaut pour la fonction $\rho(x, y)$ (qui n'est pas une vraie distance entre les points x, y), néanmoins dans la suite il nous faudra faire usage d'une certaine inégalité entre les trois nombres

$$(1') \qquad \rho = \rho(x_1, x_3), \qquad \rho_1 = \rho(x_1, x_2), \qquad \rho_2 = \rho(x_2, x_3),$$

x_1, x_2, x_3 étant des points dans F. Si, par exemple, $\rho_1 \geqq \rho_2$, le point x_3 sera dans la « pseudo-sphère » $S(x_2, \rho_1)$, et l'on aura

$$(2') \qquad \rho \leqq \rho(S(x_2, \rho_1)) \quad (3.16);$$

le second membre ici représente une sorte de « pseudo-diamètre » de la sphère $S(x_2, \rho_1)$. Nous allons établir le fait suivant :

$$(11.16) \qquad \lim_{r \to 0} \rho(S(x, r)) = 0 \qquad (\text{si } x \text{ est un point fixe dans F}).$$

En effet, notons d'abord que deux points $y = y(x, r)$, $z = z(x, r)$ existent (x, y, z étant distincts), de sorte que

$$(3') \qquad y \in S(x, r), \qquad z \in S(x, r), \qquad \rho(S(x, r)) < 2\rho(y, z).$$

En tant que $\rho(y, x) \leqq r$ et $\rho(z, x) \leqq r$, on peut trouver des ensembles $A = A(x, r)$, $B = B(x, r)$, tels que

$$(4') \qquad A \in G', \ B \in G', \qquad A \ni (y, x), \qquad B \ni (z, x);$$
$$(\rho(y, x) \leqq)\, \Phi(A) < 2\rho(y, x) \leqq 2r; \qquad (\rho(z, x) \leqq)\, \Phi(B) < 2\rho(z, x) \leqq 2r.$$

x étant dans A et dans B, les enveloppes (de G′) A et B sont jointes; de plus (4′) $\Phi(A + B)$, $< 4r$, $\to 0$ avec r. Par conséquent, selon l'hypothèse 3.9 il y a une enveloppe C telle que :

$$(5') \quad C \in G'; \qquad C \supset A + B; \qquad \Phi(C) \to 0 \qquad \text{avec} \quad \Phi(A + B), \text{ donc avec } r.$$

Or C contient les points y, z, donc $\rho(y, r) \leqq \Phi(C)$; vu (3′) et (5′), on obtient

$$\rho(S(x, r)), \ < 2\Phi(C), \ \to 0, \qquad \text{lorsque} \quad r \to 0,$$

ce qui vérifie (11.16).

Quelques développements dans la suite seront dans la condition suivante.

HYPOTHÈSE 11.17. — *La formule* (11.16) *a lieu uniformément par rapport à* x ($\in$F); *il existe une fonction* $\omega(r)$ ($0 < r \leqq c_0$), *qui ne dépend pas de* x, *telle que*

$$(11.17\,a) \qquad \rho(S(x, r)) \leqq \omega(r) \qquad \text{et} \qquad \lim_{r \to 0} \omega(r) = 0.$$

THÉORÈME 11.18. — *Soit* (11.7, 1_0) *valide pour* Ψ *et pour* Φ. *Admettons que l'hypothèse* 11.17 *ait lieu. Soit* E, $\subset$F, *un ensemble tel que pour tout nombre* $\xi > 0$ E *soit contenu dans la réunion d'un nombre fini d'ensembles de* G′ *de mesure ne surpassant pas* ξ. *On aura*

$$(11.18\,a) \qquad \Psi \in \text{A. C}^s. \textit{ sur } \text{E} \qquad \textit{entraîne} \quad \Psi \in \text{V}^s. \text{B. } \textit{sur } \text{E};$$

par conséquent

$$(11.18\,b) \quad \Psi \in \text{A. C}^s. \text{G. } \textit{sur } \text{E} \qquad \textit{entraîne} \quad \Psi \in \text{V}^s. \text{B. G. } \textit{sur } \text{E}.$$

Posons que $\Psi \in$ A. C^s. sur E [(11.11 a)-(11.11 a_2)]. Il existe un $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$(1_1) \quad S(x^j, r_j)\, S(x^i, r_i) = 0 \quad (i \neq j), \qquad x^j \quad (j = 1, 2, \ldots) \ \subset E,$$
$$0 < r_j, \qquad \sum \Phi(S(x^j, r_j)) \leqq \eta(\varepsilon)$$

implique

$$(2_1) \qquad \sum |\Psi(S(x^j, r_j))| \leqq \varepsilon_1.$$

Soit $c^0 \left(0 < c^0 \leqq \frac{2}{3} c_0\right)$ tel que $\omega'(r)$ [à la suite de (7_1)] $\leqq c_0$ et $\omega(\omega'(r)) \leqq c_0$ pour $0 < r \leqq c^0$. Si O est un ensemble de G′ tel que $OE \neq 0$, $\Phi(O) \leqq c^0$, considérons le cas où OE possède plus d'un point; s'il y a deux points x^j $(j = 1, 2, \ldots)$ au moins sur OE et les $S(x^j, r_j)$ sont disjoints, on aura [par un raisonnement qui intervient à la suite de (11^0)],

$$\rho(x^j, x^m) \leqq \Phi(O),$$

de plus,

$$(3_1) \qquad r_j < \rho(x^j, x^m) \leqq \Phi(O) \qquad \text{(pour les } x^j, x^m \text{ qui surviennent).}$$

Donc les sphères $S(x^j, r_j)$ sont contenues dans l'ensemble

$$(4_1) \qquad O_r = \sum (x \in O)\, S(x, r), \qquad \text{ou} \quad r = \Phi(O).$$

O_r est l'ensemble des points y, tels que $\rho(y, O) \leqq r$, *le nombre* $\rho(y, O)$ *étant défini comme le* min $\rho(y, z)$, *le point* z *parcourant* O. On a

$$(5_1) \qquad \sum_j \Phi(S(x^j, r_j)) \leqq \Phi(O_r).$$

Soient y, z des points sur O_r, donc

$$\rho(y, O) \leqq r, \qquad \rho(z, O) \leqq r;$$

deux points y_1, z_1 dans O existent, tels que

$$\rho(y, y_1) < \frac{3}{2} r, \qquad \rho(z, z_1) < \frac{3}{2} r;$$

on établit cela en considérant séparément les cas où $\rho(y, O)$, $\rho(z, O)$ sont positifs ou bien zéro. Vu $(1', 2')$

$$\rho(z, y_1) \leqq \rho(S(z_1, \max.\{\rho(z, z_1), \rho(y_1, z_1)\}))$$

puisque $\rho(y_1, z_1) \leqq r$ on obtient (11.17 *a*) :

$$(6_1) \qquad \rho(z, y_1) \leqq \rho\left(S\left(z_1, \frac{3}{2} r\right)\right) \leqq \omega\left(\frac{3}{2} r\right).$$

D'autre part,

$$\rho(y, z) \leqq \rho(S(y_1, \max.\{\rho(z, y_1), \rho(y, y_1)\}));$$

or $\rho(y, y_1) < \frac{3}{2}r$, donc [(6₁), (11.17 a)] :

$$(7_1) \qquad \rho(y, z) \leqq \rho(S(y_1, \omega'(r))) \leqq \omega(\omega'(r)),$$

où $\omega'(r) = \max\left\{\frac{3}{2}r, \omega\left(\frac{3}{2}r\right)\right\}$ ($\to$ o avec r); de là,

$$\rho(O_r) \leqq \omega(\omega'(r)).$$

Soit x_0 un point quelconque de O_r; pour tout point z de O_r on aura

$$\rho(x_0, z) \leqq \rho(O_r) \leqq \omega(\omega'(r));$$

conséquemment, $O_r \subset S(x_0, \omega(\omega'(r)))$. Ainsi (5_1) :

$$(8_1) \quad \sum_l \Phi(S(x^l, r_l)) \leqq \Phi(x_0, \omega(\omega'(r))), \qquad \text{où} \quad r = \Phi(O) \, (\leqq c^0);$$

ici $\omega(\omega'(x))$ ($\to$ o avec r) est indépendant de x_0. En notant que (11.7, 1_0) a lieu pour Φ, le raisonnement du genre survenant à la suite de (11.15) mène à *la conclusion qu'il existe une fonction* $\eta_0(t)$, $>$ o pour o $< t \leqq c_0$, *finie et telle que* $\eta_0(t) \downarrow$ o *avec* $t \downarrow$ o, *en sorte que* $\Phi(S(x_0, t)) < \eta_0(t)$ [$\eta_0(t)$ *étant indépendant de* x_0]. Vu (8_1) *le résultat suivant en découle* :

$$(9_1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_l \Phi(S(x^l r_l)) \leqq \eta_0(\omega(\omega'(r))) = \omega_0(r), \quad \to 0, \\ \qquad\qquad\qquad \textit{avec} \quad r = \Phi(O) \, (\leqq c^0); \end{array} \right.$$

le second membre ici est indépendant des x^l, r_l, *dont il s'agit à la suite de* (2_1). Envisageons la constatation [(1_1), (2_1)] avec

$$(11.15) \qquad \varepsilon = \mu = \mu(\Psi)$$

à cause de (9_1) on aura

$$(10_1) \qquad \sum_l \Phi(S(x^l, r_l)) \leqq \eta(\mu), \qquad \text{dès que} \quad \Phi(O) \leqq r_\mu (\leqq c^0),$$

où r_μ ($>$ o) *est un nombre tel que* $\omega_0(r) \leqq \eta(\mu)$ *pour* o $< r \leqq r_\mu$. Dans la situation décrite dans le texte qui précède (3_1), les conditions (1_1) seront satisfaites (pour OE) avec $\varepsilon = \mu$, lorsque $\Phi(O) \leqq r_\mu$; donc (2_1) :

$$(11_1) \qquad \sum_l |\Psi(S(x^l, r_l))| \leqq \mu \qquad (\text{si } \Phi(O) \leqq r_\mu).$$

Si la suite de sphères $S(x_j, r^j)$ (avec $x^j \in OE$) consiste en une seule sphère $S(x^1, r_1)$ (cela inclut le cas où OE consiste en un seul point), en raison de (11.15) on aura $|\Psi(S(x^1, r_1))| \leqq \mu$ (il est entendu que $r_1 \leqq c_0$). En résumé, si

$$(12_1) \qquad O \in G', \qquad OE \neq 0, \qquad \Phi(O) \leqq r_\mu \quad (10_1),$$

les $S(x^j, r_j)$ (*une au moins*) sont disjointes, $x^j \in OE$, $r_j > 0$, alors l'inégalité (11_1) aura lieu, donc $(11.11\, b_1)$:

$$(13_1) \qquad \text{Var.}(\Psi;\, OE) \leqq \mu = \mu(\Psi) < \infty, \qquad \text{si} \quad \Phi(O) \leqq r_\mu \quad (10_1).$$

Dans la famille G' on peut trouver un nombre $k = k(\mu)$ fini d'enveloppes O_ν ($\nu = 1, \ldots, k$), telles que

$$(14_1) \qquad O_\nu E \neq 0, \qquad E \subset \sum_1^k O_\nu, \qquad \Phi(O_\nu) \leqq r_\mu.$$

Nous faisons en sorte que O_i ne contienne pas O_m pour $i \neq m$. Désignons par $S_j = S(y^j, \sigma_j)$ une suite de sphères, telles que

$$(15_1) \qquad S_i S_j = 0 \quad (i \neq j), \qquad y^j \in E.$$

Soient les $S_{1,i} = S(y^{1,i}, \sigma_{1,i})$ celles parmi les S_j dont les « centres » se trouvent sur O_1E; $y^{1,i} \in O_1E$. Puisque $\Phi(O_1) \leqq r_\mu$, (12_1) et (13_1) (avec $O = O_1$) s'appliquent; ainsi (s'il y a des $S_{1,i}$)

$$(16_1) \qquad \sum_i |\Psi(S_{1,i}) \leqq \text{Var.}(\Psi;\, O_1E) \leqq \mu.$$

Soient les $S_{2,i} = S(y^{2,i}, \sigma_{2,i})$ celles des S_j dont les centres $y^{2,i}$ sont sur $O_2 - O_2O_1$, e. g. $y^{2,i} \in O_2E - O_2O_1E$; les $S_{2,i}$ ne comprennent aucune des $S_{1,i}$; les $S_{1,i}$ et les $S_{2,i}$, ensemble, représentent toutes les S_j dont les centres sont dans $O_1 + O_2$. En tant que $\Phi(O_2) \leqq r_\mu$ (14_1), selon (12_1) et (13_1) on déduit encore :

$$(17_1) \qquad \sum |\Psi(S_{2,i})| \leqq \text{Var.}(\Psi;\, O_2E) \leqq \mu.$$

En général, désignons par

$$S_{q,i} = S(y^{q,i}, \sigma_{q,i}) \quad (q \leqq k)$$

les S_j (15_1) dont les centres $y^{q,i}$ ($i = 1, 2, \ldots$) sont dans

$$O'_q = O_q - O_q(O_1 + O_2 \ldots + O_{q-1});$$

on remarque que $y^{q,i} \in O'_q E$, que la suite $\{ S_{q,i} \}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ne contient aucune des $S_{p,i}$ $(p < q)$ et que les $S_{p,i}$ $(p = 1, \ldots, q;\ i = 1, 2, \ldots)$ comprennent toutes les S_j dont les centres sont dans $O_1 + \ldots + O_q$. De la même manière que (10_1) et (17_1), on obtient

$$(18_1) \qquad \sum_i |\Psi(S_{q,i})| \leqq \text{Var.}(\Psi;\ O_q E) \leqq \mu.$$

Les suites S_j $(j = 1, 2, \ldots)$ et $S_{p,i}$ $(p = 1, \ldots, k;\ i = 1, 2, \ldots)$ sont identiques; les S_j sont disjointes (15_1); donc (18_1) :

$$(19_1) \qquad \sum_j |\Psi(S_j)| = \sum_{p=1}^{k} \sum_i |\Psi(S_{p,i})| \leqq \sum_{p=1}^{k} \text{Var.}(\Psi;\ O_p E) \leqq k\mu;$$

conséquemment,

$$(11.19) \qquad \text{Var.}(\Psi;\ E) \leqq \sum_{p=1}^{k} \text{Var.}(\Psi;\ O_p E) \leqq k\mu \quad (14_1).$$

Cela veut dire [(11.11 *b*); (11.11 b_1)] *que* $\Psi \in V^s$. B. *sur* E, en conséquence de la supposition que $\Psi \in$ A. C^s. sur E; *ce qui démontre la partie* (11.18 *a*) *du théorème.* La conclusion (11.18 *b*) résulte de (11.18 *a*), déjà établie, et de la définition (11.11 A). *Le théorème* 11.18 *est vérifié.*

REMARQUE 11.20. — *La conclusion* (11.18 *b*) *du théorème* 11.18 *reste vraie, si la condition* $\Psi \in$ A. C^s. G *sur* E, *qui intervient dans* (11.18*b*), *a lieu au sens que* $E = \sum_1 E_n$, $\Psi \in$ A. C^s. *sur* E_n $(n = 1, 2, \ldots)$, *tandis que pour tout* $\xi > 0$, E_n *est contenu dans la réunion d'un nombre fini* $k(n, \xi)$ *d'ensembles de* G' *de mesure* $\leqq \xi$, *cela étant pour* $n = 1, 2, \ldots$, E *possiblement ne jouissant pas de cette propriété.*

En effet, $\Psi \in$ A. C^s. sur E_n entraîne [d'après (11.18 *a*) pour E_n] $\Psi \in V^s$. B. sur E_n $(n = 1, 2, \ldots)$, ce qui veut dire $\Psi \in V^s$. B. G. sur E.

Voici une conséquence de (11.14), du théorème 11.18 et de la remarque 11.20.

(11.21) *Admettons que* Φ *satisfait à* (11.7, 1_0), *l'hypothèse* 11.17 *et que* $\Psi \in$ (A) [définition 11.9; alors $\Psi \in$ A. C^s. G. sur tout $E \subset F$]. *Si* $E = \sum E_n (\subset F)$, *où chaque* E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *est de la sorte spécifiée dans* 11.20, *on aura* $\Psi \in V^s$. B. G. *sur* E.

12. **Les caractères** A. C^s. G., V^s. B. G. (*suite*). — Rappelons-nous qu'un ensemble E, contenu dans un ensemble G ($\subset$ F), est partout dense sur G, si tout point de G est un point d'accumulation de E; dans l'Ouvrage actuel, cela revient à ce que, si y est un point de G, tout ensemble O de la famille G′, contenant y, contient des points x de E distincts de y. Le résultat suivant est analogue à une constatation dans [(T[1]); p. 108].

THÉORÈME 12.1. — *Supposons que* Ψ, Φ *satisfont à* (11.7,1_0). *Admettons* (3.1 *c*) (*ainsi que le reste de l'hypothèse* 3.1). *Si* E, $\subset G(\subset F)$, *est partout dense sur* G *et si*

$$(12.1\,a)\qquad \Psi \in V^s.\ B.\ [A.\ C^s.]\ \ sur\ E,$$

il s'ensuivra que

$$(12.1\,b)\qquad \Psi \in V^s.\ B.\ [A.\ C^s.]\ \ sur\ G.$$

Supposons d'abord que $\Psi \in V^s$. B. sur E et soient $S_j = S(y^j, \sigma_j)$ des sphères telles que

$$(1_0)\qquad S_i S_m = 0\quad (i \neq m),\qquad y^j \in G.$$

Selon (11.11 b_1) :

$$(2_0)\qquad \text{Var.}\,(\Psi;\, G) = \max \sum_i |\Psi(S_i)|,$$

le maximum ici étant pour les S_i assujetties à (1_0). Or, selon l'hypothèse actuelle,

$$(3_0)\qquad \text{Var.}\,(\Psi;\, E) = \max \sum_i |\Psi(S(x^i, \rho_i))| < +\infty,$$

le maximum étant pour $S(x^i, \rho_i)$ ($i = 1, 2, \ldots$), telles que

$$(4_0)\qquad S(x^i, \rho_i)\, S(x^m, \rho_m) = 0\quad (i \neq m),\qquad x^i \in E.$$

Envisageons une suite (1_0), $S_i = S(y^i, \sigma_i)$ ($i = 1, 2, \ldots$), et choisissons une suite (4_0) de sorte que

$$(5_0)\qquad \Big|\, |\Psi(S_i)| - |\Psi(S(x^i, \rho_i))| \,\Big| < \varepsilon 2^{-i}\qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Pour vérifier la possibilité de la réalisation de (5_0) notons d'abord que $|\Psi(S(x, r))|$, ainsi que $\Psi(S(x, r))$, est continue dans l'espace produit $F^* = F \times L$, comme fonction de (x, r), e. g. [(11.5), (11.5 *a*)] :

$$\Big|\, |\Psi(S(y, \sigma))| - |\Psi(S(x, \rho))| \,\Big| \to 0,$$

quand

$$\rho^*((y, \sigma), (x, \rho)) = \rho(y, x) + |\sigma - \rho| \to 0 \qquad [(y, \sigma) \text{ restant fixe, } \in F^*].$$

Donc il existe une fonction $q(\xi) = q(y, \sigma; \xi)$, > 0 pour $0 < \xi \leqq \xi_0$, de sorte que

$$(6_0) \qquad \begin{cases} \big|\,|\Psi S(y, \sigma))| - |\Psi(S(x, \rho))|\,\big| < \xi \\ \quad \text{pour} \quad \rho^*((y, \sigma), (x, \rho)) < q(\xi), \end{cases}$$

d'où pour (x, ρ) $(\in F^*)$ tel que

$$(7_0) \qquad \rho(y, x) < \frac{1}{2} q(\xi), \qquad |\sigma - \rho| < \frac{1}{2} q(\xi).$$

En tenant compte de [(3.6), (3.6 *a*)], définition 3.7 et (3.8), il se voit que, E étant partout dense sur G et y^i étant un point sur G (1_0), il existe une suite de points x_ν^i $(\nu = 1, 2, \ldots)$ sur E, tels que $x_\nu^i \neq y^i$, $\rho(y^i, x_\nu^i) \to 0$ pour $\nu \to \infty$. En choisissant ν assez grand et en posant $x_\nu^i = x^i$, d'après (6_0) et (7_0) (avec $(y, \sigma) = (y^i, \sigma_i)$ (1_0) et $\xi = \varepsilon 2^{-i}$) on obtient

$$(8_0) \qquad \begin{cases} \big|\,|\Psi(S(y^i, \sigma_i))| - |\Psi(S(x^i, \rho))|\,\big| < \varepsilon 2^{-i}, \\ \text{où} \quad x^i \in E \qquad \text{et} \qquad \rho(y^i, x^i) < \frac{1}{2} q_i(\varepsilon 2^{-i}), \end{cases}$$

$$q_i(\varepsilon 2^{-i}) = q(y^i, \sigma_i; \varepsilon 2^{-i}) \quad (> 0), \qquad \text{pourvu que} \quad |\sigma_i - \rho| < \frac{1}{2} q_i(\varepsilon 2^{-i}),$$

on peut faire en sorte que $d_i = \rho(y^i, x^i)$ (où $x^i \in E$, $x^i \neq y^i$) soit aussi petit qu'on veut, mais en tout cas tel que $d_i < \frac{1}{2} q_i(\varepsilon 2^{-i})$. Pour $i = 1, 2, \ldots$ il faut choisir $\rho = \rho_i$ et x^i $(\in E)$ dans (8_0) de sorte que

$$|\sigma_i - \rho_i| < \frac{1}{2} q_i(\varepsilon 2^{-i}),$$

tandis que les $S(x^i, \rho_i)$ soient disjointes. $C(y^i, \sigma_i)$ (11.2) étant la surface de $S(y^i, \sigma_i)$, posons

$$(9_0) \qquad \rho_i = \rho(x^i, C(y^i, \sigma_i)) \qquad [= \min \rho(x^i, z) \text{ pour } z \in C(y^i, \sigma_i)].$$

D'après la remarque qui précède (11.4) (donc $\sigma_i \leqq c_0$), $C(y^i, \sigma_i)$ *n'est pas vide*; pour $d_i = \rho(x^i, y^i) > 0$ $(x^i \in E)$ suffisamment petit $x^i \in S^0(y^i, \sigma_i)$ et ρ_i (9_0) est positif. On trouve un point $z^i = z^i(x^i)$ tel que

$$(10_0) \qquad z^i \in C(y^i, \sigma_i), \qquad (\rho_i \leqq)\, \rho(x^i, z^i) < (1 + d_i)\rho_i;$$

la première relation ici veut dire $\rho(y^i, z^i) = \sigma_i$. *Selon la définition des* ρ_i (9_0) *les* $S(x^i, \rho_i)$ $(\subset S(y^i, \sigma_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *sont disjointes.* Or, *pour un i fixe,* envisageons les points y^i, x^i, z^i; le point y^i et le nombre $\sigma_i = \rho(y^i, z^i)$ sont fixes, tandis que z^i (10_0) est possiblement variant avec x^i $(\in E)$; en vertu de la condition (3.1 *c*) (avec $x_1 = x^i$, $x_2 = y^i$, $x_3 = z^i$, $\sigma = \sigma_i$) il se voit que $\rho(x^i, z^i) \to \sigma_i$, lorsque $d_i = \rho(x^i, y^i)$ $(> 0) \to 0$, x^i restant sur E; vu (10_0) (pour le i considéré)

$$\overline{\lim}\, \rho_i \leqq \sigma_i \leqq \underline{\lim}\,(1 + d_i)\rho_i = \underline{\lim}\, \rho_i, \qquad \text{d'où} \qquad \lim \rho_i = \sigma_i,$$

quand $d_i \to 0$ (avec $x^i \in E$). La dernière relation signifie que sur E on peut trouver un x^i, de sorte que $d_i < \frac{1}{2} q_i (\varepsilon 2^{-i})$ et que pour le ρ_i (9_0), qui lui correspond, on obtient

$$(11_0) \qquad |\sigma^i - \rho_i| < \frac{1}{2} q_i(\varepsilon 2^{-1}).$$

Le point x^i $(\in E)$ et le nombre ρ_i (9_0) étant ainsi choisis, on s'aperçoit que (8_0) est satisfait, avec ce $\rho = \rho_i$, tandis que les $S(x^i, \rho_i)$ sont disjointes [*voir* une remarque à la suite de (10_0)]. *La constatation* (5_0) *est vérifiée.*

D'après (5_0)

$$|\Psi(S(y^i, \sigma_i))| = |\Psi(S(x^i, \rho_i))| + \lambda_i, \qquad \text{où} \quad |\lambda_i| < \varepsilon 2^{-i},$$

les σ_i étant les nombres introduits en rapport avec (1_0). Par là (2_0) :

$$\sum_i |\Psi(S_i)|\,(1_0) < \sum_i |\Psi(S(x^i, \rho_i))| + \varepsilon$$

pour certains x^i $(\in E)$ et ρ_i, qui satisfont à (4_0); d'où

$$\sum_i |\Psi(S_i)| < \text{Var.}(\Psi;\, E) + \varepsilon \quad (\text{fini});$$

les $S_i = S(y^i, \sigma_i)$ sont assujetties à (1_0), donc

$$\text{Var.}(\Psi;\, G) \leqq \text{Var.}(\Psi;\, E) + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \text{Var.}(\Psi;\, G) \leqq \text{Var.}(\Psi;\, E).$$

De même, Var. $(\Psi; E) \leqq$ Var $(\Psi; G)$, car $E \subset G$, par conséquent (3_0) :

$$(12_0) \qquad \text{Var.}(\Psi;\, G) = \text{Var.}(\Psi;\, E) < +\infty \qquad \text{et} \qquad \Psi \in V^s.\text{B. sur } G,$$

ce qui démontre le théorème pour le caractère V^s. B.

Considérons maintenant le cas où $\Psi \in$ A. C'. sur E [(11.11 a, a_1, a_2)]. Ainsi, à tout $\varepsilon > 0$, il correspond un $\eta(\varepsilon)$ ($= \eta(\varepsilon, E) > 0$ ($\to 0$ avec ε), tel que

$$(1^\circ) \qquad \sum_i \Phi(S(x^i, \rho_i)) \leqq \eta(\varepsilon) \qquad [x^i \in E;\ \text{les } S(x^i, \rho_i) \text{ disjointes}]$$

entraîne

$$(2^\circ) \qquad \sum_i |\Psi(S(x^i \rho_i))| \leqq \varepsilon.$$

D'autre part envisageons une suite $S(y^i, \sigma_i)$, telle que

$$(3^\circ) \qquad \sum \Phi(S(y^i, \sigma_i)) \leqq \eta(\varepsilon) \qquad [y^i \in G;\ \text{les } S(y^i, \sigma_i) \text{ disjointes}].$$

Moyennant le procédé, survenant de (5_0) jusqu'à (11_0), on peut trouver des x^i, $\in E$, et des ρ_i (> 0) de sorte que $S(x^i, \rho_i) \subset S(y^i, \sigma_i)$, donc les $S(x^i, \rho_i)$ sont disjointes, tandis que

$$(4^\circ) \qquad \left\{\begin{array}{l} |\sigma_i - \rho_i| < \frac{1}{2} q_i(\varepsilon 2^{-i}) \\ \quad = \frac{1}{2} q(y^i, \sigma_i\, \varepsilon 2^{-i}) \quad (8_0), \qquad \rho(y^i, x^i) < \frac{1}{2} q_i(\varepsilon 2^{-i}), \\ \big|\, |\Psi(S(y^i, \sigma_i))| - |\Psi(S(x^i, \rho_i))| \,\big| < \varepsilon 2^{-i} \qquad (i = 1, 2, \ldots), \end{array}\right.$$

de plus on note que [vu (3°)]

$$(5^\circ) \qquad \sum \Phi(S(x^i, \rho_i)) \leqq \sum \Phi(S(y^i, \sigma_i)) \leqq \eta(\varepsilon).$$

En écrivant

$$|\Psi(S(y^i, \sigma_i))| = |\Psi(S(x^i, \rho_i))| + \lambda_i,$$

on obtient $|\lambda_i| < \varepsilon 2^{-i}$; donc

$$(6^\circ) \qquad \sum |\Psi(S(y^i, \sigma_i))| < \sum |\Psi(S(x^i, \rho_i))| + \varepsilon.$$

D'après (5°) les x^i et les ρ_i, à présent considérés, satisfont à (1°); de là [(2°), (6°)] :

$$\sum |\Psi(S(y^i, \sigma_i))| < 2\varepsilon, \qquad \text{dès que } y^i, \sigma_i \text{ satisfont à } (3^\circ).$$

Par conséquent $\Psi \in$ A. C'. sur G (11.11 a, a_1, a_2), *ce qui achève la démonstration du théorème.* Voici un théorème dans le genre de M. Denjoy.

THÉORÈME 12.2. — *Supposons que* Ψ, Φ *satisfont à* (11.7,1). *Admettons l'hypothèse* 3.1, *la condition* (3.1 c) *incluse.*

Pour que $\Psi \in$ A. C$^\varsigma$. G. [V$^\varsigma$. B. G.] *sur un ensemble fermé* (*e. g. noyau*) E *il faut et il suffit que tout sous-ensemble fermé* H *de* E *contienne une portion*

$$(12.2\,a) \qquad \bar{\omega}, \quad où \quad \omega = A^0 H (\neq 0) \quad et \quad A^0 \in G',$$

de sorte que

$$(12.2\,b) \qquad \Psi \in A.\ C^\varsigma [V^\varsigma.\ B.] \quad sur \quad \bar{\omega}.$$

[Comparer avec (T'); p. 111]. *Si* $\Psi \in$ A. C$^\varsigma$. G. *sur* E, il existe une réunion finie ou dénombrable $E = \sum E_n$, en sorte que

$$(1_1) \qquad \Psi \in A.\ C^\varsigma. \quad sur \quad E_n \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

la fermeture $\bar{E}_n \subset E$; d'après le théorème 12.1,

$$(2_1) \qquad \Psi \in A.\ C^\varsigma. \quad sur \quad \bar{E}_n.$$

Ainsi on peut supposer que les E_n sont fermés. Pour H, $\subset$ E, fermé on a $H = \sum HE_n$, où les HE_n sont fermés. Il existe un $HE_{n'}$, qui contient une portion $\bar{\omega}$ de H; on peut faire en sorte que $\bar{\omega}$ soit de la forme (12.2 *a*). D'après (2_1) (pour $n = n'$) on obtient $\Psi \in$ A. C$^\varsigma$. sur $\bar{\omega}$ (car $\bar{\omega} \subset E_{n'}$). Ainsi (12.2 *b*), pour le caractère A. C$^\varsigma$., s'ensuit du caractère A. C$^\varsigma$. G. sur E de Ψ.

La réciproque pour les caractères A. C$^\varsigma$., A. C$^\varsigma$. G. — On admet que tout H ($\neq$ 0), $\subset$ E, fermé contient une portion $\bar{\omega}$, telle que

$$(3_1) \qquad \omega = A^0 H \neq 0, \quad où \quad A^0 \in G', \quad et \quad \Psi \in A.\ C^\varsigma. \quad sur\ \bar{\omega}.$$

Les ensembles de la famille G' (2.8) forment une suite dénombrable; désignons par A_n ($n = 1, 2, \ldots$) la totalité de tous les ensembles de G' (s'il y en a), tels que

$$(4_1) \qquad \begin{cases} A_n E \neq 0 \quad et \quad \Psi \in A.\ C^\varsigma.\ G. \quad sur\ A_n E, \\ donc \quad \Psi \in A.\ C^\varsigma.\ G \quad sur\ Q = \sum A_n E. \end{cases}$$

Si l'ensemble $H = E - Q$ n'est pas vide, H est fermé. Au dernier cas (3_1) s'applique, e. g. il existe un ensemble $\omega = A^0 H$ ($\neq$ 0), où $A^0 \in G'$, tel que $\Psi \in$ A. C$^\varsigma$. sur $\bar{\omega}$. Ainsi (4_1) : $\Psi \in$ A. C$^\varsigma$. G. sur $Q + A^0 H$; donc $\Psi \in$ A. C$^\varsigma$. G. sur $A^0 E$ (car $A^0 E \subset Q + A^0 H$). Nécessairement A^0 est un $A_{n'}$ et A^0 doit être disjoint de H; il y a contradiction, donc le théorème est établi pour les caractères A. C^{s}. G. et A. C^{s}. La vérification du théorème pour les propriétés V^{s}. B. G. et V^{s}. B. s'achève de la même manière.

En tenant compte de (11.14) et (11.21), du théorème 12.2 et du fait que F $(= A(\mathcal{F}))$ est fermé (ainsi qu'ouvert) on est mené au résultat suivant.

THÉORÈME 12.3. — *Admettons que* Φ *satisfait à* (11.7, 1_0) *et que les hypothèses* 11.17 (3.1) [(3.1 *c*) *incluse*] *ont lieu, tandis que* $\Psi \in (A)$ (définition 11.9). *Alors tout ensemble* H *fermé contient une portion*

$$(12.3a) \qquad \bar{\omega}, \text{ où } \omega = A^0 H \neq 0 \quad \text{et} \quad A^0 \in G',$$

de sorte que $\Psi \in$ A. C^{s}. *sur* $\bar{\omega}$. *De plus, si* $F = \sum E_n$ *(réunion finie ou dénombrable), où chaque* E_n *jouit de la propriété qu'à tout* $\varepsilon > 0$ *il correspond un nombre fini d'ensembles de mesure* $\leqq \varepsilon$ *de* G', *dont la réunion couvre* E_n, *alors : tout* H *fermé contient une portion* $\bar{\omega}$ *de la forme* (12.3 *a*), *telle que* $\Psi \in$ V^{s}. B. *sur* $\bar{\omega}$.

Le « rayon » d'une « sphère » ne surpassant jamais c_0 [selon le texte qui précède (11.4)], démontrons les propositions suivantes.

(12.4) $S^0(x, \rho)$ (11.1) *est ouverte.*

(12.4 *a*) *Si* O *est une enveloppe et* $x \in O$, *il existe un* $r > 0$ *tel que* $S(x, r)$ *est contenue dans* O.

Notons d'abord que $C(x, \rho)$ est non vide, car $\rho \leqq c_0$. Soit y un point dans $S^0(x, \rho)$; $\rho(x, y) < \rho$. Posons

$$(1') \qquad \rho' = \rho(y, C(x, \rho)) = \min(z \in C(x, \rho))\, \rho(y, z).$$

Il existe un point $z_n \in C(x, \rho)$, tel que $(\rho' \leqq)\ \rho(y, z_n) < \rho' + \frac{1}{n}$. Supposons, s'il est possible, que $\rho' = 0$. Alors on obtient $\lim \rho(y, z_n) = 0$; e. g. $z_n \sim (G')y$. En tant que $\rho(x, z_n) = \rho$ (fixe), la condition (3.1 *c*) de continuité (dans l'hypothèse 3.1, toujours admise) entraîne que

$$\lim_n \rho(x, z_n) = \rho = \rho(x, y)$$

[on pose

$$x_1 = x_n,\ x_2 = y, \qquad x_3 = x, \qquad .\ \rho(x_2 x_3) = \sigma = \rho(x, y)],$$

ce qui est contraire à l'inégalité $\rho(x, y) < \rho$. Par conséquent ρ' (1')> 0. On note que $S(y, \rho') \subset S(x, \rho)$. On peut trouver un point u, tel que

$$(2') \qquad u \neq y; \qquad \rho(y, u) < \rho', \qquad \text{donc} \quad u \in S(x, \rho),$$

Ensuite, il se voit qu'il existe une enveloppe B, pour laquelle

$$B \in G'; \qquad B \ni y, \qquad B \ni u; \qquad (\rho(y, u) \leqq) \Phi(B) < \rho'.$$

Pour tout point v dans B on aura

$$\rho(y, v) = \min(C \in G';\ C \ni (y, v))\, \Phi(C) \leqq \Phi(B) < \rho';$$

d'où $v \in S^0(x, \rho)$ et $B \subset S^0(x, \rho)$, *ce qui vérifie* (12.4).

Pour démontrer (12.4 *a*) il suffira de considérer le cas où $O \in G'$ [une conséquence de (2.8 *a*)]. Soit C la frontière de O, e. g. $C = \overline{O} - O$.

Si $\rho' = \rho(x, C) = \min(z \in C)\, \rho(x, z) = 0$, soient z_n $(n = 1, 2, \ldots)$ des points tels que $z_n \in C$, $\rho(x, z_n) < \frac{1}{n}$. Ainsi $\lim\limits_n \rho(x, z_n) = 0$; $z_n \sim (G')x$; x est un point d'accumulation des z_n. Mais C est fermé, d'où $x \in C$. Il y a contradiction, donc $\rho' > 0$. On aura $S(x, r) \subset O$ pour tout $0 \leqq r < \rho'$; (12.4 *a*) *est établi.*

On note que $\rho(S(x, r)) = \max \rho(y, z)$ (pour y, z dans $S(x, r)$) $\geqq r$, en tant que $r \leqq c_0$ et $C(x, r) \neq 0$ de sorte qu'il y a un z sur $C(x, r)$ [pour lequel $\rho(x, z) = r$]; de plus [(11.16), (11.4)]

$$\lim_r \rho(S(x, r)) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Phi(S(x, r)) \geqq r;$$

enfin, avec Φ assujettie à (11.7, 1_0), $\Phi(S(x, r)) \to 0$ avec r. Par conséquent, on conclut comme il suit.

(12.5) *Envisageons les trois affirmations* (avec x fixe) :

(1°) $$\Phi(S(x, r)) \to 0;$$

(2°) $$\rho(S(x, r)) \to 0;$$

(3°) $$r \to 0.$$

Une quelconque de ces constatations entraîne les deux autres. — D'après l'hypothèse 2.8 $F (= \Delta(\mathcal{F}))$ est séparable (définition 2.7); donc il existe une suite dénombrable de points x_i $(i = 1, 2, \ldots)$, $\in F$, partout denses sur F. Soit r_j $(j = 1, 2, \ldots)$ l'ensemble de tous les nombres rationnels, tels que $0 < r_j \leqq c_0$; énumérons en une suite simple

$$(12.6) \qquad S_k = S(y_k, \rho_k) \qquad (y_k = x_{i_k},\ \rho_k = r_{j_k}) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

les sphères $S(x_i, r_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$. F est indéfiniment couvert, au sens de la mesure-Φ par les S_k^0, e. g. tout point x $(\in F)$ *est contenu dans une suite infinie de sphères de* $\{S_k^0\}$ (12.6) *de mesure-Φ tendant vers zéro* [en raison de (12.5) ce recouvrement est aussi au sens de (12.5, 2°) et au sens de (12.5, 3°)]. En effet, si x est un x_ι c'est immédiat. Si x n'est pas parmi les x_ι, posons $d_\iota = \rho(x, x_\iota)$. A $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < c_0$) il correspond un x_ι tel que $d_\iota < \varepsilon$; $x \in S^0(x_\iota, r)$ pour tout $d_\iota < r \leqq c_0$. Il existe un ρ_j (rationnel), tel que $d_\iota < \rho_j < \varepsilon$; alors $x \in S^0(x_\iota, \rho_j)$; de plus, la mesure-$\Phi$ de $S^0(x_\iota, \rho_j)$ ($\ni x$) peut être faite arbitrairement petite, avec ε, avec un choix approprié de x_ι et de ρ_j.

13. **Définition de la totale-(S), son unicité et quelques-unes de ses propriétés.**

— Admettons que le théorème de *Denjoy-Vitali* ait lieu pour les sphères au sens suivant.

(13.1) Soit $\mathfrak{M}^s$ une famille de sphères (fermées) telles que tout point d'un ensemble H est contenu dans une suite de sphères de $\mathfrak{M}^s$ de mesure tendant vers zéro. Alors, étant donné un $\varepsilon > 0$, on peut trouver des sphères disjointes S_ι ($i = 1, \ldots, \nu$) dans $\mathfrak{M}^s$, telles que

$$M\{S_\iota\} < \varepsilon \qquad (\text{ou } M\{S_\iota\} = \max_\iota \Phi(S_\iota)),$$

$$\Phi_e\left(H - H\sum_1^\nu S_\iota\right) < \varepsilon, \qquad \Phi_e\left(\sum_1^\nu S_\iota - H\sum_1^\nu S_\iota\right) < \varepsilon.$$

Ce théorème aura lieu, si $1 < a < b$ *existe, de sorte que pour tout* s *fixe de* $\mathfrak{M}^s$ *on ait* $\Phi_e(\Omega(s)) < b\Phi(s)$, *où* $\Omega(s)$ *est la réunion des* σ *de* $\mathfrak{M}^s$ *pour lesquelles* $s\sigma \neq 0$, $\Phi(\sigma) < a\Phi(s)$.

Si Ψ est une fonction définie pour les sphères (fermées) et si p ($\subset$ F) est un ensemble quelconque, posons

$$(13.2)\qquad \begin{cases} \Psi_{(p)}(s) = \Psi(s) & (\text{si le centre de la sphère } s \text{ est sur } p), \\ \qquad\quad = 0 & (\text{si le centre est étranger à } p). \end{cases}$$

Notons que, avec l'hypothèse (11.7, 3°) toujours admise et à cause des propriétés de « sphères », déjà indiquées, et l'hypothèse (7.9, 6°) pour $\mathfrak{M}$ étant admise, on obtient l'énoncé suivant.

(13.3, 6°) *A tout* r *de* $\mathfrak{M}^s$ (définition 11.6) *et à tout* $\varepsilon > 0$ *des* r_ε, ρ_ε *de* $\mathfrak{M}^s$ *correspondent, tels que*

$$\bar{r}_\varepsilon \subset r, \qquad \bar{r} \subset \rho_\varepsilon, \qquad \Phi(r - r_\varepsilon) < \varepsilon, \qquad \Phi(\rho_\varepsilon - r) < \varepsilon.$$

En effet, si $r \in \mathfrak{M}$, on peut choisir r_ε et ρ_ε dans $\mathfrak{M}$ (vu 7.9, 6°); si r est une sphère ouverte, on peut prendre pour r_ε et ρ_ε de certaines sphères ouvertes de même centre que r.

Hypothèse (13.3, 7°). — *Admettons l'hypothèse* (7.4, 7°) *avec la famille* $\mathfrak{M}$ *remplacée par* $\mathfrak{M}^s$ ($\mathfrak{M}^s$ comprend $\mathfrak{M}$ et les sphères ouvertes).

HYPOTHÈSE 13.4. — Soit Ψ assujettie aux conditions de l'hypothèse 11.7; en particulier, Ψ sera *complètement additive dans* $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$.

(13.5) On dira qu'un ensemble $e \in (*)$, *e est de type* (*), si e est contenu dans un nombre fini de frontières d'ensembles de $\mathfrak{M}^s$ [tout ensemble de type (*) est mince]. Si $\mathfrak{N}$, $\subset \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$ (définition 11.6), est une famille donnée, on dira *qu'un ensemble r de* $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ *possède une décomposition finie dans* $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ *avec composants dans* $\mathfrak{N}$, si $r = \sum_1^{\nu} q_\iota + e$, où $e \in (*)$, les $q_\iota \in \mathfrak{N}$ et sont disjoints.

(13.5′) Si $\mathfrak{N}$ est une sous-famille de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$ et r de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$ est couvert par $\mathfrak{N}$, des r_ν et ρ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) existent tels que $r = \sum_1^{\infty} \rho_\nu$, les ρ_ν sont disjoints, $\rho_\nu \subset r_\nu$, $\rho_\nu \in \widetilde{\mathfrak{M}}^s$, $r_\nu \in \mathfrak{N}$.

En effet, vu la séparabilité, une suite au plus dénombrable d'ensembles r_ν de $\mathfrak{N}$ contiendra r; on aura $r = \sum r r_\nu$, $r r_\nu \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$; on peut poser

$$\rho_1 = r r_1, \qquad \rho_\nu = r r_\nu - r r_\nu (\rho_1 + \ldots + \rho_{\nu-1}) \qquad (\nu > 1),$$

avec les propriétés indiquées dans (13.5′). De plus, on note que

$$\rho^\nu = \rho_1 + \ldots + \rho_\nu (= r(r_1 + \ldots + r_\nu))$$

est ouvert, $\rho^\nu \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$ et $\rho^\nu \uparrow r$.

LEMME 13.6. — Soit $\mathfrak{N}$ une famille contenue dans $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$ (définition 11.6), les ensembles de $\mathfrak{N}$ étant contenus dans un H de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$, $\mathfrak{N}$ jouissant des propriétés suivantes.

(1_0) Si r de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$, $r \subset \mathrm{H}$, possède une décomposition finie dans $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ avec composants dans $\mathfrak{N}$ (13.5), r sera dans $\mathfrak{N}$.

(2_0) Si $r \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$, si $r^n \in \mathfrak{N}$ ($n = 1, 2, \ldots$) et $r^n \uparrow r$, alors $r \in \mathfrak{N}$.

(3_0) Tout ensemble r de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$, contenu dans un r' de $\mathfrak{N}$, est dans $\mathfrak{N}$.

(4_0) Si $\mathfrak{N}_1$, $\subset \mathfrak{N}$, ne couvre pas H, il y a un r' de $\mathfrak{N}$ non couvert par $\mathfrak{N}_1$.

Dans ces conditions (1_0)-(4_0) $\mathrm{H} \in \mathfrak{N}$.

En vertu de (4_0) $\mathrm{H} = \sum (\mathfrak{N})\rho$; d'après (13.5′) : $\mathrm{H} = \sum_1^{\infty} \rho_\nu$, où les ρ_ν sont disjoints, $\rho_\nu \subset r_\nu$, $\rho_\nu \in \widetilde{\mathfrak{M}}^s$, $r_\nu \in \mathfrak{N}$; $(\rho_\nu)^0 \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$ et, vu (3_0), $(\rho_\nu)^0 \in \mathfrak{N}$; or

$$\rho^\nu = \rho_1 + \ldots + \rho_\nu = (\rho_1)^0 + \ldots + (\rho_\nu)^0 + e_\nu,$$

avec $e_\nu \in (*)$ et $\rho^\nu \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$, donc selon (1_0) on aura $\rho^\nu \in \mathfrak{N}$; $\rho^\nu \uparrow H$, d'où, en raison de (2_0), $H \in \mathfrak{N}$, *ce qui démontre le lemme.*

Si $r \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$ et p est fermé, joint à r, alors à $\varepsilon > 0$ il correspond un nombre fini de *sphères fermées* $s_j = s(x_j)$ (de centres x_j) disjointes, telles que

$$(13.7)\quad s_j \subset r \quad (j = 1, \ldots, \nu_\varepsilon), \qquad M\{s_j\} < \varepsilon, \qquad \Phi\left(r - \sum s_j\right) < \varepsilon,$$

$$(13.7a)\qquad s_j p = 0, \quad \text{si } x_j \text{ est étranger à } p.$$

On dira que $S = \{s_j\}$ est un *système fini, relativement à p fermé, dans un r de* $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$, *si les* s_j *en nombre fini sont des sphères fermées disjointes dans r, assujetties à* (13.7 *a*). Posons

$$(13.7b)\quad N(S) \mathrel{=\!\!\!\!\!\!\!\,\lnot} N\{s_j\} = \max\left(M\{s_j\}, \Phi\left(r - \sum s_j\right)\right) (= N(r, S)).$$

L'existence de telles sphères s'ensuit en vertu du théorème (13.1), en procédant comme il suit : avec tout point x sur pr associons une suite de sphères dans r, de centre x et de mesure tendant vers zéro; avec tout point x sur $r - pr$ associons une suite de sphères de centre x, situées dans $r - pr$ et de mesure tendant vers zéro; les sphères indiquées dans (13.7, 7 *a*) sont choisies parmi les sphères de la famille de sphères que nous venons de définir. *Ou bien le centre de* s_j (13.7, 7 *a*) *est sur pr, ou bien* s_j *est disjoint de p.*

(13.8) Nous définissons *une sorte d'intégrale de Burkill* (au sens sphérique symétrique) pour r, $\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s$, épais (si la limite existe) :

$$(13.8a)\qquad \int_r^s \Psi_{(p)} = \int_{(r)^0}^s \Psi_{(p)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{s,p \neq 0} \Psi(s_j)\,[= V^s(\Psi, rp)],$$

où les s_j sont assujetties à (13.7, 7 *a*), *avec* $(r)^0$ *pour* r, et $\Psi_{(p)}$ est donnée par (13.2); nécessairement les centres des s_j intervenant dans (13.8 *a*) sont sur p. Si la limite (13.8 *a*) n'existe pas, on peut envisager les intégrales sup. et inf. :

$$(13.8b)\qquad \overline{\int_r^s} \ldots = \overline{\lim} \sum \ldots, \qquad \underline{\int_r^s} \ldots = \underline{\lim} \sum \ldots;$$

$\int_r^s \Psi_{(p)}$ (13.8 *a*) est ce que devient la limite (si elle existe);

$$(13.8c)\qquad \int_r^s \Psi = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=1}^{\nu_\varepsilon} \Psi(s_j)$$

[les s_j assujetties à (13.7, 7 a) avec $(r)^0$ pour r], lorsque Ψ est remplacée par $\Psi_{(p)}$. Le nombre $\int_r^{\backprime} \Psi$ dépend de p, en tant que les s_j (13.7, 7 a), servant à le définir, sont en rapport avec p; *ce nombre est la valeur d'une intégrale relativement à p.*

(13.8′) Si pour un r épais de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s\, \Gamma(r) = \int_r^{\backprime} \Psi$ (rel. à un p fermé) fini existe, il y aura un $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, tel que $|\Psi(S) - \Gamma(S)| < \varepsilon$, dès que $S = \{s_j\}$ est un système fini (rel. à p) dans $(r)^0$, avec $M(S) < \eta$.

Dans la démonstration de cet énoncé, les intégrales et les systèmes finis [dans $(r)^0$] seront relativement à p. Or $\Gamma(r) = \lim \Psi(S)$ [S système fini dans $(r)^0$, avec $N(S)$ (13.7 b) $\to 0$]; donc il existe un $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, tel que

$$|\Psi(S^{(1)}) - \Psi(S^{(2)})| < \frac{\varepsilon}{2},$$

dès que $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ sont systèmes finis dans $(r)^0$ avec $N(S^{(i)}) < \eta$ $(i = 1, 2)$. *Soit* $S = \{\rho_i\}$ $(i = 1, \ldots, \nu)$ *un système fini dans* $(r)^0$, *avec* $\Phi(\rho_i) < \eta$. Il y a un système fini $S_i = \{\rho_{i,j}\}$ dans $(\rho_i)^0$, tel que :

$$(1_0) \qquad \left|\Psi(S_i) - \int_{\rho_i}^{\backprime} \Psi\right| < \frac{\varepsilon}{2\nu} \qquad \text{et} \qquad \Phi\left(\rho_i - \sum_j \rho_{i,j}\right) < \frac{\eta}{3\nu};$$

$$\text{donc} \quad \Phi\left(\sum \rho_i - \sum_{i,j} \rho_{i,j}\right) < \frac{\eta}{3}.$$

Soit

$$S' = \{\sigma_k\} + \{\rho_i\} \quad (k = 1, \ldots, \nu';\ i = 1, \ldots, \nu), \quad \supset S,$$

un système fini dans $(r)^0$, tel que

$$\Phi(\sigma_k) < \eta \qquad \text{et} \qquad \Phi\left(r - \sum \rho_i - \sum \sigma_k\right) < \frac{\eta}{3}.$$

Choisissons un système fini $S_{\sigma_k} = \{\sigma_{k,m}\}$ dans $(\sigma_k)^0$, avec

$$\Phi\left(\sigma_k - \sum_m \sigma_{k,m}\right) < \frac{\eta}{3\nu'};$$

ainsi

$$\Phi\left(\sum_k \sigma_k - \sum_{k,m} \sigma_{k,m}\right) < \frac{\eta}{3}$$

et l'on obtient

$$\Phi\Big(r-\sum_{i,j}\rho_{i,j}-\sum_{k,m}\sigma_{k,m}\Big)$$
$$=\Phi\Big(\Big(r-\sum\rho_i-\sum\sigma_k\Big)+\Big(\sum_i\rho_i-\sum_{i,j}\rho_{i,j}\Big)+\Big(\sum_k\sigma_k-\sum_{k,m}\sigma_{k,m}\Big)\Big)<\eta;$$

de plus

$$\Phi\Big(r-\sum_i\rho_i-\sum_{k\ m}\sigma_{k,m}\Big)<\frac{2\eta}{3};$$

toutes les sphères ρ_i, σ_k, $\rho_{i,j}$, $\sigma_{k,m}$ sont de mesure inférieure à η. En posant

$$\Lambda_1=\{\rho_{i,j}\},\qquad \Lambda_2=\{\sigma_{k,m}\},$$

on observe que pour les systèmes finis [dans $(r)^0$] $\Lambda_1+\Lambda_2$, $S+\Lambda_2$ on a $N(\ldots)<\eta$; par là

$$|\Psi(\Lambda_1)-\Psi(S)|=|\Psi(\Lambda_1+\Lambda_2)-\Psi(S+\Lambda_2)|<\frac{\varepsilon}{2};$$

en outre (1_0) : $\left|\Psi(\Lambda_1)-\int_S^{\cdot}\Psi\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, enfin $\left|\Psi(S)-\int_S^{s}\Psi\right|<\varepsilon$,

ce qui vérifie (13.8').

On dira que x_0 est un point *isolé-s* d'un ensemble *p*, s'il existe un $r_0\in\mathfrak{M}$ (ou bien de $\mathfrak{M}^s$) tel que $r_0\ni x_0$ et $r_0\,p\in(*)$ (13.5); *p* est *parfait-s*, si *p* est fermé et dépourvu de points isolés-*s*.

(13.9) On dira que Ψ (définie dans $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$) est *s. a.* (*additive au sens sphérique*) *relativement à un p fermé pour un* $r\in\widetilde{\mathfrak{M}}^s$, si

$$\Psi(r)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{\nu_\varepsilon}\Psi(s_j), \tag{13.9a}$$

les s_j étant assujetties à (13.7, 7*a*) avec $(r)^0$ pour *r*, e.g. si $\Psi(r)=\int_r^s\Psi$ (rel. à *p*).

En tant que $\Psi(e)=0$ pour $e\in(*)$, *ce qu'on admet toujours*, il s'ensuit que Ψ est s. a. pour tout *r* de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ mince [car alors $r\in(*)$, $(r)^0$ est vide, $\Psi(r)=0$, *p* n'intervient pas et (13.9*a*) aura lieu sans s_j]. Ψ est *s. a. sur un r de* $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$, si Ψ est s. a. pour tout r_1 (de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$) $\subset r$ (relativement à un même *p* fermé).

THÉORÈME 13.10. — Soit $f(x)$ une fonction de point x définie (finie), sur une plénitude d'un H de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$. On dira que f est *totalisable*-(S), *totalisable au sens symétrique*, sur H, s'il existe une fonction Ψ, nulle pour les ensembles (*) (13.5) dans H, telle que :

(1°) Ψ est *complètement additive dans* $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ sur H;

(2°) si p est parfait-s dans $(H)^0$ (au cas où H est épais) et si r, $\in \mathfrak{M}^s$, $\subset H$ et $pr \neq 0$, alors il existe un r' (de $\mathfrak{M}^s$), $\subset r$, tel que $pr' \neq 0$ et

(I) Ψ est *s. a. relativement à* p (13.9, 9 *a*) *sur* r', e. g. $\Psi = \int^s \Psi$ (rel. à p) dans r';

(II) $V^s(\Psi, rp)$ (13.8 *a*) $\left[= \int_{r_1}^{s} \Psi_{(p)} \text{ (rel. à } p) \right] = \int_{r_1 p} f\, d\Phi$ (intégrale de Lebesgue) pour tout r_1 de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s \subset r'$. On dira que

$$(13.10a) \qquad (S)\int_H f\,d\Phi = \Psi(H),$$

où le premier membre est la *totale*-(S) *de* f *sur* H. *La totale*-(S) *est unique.*

Les règles de cette totalisation seront développées dans la suite. Si $H(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s)$ est mince, c'est que $H \in (*)$ (13.5) et $\Psi = 0$ pour tout sous-ensemble de H et le cas est trivial. Si $H(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s)$ est épais, $\Psi(H) = \Psi((H)^0)$; dans ce cas, si la totale-(S) existe pour un des ensembles H, $(H)^0$, elle existe pour l'autre et la valeur sera $\Psi(H) = \Psi((H)^0)$. *Dans la démonstration de l'unicité de la totale*-(S) *on peut se borner au cas où* $H \in \mathfrak{M}_0^s$ (e. g. H de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ est ouvert). Supposons, s'il est possible, qu'à une fonction $f(x)$ totalisable-(S) deux fonctions Ψ_1, Ψ_2 de la sorte spécifiées correspondent; $\Psi = \Psi_1 - \Psi_2$ est définie dans $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ sur H et remplit les conditions du théorème. Soit $\mathfrak{N}$ la famille de tous les ensembles ρ, tels que

$$(1_1) \qquad \rho \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s, \qquad \rho \subset H, \qquad \Psi(\rho_1) = 0 \quad \text{pour tout } \rho_1 \left(\text{de } \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right), \subset \rho.$$

$\mathfrak{N}$ *vérifie* (13.6, 3_0). — Supposons que $r\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset H$ et que r possède une décomposition finie dans $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ avec composants dans $\mathfrak{N}$, e. g. $r = \sum_1^{\vee} q_i + e$, $e \in (*)$, les q_i, $\in \mathfrak{N}$, sont disjoints. Soit $\rho_1\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset r$, alors $\rho_1 = \sum \rho_1 q_\iota + e'$, $e' \in (*)$, où les $\rho_1 q_\iota$ sont disjointes; $\rho_1 q_\iota$ est dans $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ et est contenu dans un ensemble de $\mathfrak{N}$, d'où

$$\Psi(\rho_1 q_\iota) = 0 \quad \text{et} \quad \Psi(\rho_1) = \sum \Psi(\rho_1 q_\iota) + \Psi(e') = 0,$$

par là, $r \in \mathfrak{N}$; $\mathfrak{N}$ *remplit* (13.6, 1_0). Soient $r \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$, $r^n \in \mathfrak{N}$ et $r^n \uparrow r$. Si $\rho_1 \left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset r$, on aura $\rho_1 r^n \left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \uparrow \rho_1$ et, d'après (13.10, 1°), $\Psi(\rho_1) = \lim \Psi(\rho_1 r^n)$; $\rho_1 r^n$ de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ étant dans r^n de $\mathfrak{N}$, il en résulte que $\Psi(\rho_1 r^n) = 0$, donc $\Psi(\rho_1) = 0$ et $r \in \mathfrak{N}$; $\mathfrak{N}$ *satisfait à* (13.6, 2_0).

Ayant (13.6, 4_0) en vue, envisageons une *sous-famille* $\mathfrak{N}_1$ *de* $\mathfrak{N}$ *ne couvrant pas* H. L'ensemble $p = \mathrm{H} - \sum (\mathfrak{N}_1)\rho$ est fermé dans H. *Si p a un point x isolé-s,* il existe un r_0 de $\mathfrak{M}$, $r_0 \subset \mathrm{H}$, contenant x et tel que $r_0 p \in (*)$ (13.5); $r_0 p \in \widetilde{\mathfrak{M}}^s$; on obtient

$$r^0 = r_0 - r_0 p \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s, \qquad r^0 \subset \sum (\mathfrak{N}_1)\rho.$$

Selon (13.5′) : $r^0 = \sum_1^\infty \rho_\nu$, où les $\rho_\iota \left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right)$ sont disjoints,

$$\rho_\nu \subset r_\nu (\in \mathfrak{N}_1), \qquad \rho^\nu = \rho_1 + \ldots + \rho_\nu \left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s\right) = (\rho_1)^0 + \ldots + (\rho_\nu)^0 + e_\nu,$$
$$e_\nu \in (*), \qquad (\rho_\iota)^0 \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s;$$

d'après (13.6, 3_0), déjà établie, et puisque $(\rho_\iota)^0 \subset r_\nu \in \mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}$, il s'ensuit que $(\rho_\iota)^0 \in \mathfrak{N}$. En vertu de (13.6, 1_0) : $\rho^\nu \in \mathfrak{N}$. Or $\rho^\nu \uparrow r^0$ $\left(\text{de } \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s\right)$, donc (13.6, 2_0) : $r^0 \in \mathfrak{N}$; d'autre part,

$$r_0 \ (\text{de } \mathfrak{M}) = r^0 + r_0 p = r^0 + (*),$$

e. g. r^0 possède une décomposition finie dans $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ avec un seul composant dans $\mathfrak{N}$, d'où, à cause de (13.6, 1_0) : $r_0 \in \mathfrak{N}$. Mais r_0 contient un point de p et conséquemment r_0 *de* $\mathfrak{N}$ *est non couvert par* $\mathfrak{N}_1$, *si p a un point isolé-s*. Considérons *le cas où p est parfait-s dans* H. On a $\Psi = \Psi_1 - \Psi_2$, où Ψ_1, Ψ_2 sont de la sorte indiquées au théorème. D'après (13.10, 2°) pour Ψ_1, en prenant un r de $\mathfrak{M}^s$, $r \subset \mathrm{H}$, $pr \neq 0$, on trouve un r' de $\mathfrak{M}^s$, $r' \subset r$, $pr' \neq 0$, tel que

$$\Psi_1 = \int^s \Psi_1 \quad (\text{rel. à } p) \qquad \text{dans } r',$$

$$\int_{r_1}^s \Psi_{1(p)} \quad (\text{rel. à } p) = \int_{r_1 p} f\, d\Phi \qquad [\text{tout } r_1 (\in \mathfrak{M}^s) \subset r'].$$

A cause de (13.10, 2°) pour Ψ_2, avec r' au lieu de r, il existe un ρ' de $\mathfrak{M}^s$, $\rho' \subset r'$, $p\rho' \neq 0$ de façon que

$$\Psi_2 = \int^{s} \Psi_2 \quad (\text{rel. à } p) \text{ dans } \rho',$$
$$\int_{\rho}^{s} \Psi_{2(p)} \quad (\text{rel. à } p) = \int_{\rho p} f\, d\Phi \qquad \left[\text{tout } \rho\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s\right) \subset \rho'\right];$$

d'où

$$(2_1) \qquad \Psi = \int^{s} \Psi \quad (\text{rel. à } p) \text{ dans } \rho', \qquad \int_{\rho}^{s} \Psi_{(p)} \quad (\text{rel. à } p) = 0$$

pour tout ρ de la sorte indiquée, ce qui veut dire (13.2) :

$$(3_1) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{s_j p \neq 0} \Psi(s_j) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_j \Psi_{(p)}(s_j) = 0,$$

où s_j $(j = 1, \ldots, \nu_\varepsilon)$ sont des sphères fermées et disjointes, telles que $s_j \subset \rho$, tandis que s_j est disjointe de p si le centre de s_j est étranger à p, $\Phi(s_j) < \varepsilon$, $\Phi\left(\rho - \sum s_j\right) < \varepsilon$. On obtient

$$(4_1) \quad \rho = \sum s_j + \rho_\varepsilon, \qquad \rho_\varepsilon \in \mathfrak{M}_0^s, \qquad \Phi(\rho_\varepsilon) < \varepsilon, \qquad \Psi(\rho) = \sum \Psi(s_j) + \Psi(\rho_\varepsilon).$$

Parmi les s_j désignons par s_k les sphères disjointes de p (donc le centre de s_j pour $j \neq k$ sera sur p). Il se voit que $s_k \subset \rho - \rho p \subset \sum (\mathfrak{N}_1)\, \rho_1$. Or $(s_k)^0$ $(\in \mathfrak{M}^s)$ est couvert par $\mathfrak{N}_1$ $(\subset \mathfrak{N}\,(1_1))$; $\mathfrak{N}_1$ est une sous-famille de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$. En vertu de (13.5′) $(s_k)^0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu$, les h_ν sont disjoints,

$$h_\nu \subset r_\nu \qquad h_\nu \in \widetilde{\mathfrak{M}}^s, \qquad r_\nu \in \mathfrak{N}_1;$$
$$h^\nu = h_1 + \ldots + h_\nu [= (s_k)^0 (r_1 + \ldots + r_\nu)] \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s;$$
$$h^\nu = (h_1)^0 + \ldots + (h_\nu)^0 + e_\nu$$

avec $e_\nu \in (*)$; d'après $(13.6, 3_0)$ $(h_j)^0 \in \mathfrak{N}$; selon $(13.6, 1_0)$ $h^\nu \in \mathfrak{N}$; à cause de $(13.6, 2_0)$ et puisque $h^\nu \uparrow (s_k)^0$ on obtient $(s_k)^0 \in \mathfrak{N}$. Ainsi $\Psi(s_k) = \Psi((s_k)^0) = 0$ et [vu (4_1), (3_1)] :

$$(5_1) \quad \Psi(\rho) = \sum_{j \neq k} \Psi(s_j) + \Psi(\rho_\varepsilon)$$
$$= \sum_{s_j p \neq 0} \Psi(s_j) + \Psi(\rho_\varepsilon) = \lim \Psi(\rho_\varepsilon) \qquad \text{pour tout } \rho\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s\right) \subset \rho'.$$

Dans les développements donnés plus haut, les h_ν, r_ν, h^ν, e_ν dépendent de k. En raison de (4_1) et de la première relation (2_1)

$$\lim \Psi(\rho_\varepsilon) = \Psi(\rho) - \lim \sum \Psi(s_j) = \Psi(\rho) - \int_\rho^{\cdot s} \Psi \quad (\text{rel. à } p) = 0;$$

dans (5_1) : $\Psi(\rho) = 0$ pour tout ρ de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$ dans ρ' $(\in \mathfrak{M}^s)$, d'où $\rho' \in \mathfrak{N}$; mais ρ' est joint à p et par conséquent ρ' n'est pas couvert par $\mathfrak{N}_1$.

Ainsi *il existe un ensemble de* $\mathfrak{N}$ *non couvert par* $\mathfrak{N}_1$. La condition (13.6, 4_0) est vérifiée. Donc $H \in \mathfrak{N}$, e. g. $\Psi_1(r) = \Psi_2(r)$ pour tout $r\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset H$, *ce qui démontre le théorème.*

THÉORÈME 13.11. — *La totale-*(S) *possède les propriétés suivantes :*

(13.11 *a*) si f est totalisable-(S) sur un H de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$, f sera totalisable-(S) sur tout r $\left(\text{de } \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset H$; la totale-(S) possède sur H les caractères (13.10, 1°, 2°);

(13.11 *b*) soient q_i $(i = 1, \ldots, n)$ les composants d'une décomposition dans $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ d'un ensemble H $\left(\text{de } \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right)\left[\text{e. g. } H = \sum q_i + e,\ e \in (*),\right.$ les $q_i\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s\right)$ sont disjoints$\left.\right]$; si f est totalisable-(S) sur q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, f sera totalisable-(S) sur H et

$$(\text{S})\int_r f\,d\Phi = \sum_{i=1}^{n} (\text{S})\int_{rq_i} f\,d\Phi (\equiv \Gamma(r)) \qquad \text{pour tout} \quad r\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset H;$$

(13.11 *c*) la classe de fonctions totalisables-(S) est linéaire;

(13.11 *d*) $(\text{S})\int_H f\,d\Phi \geqq 0$ $\left(\text{pour } H \in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right)$, si $f \geqq 0$ sur une plénitude de H et si f est totalisable-(S) sur H;

(13.11 *d'*) si $f = 0$ sur une plénitude d'un H de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$, on aura $(\text{S})\int f\,d\Phi = 0$ sur H;

(13.11 *e*) si f est sommable-Φ sur un H de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$, alors

$$\int_H f\,d\Phi = (\text{S})\int_H f\,d\Phi.$$

On observe que (13.11 *a*) *s'ensuit* immédiatement de la définition de la totale-(S). Pour démontrer (13.11 *b*), désignons par Ψ_i la fonction qui correspond à f sur q_i. Alors $\Gamma(r) = \sum \Psi_i(rq_i)$ pour r de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$

dans H; on doit montrer que $\Gamma(r)$ est la totale-(S) de f sur H. Si $r \in (*)$, on a $rq_i \in (*)$ et $\Gamma(r) = 0$. $\Psi_i(\rho)$ $\left(\rho\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset q_i\right)$ est complètement additive dans $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ sur q_i, d'où $\Psi_i(rq_i)$ a la même propriété dans $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ sur H, e. g. $\Gamma(r)$ *possède ce caractère sur* H. Soient p parfait-s et un $r \in \mathfrak{M}^s$, $r \subset$ H, $pr \neq 0$. pr est joint à un q_k. En effet, au cas contraire, $pr \subset e$ [de (*)] et l'on aura $pr \in (*)$, e. g. p aurait des points isolés-s, ce qui est contraire à l'hypothèse. Un point x de pr est dans un q_k (ouvert); $q_k r$ étant ouvert, il y a un ρ' de $\mathfrak{M}^s$ tel que $\rho' \ni x$ et $\rho' \subset q_k r$; or f est totalisable-(S) sur q_k, donc (vu 13.10, 2°) il existe un r' de $\mathfrak{M}^s$, $r' \subset \rho'$, $pr' \neq 0$, tel que pour tout $r_1\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset r'$:

$$\text{(I)} \qquad \Psi_k(r_1) = \int_{r_1}^{s} \Psi_{k(p)} \quad (\text{rel. à } p) \text{ dans } r',$$

$$\text{(II)} \qquad \int_{r_1}^{s} \Psi_{k(p)} \quad (\text{rel. à } p) = \int_{r_1 p} f\, d\Phi.$$

Pour tout r_1 de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$, contenu dans r', on a

$$\Gamma(r_1) = \sum \Psi_i(r_1 q_i) = \Psi_k(r_1),$$

car $r_1 \subset q_k$ et $r_1 q_i = 0$ $(i \neq k)$. Ainsi [(I), (II)] Γ est s. a. relativement à p sur r' et $\int_{r_1}^{s} \Gamma_{(p)}$ (rel. à p) $= \int_{r_1 p} f\, d\Phi$ dans r', ces conséquences résultant de l'hypothèse : p parfait-s, $r\ (\in \mathfrak{M}^s)$, $r \subset$ H, $pr \neq 0$. Cela veut dire que Γ est la totale-(S) sur H de f; (13.11 *b*) *est vérifié.*

L'énoncé (13.11 *c*) s'établit aisément; on montre que cf sera totalisable-(S), si c est une constante et si f est totalisable-(S); de plus, si f_1, f_2 sont totalisables-(S), $c_1 f_1 + c_2 f_2$ (c_1, c_2 constantes) sera totalisable-(S).

Pour démontrer (13.11 *d*) désignons par Ψ la fonction qui correspond à f selon le théorème 13.10. Soit $\mathcal{N}'$ la famille d'ensembles ρ de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$, tels que $\rho \subset$ H et $\Psi(\rho_1) \geqq 0$ pour tout $\rho_1\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset \rho$. On peut se borner au cas de H $\in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$. $\mathcal{N}'$ remplit (13.6, 3_0). Procédons à la manière indiquée dans la démonstration du théorème 13.10 à la suite de (1_1), mais avec $\mathcal{N}'$ au lieu de la famille $\mathcal{N}$, spécifiée dans (1_1) (l'égalité $\Psi(\rho_1) = 0$ de (1_1) est remplacée par l'inégalité fermée $\Psi(\rho_1) \geqq 0$). On montre que $\mathcal{N}'$ remplit (13.6, 1_0) et (13.6, 2_0).

Soit $\mathcal{N}'_1$, $\subset \mathcal{N}'$, une famille d'ensembles ne couvrant pas H $\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s\right)$; $p = \text{H} - \sum (\mathcal{N}'_1)\rho_1$ est fermé dans H. Si p a un point x isolé-s, il existe un r_0 (de $\mathfrak{M}^s$) $\subset$ H, $r_0 \ni x$, $r_0 p \in (*)$; $r^0 = r_0 - r_0 p$ $\left(\text{de } \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s\right)$ est contenu dans $\sum(\mathfrak{N}'_1)\rho_1$. Nous procédons comme dans la partie correspondante de la démonstration du théorème 13.10, mais avec $\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}'$ au lieu de $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}$; on montre que r_0, *non couvert par* $\mathfrak{N}'_1$, *est dans* $\mathfrak{N}'$ (si p a un point isolé-s). *Supposons que p est parfait-s dans* H. Prenons un r, $\in \mathfrak{M}^s$, $\subset$ H joint à p. Selon (13.10, 2°) il existe un ρ' (de $\mathfrak{M}^s$) $(\subset r) \subset$ H, $p\rho' \neq 0$, tel que pour tout $\rho \left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset \rho'$ on ait

$$(\mathrm{I}') \qquad \Psi(\rho) = \int_\rho^s \Psi \quad (\text{rel. à } p),$$

$$(\mathrm{II}') \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{s_j p \neq 0} \Psi(s_j) \left[= \int_{\rho p} f\, d\Phi \right] \geq 0$$

(car $f \geq 0$ sur une plénitude de H); dans (II') les $s_j = s(x_j)$ $(j = 1, \ldots, \nu_\varepsilon)$ sont des sphères disjointes, assujetties à [(13.7), (13,7 a)] [pour (ρ^0)] :

$$s_j \subset (\rho)^0, \qquad \Phi(s_j) < \varepsilon, \qquad \Phi\left(\rho - \sum s_j\right) < \varepsilon;$$
$$s_j p = 0, \qquad \text{si } x_j \text{ est étranger à } p.$$

On a $(\rho)^0 = \sum s_j + \rho_\varepsilon$, $\rho_\varepsilon \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$, $\Phi(\rho_\varepsilon) < \varepsilon$; soient les s_k celles des sphères s_j dont les centres sont étrangers à p [donc les s_k sont dans $(\rho)^0 = (\rho)^0 p$]; en raisonnant comme à la suite de (4_1), on obtient $(s_k)^0 \in \mathfrak{N}'$ et $\Psi(s_k) \geq 0$; de plus, à cause de (I'),

$$\Psi(\rho_\varepsilon) \to \Psi(\rho) - \lim \sum \Psi(s_j) = \Psi(\rho) - \int_\rho^s \Psi \quad (\text{rel. à } p);$$

d'où (II') :

$$\Psi(\rho) = \sum \Psi(s_j) + \Psi(\rho_\varepsilon) \geq \sum_{j \neq k} \Psi(s_j) + \Psi(\rho_\varepsilon)$$
$$= \sum_{s_j p \neq 0} \Psi(s_j) + \Psi(\rho_\varepsilon) = \lim \sum_{s_j p \neq 0} \ldots + \lim \Psi(\rho_\varepsilon) \geq 0$$
$$\text{pour tout} \quad \rho\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset \rho'.$$

Par là $\rho' \in \mathfrak{N}'$; mais ρ' (de $\mathfrak{M}^s$) est joint à p, donc ρ' est non couvert par $\mathfrak{N}'_1$. Par conséquent $\mathfrak{N}'$ remplit $(13.6, 4_0)$. Selon le lemme 13.6 H $\in \mathfrak{N}'$, *ce qui démontre* (13.11 d).

Si $f = 0$ sur une plénitude d'un H de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$, envisageons la fonction Ψ nulle pour $r \left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset$ H. En particulier on aura $\Psi = 0$ pour les ensembles (*) (13.5); Ψ satisfait à (13.10, 1°). On peut vérifier que Ψ remplit les conditions (I), (II) de (13.10, 2°). Donc Ψ $\left(= 0 \text{ dans } \widetilde{\mathfrak{M}}^s \text{ sur H}\right)$ est bien la totale-(S) de f sur H; d'où (13, 11 d') *est établi.*

Si f est sommable-Φ sur un H de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$, que nous pouvons supposer ouvert, posons

$$\Psi(r) = \int_r f\,d\Phi \qquad \left(r \in \widetilde{\mathfrak{M}}^s,\ r \subset \mathrm{H}\right).$$

Démontrons que f est totalisable-(S) sur H et

$$\Psi(\mathrm{H}) = (\mathrm{S})\int_{\mathrm{H}} f\,d\Phi.$$

Les ensembles (*) étant minces, on a $\Psi(e) = 0$ pour $e\,(\subset \mathrm{H}) \in (*)$. En tant que Ψ est une intégrale lebesguienne, Ψ possède le caractère (13.10, 1°). Soient p parfait-s dans H et $r'\,(\in \mathfrak{M}^s) \subset \mathrm{H}$, $pr' \neq 0$. Montrons que (I) : $\Psi(r_1) = \int_{r_1}^{s} \Psi$ (rel. à p) pour tout $r_1\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset r'$. Posons $g_\varepsilon = \sum \Psi(s_j)$, où les s_j sont des sphères fermées disjointes, $s_j \subset (r_1)^0$ [pour r_1 mince (I) est déjà vérifiée],

$$\Phi(s_j) < \varepsilon, \qquad \Phi\left(r_1 - \sum s_j\right) < \varepsilon, \qquad s_j p = 0$$

si le centre de s_j est étranger à p. Or

$$g_\varepsilon = \int_\nu f\,d\Phi, \qquad \text{avec} \quad \nu = \nu_\varepsilon = \sum s_j;$$

évidemment

$$g_\varepsilon \to \int_{r_1} f\,d\Phi = \Psi(r_1),$$

lorsque $\varepsilon \to 0$; (I) *est vérifiée.* Démontrons (avec les mêmes r', r_1)

$$\text{(II)} \quad \int_{r_1}^{s} \Psi_{(p)} \ (\text{rel. à } p) = \int_{r_1 p} f\,d\Phi\left[= \int_{r_1^0 p} f\,d\Phi\right], \qquad \text{où} \quad r_1^0 = (r_1)^0.$$

On a

$$(\alpha_1) \qquad \int_{)p)}^{s} \Psi_{(p)} \ (\text{rel. à } p) = \lim h_\varepsilon, \qquad h_\varepsilon = \sum_{s\,p \neq 0} \Psi(s_j),$$

les s_j étant les ensembles ainsi désignés plus haut. Si $r_1^0 p = 0$, le second membre dans (II) sera nul; aussi $h_\varepsilon = 0$ (en tant que $s_j \subset r_1^0$, et tous les s_j seront disjoints de p); (II) est vérifiée dans ce cas. Si $r_1^0 p \neq 0$, notons que

$$(a_2) \qquad h_\varepsilon = \int_\nu f\, d\Phi, \qquad \nu = \nu(\varepsilon) = \sum_{s_j p \neq 0} s_j = \sum{}' s_j,$$

les centres des s_j intervenant dans $\sum{}' \ldots$ étant sur p. Désignons par s_k les s_j disjointes de p; alors $\sum s_j = \nu + \sum s_k$ et, en posant $\nu_0 = r_1 p - \nu p$, on obtient $\nu_0 = r_1 p - p \sum s_j$ $\left(\text{car } p \sum s_k = 0\right)$, d'où

$$\nu_0 = p\left(r_1 - \sum s_j\right) \subset r_1 - \sum s_j$$

et

$$(a_3) \qquad \Phi(\nu_0)\ (< \varepsilon) \to 0; \qquad \nu + \nu_0 [= (\nu - \nu p) + r_1 p] \supset r_1 p.$$

En raison de (13.3, 7°) pour tout entier $n > 0$ il existe un O_n ouvert et un $\delta_n = \delta\left(\frac{1}{n}, \bar{r}_1 p, O_n\right)$, tels que

$$O_n \supset \bar{r}_1 p, \qquad \Phi(O_n - \bar{r}_1 p) < \frac{1}{n},$$

de sorte que les relations

$$(a_4) \qquad s = \text{une sphère fermée}, \qquad s.(\bar{r}_1 p) \neq 0, \qquad \Phi(s) < \delta_n$$

entraînent $s \subset O_n$. Les s_j dans $\sum{}' s_j$ (a_2) sont dans $(r_1)^0$ et sont joints à p (en effet leurs centres sont sur p), donc s_j $\left(\text{dans } \sum{}'\right) \subset O_n$, lorsque $\Phi(s_j) < \delta_n$; ainsi $\nu\ (a_2) \subset O_n$ pour $M\{s_j\} < \delta_n$. Or $\nu_0 \subset pr_1 \subset O_n$; d'après (a_1) : $\nu + \nu_0 - rp \subset O_n - r_1 p$ et

$$(a_5) \qquad \Phi(\nu + \nu_0 - r_1 p) < \frac{1}{n} \qquad \text{pour} \quad \varepsilon \leq \delta_n,$$

e. g. $\Phi(\nu + \nu_0 - r_1 p) < \frac{1}{n_\varepsilon}$, où $n_\varepsilon \to +\infty$ avec $\frac{1}{\varepsilon}$.

En tenant compte de (a_1), (a_2) il vient

$$(a_6) \qquad \left| h_\varepsilon - \int_{r_1 p} f\, d\Phi \right| = \left| \int_\nu f\, d\Phi - \int_{r_1 p} f\, d\Phi \right| = \left| \int_{\nu+\nu_0} \cdots - \int_{r_1 p} \cdots - \int_{\nu_0} \cdots \right|$$
$$\leq \left| \int_{\nu+\nu_0-r_1 p} \cdots \right| + \left| \int_{\nu_0} \cdots \right|.$$

Vu (a_3) $\int_{v_0} \ldots \to 0$ avec ε; d'après (a_2) l'autre intégrale au dernier membre de (a_0) tend vers zéro. Conséquemment,

$$\lim h_\varepsilon = \int_{r_1 p} f\, d\Phi,$$

ce qui vérifie (II). On voit donc que la fonction

$$\Psi(r) = \int_r f\, d\Phi \qquad (r \in \widetilde{\mathfrak{M}}^s,\ r \subset \mathrm{H})$$

satisfait à toutes les conditions de la totale-(S) de f (théorème 13.10); *l'énoncé* (13.11 *e*) *est démontré.*

14. **Dérivation de la totale-(S) et théorèmes sur les caractères** V. B., A. C. — En tant que le théorème de Denjoy-Vitali (13.1) a lieu pour les sphères, on note que, avec la dérivation au sens sphérique D^s (11.8), *les théorèmes analogues aux énoncés* (8.5)-(8.6 *b*) *seront valides* (e. g. le théorème d'épaisseur et les théorèmes du genre de Lebesgue, relatifs aux fonctions sommables et aux fonctions Ψ complètement additives et absolument continues d'ensemble mesurable-Φ).

Théorème 14.1. — Soient H épais un ensemble de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$, $\mathfrak{N}$ la famille de sphères fermées contenues dans $(\mathrm{H})^0$ et Ψ une fonction définie dans $\mathfrak{N}$. Pour $r\,(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s) \subset \mathrm{H}$ posons

$$(14.1\,a) \qquad \int_r^s \Psi = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=1}^{\nu_\varepsilon} \Psi(s_j),$$

si la limite existe, où les s_j ($j = 1, \ldots, \nu_\varepsilon$) disjointes $\in \mathfrak{N}$, $s_j \subset (r)^0$, $\mathrm{M}\{s_j\} < \varepsilon$, $\Phi\left(r - \sum s_j\right) < \varepsilon$. *Si* $\int_\sigma^s \Psi = 0$ *pour toute* $\sigma \in \mathfrak{N}$, *on aura* $\mathrm{D}^s\, \Psi(x) = 0$ *sur une plénitude de* H.

Le nombre dans (14.1) est la valeur de l'intégrale de Burkill, au sens sphérique symétrique, lorsque l'ensemble p n'existe pas. Si le théorème est en défaut, il existe un ensemble e, $\subset \mathrm{H}$, et un $\varepsilon > 0$, tels que

$$\Phi(e) = \eta > 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{D}}^s\, \Psi(x) > \varepsilon > 0$$

(ou bien $\underline{\mathrm{D}}^s\, \Psi(x) < -\varepsilon$). Nous choisissons e dans l'intérieur σ^0 d'une sphère $\sigma \subset (\mathrm{H})^0$. A tout x de e il correspond une suite $s_j(x)$ ($j = 1, 2, \ldots$), $\subset \sigma^0$, de sphères de centre x, telles que

$$\Phi(s_j(x)) \to 0, \qquad \Psi(s_j(x)) > \varepsilon\, \Phi(s_j(x)).$$

Selon (13.1) de la famille $\mathfrak{M}^s = \{ s_j(x) \}$ ($j = 1, 2, \ldots$, x parcourant e) on peut extraire une suite finie de sphères $S_i = S_i(x_i)$, de centres $x_i \in e$ ($i = 1, \ldots, \nu_\xi$) disjointes, telles que

$$(1^0) \qquad M\{S_i\} < \xi, \qquad S_i \subset \sigma^0, \qquad \Phi\left(e - e\sum_1^{\nu} S_i\right) < \xi, \qquad \Psi(S_i) > \varepsilon\Phi(S_i);$$

donc, en posant $0 < \xi < \frac{\eta}{2}$, on obtient :

$$(2^0) \qquad \Phi\left(\sum_1^{\nu} S_i\right) > \frac{\eta}{2}.$$

Pour un système de sphères S'_k, $\subset \sigma^0 - \sum_i S_i$ ($k = 1, \ldots, \nu' = \nu_\xi$), disjointes on aura

$$(3^0) \qquad M\{S'_k\} < \xi, \qquad \Phi\left(\sigma - \sum S_i - \sum S'_k\right) < \frac{\xi}{2}.$$

Pour un système fini $S_{k,r}$ ($r = 1, \ldots, m_k$) de sphères disjointes on a

$$(4^0) \qquad S_{k,\nu} \subset S'_k, \qquad M\{S_{k,\nu}\} < \xi,$$
$$\Phi\left(S'_k - \sum_r S_{k\,r}\right) < \xi 2^{-k-1}, \qquad \sum_r \Psi(S_{k\,n}) < \frac{\varepsilon\eta}{4\nu'},$$

la dernière relation étant une conséquence de l'égalité $\int_{S'_k}^{s} \Psi = 0$ (l'intégrale étant sans l'intervention d'un ensemble p). Le système

$$\{s\} = \{S_i \ (i = 1, \ldots, \nu = \nu_\xi), \quad S_{k,r} \ (k = 1, \ldots, \nu';\ r = 1, \ldots, m_k)\}$$

fini de sphères disjointes, contenues dans σ^0, satisfait à la condition $M\{s\} < \xi$. Il s'ensuit que [(1°), (4°), (2°), (3°)] :

$$(5^0) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Psi\{s\} = \sum_{i=1}^{\nu}\Psi(S_i) + \sum_{k=1}^{\nu'}\sum_{r=1}^{m_k}\Psi(S_{k,r}) > \varepsilon\sum_i\Phi(S_i) - \varepsilon\frac{\eta}{4} > \varepsilon\frac{\eta}{4} > 0; \\ &\Phi\left(\sigma^0 - \sum S_i - \sum_{k,r} S_{k\,r}\right) = \Phi\left(\sigma^0 - \sum S_i - \sum_k S'_k\right) \\ &\qquad\qquad + \Phi\left(\sum_k\left(S'_k - \sum_r S_{k,r}\right)\right) < \frac{\xi}{2} \\ &\qquad\qquad + \sum_{k=1}^{\nu'}\xi 2^{-k-1} < \xi. \end{aligned} \right.$$

En laissant $\xi \to 0$, on conclut que $\overline{\int_\sigma^s} \Psi > 0$; *cette contradiction établit le théorème.*

(14.2) *Soient* H $(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s)$ *épais et* p *un ensemble fermé,* $p(\mathrm{H})^0 \neq 0$. *Si l'intégrale* $\int^s \Psi$ (rel. à p) *existe dans* H *et si* $\int^s \Psi$ (rel. à p) *est s. a.* (dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$) *relativement à* p *pour toute sphère dans* H, *alors sur une plénitude de* H :

$$\overline{\mathrm{D}}^s \Psi(x) = \overline{\mathrm{D}}_x^s \int^s \Psi \quad (\text{rel. à } p), \qquad \underline{\mathrm{D}}^s \Psi(x) = \underline{\mathrm{D}}_x^s \int^s \Psi \quad (\text{rel. à } p).$$

Si la première formule est en défaut, on aura, par exemple,

$$(1_0) \quad \overline{\mathrm{D}}^s \Psi(x) > \overline{\mathrm{D}}_x^s \int^s \Psi + \varepsilon \quad \text{sur } e\ (\subset \mathrm{H}), \qquad \text{avec} \quad \Phi(e) = \eta > 0.$$

On peut supposer e contenu dans l'intérieur σ^0 d'une sphère $\sigma \subset \mathrm{H}$. A tout x, $\in e$, il correspond une suite de sphères $s_j(x)$, $\subset \sigma^0$, de centre x, telles que

$$\Phi(s_j(x)) \to 0, \qquad \alpha_j = \frac{\Psi(s_j(x))}{\Phi(s_j(x))} > \beta_j + \varepsilon = \left[\int_{s_j(x)}^s \Psi\right] \Phi^{-1}(s_j(x)) + \varepsilon;$$

si $p\sigma^0 \neq 0$ *et si un* x *sur* e *est étranger à* p, *nous prenons les* $\Phi(s_j(x))$ $(j = 1, 2, \ldots)$ *suffisamment petits de sorte que*

$$s_j(x) \subset \sigma^0 - p\sigma^0 \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Selon (13.1) la famille $s_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, x$ parcourant $e)$ contient un nombre fini de sphères disjointes, $\mathrm{S}_j = \mathrm{S}_j(x_j)$, de centres x_j sur e, $\mathrm{S}_j \subset \sigma^0$ $(j = 1, \ldots, m)$, telles que $p\mathrm{S}_j = 0$ lorsque x_j est étranger à p, et $\left(\text{avec } 0 < \xi < \frac{\eta}{2}\right)$:

$$(2_0) \quad \Phi\left(\sum_1^m \mathrm{S}_j\right) > \frac{\eta}{2}, \qquad \mathrm{M}\{\mathrm{S}_j\} < \xi, \qquad \Psi(\mathrm{S}_j) > \int_{\mathrm{S}_j}^s \Psi + \varepsilon\Phi(\mathrm{S}_j).$$

Dans l'ensemble ouvert $\sigma^0 - \sum \mathrm{S}_j$ il se trouve des sphères $\mathrm{S}'_i = \mathrm{S}_i(x'_i)$ de centres x'_i $(i = 1, \ldots, m')$, disjoints, de sorte que :

$$(3_0) \quad \mathrm{M}\{\mathrm{S}'_i\} < \xi, \qquad \Phi\left(\sigma - \sum \mathrm{S}_i - \sum \mathrm{S}'_i\right) < \frac{\xi}{2} \qquad [p\,\mathrm{S}'_i = 0 \text{ si } x'_i \text{ est étranger à } p].$$

Puisque l'intégrale $\int_{S'_k}^{s} \Psi$ (rel. à p) existe, il y a des sphères $S_{k,\nu}$ ($\nu = 1, \ldots, \nu'_k$) disjointes,

$$S_{k,\nu} \subset (S'_k)^0, \qquad p\,S_{k,\nu} = 0$$

si le centre de $S_{k,\nu}$ est étranger à p, telles que

$$(4_0) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} M\{S_{k,\nu}\} < \xi, & \Phi\left(S'_k - \sum_\nu S_{k,\nu}\right) < \xi 2^{-k-1}, \\ \sum_\nu \Psi(S_{k,\nu}) = \int_{S'_k}^{s} \Psi + \delta_k \dfrac{\varepsilon\eta}{4m'} & \text{où } |\delta_k| < 1. \end{array} \right.$$

Soit $\{s\}$ le système de sphères

$$S_j \quad (j = 1, \ldots, m), \qquad S_{k,\nu} \quad (k = 1, \ldots, m'; \nu = 1, \ldots, \nu_k);$$

on a $M\{s\} < \xi$, toute s dont le centre est étranger à p étant disjointe de p, et [(2_0), (4_0)] :

$$\begin{aligned} \Psi\{s\} = \sum_j \Psi(S_j) + \sum_{k=1}^{m'} \left(\sum_\nu \Psi(S_{k,\nu})\right) &> \left[\int_a^s \Psi + \varepsilon \sum \Phi(S_j)\right] \\ &+ \left[\int_{a'}^{s} \Psi + \delta \frac{\varepsilon\eta}{4}\right] \quad (\text{avec } |\delta| < 1) > \int_{a+a'}^{s} \Psi + \frac{\varepsilon\eta}{4}, \\ a = \sum S_j, &\qquad a' = \sum S'_k; \end{aligned}$$

en vertu de (3_0), (4_0) et en procédant comme dans (5^0), il vient que la mesure de $\sigma - \sum S_j - \sum\sum S_{k,\nu}$ est inférieure à ξ. $\int_\sigma^s \Psi$ (rel. à p) existe; donc, en laissant $\xi \to 0$, il s'ensuit que

$$(5_0) \qquad \lim \Psi\{s\} = \int_\sigma^s \Psi \geqq \lim \int_{a+a'}^{s} \Psi + \frac{\varepsilon\eta}{4}.$$

Or, selon l'hypothèse dans (14.2), $\int^s \Psi$ (rel. à p) est s. a. (dans $\mathfrak{M}^s$) relativement à p; par suite, en tenant compte de (3_0) et de la seconde relation (2_0), on trouve que la limite au troisième membre de (5_0) vaut $\int_\sigma^s \Psi$, e. g.

$$\int_\sigma^s \Psi \geqq \int_\sigma^s \Psi + \frac{\varepsilon\eta}{4};$$

cette impossibilité mène à *la première conclusion dans* (14.2). *Le reste de* (14.2) *se démontre de la même manière.*

Relativement à l'additivité de l'intégrale $\int^s \Psi$ on a l'énoncé suivant.

(14.3) Si $\int^s \Psi$ (avec ou sans l'intervention d'un ensemble p) existe dans $\mathfrak{M}^s$ sur un H de $\mathfrak{M}^s$, alors $\int^s \Psi$ est additive dans $\mathfrak{M}^s$ sur H.

Si r_1, r_2 disjoints sont dans $\mathfrak{M}^s$ et sont contenus dans H, posons $r = r_1 + r_2$. L'ensemble p, qui peut être vide, étant le même pour toutes les intégrales $\int^s$ envisagées, soient

$$s_i \quad (i = 1, \ldots, \nu_1), \qquad \sigma_j \quad (j = 1, \ldots, \nu_2)$$

des sphères disjointes,

$$s_i \subset (r_1)^0, \qquad \sigma_j \subset (r_2)^0, \qquad \mathrm{M}\{s_i\} < \varepsilon, \qquad \mathrm{M}\{\sigma_j\} < \varepsilon,$$
$$\Phi\left(r_1 - \sum s_i\right) < \varepsilon, \qquad \Phi\left(r_2 - \sum \sigma_j\right) < \varepsilon,$$

toute sphère dont le centre est étranger à p étant disjointe de p. Le système s_i, σ_j satisfait, relativement à r et à p, les conditions (13.7, 7 *a*), avec 2ε pour ε; donc, en prenant $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}$ de $\sum \Psi(s_i) + \sum \Psi(\sigma_i)$ on obtient

$$\int_r^s \Psi = \int_{r_1}^s \Psi + \int_{r_2}^s \Psi,$$

ce qui est la conclusion dans (14.3).

THÉORÈME 14.4. — *Si f est totalisable-*(S) *sur un* H *de* $\mathfrak{M}^s$, *on aura*

$$\mathrm{D}_x^s\left[(\mathrm{S})\int f\,d\Phi\right] = f(x)$$

sur une plénitude de H.

On peut supposer $\mathrm{H} \in \mathfrak{M}_0^s$ (donc ouvert). La fonction

$$\Psi(r) = (\mathrm{S})\int_r f\,d\Phi$$

est définie pour tout r (de $\mathfrak{M}^s$) $\subset$ H. Désignons par $\mathfrak{N}$ la sous-famille de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$ comprenant tous les $r(\in\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s)$, $\subset$ H, tels que $D^s\Psi(x) = f(x)$ sur une plénitude de r. $\mathfrak{N}$ remplit (13.6, 3_0). Soit un

$$r(\in\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s)\subset \mathrm{H}, \qquad r=\sum_1^\nu q_i+e, \qquad e\in(^*), \qquad q_i\in\mathfrak{N},$$

les q_i étant disjoints; e étant mince, tandis que $D^s\Psi(x) = f(x)$ sur une plénitude de q_i ($i = 1, \ldots, \nu$), il en résulte que $r\in\mathfrak{N}$; ainsi (13.6, 1_0) est vérifiée. Supposons que r^n (de $\mathfrak{N}$) $\uparrow r$ (de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$); alors, $D^s\Psi(x)$ valant $f(x)$ sur une plénitude de r^n ($n = 1, 2, \ldots$), il s'ensuit que $r\in\mathfrak{N}$, e. g. (13.6, 2_0) a lieu. Envisageons une famille $\mathfrak{N}_1$, $\subset\mathfrak{N}$, d'ensembles ne couvrant pas H. Alors $p=\mathrm{H}-\sum(\mathfrak{N}_1)\rho$ sera non vide et fermé dans H. Si x_0 est un point isolé-s de p, il existe un ρ_0 de $\mathfrak{M}^s$, tel que $\rho_0\subset\mathrm{H}$, $\rho_0\ni x_0$, $\rho_0 p\in(^*)$ (13.5);

$$\Phi(\rho_0 p)=0 \qquad \text{et} \qquad \rho_0-\rho_0 p\subset\sum(\mathfrak{N}_1)\rho;$$

d'après la séparabilité, une infinité dénombrable d'ensembles de $\mathfrak{N}_1$, sur une plénitude de chacun desquels $D^s\Psi = f$, couvre $\rho_0 - \rho_0 p$; donc $D^s\Psi = f$ sur une plénitude de $\rho_0 - \rho_0 p$, e. g. de ρ_0, d'où $\rho_0\in\mathfrak{N}$, ce qui montre que (dans le cas considéré) *un ensemble de* $\mathfrak{N}$ *est non couvert par* $\mathfrak{N}_1$. Admettons maintenant que p est parfait-s dans H. A cause de (13.10, 2°), on peut trouver un r' de $\mathfrak{M}^s$, $r'\subset\mathrm{H}$, tel que $pr'\neq 0$ et

$$\text{(II)} \qquad \int_{r_1}^{s}\Psi_{(p)}\ (\text{rel. à } p)=\int_{r_1 p} f\,d\Phi \qquad \text{pour tout } r_1\ (\text{de } \widetilde{\mathfrak{M}}_s)\subset r',$$

donc

$$\text{(II')} \quad \int_{r_1}^{s}\Psi_{(p)}\ (\text{rel. à } p)=\int_{r_1} f_p\,d\Phi, \quad \text{où } f_p(x)=f(x) \text{ sur } p \text{ et } 0 \text{ sur } \mathrm{H}-p;$$

$$(1_0) \qquad \int_{r_1}^{s}\Psi_{(p)}\ (\text{rel. à } p)=\lim_{\varepsilon}\sum_{s_j p\neq 0}\Psi(s_j),$$

ici $\Psi_{(p)}(\sigma) = \Psi(\sigma)$, si le centre de la sphère σ est sur p, $\Psi_{(p)}(\sigma) = 0$ au cas contraire; les s_j en nombre fini étant des sphères fermées disjointes, $\subset(r_1)^0$ (si r_1 est épais),

$$\mathrm{M}\{s_j\}<\varepsilon, \qquad \Phi\Big(r_1-\sum s_j\Big)<\varepsilon,$$

tandis que $s_j p = 0$ lorsque le centre de s_j est étranger à p. On peut écrire

$$(2_0) \qquad \int_{r_1}^{s} \Psi_{(p)} \quad (\text{rel. à } p) = \lim_{\varepsilon} \sum \Psi_{(p)}(s_j).$$

En tenant compte de la remarque au début de la section actuelle, l'énoncé (8.6 *b*) (pour la dérivée D^s) entraîne, d'après (II′), ceci :

$$(3_0) \qquad \overline{D}_x^s \int^{s} \Psi_{(p)} \quad (\text{rel. à } p) = \underline{D}_x^s \int^{s} \ldots = D_x^s \int^{s} \ldots = f_p(x)$$

sur une plénitude de r'. En raison de (II′) $\int^{s} \Psi_{(p)}$ (rel. à p) vaut l'intégrale lebesguienne de $f_p\, d\Phi$ sur tout r_1 (de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s) \subset r'$, tandis que cette dernière jouit de la propriété de s. a. relativement à tout ensemble fermé, donc relativement à p; conséquemment $\int^{s} \Psi_{(p)}$ (rel. à p) est s. a. relativement à p dans r' (de $\mathfrak{M}^s$), l'énoncé (14.2) (pour r' et $\Psi_{(p)}$) s'applique, donc (3_0) : $D^s \Psi_{(p)}(x) = f_p(x)$ sur une plénitude η de r'. Il s'ensuit que $D^s \Psi_{(p)}(x) = f(x)$ *sur la plénitude* $\eta r' p$ *de* $r' p$. Pour x sur $\eta r' p$ on a $\Psi_{(p)}(\sigma) = \Psi(\sigma)$, si σ est une sphère de centre x, donc

$$(4_0) \qquad D^s \Psi(x) = f(x) \qquad \text{sur} \quad \eta r' p.$$

L'ensemble $r' - r'p$ est couvert par une infinité dénombrable d'ensembles de $\mathfrak{N}_1$, donc de $\mathfrak{N}$, par suite $D^s \Psi(x)$ *vaut* $f(x)$ *sur une plénitude de* $r' - r'p$. En raison de (4_0), $r' \in \mathfrak{N}$; r' est non couvert par $\mathfrak{N}_1$, car r' est joint à p. Ainsi, dans les deux cas, un ensemble de $\mathfrak{N}$ est non couvert par $\mathfrak{N}_1$; $\mathfrak{N}$ remplit (13.6, 4_0). Vu le lemme 13.6, $H \in \mathfrak{N}$; *le théorème est établi.*

Définition 14.5. — Soit Ψ définie pour toutes les sphères dans un H épais de $\mathfrak{M}^s$; E étant un ensemble contenu dans $(H)^0$, on dira que Ψ est à *variation bornée au sens sphérique*, $\Psi \in V^s.B.$, *sur* E *dans* H, s'il existe un $\eta > 0$ tel que, si

(1°) les $S_j = S_j(x_j), \subset (H)^0$ $(j = 1, \ldots \nu)$, sont des sphères disjointes de centres x_j sur E et si $M\{S_j\} < \eta$, il s'ensuivra que

$$(2^0) \qquad \sum |\Psi(S_j)| \leqq B < \infty.$$

Ψ est *absolument continue au sens sphérique* (symétrique), A. C^s., *sur* E *dans* H, si à tout $\varepsilon > 0$ il correspond un $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que

(3°) $$S_j = S_j(x_j), \quad \subset (H)^0 \quad (j = 1, \ldots, \nu)$$

étant des sphères disjointes, avec $x_j \in E$ et $\sum \Phi(S_j) < \eta(\varepsilon)$, il en résulte que

(4°) $$\left| \sum \Psi(S_j) \right| < \varepsilon.$$

On dira que Ψ est *absolument continue inférieurement* [supérieurement] *au sens sphérique*, $\Psi \in$ A. C^s. I. [$\Psi \in$ A. C^s. S.], sur E dans H, si (4°) est remplacée par

$$\sum \Psi(S_j) > -\varepsilon \left[\sum \Psi(S_j) < \varepsilon \right].$$

Les caractères que nous venons de spécifier sont proches des caractères ainsi désignés dans la définition 11.11; en effet :

(14.5 *a*) A. C^s. (déf. 14.5) *est identique avec* A. C^s. (déf. 11.11), *si* F *est remplacé par* (H)^0 $(\in \mathfrak{M}_0^s)$;

(14.5 *b*) avec (H)^0 $(H \in \mathfrak{M}^s)$ pour F, le caractère V^s. B. (déf. 14.5) entraîne V^s. B. (déf. 11.11); V^s. B. (déf. 11.11) *devient* V^s. B. (déf. 14.5), *si l'on ajoute la condition* $M\{S_s\} < \eta$.

La définition du caractère A. C^s. n'est pas modifiée si l'on y remplace $\left| \sum \Psi(S_j) \right|$ par $\sum | \Psi(S_j) |$.

(14.6) *Si* $\Psi \in$ A. C^s. (A. C^s. I.) *sur* E, *dans un* H *de* $\mathfrak{M}^s$, *on aura* $\Psi \in$ V^s. B. (V^s. B. I.) *sur* E, *dans* H (ici la propriété V^s. B. I. de la variation bornée inférieure au sens sphérique a une signification évidente).

L'énoncé (14.6) est vérifié en tenant compte des développements qui établissent le théorème 11.18 (avec des adaptations appropriées).

THÉORÈME 14.7. — *Soit* $\Psi \in$ V^s. B. *sur* (H)^0 *dans un* H *épais de* $\mathfrak{M}^s$. *Alors les dérivés extrêmes* $\overline{D}^s$, $\underline{D}^s$ *et tout dérivé intermédiaire* D'^s *de* Ψ *sont sommables-*Φ *sur* H.

La démonstration de cette constatation est proche de celle de l'énoncé (9.4). En posant $f(x) = D'^s \Psi(x)$, on obtient

$$f(x) = \lim_j \frac{\Psi(s_j(x))}{\Phi(s_j(x))},$$

où les $s_j(x)$ sont des sphères de centre x et

$$\Phi(s_j(x)) \to 0 \qquad (j \to \infty).$$

Moyennant (13.1) on établit que $f(x)$ est finie sur une plénitude de H. La preuve du théorème est achevée en s'appuyant sur le théorème de Lusin (9.2) (adapté au cas actuel) et sur (13.1). Nous faisons usage du fait que la « continuité » de $f(x)$ sur un ensemble fermé $h\ (\subset (\mathrm{H})^0)$ signifie qu'il existe une fonction $\eta(x, \varepsilon) > 0$, telle que les relations $x \in h$, $x \in s$ (sphère), $\Phi(s) < \eta(x, \varepsilon)$ entraînent osc. $(sh) f < \varepsilon$, où osc. $(sh) f = \max(x', x''$ sur $sh) \mid f(x') - f(x'') \mid$. On procède en suivant avec des modifications convenables, les développements qui interviennent dans la démonstration de (9.4).

THÉORÈME 14.8. — *Soient* H *épais de* $\mathfrak{M}^s$, $\Psi \in$ A. C^s. I. *sur* $(\mathrm{H})^0$, *dans* H, *et* p *un ensemble fermé,* $(\mathrm{H})^0\, p \neq 0$. *Alors*

$$\overline{\int_{\mathrm{H}}}^{s} \Psi \geqq \int_{\mathrm{H}} \overline{\mathrm{D}}^s \Psi(x)\, d\Phi(x), \tag{14.8 a}$$

$$\underline{\int_{\mathrm{H}}}^{s} \Psi \geqq \int_{\mathrm{H}} \underline{\mathrm{D}}^s \Psi(x)\, d\Phi(x), \tag{14.8 b}$$

(*dans l'hypothèse* 14.11 *plus bas*), *les intégrales aux premiers membres étant relativement à* p. *Si* $\Psi \in$ A. C^s. *sur* $(\mathrm{H})^0$, *dans* H, *on aura* (14.8 *a*, 8 *b*) *avec le signe d'égalité.*

Nous disons que $s = \{ s_i \}$ $(i = 1, \ldots \nu)$ est un *système fini de sphères* dans un H $(\in \mathfrak{M}^s)$, si les s_i sont des sphères fermées, disjointes, $s_i \subset (\mathrm{H})^0$. Pour un tel système on écrira $\Psi(s) = \sum \Psi(s_i)$, et

$$\Psi^-(s) = \min \Psi(\sigma), \qquad \Psi^+(s) = \max \Psi(\sigma), \tag{14.9}$$

où σ désigne les systèmes finis de sphères, tout système σ étant contenu dans s, e. g. $\sigma = \{ \sigma_j \}$ $(j = 1, 2, \ldots \nu)$, les sphères σ_j étant disjointes, toute σ_j contenue dans l'intérieur $(s_k)^0$ d'une s_k; de plus, les nombres $\Psi^-(s)$, $\Psi^+(s)$ *sont définis relativement à* p au sens que les systèmes σ intervenant dans (14.9) sont assujettis à la condition additionnelle, à savoir :

(14.9′) *toute* σ_j (*de* σ) *dont le centre est étranger à* p *est disjointe de* p.

Nous notons que

$$\Psi^+(s) \geqq 0 \geqq \Psi^-(s); \qquad \Psi^+(s) \geqq \Psi(s) = \sum_i \Psi(s_i) \geqq \Psi^-(s); \tag{14.9 a}$$

$$\overline{\mathrm{D}}^s \Psi^+(x) \geqq \mathrm{D}^s \Psi(x) = f(x) \geqq \underline{\mathrm{D}}^s \Psi^-(x)$$

[aux points où $\mathrm{D}'^s \Psi(x)$ existe]. Il existe un $\eta(\varepsilon) > 0$ de sorte que $\Psi(\sigma) > -\varepsilon$, dès que σ est un système fini de sphères, $\sigma \subset (\mathrm{H})^0$, avec $\Phi(\sigma) < \eta(\varepsilon)$; donc $\Psi^{-}(s)$ (défini relativement à p) $\geqq -\varepsilon$ et $|\Psi^{-}(s)| \leqq \varepsilon$ pour tout système fini s ($\subset (\mathrm{H})^0$) de sphères, telles que $\Phi(s) < \eta(\varepsilon)$; ainsi $\Psi^{-} \in \mathrm{A.\,C}^s$. sur $(\mathrm{H})^0$ dans H, d'où (14.6) : $\Psi^{-} \in \mathrm{V}^s.\mathrm{B}$. sur $(\mathrm{H})^0$ dans H; par là (théorème 14.7) toute dérivée intermédiaire $\mathrm{D}'^s\Psi^{-}$ est sommable sur H, le même étant vrai pour $\underline{\mathrm{D}}^s\Psi^{-}$. Ainsi :

$$\int_{\mathrm{H}}^{s} (\overline{\mathrm{D}}^s \Psi(x) - \underline{\mathrm{D}}^s \Psi^{-}(x))\, d\Phi(x) \geqq \int_{\mathrm{H}}^{s} (\underline{\mathrm{D}}^s \Psi(x) - \underline{\mathrm{D}}^s \Psi^{-}(x))\, d\Phi(x) \geqq 0,$$

où les fonctions à intégrer sont non négatives et les intégrales

$$(14.9\,b) \qquad \int \overline{\mathrm{D}}^s \Psi(x)\, d\Phi(x), \qquad \int \underline{\mathrm{D}}^s \Psi(x)\, d\Phi(x)$$

existent au sens de Lebesgue, *ayant possiblement* (l'une ou l'autre) *la valeur* $+\infty$. Établissons maintenant le résultat suivant :

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathrm{D}}^s \Psi(x) = +\infty \quad \text{sur un ensemble épais } e, \ \subset (\mathrm{H})^0, \\ \qquad \text{entraîne} \quad \overline{\int_{\mathrm{H}}}^{s} \Psi = +\infty \quad (\text{rel. à } p). \end{array} \right.$$

Nous avons remarqué que :

(1_0) $\Psi^{-} \in \mathrm{V}^s.\mathrm{B}$. sur $(\mathrm{H})^0$ dans H; soient η le nombre intervenant dans (14.5, 1°) pour Ψ^{-} et $\mathrm{N} > \frac{2}{\Phi(e)}$, $\mathrm{N} > \frac{1}{\eta}$. Pour $x \in e$, des sphères $s_j(x)$ ($j = 1, 2, \ldots$) de centre x existent, $s_j(x) \subset (\mathrm{H})^0$, telles que

$$(2_0) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(s_j(x)), \ < \frac{1}{\mathrm{N}}, \ \to 0 \quad \text{pour } j \to \infty, \quad \Psi(s_j(x)) \geqq \mathrm{N}\,\Phi(s_j(x)), \\ \qquad s_j(x)\,p = 0 \quad \text{si } x \text{ est étranger à } p. \end{array} \right.$$

De la famille $\{ s_j(x) \}$ ($j = 1, 2, \ldots$, x parcourant e), d'après (13.1), on peut extraire un système fini de sphères disjointes $\mathrm{S}_i = \mathrm{S}_i(x_i)$ (de centres x_i), $\subset (\mathrm{H})^0$, $i = 1, \ldots, \nu$, telles que

$$(3_0) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{M}\{\mathrm{S}_i\} < \frac{1}{\mathrm{N}}, \quad x_i \in e, \quad \Psi(\mathrm{S}_i) \geqq \mathrm{N}\,\Phi(\mathrm{S}_i), \\ \Phi\left(e - e\sum \mathrm{S}_i\right) < \frac{1}{\mathrm{N}}, \quad \mathrm{S}_i \subset (\mathrm{H})^0 - p(\mathrm{H})^0 \quad \text{si } x_i \text{ est étranger à } p. \end{array} \right.$$

Il en découle que

$$\sum \Phi(\mathrm{S}_i) > \frac{1}{2}\Phi(e)$$

et

$$(4_0) \qquad \sum \Psi(S_i) > \frac{1}{2} N \Phi(e).$$

Selon (13.1), dans l'ensemble ouvert $(H)^0 - \sum S_i$ il y a des sphères disjointes σ_j ($j = 1, \ldots, \nu'$), telles que

$$(5_0) \qquad \begin{cases} M\{\sigma_j\} < \frac{1}{N}, \quad \Phi\left(H - \sum S_i - \sum \sigma_j\right) < \frac{1}{N}, \\ \sigma_j \text{ est disjointe de } p \text{ si son centre est étranger à } p. \end{cases}$$

On obtient [(3_0), (5_0), (4_0), (1_0)] :

$$M(\{S_i\} + \{\sigma_j\}) < \frac{1}{N} (< \eta);$$

$$\sum \Psi(S_i) + \sum \Psi(\sigma_j) > \frac{1}{2} N \Phi(e) + \sum \Psi(\sigma_j) \geqq \frac{1}{2} N \Phi(e) - B;$$

toute sphère de centre étranger à p est disjointe de p.

Donc

$$\sum \Psi(S_i) + \sum \Psi(\sigma_j) \to +\infty \qquad \text{pour} \quad N \to +\infty,$$

ce qui entraîne $\int_{H}^{s} \Psi = +\infty$ et *vérifie* (I) [ainsi que (14.8 *a*) au cas considéré].

Démontrons l'énoncé suivant :

(II) $\overline{D}^s \Psi(x) = f(x)$ *fini sur une plénitude de* H *entraîne* (14.8*a*).

Étant donné un $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble e', $\subset (H)^0$, fermé, tel que

$$(1_1) \qquad \Phi(H - e') < \frac{\varepsilon}{2}, \quad f(x) \text{ est continue sur } e'.$$

Posons

$$e_n = \{x \in e';\ |f(x)| \leqq n\} \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

e_n est fermé, $e_n \subset e_{n+1}$ et $e' = \sum e_n$. Pour un $n' = n(\varepsilon)$ on aura

$$(2_1) \quad \Phi(e' - e_{n'}) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |f(x)| \leqq n' (< \infty) \text{ sur } e = e_{n'}, \qquad \Phi(H - e) < \varepsilon.$$

Soient $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, $\eta > 0$; sur e est définie une fonction $\eta(x, \varepsilon_1) > 0$, $\eta(x, \varepsilon_1) \leqq \eta$ ($\eta > 0$ étant arbitraire), telle que

(3_1) osc. $(Se) f < \varepsilon_1$, dès que $S = S(x)$ est une sphère de centre x, $x \in e$, avec $\Phi(S) < \eta(x, \varepsilon_1)$.

A tout $x \in e$ il correspond une suite de sphères $s_j(x)$ de centre x telles que

$$\frac{\Psi(s_j(x))}{\Phi(s_j(x))} \to f(x) \qquad (\text{pour } j \to \infty),$$
$$s_j(x) \subset (\mathrm{H})^0, \qquad \Phi(s_j(x)) \to 0, \qquad \Phi(s_j(x)) < \eta(x, \varepsilon_1).$$

En vertu de (13.1) de la famille $s_j(x)$ ($j = 1, 2, \ldots, x$ décrivant e) on peut choisir un système fini $\{ \mathrm{S}_i \}$ ($i = 1, \ldots, \nu$) de sphères disjointes de sorte que :

$$(4_1) \quad \begin{cases} \mathrm{S}_i \subset (\mathrm{H})^0; \quad \Phi(\mathrm{S}_i) < \eta(x_i, \varepsilon_1), \quad \text{où } x_i, \in e, \text{ est le centre de } \mathrm{S}_i; \\ \mathrm{S}_i p = 0, \quad \text{si } x_i \text{ est étranger à } p; \\ \Phi(e - h) < \frac{\varepsilon_1}{2}, \ \Phi\left(\sum \mathrm{S}_i - h\right) < \frac{\varepsilon_1}{2}, \quad \text{où } h = e \sum \mathrm{S}_i; \end{cases}$$

$$(5_1) \qquad \left| \frac{\Psi(\mathrm{S}_i)}{\Phi(\mathrm{S}_i)} - f(x_i) \right| < \varepsilon_1;$$

$$(6_1) \qquad \text{osc.}\ (\mathrm{S}_i e) f(x) < \varepsilon_1 \quad [\textit{voir}\ (3_1)].$$

Posons $\varphi(x) = \dfrac{\Psi(\mathrm{S}_i)}{\Phi(\mathrm{S}_i)}$ sur S_i ($i = 1, \ldots, \nu$). Si $x \in h$, on aura $x \in \mathrm{S}_k$ pour un k et [(5_1), (6_1)] :

$$(7_1) \qquad |\varphi(x) - f(x)| \leqq |\varphi(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| < 2\varepsilon_1;$$

de plus, pour $x \in q = \sum \mathrm{S}_i$ on aura x sur un S_k et [(5_1), (2_1)] :

$$(8_1) \qquad |\varphi(x)| \leqq |\varphi(x) - f(x_k)| + |f(x_k)| < \varepsilon_1 + n', \qquad n' = n(\varepsilon).$$

Par conséquent [(7_1), (8_1), (4_1), (2_1)] :

$$(9_1) \qquad \left| \sum \Psi(\mathrm{S}_i) - \int_e f\, d\Phi \right| = \left| \int_q \varphi\, d\Phi - \int_e f\, d\Phi \right|$$
$$= \left| \int_h (\varphi - f)\, d\Phi + \int_{q-h} \varphi\, d\Phi - \int_{e-h} f\, d\Phi \right.$$
$$< 2\varepsilon_1 \Phi(\mathrm{H}) + (\varepsilon_1 + n')\frac{\varepsilon_1}{2} + n'\frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad \varepsilon_1 (> 0) \text{ suffisamment petit.}$$

D'après (4_1) et une remarque à la suite de (2_1) $\mathrm{M}\{ \mathrm{S}_i \} < \eta$ (arbitraire). Choisissons des sphères s_j ($j = 1, \ldots, \nu'$) disjointes,

$$s_j \subset (\mathrm{H})^0 - \sum \mathrm{S}_i,$$

en sorte que

$$(10_1)\qquad \begin{cases} M\{s_j\} < \eta, & \Phi\left(H - \sum S_i - \sum s_j\right) < \eta, \\ s_j p = 0 & \text{si le centre de } s_j \text{ est étranger à } p. \end{cases}$$

Prenons $\eta = \eta(\varepsilon)\,(> 0) \to 0$ avec ε. D'après (9_1)

$$\sum \Psi(S_i) + \sum \Psi(s_j) > -\varepsilon + \int_e f\,d\Phi + \sum \Psi^-(s_j).$$

Nous avons déjà remarqué que $\Psi^- \in$ A. C. sur $(H)^0$ dans H; d'autre part $[(2_1), (4_1)]$:

$$\Phi\left(\sum s_j\right)\left[\leqq \Phi\left(H - \sum S_i\right) = \Phi((H-e)+(e-h)-(q-h)) < \varepsilon + \frac{\varepsilon_1}{2}\right] < \frac{3}{2}\varepsilon;$$

donc $\sum \Psi^-(s_j)$ tend vers zéro avec ε. Vu (2_1) $\Phi(H - e) \to 0$ avec ε; en tenant compte de $[(14.9\,b), (4_1), (10_1)]$, on obtient

$$\overline{\int_H^s} \Psi \geqq \underline{\lim_{\varepsilon}} \left[\sum \Psi(S_i) + \sum \Psi(s_j)\right] \geqq \int_H f\,d\Phi, \qquad \text{où } f = \overline{D}_s \Psi,$$

l'intégrale au premier membre étant relativement à p; (II) a été vérifié. Ainsi *l'inégalité* (14.8 *a*) *est démontrée dans tous les cas.*

(14.10) On définit *les dérivées extrêmes* et la *dérivée* (unique) *au sens sphérique général,* $\overline{D}^\sigma$, $\underline{D}^\sigma$, D^σ, d'une fonction Ψ à un point x comme les limites sup., inf., uniques de $\frac{\Psi(\sigma)}{\Phi(\sigma)}$, lorsque σ représente les sphères (fermées) contenant x et de mesure $\to 0$.

Démontrons maintenant (14.8 *b*) *dans l'hypothèse suivante.*

Hypothèse 14.11. — Si $D^s \Psi = +\infty\,(-\infty)$ sur un ensemble épais e, il existe une plénitude e_1 de e, où $D^\sigma \Psi = +\infty\,(-\infty)$. Si $\underline{D}^s \Psi\,(\overline{D}^s \Psi)$ est fini sur un ensemble épais h, on aura

$$\underline{D}^\sigma \Psi = \underline{D}^s \Psi \left(\overline{D}^\sigma \Psi = \overline{D}^s \Psi\right)$$

sur une plénitude de h.

Cette hypothèse peut être exprimée ainsi :

$$\underline{D}^\sigma = \underline{D}\;\left[\overline{D}^\sigma = \overline{D}^s\right]$$

sur une plénitude de l'ensemble où les dérivés envisagés sont définis.

Établissons d'abord la proposition suivante :

(III) $\underline{D}^{\varsigma}\Psi^{\cdot}(x) = +\infty$ *sur un ensemble épais* e, $\subset (\mathrm{H})^0$, *entraîne* $\int_{\mathrm{H}}^{\cdot}\Psi^{\cdot} = +\infty$ (rel. à p).

Sur une plénitude e_1 de e on aura $\mathrm{D}^{\sigma}\Psi^{\cdot} = +\infty$ (hypothèse 14.11). Des systèmes $\{\sigma_{m,\iota}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu_m)$ de sphères existent, pour $m = 1, 2, \ldots$, en sorte que :

(1′) les $\sigma_{m,\iota}$ (m fixe) sont disjointes,

$$\sigma_{m,\iota}\subset(\mathrm{H})^0, \qquad \mathrm{M}\{\sigma_{m,\iota}\} < \frac{1}{m^2}, \qquad \Phi\Big(\mathrm{H}-\sum_{\iota}\sigma_{m,\iota}\Big) < \frac{1}{m^2};$$

(2′) $p\sigma_{m,\iota} = 0$, si le centre de $\sigma_{m,\iota}$ est étranger à p;

$$(3') \qquad \sum_{\iota}\Psi^{\cdot}(\sigma_{m,\iota}) \to \underline{\int_{\mathrm{H}}}^{\cdot}\Psi^{\cdot} \quad (\text{rel. à } p) \qquad \text{pour} \quad m\to\infty.$$

Posons

$$\varphi_m(x) = \frac{\Psi^{\cdot}(\sigma_{m,\iota})}{\Phi(\sigma_{m,\iota})} \quad \text{sur } \sigma_{m,\iota}; \qquad \varphi_m(x) = 0 \quad \text{sur } \mathrm{H}-\sum_{\iota}\sigma_{m,\iota}.$$

Soit λ l'ensemble des points x pour lesquels un nombre fini m_x existe, de sorte que $x\in\sum_{\iota}\sigma_{m,\iota}$ pour tout $m\geqq m_{\iota}$; e. g.

$$\lambda = \underline{\lim}\sum_{\iota}\sigma_{m,\iota} = \sum_{\nu=1}^{\sigma}\prod_{m\geqq\nu}\Big(\sum_{\iota}\sigma_{m,\iota}\Big).$$

Pour tout entier k positif,

$$\Phi(\mathrm{H}-\lambda) \leqq \Phi\Big(\mathrm{H}-\prod_{m\geqq k}\Big(\sum_{\iota}\sigma_{m,\iota}\Big)\Big)$$
$$\leqq \Phi\Big(\sum_{m\geqq k}\Big(\mathrm{H}-\sum_{\iota}\sigma_{m,\iota}\Big)\Big) < \sum_{m\geqq k}\frac{1}{m^2} < \frac{c}{k}$$

(une constante $c > 0$). Donc $\Phi(\mathrm{H}-\lambda) = 0$ et $e' = \lambda e_1$ est une plénitude de e_1. Si $x\in e'$, on aura

$$x\in\sum_{\iota}\sigma_{m,\iota}(m\geqq m_x),$$

donc

$$x\in\sigma_{m,\iota'} \quad (i' = i(x, m)) = s_{x,m}$$

pour tout $m \geqq m_x$;

$$\Phi(s_{x,m}) < \frac{1}{m^2}; \qquad \varphi_m(x) = \frac{\Psi(s_{x\,m})}{\Phi(s_{x,m})} \quad (m \geqq m_x);$$

en tant que $D^\sigma \Psi = +\infty$ sur e_1, on obtient $\lim\limits_m \varphi_m(x) = +\infty$ sur e'. Moyennant un théorème de Egoroff on conclut qu'il existe un ensemble e^0, $\subset e'$, épais tel que $\varphi_m(x) \to +\infty$ uniformément sur e^0; à tout $n > 0$, il correspond un $m(n)$ fini et indépendant de x tel que $\varphi_m(x) \geqq n$ sur e^0 pour tout entier $m > m(n)$. Avec les $\sigma_{m,\iota}$ [(1')-(3')] formons les sommes

$$\alpha'_m = \sum_\iota{}' \sigma_{m,\iota} \quad (\sigma_{m,\iota} e^0 \neq 0), \qquad \alpha''_m = \sum_\iota{}'' \sigma_{m\,\iota} \quad (\sigma_{m\,\iota} e^0 = 0).$$

On obtient

$$(4') \qquad \sum_\iota \Psi(\sigma_{m\,\iota}) = \int_H \varphi_m \, d\Phi = \int_{\alpha'_m} \varphi_m \, d\Phi + \sum_\iota{}'' \Psi(\sigma_{m\,\iota}).$$

Si $x \in \alpha'_m$, $x \in \sigma_{m,\iota'}$ (quelque i') avec $\sigma_{m,\iota'}$ ayant un point x' en commun avec e^0; alors

$$\varphi(x) = \frac{\Psi(\sigma_{m\,\iota})}{\Phi(\sigma_{m,\iota'})} = \varphi(x') \geqq n, \qquad \text{des que} \quad m > m(n);$$

ainsi

$$(5') \quad \int_{\alpha'_m} \varphi_m(x) \, d\Phi \geqq n\Phi(\alpha'_m) \geqq n(\Phi(e^0) - \omega(m)), \qquad \text{dès que} \quad m > m(n),$$

où $\omega(m)$ ($\geqq 0$) $\to 0$ pour $m \to \infty$. En effet,

$$\alpha'_m = \sum_\iota \sigma_{m,\iota} - \sum_\iota{}'' \sigma_{m,\iota}, \qquad \Phi\left(\sum_\iota{}'' \sigma_{m,\iota}\right) \leqq \Phi(H - e^0)$$

et [vu (1')]

$$\Phi\left(\sum_\iota \sigma_{m,\iota}\right) = \Phi(H) - \omega(m).$$

En tant que $\Psi \in$ A. C'. I. (déf. 14.5) sur $(H)^0$, dans H, on conclut (14.6) que pour une constante β (finie) on a $\sum'' \Psi(\sigma_{m,\iota}) \geqq -B$. Donc (4') et (5') :

$$\sum_\iota \Psi(\sigma_{m,\iota}) \geqq n(\Phi(e^0) - \omega(m)) - B \qquad [m \geqq m(n)].$$

En tenant compte de (3′) *on déduit la conclusion dans* (III). Il reste à vérifier le fait suivant :

(IV) $\underline{D}^{\flat}\,\Psi(x) = f(x)$ *fini sur une plénitude h de* H *implique* (14.8 *b*).

Envisageons des sphères $\sigma_{m,\iota}$ d'accord avec [(1′)-(3′)] à la suite de (III); les $\varphi_m(x)$ sont encore définies comme plus haut. Selon l'hypothèse 14.11, on a

$$(6') \qquad \underline{D}^{\sigma}\Psi(x) = \underline{D}^{\flat}\Psi(x) = f(x)$$

(fini) sur une plénitude h^0 de h (donc de H).

Posons

$$e_m = \{ x \in h^0; \quad \varphi_m(x) > f(x) - \varepsilon \}.$$

L'ensemble λ (introduit plus haut) est une plénitude de H. On obtient $\underline{\lim}\, \varphi_m(x) \geqq f(x)$ sur λh^0 (une plénitude de H), parce qu'il existe un m_ι (fini) tel que, si $x \in \lambda$, on aura

$$\varphi_m(x) = \frac{\Psi(s_{\iota,m})}{\Phi(s_{\iota,m})} \quad (m \geqq m_\iota)$$

avec $\Phi(s_{\iota,m}) \to 0$ et $s_{\iota,m} \ni x$ (*voir* plus haut), tandis que $\underline{D}^{\sigma}\,\Psi(x) = f(x)$ sur h^0. Il existe une fonction $m(x, \varepsilon)$ finie, telle que pour $x \in \lambda h^0$ on a

$$\varphi_m(x) > f(x) - \varepsilon \qquad [\text{tout } m \geqq m(x, \varepsilon)].$$

Tout x de λh^0 appartient à λe_m $(m \geqq m(x, \varepsilon))$; donc $\lambda h^0 \subset \lambda \underline{\lim}_{k}\, e_k$; il vient

$$\Phi(h^0) = \Phi(\lambda h^0) \geqq \Phi(\lambda e_m) \geqq \Phi\Big(\lambda \prod_{k \geqq m} e_k\Big) \uparrow \Phi\Big(\lambda \underline{\lim}_{k}\, e_k\Big) \qquad (\text{pour } m \to \infty),$$

d'où

$$\Phi\Big(\lambda \underline{\lim}_{k}\, e_k\Big) = \Phi(h^0)$$

et

$$(7') \qquad \lim_{m} \Phi(\lambda e_m) = \Phi(h^0) = \Phi(\mathrm{H}) \qquad [\Phi(s e_m) = \Phi(e_m)].$$

Avec $\varepsilon_m \geqq 0$, désignons par $\sigma_{m,p}$, $\sigma_{m,q}$ les sphères $\sigma_{m,\iota}$ telles que

$$(8') \qquad \Phi(e_m \sigma_{m,p}) > (1 - \varepsilon_m)\,\Phi(\sigma_{m,p}), \qquad \Phi(e_m \sigma_{m,q}) \leqq (1 - \varepsilon_m)\,\Phi(\sigma_{m,q}).$$

Par conséquent,

$$\varepsilon_m \Phi\Big(\sum_{q}{}'' \sigma_{m,q}\Big) \leqq \Phi\Big(\sum{}'' \sigma_{m,q} - e_m \sum{}'' \sigma_{m,q}\Big) \leqq \Phi(\mathrm{H} - e_m).$$

En prenant $\varepsilon_m^2 = \frac{\Phi(H - e_m)}{\Phi(H)}$, on note (7′) que $\varepsilon_m \leqq 1$, $\varepsilon_m \to 0$ et que $\Phi\left(\sum_q'' \sigma_{m,q}\right) \to 0$; donc [$\Psi$ étant A. C$^{\text{s}}$. I. sur $(H)^0$ dans H au sens de la définition 14.5] :

$$\varliminf_m \Psi\left(\sum_q'' \sigma_{m,q}\right) \geqq 0. \tag{9′}$$

Selon (8′) on a

$$\frac{\Phi(\nu_{m,p})}{\Phi(\sigma_{m,p})} = \theta_m \varepsilon_m \quad (0 < \theta_m < 1), \qquad \text{où} \quad \nu_{m,p} = \sigma_{m,p} - e_m \sigma_{m,p};$$

de là

$$\Phi(\sigma_{m,p}) = \frac{\Phi(e_m \sigma_{m,p})}{(1 - \theta_m \varepsilon_m)} \qquad \text{et} \qquad \int_{\sigma_{m,p}} \varphi_m \, d\Phi = (1 - \theta_m \varepsilon_m)^{-1} \int_{e_m \sigma_{m,p}} \varphi_m \, d\Phi$$

$$\left[\text{car} \int_{e\sigma_{m,p}} \varphi_m \, d\Phi = \frac{\Psi(\sigma_{m,p})\,\Phi(e\sigma_{m,p})}{\Phi(\sigma_{m,p})}\right].$$

Conséquemment [vu la définition de e_m et en posant $f = f^+ + f^-$ avec $f^+ \geqq 0$, $f^- \leqq 0$],

$$\int_{\sigma_{m,p}} \varphi_m \, d\Phi \geqq \frac{1}{1 - \theta_m \varepsilon_m} \int_{e_m \sigma_{m,p}} f \, d\Phi - \frac{\varepsilon}{1 - \theta_m \varepsilon_m} \Phi(e_m \sigma_{m,p}),$$

$$\int_{e_m \sigma_{m,p}} f^+ \, d\Phi + \frac{1}{1 - \varepsilon_m} \int_{e_m \sigma_{m,p}} f^- \, d\Phi - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon_m} \Phi(e_m \sigma_{m,p}).$$

Par suite, en posant $\lambda_m = \sum_p \sigma_{m,p}$, on obtient

$$\sum_p \Psi(\sigma_{m,p}) > \int_{e_m \lambda_m} f^+ \, d\Phi + \frac{1}{1 - \varepsilon_m} \int_{e_m \lambda_m} f^- \, d\Phi - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon_m} \Phi(e_m \lambda_m).$$

D'après (1′) et puisque $\Phi\left(\sum'' \sigma_{m,q}\right) \to 0$, on a $\Phi(\lambda_m) \to \Phi(H)$; donc [(7′), (9′), (3′)] :

$$\varliminf_m \sum_p' \Psi(\sigma_{m,p}) \geqq \int_H f \, d\Phi - \varepsilon \Phi(H);$$

$$\underline{\int}_H \Psi \quad (\text{rel. à } p) = \lim_m \sum_\iota \Psi(\sigma_{m,\iota}) \geqq \varliminf_m \sum_p' \Psi(\sigma_{m,p})$$

$$+ \varliminf_m \sum_q'' \Psi(\sigma_{m,q}) \geqq \int_H f \, d\Phi - \varepsilon \Phi(H) \qquad (\text{où } f = \underline{D}^s \Psi(x)).$$

En laissant $\varepsilon \to 0$ *on achève la démonstration de* (14.8 *b*) *et du théorème* 14.8.

15. **Quelques caractérisations de la totale-(S) et classification de fonctions (S)-totalisables.** — Ψ étant définie pour les sphères dans un H épais de $\mathfrak{M}^s$, nous dirons que :

(15.1) $\Psi \in$ A. C^s. G., *absolument continue* (au sens sphérique symétrique) *généralisée sur* H [e. g. sur $(H)^0$ dans H], si à tout p ($p\,(H)^0 \neq 0$) parfait-s et à tout r (de $\mathfrak{M}_0^s$), $\subset (H)^0$, joint à p, il correspond un r_1 (de $\mathfrak{M}^s$), $\subset r$, tel que :

(15.1 *a*) $r_1 p \neq 0$ et $\Psi_{(p)}$ (13.2) $\in$ A. C^s. (déf. 14.5) sur r_1 dans r_1.

On note que (15.1 *a*) veut dire qu'il existe un $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que : (1_0) sphères fermées $S_j = S_j(x_j)$ (de centres x_j) disjointes, $\subset r_1$, $\sum \Phi(S_j) < \eta(\varepsilon)$ implique

$$\left|\sum \Psi_{(p)}(S_j)\right| = \left|\sum (x_j \in r_1 p)\, \Psi(S_j)\right| < \varepsilon;$$

e. g. (15.1 *a*) équivaut à $\Psi \in$ A. C^s. (déf. 14.5) *sur* $r_1 p$ *dans* r_1.

L'analogue du théorème (9.9) pour le cas actuel est comme il suit.

Théorème 15.2. — *Si* $\Psi \in$ A. C^s. G. (15.1) *sur un* H *épais de* $\mathfrak{M}^s$, *on aura* :

(1^0) $(H)^0 = \sum_1^\infty \lambda(n)$ [$\lambda(n)$ *fermés*] *en sorte que pour tout* $\lambda(n)$ *on ait une des deux alternatives* : *ou bien* $\lambda(n) \in (*)$ (13.5), *ou bien* $\Psi_{(\lambda(n))} \in$ A. C^s. *sur* H [*e. g. sur* $(H)^0$ *dans* $(H)^0$]. *Réciproquement* (1^0) *entraîne* $\Psi \in$ A. C^s. G. *sur* H.

On pourrait démontrer cet énoncé en employant essentiellement la méthode qui intervient dans la preuve du théorème 12.2 (la définition du caractère A. C^s. G. y étant différente). Pourtant nous procédons comme dans [(R); § 14].

Démonstration de la première partie du théorème. — Posons $e_0 = F\,(= \Delta(\mathcal{F}))$.

A partir de $e_0 = F\,(= \Delta(\mathcal{F}))$ on forme une suite transfinie d'ensembles fermés e_α ($e_0 \supset e_1 \supset \ldots$), comme il suit. Si α est de type 1, e. g. si α est de la première espèce et $e_{\alpha-1}$ a un point x' isolé-s, soit $r_{\alpha-1}$ un ensemble de $\mathfrak{M}^s$, contenant x' tel que $\bar{r}_{\alpha-1} e_{\alpha-1} \subset g_{\alpha-1}$, où $g_{\alpha-1}$ (fermé) est la réunion d'un nombre fini de frontières d'ensembles de $\mathfrak{M}^s$; $e_\alpha = e_{\alpha-1} - r_{\alpha-1} e_{\alpha-1}$. Si α est de type 2, e. g. si α est de la première espèce et $e_{\alpha-1}$ est parfait-s et $e_{\alpha-1}\,(\mathrm{H})^0 \neq 0$, soit $r'_{\alpha-1}$ un ensemble de $\mathfrak{M}^s$, $\subset (\mathrm{H})^0$, joint à $e_{\alpha-1}$ tel que :

(1′) $\Psi_{(e_{\alpha-1})} \in$ A. C^s. sur $r'_{\alpha-1}$ (dans $r'_{\alpha-1}$). Soit $y_{\alpha-1}$ un point de $r'_{\alpha-1}\,e_{\alpha-1}$; d'après (13.3, 7°) un $r_{\alpha-1}$ de $\mathfrak{M}^s$ existe pour lequel :

(2′) $\bar{r}_{\alpha-1} \subset r'_{\alpha-1}$, $\quad r_{\alpha-1} \ni y_{\alpha-1}\quad$ et $\quad \sigma_\alpha = \sigma(r'_{\alpha-1}, r_{\alpha-1}, y_{\alpha-1}) > 0$ existe;

(3′) les relations $\rho \in \mathfrak{M}^s$, $\bar{\rho}\,\bar{r}_{\alpha-1} \neq 0$, $\Phi(\rho) < \sigma_\alpha$ entraînent $\rho \subset r'_{\alpha-1}$.

On pose

$$e_\alpha = e_{\alpha-1} - r_{\alpha-1}\,e_{\alpha-1},$$

si α est de type 2. Vu (1′), il vient

$$(1'')\qquad \left|\sum \Psi_{(e_{\alpha-1})}(\mathrm{S}'_l)\right| = \left|\sum (x'_l \in r'_{\alpha-1}\,e_{\alpha-1})\,\Psi(\mathrm{S}'_l)\right| < \varepsilon,$$

dès que les sphères fermées $\mathrm{S}'_l = \mathrm{S}'_l\,(x'_l)$ (de centres x'_l) disjointes sont dans $r'_{\alpha-1}$ et $\sum \Phi(\mathrm{S}'_l) < \eta_{\alpha-1}(\varepsilon)$, où l'on prend $\eta_{\alpha-1}(\varepsilon) \leqq \sigma_\alpha$; soit $\mathrm{S}_l = \mathrm{S}_l\,(x_l)$ un système fini de sphères dans $(\mathrm{H})^0$ avec $\sum \Phi(\mathrm{S}_l) < \eta_{\alpha-1}(\varepsilon)$. Selon (3′) :

$$\sum_l \Psi_{(\bar{r}_{\alpha-1}e_{\alpha-1})}(\mathrm{S}_l) = \sum_l (x_l \in \bar{r}_{\alpha-1}\,e_{\alpha-1})\,\Psi(\mathrm{S}_l),$$

S_l de $\sum'$ sont dans $r'_{\alpha-1}$; les centres des S_l, qui interviennent dans $\sum'$, sont sur $e_{\alpha-1}$; ces S_l forment un système fini dans $r'_{\alpha-1}$ d'accord avec (1″); d'où

$$\left|\sum_l \Psi_{(\nu_\alpha)}(\mathrm{S}_l)\ (\nu_\alpha = \bar{r}_{\alpha-1}\,e_{\alpha-1})\right| = \left|\sum{}' \Psi_{(e_{\alpha-1})}(\mathrm{S}_l)\right| < \varepsilon,$$

e. g. $\Psi_{(\nu_\alpha)}$ *est* A. C^s. sur $(\mathrm{H})^0$ dans H, *si* α *est de type* 2. Le reste de la démonstration est d'accord avec la partie correspondante dans [(R); § 14]. Si α est de la seconde espèce, soit $e_\alpha = \prod (\beta < \alpha)\,e_\beta$. Avec l'aide du théorème 4.1, qui a lieu au cas présent, on montre qu'il existe un α_0 transfini tel que les $\bar{r}_{\alpha-1}\,e_{\alpha-1}$ ($\alpha \leqq \alpha_0$, α de première espèce) couvrant $(\mathrm{H})^0$. Soient k_m ($m = 1, 2, \ldots$) fermés tels que $\sum k_m = (\mathrm{H})^0$. Désignons par ξ les $k_m\,g_{\alpha-1}$ (α de type 1) et $e_{\alpha-1}\,\bar{r}_{\alpha-1}$ (α de type 2); alors $\sum \xi = (\mathrm{H})^0$, avec $\xi \in (*)$ ou bien $\Psi_{(\xi)} \in$ A. C^s. sur H.

Admettons maintenant (1°). — D'une manière employée dans [(R); § 14] on montre ceci :

(1₁) *si p est parfait-s et p* $(\mathrm{H})^0 \neq 0$ *et un r de* $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$ *joint à p est dans* $(\mathrm{H})^0$, *alors il existe un* r_1 *de* $\mathfrak{M}^s$, $\subset r$, *tel que* $r_1 p \neq 0$ *et* $r_1 p \subset \lambda(n)$ *pour un n.*

Ayant établi cet énoncé, nous notons que pour un ensemble r_1, y indiqué, il est impossible que $r_1 p$ ($\neq 0$) soit contenu dans un $\lambda(n)$, tel que $\lambda(n) \in (*)$ (13.5), car cela entraînerait que p possède un point isolé-s [*voir* le texte qui précède (13.9)]. Donc, dans les conditions de (1₁), il existe un r_1 de $\mathfrak{M}^s$, $\subset r$, joint à p et tel que $r_1 p$ est contenu dans un $\lambda(n)$ pour lequel $\Psi_{(\lambda(n))} \in$ A. C^s. sur $(\mathrm{H})^0$ dans H. Ainsi, si $S_l = S_l(x_l)$ (en nombre fini) sont des sphères fermées disjointes, $S_l = S_l(x_l) \subset (\mathrm{H})^0$, telles que $\sum \Phi(S_l) < \eta_n(\varepsilon)$, on aura

$$\left|\sum (x_l \in \lambda(n))\, \Psi(S_l)\right| < \varepsilon,$$

d'où [en tant que $r_1 p \subset \lambda(n)$] $\Psi_{(r_1 p)} \in$ A. C^s. *sur* $r_1 p$ *dans* r_1. Conséquemment (15.1, 1 *a*) : $\Psi \in$ A. C^s. G. sur H, *ce qui achève la preuve du théorème.*

Nous dirons qu'une fonction $\Psi(r)$, définie pour $r\,(\in \mathfrak{M}^s) \subset (\mathrm{H})^0$ $(\mathrm{H} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^s)$, est I^s. G., *intégrable* (au sens sphérique) *Burkill généralisée,* sur H, si à tout p parfait-s, joint à $(\mathrm{H})^0$, et à tout r de $\mathfrak{M}^s$ dans H et joint à p il correspond un r_1 ($\in \mathfrak{M}^s$), $\subset r$, joint à p, tel que l'intégrale (au sens sphérique) de Burkill

$$(15.3) \qquad \int_{r_1}^{s} \Psi_{(p)} \quad (\text{rel. à } p) \text{ existe.}$$

En procédant comme on l'avait fait dans la démonstration de la première partie du théorème (15.2), on vérifie le résultat suivant.

(15.4) *Si* $\Psi \in$ I^s. G. *sur* $(\mathrm{H})^0$ $(\mathrm{H} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^s)$, *on aura* $\mathrm{H} = \sum \lambda_n$, *où les* λ_n *sont fermés et ou bien* $\lambda_n \in (*)$, *ou bien pour un* r_n (de $\mathfrak{M}^s$) *on a* $\lambda_n \subset r_n \subset (\mathrm{H})^0$ *et* $\int_{r_n}^{s} \Psi_{(\lambda_n)}$ (rel. à λ_n) *existe.*

En vertu du théorème 14.8 on conclut comme il suit.

(15.5) Soit $\Psi \in$ A. C^s. sur un H de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ épais. Si $D^s\Psi$ existe sur une plénitude de H, l'intégrale $\int_{\mathrm{H}}^{s} \Psi$ (rel. à p) existe et sa valeur est indépendante de p; si pour un p_0 fermé l'intégrale $\int_{\mathrm{H}}^{s} \Psi$ (rel. à p_0) existe, alors la dérivée $D^s\Psi$ existe sur une plénitude de H.

(15.6) A. C^s. G. *et* I^s. G. *sur un* H $(\in\widetilde{\mathfrak{M}}^s)$ *pour une* Ψ *impliquent* : (*e*) *l'existence de* $D^s\Psi$ *sur une plénitude de* H; A. C^s. G. *et* (*e*) *entraînent* I^s. G. (*sur* H).

En effet, soit $\mathfrak{N}$ une famille d'ensembles $r\,(\in\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s)$, $\subset(\mathrm{H})^0$, tels que $D^s\Psi$ existe sur une plénitude de r. $\mathfrak{N}$ satisfait aux conditions (13.6; 1_0, 2_0, 3_0). Soit $\mathfrak{N}_1$ une sous-famille de $\mathfrak{N}$ ne couvrant pas H (on peut supposer H ouvert). On veut montrer qu'il existe un r' de $\mathfrak{N}$ non couvert par $\mathfrak{N}_1$. L'ensemble $p=\mathrm{H}-\sum(\mathfrak{N}_1)\rho_1$ $(\neq 0)$ est fermé dans H. Si p a un point x_0 isolé-s, soit un r_0 (de $\mathfrak{M}^s$), $\subset$H, tel que

$$r_0\ni x_0,\qquad r_0p\in(^*);\qquad r_0-r_0p\subset\sum(\mathfrak{N}_1)\rho_1$$

et $D^s\Psi$ existe sur une plénitude de $\sum(\mathfrak{N}_1)\rho_1$, donc r_0-r_0p (de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s)\in\mathfrak{N}$ et $r_0\in\mathfrak{N}$ (car r_0p est mince); r_0 (contenant un point de p) est non couvert par $\mathfrak{N}_1$. Si p est parfait-s dans H, en vertu du caractère A. C^s. G. (sur H) il existe un r_1 de $\mathfrak{M}^s$, $\subset$H, $r_1p\neq 0$, tel que

(1^0) $\Psi_{(p)}\in$A. C^s. (14.5) sur r_1 dans r_1; d'après I^s. G. (sur H) il y a un r_2 de $\mathfrak{M}^s$, $r_2\subset r_1$, $r_2p\neq 0$, tel que

(2^0) $\int_{r_2}^{s}\Psi_{(p)}$ (rel. à p) existe; vu (1^0), (2^0) et (15.15) $D^s\Psi_{(p)}(x)$ *existe sur une plénitude e de* r_2 $[D^s\Psi_{(p)}=0$ sur $r_2-r_2p]$; si $x^0\in ep$, on aura

$$D^s\Psi(x^0)=D^s\Psi_{(p)}(x^0),$$

tandis que $D^s\Psi$ existe aussi sur une plénitude de $\nu=r_2-r_2p$ [car $\nu\subset\sum(\mathfrak{N}_1)\rho_1$ et $\rho_1\in\mathfrak{N}_1\subset\mathfrak{N}$], donc $D^s\Psi(x)$ existe sur une plénitude de r_2; $r_2\in\mathfrak{N}$, mais r_2 (étant joint à p) est non couvert par $\mathfrak{N}_1$. La condition (13.6, 4_0) est remplie. En vertu du lemme 13.6, H$\in\mathfrak{N}$ et *la première partie de* (15.6) *est vérifiée.*

Pour démontrer la seconde partie de (15.6) envisageons un p parfait-s, joint à H $(\in\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s)$ et un r $(\in\mathfrak{M}^s)$, $\subset$H, joint à p. A cause de A. C^s. G. (15.1) sur H il y a un r_1 $(\in\mathfrak{M}^s)$, $\subset r$, joint à p, tel que

(1_0) $\Psi_{(p)}\in$A. C^s. sur r_1 dans r_1;

(2_0) $\nu(x)=D^s\Psi_{(p)}(x)$ existe sur une plénitude de H$(\nu(x)=\mathrm{D}\,\Psi(x)$ aux points de p, où $\mathrm{D}\,\Psi(x)$ existe, et $\nu(x)=0$ hors $p]$; d'après (1_0), (2_0)

et (15.5) $\int_{r_1}^{s} \Psi_{(p)}$ (rel. à p) existe, e. g. Ψ est $\dot{\mathrm{I}}^s$. G. (sur H), *ce qui vérifie l'énoncé* (15.6).

(15.7) Ψ étant définie dans $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ dans un H épais de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$, on dira que $\Psi \in$ A. S. G. (est *additive au sens sphérique généralisé*) sur H, si à tout p parfait-s, $p\,(\mathrm{H})^0 \neq 0$, et $r\,(\in \mathfrak{M}^s) \subset \mathrm{H}$, $rp \neq 0$, il correspond un r_1 de $\mathfrak{M}^s$, $r_1 \subset r$, $r_1 p \neq 0$, tel que Ψ est s. a. relativement à p sur r_1 (13.9, 9 a), e. g. $\Psi = \int_{*}^{s} \Psi$ (rel. à p) sur r_1.

(15.8) Supposons que

(1_0) $\Psi(\lambda) = 0$ pour tout λ, $\in (^*)$, dans un H de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ épais, que

(2_0) Ψ soit complètement additive dans $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ sur H et que

(3_0) $\Psi \in$ A. S. G. sur H. *Pour que* Ψ *soit une* (S)*-totale, il faut et il suffit que*

$$(15.8\,a) \qquad \Psi \in \mathrm{A.\,C}^s.\,\mathrm{G.} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}^s.\,\mathrm{G.} \quad \text{sur H};$$

aussi il faut et il suffit que

$$(15.8\,b) \qquad \Psi \in \mathrm{A.\,C}^s.\,\mathrm{G.} \quad \text{sur H}$$

et (e) $\mathrm{D}^s \Psi(x)$ (finie) existe sur une plénitude de H.

En effet, si Ψ est une (S)-totale (13, 10) sur H [ce qui comprend les conditions (1_0), (2_0) et (3_0)], il se voit qu'à tout p parfait-s, joint à $(\mathrm{H})^0$, et à tout r (de $\mathfrak{M}^s$), $\subset$ H et joint à p, il correspond un r_1 (de $\mathfrak{M}^s$), r_1 joint à p, tel que

$$(1) \qquad \int_{\rho}^{s} \Psi_{(p)} \text{ (rel. à } p) = \int_{\rho p} f\,d\Phi \quad \text{(de Lebesgue)}$$

pour tout $\rho\,(\text{de } \widetilde{\mathfrak{M}}^s) \subset r_1$; $\int^{s} \Psi_{(p)}$ (rel. à p) existe sur r_1, d'où $\Psi \in \mathrm{I}^s$. G. (15.3) sur H. Selon (13.8′) à $\varepsilon > 0$ il correspond un $\eta > 0$, tel que

$$\left| \Psi_{(p)}(\mathrm{S}) - \int_{\mathrm{S}}^{s} \Psi_{(p)} \text{ (rel. à } p) \right| < \varepsilon$$

pour tout système fini S (rel. à p) dans r_1, avec $\mathrm{M}(\mathrm{S}) < \eta$. En tant que (1) entraîne $\int^{s} \Psi_{(p)}$ (rel. à p) $\in$ A. C^s. sur r_1, on obtient $\Psi_{(p)} \in$ A. C^s. sur r_1; donc $\Psi \in$ A. C^s. G. sur H (15.1, 1 a).

On a vérifié *la nécessité de* (15.8 *a*). Admettons (15.8 *a*). Alors (15.1, 1 *a*) à p parfaits-s et r $\left(\text{de } \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s\right)$, $\subset (H)^0$ et joint à p, il correspond un r_2 $(\in \mathfrak{M}^s)$, $\subset r$, $r_2 p \neq 0$, tel que

(1°) $\Psi_{(p)} \in$ A. C^s. sur r_2 dans r_2. Or [(3$_0$), (15.7)] : $\Psi \in$ A. S. G. sur H, d'où r_2 contient un r_1 de $\mathfrak{M}^s$, $r_1 p \neq 0$, tel que

(2°) Ψ est s. a. relativement à p sur r_1, ce qui est le caractère (13.10, I) pour r_1. $D^s\Psi$ existe sur une plénitude de H (15.6), donc $D^s\Psi_{(p)}$ possède la même propriété; par suite [(1°), (15.5), (14.8)] : l'intégrale

$$(3°)\qquad \int_\rho^s \Psi_{(p)}\ (\text{rel à } p) = \int_\rho D^s\Psi_{(p)}\ (\text{lebesguienne}) = \int_{\rho p} D^s\Psi\, d\Phi$$

existe pour tout $\rho\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset r_1$ (en effet, pour $\rho \subset r_2$); (3°) établit le caractère (13.10, II) pour r_1. Par conséquent, $\Psi = (S)\int^s f\,d\Phi$ (avec $f = D^s\Psi$) sur H; *la suffisance de* (15.8 *a*) *est démontrée.* Admettons encore que Ψ soit une (S)-totale sur H; on a déjà montré que cela implique (15.8 *a*); donc (15.6) : $D^s\Psi$ existe sur une plénitude de H, e. g. (15.8 *b*) s'ensuit. Réciproquement, si (15.8 *b*) a lieu, on conclut (15.6) que $\Psi \in$ I^s. G. sur H, et l'on se retrouve dans les conditions (15.8 *a*), suffisantes pour que Ψ soit une (S)-totale sur H, *ce qui achève la démonstration de* (15.8-8 *b*).

(15.9) *On remarque que, avec l'hypothèse* (14.11), *l'énoncé* (15.8-8 *b*) *présente une nouvelle définition de la totale-*(S), *équivalente à la définition donnée dans* (13.10). *Pourtant, la définition antérieure s'applique sans hypothèse* 14.11.

Des développements donnés plus haut, il s'ensuit qu'*une fonction* Ψ, *qui satisfait aux conditions* (15.8, 1$_0$, 2$_0$, 3$_0$), *est* (S)*-totale d'une fonction* $f(x)$, *définie* (*finie*) *sur une plénitude de* H, *sous les conditions nécessaires et suffisantes :*

(15.10) $\Psi \in$ A. C^s. G. sur H et $D^s\Psi(x) = f(x)$ (finie) sur une plénitude de H.

Théorème 15.11. — *Admettons que* Ψ *satisfait à l'hypothèse* 11.4 (comme toujours) *et que* (1°) $\Psi = 0$ *pour les ensembles* (*) (13.5), (2°) Ψ *soit complètement additive dans* $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ *sur* $H\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right)$ *épais*; (3°) $\Psi \in$ A. S. G. *sur* H. *Alors la condition*

$$(15.11\,a)\qquad -\infty < \underline{D}^s\Psi(x),\qquad \overline{D}^s\Psi(x) < +\infty\qquad \textit{sur}\quad H - H_0\ \textit{et}\ D^s\Psi(x)$$

existe sur une plénitude de H, H_0 *étant contenu dans une infinité dénombrable de frontières d'ensembles de* $\mathfrak{M}^s$, *implique que* Ψ *soit la totale-*(S) *sur* H *de sa dérivée* $D^s\Psi(x)$. *Nous incluons* $H - (H)^0$ *dans* H_0.

Selon (7.3), $(H)^0$ est la réunion de certains ensembles fermés F_m ($m = 1, 2, \ldots$), tels que $F_m \subset F_{m+1}$. Désignons par E_m ($m = 1, 2, \ldots$) l'ensemble des points $x \in F_m$, tels que les relations

$$(1_1) \qquad \text{sphère } s = s(x) \text{ de centre } x, \qquad \Phi(s) < \frac{1}{m}$$

entraînent

$$(2_1) \qquad |\Psi(s)| \leqq m\,\Phi(s), \qquad (s)^0 \subset (H)^0.$$

En raison de (12.5) une fonction $\nu(x)$, > 0 sur $(H)^0$, existe telle que $s(x)$ désignant une sphère de centre x, l'inégalité

$$(3_1) \qquad \Phi(s(x)) < \nu(x)$$

implique

$$(4_1) \qquad s(x) \subset (H)^0.$$

Vu (15.11 *a*), il existe une fonction $b(x)$, définie sur $H - H_0$, *positive et finie sur* $H - H_0$, telle que

$$(5_1) \qquad -b(x) < \underline{D}^s\Psi(x), \qquad \overline{D}^s\Psi(x) < b(x) \qquad \text{sur } H - H_0.$$

Sur $H - H_0$ il existe une fonction $c(x) > 0$ en sorte que

$$(6_1) \qquad |\Psi(s(x))| \leqq b(x)\,\Phi(s(x)), \qquad \text{lorsque } \Phi(s(x)) < c(x).$$

Soit x un point sur $H - H_0$; pour un entier m_x on aura

$$(7_1) \qquad x \in F_{m_x}, \qquad m_x \geqq b(x), \qquad \frac{1}{m_x} \leqq \nu(x), \qquad \frac{1}{m_x} \leqq c(x);$$

de plus, si $s(x)$ est une sphère avec $\Phi(s(x)) < \frac{1}{m_x}$, on aura $\Phi(s(x)) < c(x)$ [vu (6_1) et (7_1)],

$$|\Psi(s(x))| \leqq b(x)\,\Phi(s(x)) \leqq m_x\Phi(s(x))$$

et [puisque $\Phi(s(x)) < \nu(x)$ et d'après (4_1)] $s(x) \subset (H)^0$; donc $x \in E_{m_x}$ et $H - H_0 \subset \sum E_m$, d'où

$$(8_1) \qquad (H)^0 = H'_0 + \sum E_m, \qquad \text{où } H'_0 = H_0 - (H - (H)^0).$$

Montrons que *les* E_m *sont fermés*. Soit $s(y)$ une sphère fermée de centre $y \in \overline{E}_m$ [donc $y \in F_m \subset (H)^0$] telle que :

$$(9_1) \qquad \Phi(s(y)) < \frac{1}{m}.$$

D'après les conditions (11.7, 1_0, 3_0), étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une sphère fermée $\sigma(x)$ de centre $x = x_\varepsilon$, telle que [en prenant x proche de y et le rayon de $\sigma(x)$ proche de celui de $\sigma(y)$]

$$(10_1) \qquad x \in E_m, \qquad \sigma(x) \subset s(y), \qquad \big|\,|\Psi(s(y))| - |\Psi(\sigma(x))|\,\big| < \varepsilon;$$

de plus, on peut faire en sorte que $\nu_\varepsilon = \Phi(s(y)) - \Phi(\sigma(x))\ (\geqq 0)$ soit aussi petit qu'on veut. On aura $\Phi(\sigma(x)) < \frac{1}{m}$ [vu (9_1)]; selon la définition (1_1) et (2_1) de E_m:

$$(11_1) \qquad |\Psi(\sigma(x))| \leqq m\Phi(\sigma(x)) \qquad \text{et} \qquad (\sigma(x))^0 \subset (H)^0;$$

ainsi (10_1) :

$$|\Psi(s(y))| < m\,\Phi(\sigma(x)) + \varepsilon \leqq m\,\Phi(s(y)) + \varepsilon,$$

d'où il vient :

$$(12_1) \qquad \Psi(s(y)) \leqq m\Phi(s(y)).$$

Si $(s(y))^0$ a des points étrangers à $(H)^0$, l'ensemble ouvert

$$(s(y))^0 - (s(y))^0\overline{H} = e(y)$$

sera épais; à cause de la seconde relation (11_1) il s'ensuit que

$$s(y) - \sigma(x) \supset e(y) \qquad \text{et} \qquad \nu_\varepsilon \geqq \Phi(e(y)) > 0;$$

or $e(y)$ est indépendant de ε, x_ε, tandis qu'on peut faire ν_ε arbitrairement petit; cette contradiction entraîne l'inclusion :

$$(13_1) \qquad (s(y))^0 \subset (H)^0.$$

Ainsi (9_1) $\left(\text{avec } y \in \overline{E}_m\right)$ implique (12_1) et (13_1), donc $\overline{E}_m = E_m$, e. g. E_m *est fermé*. Soient $s_j = s_j(x_j)$ des sphères fermées, disjointes, en nombre fini,

$$s_j \subset (H)^0, \quad x_j \in E_m, \qquad \text{avec} \quad \sum \Phi(s_j) < \frac{\varepsilon}{m} \qquad (0 < \varepsilon \leqq 1);$$

alors $\Phi(s_j) < \frac{1}{m}$ et $[(1_1)$ et $(2_1)]$ $|\Psi(s_j)| \leqq m\,\Phi(s_j)$; on aura

$$\left|\sum \Psi(s_j)\right| \leqq m \sum \Phi(s_j) < \varepsilon,$$

par suite :

$$(14_1) \qquad \Psi \in A.\,C^s. \quad \textit{sur} \quad E_m \ \textit{dans}\ H \quad (\text{déf. } 14.5).$$

En tenant compte de (8_1) et (14_1), de l'hypothèse (15.11 *a*) sur H_0 et du théorème 15.2, il s'ensuit que $\Psi \in$ A. C^s. G. sur H. Les conditions (15.10) sont remplies, ainsi que les conditions (15.8, 1_0, 2_0, 3_0); conséquemment Ψ est (S)-totale sur H de $D_s \Psi(x) = f(x)$, *ce qui établit le théorème.*

Si e est un ensemble fermé, posons $\Psi^{(e)} = \Psi - \Psi_{(e)}$ (13.2), ainsi :

$$(15.12) \qquad \Psi^{(e)}(s(x)) = \Psi(s(x)) \quad (\text{si } x \notin e), \qquad = 0 \quad (\text{si } x \in e),$$

$s(x)$ désignant une sphère fermée de centre x. Envisageons le nombre (s'il existe)

$$(15.13) \quad \Gamma(H - H_e) = \int_H \Psi^{(e)} \ (\text{rel. à } e) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum (x_l \notin e)\, \Psi(s_l(x_l));$$

ici [*voir* le texte par rapport à (13.7-7 *b*)] $S = \{ s_l(x_l) \}$ désigne un *système fini, relatif à e, dans* H (de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$); $s_l(x_l) \subset (H)^0$; $s_l(x_l)$ est disjointe de e, si le centre $x_l \notin e$;

$$N(H, S) = \max\Big(\Phi(s_l),\ \Phi\Big(H - \sum s_l\Big)\Big) < \varepsilon.$$

On observe que les $s_l(x_l)$, qui interviennent dans (15.13), se trouvent dans $(H)^0 - (H)^0 e$, e. g. $\Gamma(H - He)$ *est défini seulement moyennant les valeurs de* Ψ *pour les sphères fermées contenues dans* $(H)^0 - (H)^0 e$.

Théorème 15.14. — Admettons que e fermé soit joint à $(H)^0$ (H épais de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$), $f(x)$ définie sur une plénitude de H soit sommable sur $(H)^0 e$, la (S)-totale $\Psi(r) = (S)\int_r f\,d\Phi$ existe pour tout r (de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$), contenu dans $(H)^0$ et tel que $\bar{r}e = 0$, le nombre fini $\Gamma(H - He)$ (15.13) existe et $\nu(\rho) = \Gamma(\rho - \rho e)$ possède les caractères de (1_0) *l'additivité complète dans* $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ *sur* H *et de* (2_0) A. S. G. (15.7) *sur* H. *Alors* f *est totalisable*-(S) *sur* H *et*

$$(S)\int_H f\,d\Phi = \int_{He} f\,d\Phi + \Gamma(H - He).$$

Notons d'abord que, d'après la définition (15.13), on aura $\nu = 0$ pour tout ensemble (*) (13.5) contenu dans H. Faisons en sorte que $f = 0$ sur e. Alors (théorème 13.10) il suffira de montrer ceci : Si p est parfait-s dans $(\mathrm{H})^0$, alors à tout r (de $\mathfrak{M}^s$), $\mathrm{H}\subset$, $pr \neq 0$, il correspond un r' ($\in \mathfrak{M}^s$), $\subset r$, $pr' \neq 0$, tel que :

(I) ν est s. a. relativement à p sur r' [e. g. $\nu = \int^s \nu$ (rel. à p) sur r'];

$$\text{(II)} \qquad \int_{r_1}^{s} \nu_{(p)} \quad (\text{rel à } p) = \int_{r_1 p} f\, d\Phi \qquad \text{pour tout} \quad r_1 \left(\text{de } \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset r'.$$

En raison de (2_0) il existe un $\tilde{r}$ $\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right)$, $\subset r$, $p\tilde{r} \neq 0$, tel que : (I′) ν *est s. a. relativement à p sur* $\tilde{r}$. Envisageons le *cas* A, où $p\tilde{r}$ a un point étranger à e. On peut trouver un r'' de $\mathfrak{M}^s$, tel que $r'' \subset \tilde{r}$, $r''e = 0$, $pr'' \neq 0$; la (S)-totale

$$\Psi^\cdot(r'') = (\mathrm{S}) \int_{r''} f\, d\Phi$$

existe (car $\bar{r}''e = 0$); dans r'' il se trouve un r' de $\mathfrak{M}^s$, joint à p, de sorte que :

$$(1_1) \qquad \int_{r_1}^{s} \Psi^\cdot_{(p)} \quad (\text{rel. à } p) = \int_{r_1 p} f\, d\Phi \qquad \text{pour tout} \quad r_1 \left(\text{de } \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset r',$$

tandis que :

$$(2_1) \qquad \int_{r_1}^{s} \Psi^\cdot \quad (\text{rel. à } p) = \Psi^\cdot(r_1).$$

Pour tout ρ $\left(\text{de } \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset r_1$ on aura $\bar{\rho} e = 0$, donc

$$\nu(\rho) = \int_{\rho}^{s} \Psi^{\cdot(e)} \quad (\text{rel. à } e) = \int_{\rho}^{s} \Psi^\cdot \quad (\text{sans qualification});$$

l'intégrale au troisième membre aura la valeur de $\int_\rho^s \Psi^\cdot$ relativement à n'importe quel ensemble parfait-s, d'où $\nu(\rho) = \int_\rho^s \Psi^\cdot$ (rel. à p) et, d'après (2_1), $\nu(\rho) = \Psi^\cdot(\rho)$. En remplaçant $\Psi^\cdot$ dans (1_1) par ν, il se voit que (II) est vérifiée; d'autre part, (I) aussi a lieu en conséquence des inclusions $r' \subset r'' \subset \tilde{r}$ et de (I′). Dans le *cas* B, où $p\tilde{r} \subset e$, considérons un r' de $\mathfrak{M}^s$ tel que :

$$(3_1) \qquad r'p \neq 0 \qquad \text{et} \qquad r' \subset \tilde{r};$$

dans r_1 épais $\left(\text{de } \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right)$, $\subset r'$, soit $\mathrm{S} = \{q(i)\}$ *un système fini relativement à p* [*cf.* le texte à la suite de (13.7 *a*)], avec

$$\mathrm{N}(\mathrm{S}) \quad \left[= \max \left\{ \Phi(q(i)),\ \Phi\left(r_1 - \sum q(i)\right) \right\} \right] < \varepsilon;$$

désignons par $q(i_k)$ les $q(i)$ dont les centres sont sur p; $\sigma = \{q(i_k)\}$ est un système fini dans r_1. On obtient (15.13) :

$$\nu(\sigma) = \sum \nu(q(i_k)) = \sum \int_{q(i_k)}^{s} \Psi^{(e)} \quad (\text{rel. à } e) = \int_{\sigma}^{s} \Psi^{(e)} \quad (\text{rel. à } e).$$

Les $q(i_k)$ sont dans $(r_1)^0 \subset r' (\subset \tilde{r})$, donc les centres des $q(i_k)$, étant sur p, sont sur e et

$$\Psi^{(e)}(\sigma) \equiv \sum \Psi^{(e)}(q(i_k)) = 0;$$

d'après (13.8′), il en découle que

$$(4_1) \qquad \nu(\sigma) = \int_{\sigma}^{s} \Psi^{(e)} \quad (\text{rel. à } e) - \Psi^{(e)}(\sigma) \to 0 \qquad \text{avec} \quad M(\sigma).$$

Or, $S = \{q(i)\}$ étant un système fini, relativement à p, $q(i)$ est disjointe de p pour $i \neq i(k)$, donc $\nu_{(p)}(q(i)) = 0$ pour $i \neq i(k)$, tandis que

$$\nu_{(p)}(q(i(x))) = \nu(q(i_k));$$

par là (4_1) :

$$(5_1) \qquad \int_{r_1}^{s} \nu_{(p)} \quad (\text{rel. à } p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \nu_{(p)}(S)$$
$$= \lim \left[\sum_{i \neq i(k)} \nu_{(p)}(q(i)) + \sum \nu_{(p)}(q(i(x))) \right]$$
$$= \lim \sum \nu(q(i_k)) = \lim \nu(\sigma) = 0 \qquad (\text{car } M(\sigma) < \varepsilon).$$

Puisque $r_1 p \subset \tilde{r} p\, (3_1) \subset e$ et $f = 0$ sur e, l'égalité (5_1) entraîne (II).

En outre, (I) résulte de l'inclusion $r' \subset \tilde{r}$ et de (I′), *ce qui achève la démonstration du théorème.*

DÉFINITION 15.15. — Soit f (S)-totalisable sur les $r\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right)$ contenus dans un H épais de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$. On dira que f appartient à la classe K_0, si f est sommable sur H, et que $f \in K_\alpha$ (α des classes I, II) sur H, si une des conditions suivantes a lieu :

(1°) on a $H = \sum_{1}^{\nu} q_i + e$, $e \in (^*)$ (13.5), les $q_i \left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s\right)$ étant disjoints, et $f \in K_{\beta_i}$ ($\beta_i < \alpha$) sur q_i;

(2°) des $\rho^n (n = 1, 2, \ldots)$ de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ existent, tels que $\rho^n \uparrow H$ et $f \in K_{\beta_n}$ ($\beta_n < \alpha$) sur ρ^n;

(3°) il existe un r de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$, $\supset$H, tel que $f \in K_\beta$ ($\beta < \alpha$) sur r;

(4°) il existe un e fermé, épais, $e(H)^0 \neq 0$, tel que f est sommable sur $e(H)^0$, $f \in K_\beta$ ($\beta < \alpha$) sur tout $r\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s\right) \subset (H)^0$, avec $\bar{r}e = 0$, la fonction

$$\nu(\rho) = \Gamma(\rho - \rho e) \qquad \left[= \int_\rho^{*} \Psi^{(e)} \text{ (rel. à } e) \quad (15.13)\right]$$

existe, ν est additive complètement dans $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ sur H et $\nu \in$ A. S. G. (15.7) sur H.

THÉORÈME 15.16. — *Toute fonction $f(x)$ (S)-totalisable sur un* H *de $\mathfrak{M}^s$, est dans une classe K_α (α des classes* I, II).

Il suffirait d'envisager le cas H ouvert, e. g. $H \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$. Désignons par $\mathfrak{N} = \{\rho\}$ la sous-classe de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$, $\rho \in H$, d'ensembles tels que $f(x) \in K_\alpha$ ($\alpha = \alpha(\rho)$) sur ρ. En vertu de (15.15, 3°) la condition (13.6, 3_0) est remplie. Soit un $r\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s\right) \subset H$ et $r = \sum_1^{\nu} q_\iota + e$, $e \in (^*)$, les q_ι, $\in \mathfrak{N}$, étant disjoints; on aura

$$f \in K_{\alpha(\iota)}(\alpha(\iota) = \alpha(q_\iota)) \qquad \text{sur} \quad q_\iota,$$

donc (15.15, 1°) : $f \in K_{\alpha(r)}$ sur r, avec $\alpha(r) = 1 + \max(\alpha(i))$, e. g. on aura $r \in \mathfrak{N}$; $\mathfrak{N}$ satisfait à (13.6, 1_0). Supposons que r^n (de $\mathfrak{N}$) $\uparrow r$(de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$); alors $f \in K_{\beta_n}$ ($\beta_n = \alpha(r^n)$) sur r^n et (15.15, 2°) : $f \in K_{\alpha(r)}$ sur r, avec $\alpha(r)$ supérieur aux $\beta_n (n = 1, 2, \ldots)$; ainsi $r \in \mathfrak{N}$ et il se voit que la condition (13.6, 2_0) est aussi satisfaite.

Ayant (13.6, 4_0) en vue, *envisageons une famille* $\mathfrak{N}_1 = \{\rho\}$, $\subset \mathfrak{N}$, *ne couvrant pas* H; $p = H - \sum(\mathfrak{N}_1)\rho$ ($\neq 0$) sera fermé dans H. Si p possède un point x_0 isolé-s, il existe un r_0 ($\subset$H) de $\mathfrak{M}^s$, tel que $r_0 \ni x_0$, $r_0 p \in (^*)$; on aura $r_0 p \subset \sum_1^{k} g_j$, où g_j est la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}^s$, de plus :

$$(1_1) \qquad r^0 = r_0 - r_0 p \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s, \qquad r^0 \subset \sum(\mathfrak{N}_1)\rho;$$

r^0 (de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$) est couvert par $\mathfrak{N}_1$, qui est une sous-famille de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$, donc [vu (13.5′) et la remarque à la suite de (13.5′)] $r^0 = \sum_1^{\infty} \rho_\nu$, les $\rho_\nu \left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right)$ étant disjoints et $\rho_\nu \subset r_\nu \in \mathfrak{N}_1$; de plus

$$(2_1) \quad \rho' = \rho_1 + \ldots + \rho_\nu \quad [= r^0(r_1 + \ldots + r_\nu)]\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s\right) \uparrow r^0 = r_0 - r_0 p.$$

A cause de (15.15, 3°) $f \in K_{\beta(\nu)}$ sur $(\rho_\nu)^0$, avec $\beta(\nu) = \alpha(r_\nu) + 1$; en tant que

$$\rho^\nu + r_0 p = (\rho_1)^0 + \ldots + (\rho_\nu)^0 + e_\nu, \qquad e_\nu \in (^*), \qquad (\rho_i)^0 \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s,$$

d'après (15.15, 1°) il vient :

$$f \in K_{\gamma(\nu)} \text{ sur } \rho^\nu + r_0 p, \qquad \text{où } \gamma(\nu) = 1 + \max(i \leqq \nu)\, \beta(\nu);$$

or (2_1) : $\rho^\nu + r_0 p$ (de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$) $\uparrow r_0$; donc (15.15, 2°) : $f \in K_{\alpha(r_0)}$ sur r_0, où $\alpha(r_0)$ est supérieur aux $\gamma(\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, *e. g.* $r_0 \in \mathfrak{N}$, *tandis que* r_0 (contenant x_0 de p) *est non couvert par* $\mathfrak{N}_1$. Considérons le cas où p est parfait-s dans H (de $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$). Posons

$$\Psi(r) = (S) \int_r f\, d\Phi$$

pour tout r de $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ dans H; Ψ satisfait aux conditions du théorème 13.10. En particulier, il existe un r' de $\mathfrak{M}^s$, $r' \subset H$, $pr' \neq 0$, tel que

$$\text{(I)} \qquad \Psi(r_1) = \int_{r_1}^{s} \Psi \quad (\text{rel. à } p),$$

$$\text{(II)} \qquad \int_{r_1}^{s} \Psi_{(p)} \ (\text{rel. à } p) = \int_{r_1 p} f\, d\Phi \qquad \text{pour tout } r_1 \left(\text{de } \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset r'.$$

D'après (15.13) et puisque $\Psi^{(p)} = \Psi - \Psi_{(p)}$:

$$\nu(\rho) = \Gamma(\rho - \rho p) = \int_\rho^s \Psi^{(p)} \ (\text{rel. à } p) = \int_\rho^s \Psi \ (\text{rel. à } p) - \int_\rho^s \Psi_{(p)} \ (\text{rel. à } p)$$

$$= \Psi(\rho) - \int_{\rho p} f\, d\Phi \ (\text{lebesguienne}) \qquad \text{pour tout } \rho\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right) \subset r'.$$

Par conséquent : (*a*) ν est complètement additive dans $\widetilde{\mathfrak{M}}^s$ sur r', (*b*) $\nu \in$ A. S. G. (15.7) sur r'. Soient les r_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ tous les ensembles de la famille $\mathfrak{M}^*$ (7.4, 1°) contenus dans $r' - r'p$ $\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s\right)$; on aura

$$r' - r'p = \sum r_\nu, \qquad r_\nu \in \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^s.$$

Or r_ν *est couvert par* $\mathfrak{N}_1$; donc selon (13.5′) des $\rho_{\nu,k}\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right)$ et des $r_{\nu,k}(\in \mathfrak{N}_1)$ existent tels que

$$(3_1) \quad \begin{cases} r_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{\nu,k}, & \text{les } \rho_{\nu,k} \ (\nu \text{ fixe}) \text{ sont disjoints}, \quad \rho_{\nu,k} \subset r_{\nu,k} \\ \rho_\nu^k = \rho_{\nu,1} \ldots + \rho_{\nu,k} \quad (= r_\nu(r_{\nu,1} + \ldots + r_{\nu,k})), & \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s, \quad \uparrow r_\nu \\ & (\text{pour } k \to \infty). \end{cases}$$

On note que

$$f \in K_{\alpha(\nu, k)} \quad [\alpha(\nu, k) = \alpha(r_{\nu, k})] \qquad \text{sur} \quad r_{\nu, k},$$

donc (15.15, 3°) :

$$f \in K_{\gamma(\nu, k)} \, (\gamma(\nu, k) = \alpha(\nu, k) + 1) \qquad \text{sur} \quad (\rho_{\nu, k})^0.$$

D'autre part

$$\rho_\nu^k = (\rho_{\nu, 1})^0 + \ldots + (\rho_{\nu, k})^0 + e_{\nu, k}, \qquad e_{\nu, k} \in (^*);$$

par là (15.15, 1°) : $f \in K_{\beta(\nu, k)}$ sur ρ_ν^k, avec

$$\beta(\nu, k) = 1 + \max(i \leqq k) \, \gamma(\nu, i);$$

ensuite [(15.15, 2°), (3_1)] :

(4_1) $f \in K_{\alpha(r_\nu)}$ sur r_ν, avec $\alpha(r_\nu)$ supérieur aux $\beta(\nu, k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Soit r *un ensemble de* $\widetilde{\mathfrak{M}}_0^s$, $r \subset r'$, avec $\bar{r}p = 0$; désignons par $r(j)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ les r_ν joints à r; on a $r \subset \sum r(j)$. En vertu de (13.5′), avec $\{r(j)\}$ au lieu de $\mathfrak{N}$, et d'après (4_1) des $\rho_\nu \left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}^s\right)$ disjoints existent tels que

$$r = \sum_1^\infty \rho_\nu, \quad \rho_\nu \subset r(\nu) \in \mathfrak{N},$$

en sorte que

$$\rho^\nu = \rho_1 + \ldots + \rho_\nu \quad (= r(r(1) + \ldots + r((\nu)))\left(\in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s\right) \uparrow r;$$
$$\rho^\nu = (\rho_1)^0 + \ldots + (\rho_\nu)^0 + e^\nu, \qquad e^\nu \in (^*).$$

On a $f \in K_{\alpha'}$ sur $r(\nu)$, où α' est supérieur aux $\alpha(r_j)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ (4_1); α' *est indépendant de* r; selon (15.15, 3°, 1°, 2°) :

$$f \in K_{\alpha'+1} \qquad \text{sur} \quad (\rho_\nu)^0,$$
$$f \in K_{\alpha'+2} \qquad \text{sur} \quad \rho^\nu,$$
$$f \in K_\beta \quad (\beta = \alpha' + 3) \qquad \text{sur} \quad r\left(r \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0^s, \, r \subset r', \, \bar{r}p = 0\right).$$

Vu (15.15, 4°), avec p, r' (de $\mathfrak{M}^s$) au lieu de e, H, et en raison de (a) et (b) il vient :

$$f \in K_\alpha \quad (\alpha = \alpha' + 4) \qquad \text{sur} \quad r'.$$

Ainsi r' *est un ensemble de* $\mathfrak{N}$ ($r'p \neq 0$), *non couvert par* $\mathfrak{N}_1$. Les conditions du lemme 13.6 sont remplies, $H \in \mathfrak{N}$ et *le théorème est vérifié.*

Pour conclure, nous remarquons qu'il reste à élucider les façons possibles de la réalisation du caractère A. S. G. (définition 15.7) et de l'hypothèse 14.11, qui est relative aux dérivés sphériques généraux (14.10). Or l'hypothèse 14.11 n'intervient qu'à partir de la deuxième partie [à savoir (14.8 *b*)] du théorème 14.8; nous avons déjà remarqué (15.9) que la définition originelle (13.10) de la totale-(S) est indépendante de l'hypothèse 14.11. En outre, cette hypothèse n'est pas du tout nécessaire dans la totalisation en rapport avec les dérivés sphériques généraux (14.10); la nature d'une telle totale et les règles de son calcul peuvent se déduire sans difficulté des développements donnés plus haut pour la totale-(S).

Notons enfin que le théorème de Denjoy-Vitali pour les sphères, au sens de (13.1), est réalisable aussi d'accord avec les remarques de A. Denjoy [*Un demi-siècle de Notes...*, t. II; Observations, p. 68, 69].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. Denjoy, *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique*, Parties I à IV, Paris, 1941-1949, p. 1-714, désigné dans le texte par (D).

[2] A. Denjoy, *Une extension du théorème de Vitali* (*Amer. J. Math.* vol. 73, 1951, p. 314-356), désigné par (D*).

3] W. J. Trjitzinsky, *Théorie métrique dans des espaces où il y a une mesure* (*Mém. Sc. Math.*, fasc. 143, 1960, p. 1-119), désigné par (T).

[4] P. Romanovski, *Intégrale de Denjoy dans les espaces abstraits* [*Mat. Sbornik*, t. 9, (51), 1941, p. 67-92], désigné par (R).

[5] W. J. Trjitzinsky, *Les laplaciens généralisés non sommables* (*J. Math. pures et appl.*, t. 34, 1955, p. 1-136), désigné par (T').

[6] Hans Hahn and A. Rosenthal, *Set functions* (The Univ. of New Mexico Press, 1948), désigné par (HR).