Mémorial des sciences mathématiques

L. Lesieur
R. Croisot

Algèbre nœthérienne non commutative

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 154 (1963)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1963__154__1_0>

L. LESIEUR
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris
Maître de Conférences à l'École Polytechnique

et R. CROISOT
Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon

ALGÈBRE NŒTHÉRIENNE NON COMMUTATIVE

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CLIV

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & C^ie^, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, Quai des Grands-Augustins 55,

1963

ALGÈBRE NŒTHÉRIENNE NON COMMUTATIVE

Par

M. L. LESIEUR

(Professeur a la Faculté des Sciences de Paris
Maître de Conférences à l'Ecole Polytechnique.)

et M. R. CROISOT

(Professeur à la Faculte des Sciences de Besançon.)

INTRODUCTION.

Le but de ce fascicule est de rendre compte d'un certain nombre de résultats relatifs à la théorie des idéaux d'un anneau ou d'un demi-groupe non commutatif, ainsi qu'à celle des sous-modules d'un module sur un anneau non commutatif. Il s'agit principalement des résultats qui étendent au cas non commutatif les théorèmes de décomposition démontrés d'abord pour un anneau par E. Nœther en 1921 : théorème d'existence d'une représentation de tout idéal comme intersection réduite d'un nombre fini d'idéaux primaires, théorème d'unicité du nombre des composants et des idéaux premiers associés, théorème d'unicité des composants isolés. D'où le titre d'*Algèbre nœthérienne non commutative*.

Nous rappelons d'abord les définitions fondamentales relatives à un anneau, un demi-groupe ou un module quelconque, ainsi que les notions de *radical* introduites par R. Baer et N. H. Mac Coy en 1943 et 1948 et par N. Jacobson en 1945 (chap. I).

Nous considérons ensuite les diverses conditions de chaîne qui nous sont utiles : condition de chaîne ascendante, ou condition de chaîne descendante sur les idéaux à gauche par exemple, cette dernière condition ayant été utilisée par E. Artin en 1927. Nous délimitons ainsi la classe des anneaux, demi-groupes ou modules *nœthériens* ou *artiniens*. En particulier, nous rappelons qu'un anneau artinien premier unitaire, ou anneau simple, est isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif ou non (chap. II).

En vue d'unifier les raisonnements, nous présentons les axiomes d'une théorie commune aux idéaux d'un anneau ou d'un demi-groupe et aux sous-modules d'un module. Cette théorie, que nous avons développée en 1956, utilise une généralisation de la notion de treillis multiplicatif résidué, que nous étudions ici sous le nom de ($\mathfrak{T}$)-algèbre (chap. III).

Dans la suite, nous abordons les théorèmes de décomposition d'un idéal (resp. d'un sous-module) comme intersection d'un nombre fini d'idéaux (resp. de sous-modules) particuliers. Nous commençons par les idéaux (resp. les sous-modules) *primaux* qui ont été introduits par L. Fuchs en 1950 dans le cas d'un anneau commutatif et étudiés par divers auteurs dans le cas non commutatif. L'étude des théorèmes d'existence et d'unicité (au sens large) des décompositions comme intersection d'idéaux (resp. de sous-modules) primaux fait l'objet du chapitre IV.

Mais ces décompositions en idéaux ou sous-modules primaux sont moins fines, même dans le cas commutatif, que les décompositions en idéaux ou sous-modules primaires. Il y a donc lieu de considérer les idéaux et sous-modules *primaires* dans le cas non commutatif. Nous le faisons au chapitre V, en vérifiant le théoréme d'unicité des composants isolés pour les décompositions en idéaux primaires dans le cas où elles existent.

Malheureusement, ces décompositions n'existent pas toujours, comme l'a montré W. Krull dès 1928. Nous avons introduit en 1956, sous le nom d'idéal (ou sous-module) *secondaire*, une première généralisation qui fait l'objet du chapitre VI. Elle est tout à fait satisfaisante dans certains cas comme celui d'un anneau unitaire artinien à gauche, cas spécialement étudié au chapitre IX, où elle donne à la fois le théorème d'existence et le théorème d'unicité (au sens large).

La notion d'idéal secondaire n'assure pas encore le théorème d'existence dans le cas le plus général. Ce n'est qu'avec la notion d'idéal (ou de sous-module) *tertiaire*, que nous avons introduite également en 1956, qu'on atteint un théorème général d'existence et d'unicité pour les décompositions. Cette notion est exposée en détail au chapitre VII, les théorèmes de décomposition en idéaux ou sous-modules tertiaires étant établis au chapitre VIII. Ils fournissent une généralisation bien adaptée au cas non commutatif, mis à part le théorème d'unicité des composants isolés qui ne subsiste pas.

Enfin, si l'on se restreint aux modules, on peut retrouver et éclairer la théorie des sous-modules tertiaires au moyen de la notion d'enveloppe injective d'un module, empruntée à l'algèbre homologique. Cette notion a été introduite par B. Eckmann et A. Schopf en 1953; elle a été appliquée à l'étude des décompositions en sous-modules primaires dans le cas d'un module sur un anneau commutatif par E. Matlis en 1958 et à celle de décompositions en *sous-modules isotypiques* dans le cas général par P. Gabriel en 1959. Les décompositions en sous-modules isotypiques, qui satisfont également aux théorèmes d'existence et d'unicité, coïncident avec les décompositions en sous-modules tertiaires dans certains cas étendus mais peuvent être strictement plus fines qu'elles. Nous présentons au chapitre X la notion d'enveloppe injective, son application à la théorie des sous-modules isotypiques, en même temps qu'un raccord précis avec la théorie des sous-modules tertiaires.

Tel est le cadre autour duquel nous avons construit cet exposé. Afin de lui laisser une assez large autonomie, nous donnons autant que possible toutes les indications nécessaires pour les démonstrations. Cela n'exclut pas des renvois à la bibliographie se rapportant aux questions traitées. Nous nous excusons à l'avance des omissions certaines et des erreurs possibles, et nous tenons à remercier Monsieur Henri Villat d'avoir suggéré ce travail et de l'avoir accueilli dans la collection qu'il dirige.

CHAPITRE I.

Idéaux premiers.

1. Anneaux, demi-groupes, modules. — Nous rappelons brièvement les définitions des structures d'anneau, de demi-groupe et de module qui sont les trois plus importantes faisant l'objet de notre étude.

Définition 1.1. — On appelle *anneau* un ensemble A muni de deux opérations, l'addition et la multiplication, telles que :

1° A est un groupe abélien pour l'addition;

2° la multiplication est associative : $(ab)c = a(bc)$;

3° la multiplication est distributive par rapport à l'addition

$$a(b+c) = ab + ac, \qquad (b+c)a = ba + ca$$

(*cf.* N. Bourbaki [13], chap. I, § 8, p. 115; P. Dubreil [24], p. 138 et 179, A. Almeida-Costa [2]).

On notera qu'un anneau A n'est pas nécessairement *commutatif* pour la multiplication. Nous nous intéressons ici, plus spécialement, au cas non commutatif, la littérature relative au cas commutatif étant particulièrement riche (*voir* par exemple une bibliographie importante dans P. Samuel [67]). Par contre, les anneaux non associatifs sont en dehors de notre étude. (Pour une bibliographie du cas non associatif, se reporter par exemple à A. Albert [1], p. 188, et en particulier, pour les anneaux de Lie, à C. Chevalley [18].)

Lorsque l'anneau A possédera un élément unité (anneau *unitaire*), nous le mentionnerons explicitement.

Définition 1.2. — On appelle *demi-groupe* (1) un ensemble D muni d'une opération associative (*cf.* P. Dubreil [24], p. 78); on dit aussi *monoïde* (*cf.* N. Bourbaki [13], chap. I, § 1, p. 7).

Les demi-groupes ont fait l'objet d'une étude algébrique systématique dans deux ouvrages récents en langue étrangère (*cf.* A. H. Clifford et G. B. Preston [20], E. S. Lyapin [59]). Ils apparaissent aussi

(1) En anglais : *semi group* (ne pas confondre avec semi-groupe qui désigne en français un demi-groupe où la règle de simplification à droite et à gauche est valable; *cf.* P. Dubreil [24], p. 86).

comme cas particulier de systèmes algébriques plus généraux dans deux autres ouvrages (*cf.* O. Borůvka [12], R. M. Bruck [15]). On trouvera une bibliographie très détaillée dans ces quatre livres.

Un demi-groupe D n'est pas nécessairement *commutatif*. Il ne possède pas obligatoirement un *élément zéro* (noté o et tel que, $\forall x \in D$, $0x = x0 = 0$) ni un *élément unité* (noté e ou 1, et tel que, $\forall x \in D$, $ex = xe = x$).

Définition 1.3. — A étant un anneau quelconque, on appelle A-*module à gauche* un ensemble M muni d'une opération interne, l'addition, et d'une loi de composition externe, la multiplication de $x \in M$ par $\alpha \in A$, telles que :

1° M est un groupe abélien pour l'addition;

2° $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$; $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$; $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (*cf.* N. Bourbaki [13], chap. II, § 1, p. 1; N. Jacobson [44], p. 1).

On définit de même un A-module à droite. Le A-module M est dit *unitaire* si A possède un élément unité 1 tel que, $\forall x \in M$, $1x = x$. Un anneau A peut être considéré comme un A-module à gauche, soit A_G, ou comme un A-module à droite, soit A_D.

Les notions d'*homomorphisme* et d'*isomorphisme* s'appliquent évidemment aux anneaux, aux demi-groupes et aux modules, conformément à la définition générale (*cf.* N. Bourbaki, [13], chap. I, § 4).

On suppose également connues les notions de *produit* d'anneaux ou de modules, de *somme directe* de sous-anneaux ou de sous-modules, et de *composé direct* de sous-anneaux (*cf.* N. Bourbaki [13], chap. I, § 8, p. 131 et 133; chap. II, § 1, p. 6 et 12).

2. Idéaux, sous-modules. — *Définition* 1.4. — On appelle *idéal à gauche* (resp. à droite) d'un anneau A une partie non vide I de A telle que :

1° $a \in I$, $b \in I \Rightarrow a - b \in I$ (I est donc un sous-groupe du groupe additif abélien A);

2° $a \in I, x \in A \Rightarrow xa \in I$ (resp. $ax \in I$) [I est donc permis à gauche (resp. à droite) pour la multiplication].

Un *idéal bilatère* de A est un sous-ensemble de A qui est en même temps un idéal à gauche et un idéal à droite (*cf.* N. Bourbaki [13], chap, I, § 8, p. 123; P. Dubreil [24], p. 186).

Pour tout idéal bilatère I d'un anneau A, on définit l'*anneau quotient* A/I et l'*homomorphisme canonique* φ de A sur A/I. (*cf.* N. Bourbaki [13], chap. I, § 8, p. 124; P. Dubreil [24], p. 148).

Définition 1.5. — On appelle *idéal à gauche* (resp. à droite) d'un demi-groupe D une partie non vide I de D telle que

$$a \in \mathrm{I}, \quad x \in \mathrm{D} \Rightarrow xa \in \mathrm{I} \qquad (\text{resp. } ax \in \mathrm{I}).$$

Un *idéal bilatère* de D est un sous-ensemble de D qui est en même temps un idéal à gauche et un idéal à droite. Si $\mathcal{B}$ est un idéal bilatère de D, on peut définir l'équivalence modulo $\mathcal{B}$ par $x \equiv y$ (mod $\mathcal{B}$) si et seulement si $x = y$ ou $x \in \mathcal{B}$, $y \in \mathcal{B}$. Cette équivalence est compatible avec la multiplication et permet par suite de définir le *demi-groupe quotient* $\mathrm{D}/\mathcal{B}$, qui est un demi-groupe avec zéro, ainsi que l'homomorphisme canonique φ de D sur $\mathrm{D}/\mathcal{B}$. (*cf.* D. Rees [66]).

Définition 1.6. — M étant un A-module à gauche, on appelle *sous-module* de M une partie non vide N de M telle que

1° $a \in \mathrm{N}$, $b \in \mathrm{N} \Rightarrow a - b \in \mathrm{N}$ (N est donc sous-groupe de M).

2° $a \in \mathrm{N}$, $\alpha \in \mathrm{A} \Rightarrow \alpha a \in \mathrm{N}$ (N est donc stable pour la multiplication par les éléments de A).

Étant donné un sous-module N de M, on définit le *module quotient* M/N et l'*homomorphisme canonique* de M sur M/N. (*cf.* N. Bourbaki [13], chap. II, § 1, p. 5).

Si l'anneau A est considéré comme un A-module à gauche $\mathrm{A_G}$, il y a identité entre les sous-modules de $\mathrm{A_G}$ et les idéaux à gauche de A; de même les sous-modules de $\mathrm{A_D}$ coïncident avec les idéaux à droite de A. Donc si I est un idéal à gauche de A, on peut définir A/I comme module quotient de $\mathrm{A_G}$ par I; A/I est ainsi muni d'une structure de A-module à gauche, mais non d'une structure d'anneau comme dans le cas où I est bilatère.

3. **Idéaux et sous-modules particuliers.** — *Définition* 1.7. — On appelle idéal à gauche *propre* d'un anneau A (resp. d'un demi-groupe D) un idéal à gauche différent de A (resp. de D). On appelle

idéal à gauche *maximal* de A (resp. de D) un idéal à gauche maximal dans l'ensemble des idéaux à gauche propres de A (resp. de D).

On définit de même un idéal à droite propre, un idéal à droite maximal, un idéal bilatère propre, un idéal bilatère maximal, un sous-module propre, un sous-module maximal.

Définition 1.8. — On appelle idéal à gauche *minimal* d'un anneau A un idéal à gauche minimal dans l'ensemble des idéaux à gauche de A différents de l'idéal nul O ([2]).

On définit de même :

— un idéal à gauche minimal d'un demi-groupe D (minimal dans l'ensemble des idéaux à gauche de A éventuellement différents de l'idéal nul O si D possède un élément nul o);

— un sous-module minimal d'un A-module M (minimal dans l'ensemble des sous-modules de M différents du sous-module nul O).

Un sous-module minimal N ne contient donc pas d'autre sous-module que N et O. On dit qu'un module M est *simple* s'il n'est pas réduit à O et s'il ne contient pas d'autre sous-module que lui-même et O (*cf.* N. Bourbaki [13], chap. VIII, § 3, p. 29).

Définition 1.9. — On dit qu'un sous-module N d'un module M est $\cap$*-irréductible* dans M s'il n'est pas l'intersection de deux sous-modules X et Y de M le contenant strictement :

$$\mathrm{N} = \mathrm{X} \cap \mathrm{Y} \Rightarrow \mathrm{N} = \mathrm{X} \quad \text{ou} \quad \mathrm{N} = \mathrm{Y}.$$

On peut dans cette condition remplacer l'intersection de deux sous-modules par une intersection finie.

On définit de même un idéal à gauche $\cap$-irréductible d'un anneau ou d'un demi-groupe, un idéal bilatère $\cap$-irréductible d'un anneau ou d'un demi-groupe (dans ce dernier cas, X et Y doivent être des idéaux bilatères).

Il ne faut pas confondre cette notion avec celle de module irréductible au sens de N. Jacobson [44], p. 4 (module simple M vérifiant $\mathrm{AM} \neq \mathrm{O}$ où AM désigne l'ensemble des éléments de la forme αx avec $\alpha \in \mathrm{A}$, $x \in \mathrm{M}$).

([2]) O représente ainsi l'idéal nul alors que l'élément nul de l'anneau a été noté o.

Quand on passe à une intersection infinie, la notion de module $\cap$-irréductible se renforce pour donner celle de module complètement $\cap$-irréductible :

Définition 1.10. — On dit qu'un sous-module N de M est *complètement $\cap$-irréductible* (¹) dans M si N n'est pas une intersection finie ou infinie de sous-modules X_α de M contenant strictement N :

$$N = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha \Rightarrow \exists \alpha \in \mathfrak{A}, \qquad \text{avec} \quad X_\alpha = N.$$

On définit de même, dans un anneau ou un demi-groupe D, un idéal à gauche ou un idéal bilatère complètement $\cap$-irréductible.

Tout idéal à gauche complètement $\cap$-irréductible est $\cap$-irréductible; la réciproque n'est pas vraie : dans l'anneau Z des entiers, l'idéal O est $\cap$-irréductible, mais il est l'intersection des idéaux (p), où p est un nombre premier quelconque. Les idéaux (p) sont maximaux, donc complètement $\cap$-irréductibles. Plus généralement, on a la propriété suivante :

Propriété 1.1. — *Dans un* A-*module* M, *tout sous-module* N *est l'intersection des sous-modules complètement $\cap$-irréductibles qui le contiennent.*

Posons $I = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$, où X_α décrit l'ensemble des sous-modules complètement $\cap$-irréductibles contenant N. Cet ensemble n'est pas vide puisque M lui-même en fait partie. On a $N \subseteq I$. Supposons qu'il existe $x \in I$ tel que $x \notin N$. Considérons l'ensemble des sous-modules de M contenant N et non x. Cet ensemble est inductif et possède, d'après le théorème de Zorn, un élément maximal N'. Celui-ci est complètement $\cap$-irréductible car la relation $N' = \bigcap_{\beta \in \mathfrak{B}} N_\beta$ avec $N_\beta \supset N'$ entraînerait $x \in N_\beta$, d'où $x \in N'$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il en résulte $I \subseteq N'$, d'où $x \in N'$, ce qui est impossible. On a donc bien $I = N$.

La propriété 1.1 vaut également pour les idéaux à gauche ou bilatères d'un anneau ou d'un demi-groupe.

(¹) On dit aussi *super-irréductible* (*Cf.* J. Guérindon [41], p. 474).

4. Idéaux premiers et radical de Baer et Mac Coy. — *Définition* 1.11. — L'idéal bilatère $\mathfrak{T}$ est *premier* dans l'anneau A si la propriété suivante est vérifiée :

$$aAb \subseteq \mathfrak{T} \Rightarrow a \in \mathfrak{T} \quad \text{ou} \quad b \in \mathfrak{T}$$

(*Cf.* N. H. Mac Coy [60], p. 823).

Cette définition équivaut à la suivante :

$$aAb \subseteq \mathfrak{T} \quad \text{et} \quad ab \in \mathfrak{T} \Rightarrow a \in \mathfrak{T} \quad \text{ou} \quad b \in \mathfrak{T}$$

qui n'en diffère qu'apparemment lorsque A n'admet pas d'élément unité.

Dans le cas commutatif, la notion d'idéal premier coïncide avec celle d'idéal complètement premier :

Définition 1.12. — Un idéal bilatère $\mathfrak{T}$ est *complètement premier* si l'on a la propriété suivante :

$$ab \in \mathfrak{T}, \quad b \notin \mathfrak{T} \Rightarrow a \in \mathfrak{T}$$

(*Cf.* H. Fitting [30], p. 22).

Tout idéal complètement premier est nécessairement premier; la réciproque n'est pas vraie : dans l'anneau M_2 des matrices carrées d'ordre 2 sur un corps, l'idéal nul O est premier sans être complètement premier.

La définition d'un idéal premier peut être donnée en utilisant le produit des idéaux bilatères, conformément à la propriété suivante :

Propriété 1.2. — *Pour qu'un idéal bilatère $\mathfrak{T}$ soit premier, il faut et il suffit qu'on ait la propriété suivante :*

$$\mathcal{B}\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{T} \Rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T} \quad \text{ou} \quad \mathcal{C} \subseteq \mathfrak{T}$$

(*Cf.* N. Jacobson [44], p. 195).

Définition 1.13. — Un *anneau* est dit *premier* resp. (*d'intégrité*) si l'idéal nul est premier (resp. complètement premier).

Un idéal bilatère $\mathfrak{T}$ d'un anneau A est donc premier (resp. complètement premier) si et seulement si l'anneau quotient $A/\mathfrak{T}$ est premier (resp. d'intégrité).

Définition 1.14. — Un idéal bilatère $\mathfrak{S}$ d'un anneau A est dit *semi-premier* si l'on a la propriété suivante :

$$\mathfrak{J}^n \subseteq \mathfrak{S} \Rightarrow \mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{S}$$

(*Cf.* A. Chatelet [17], p. 575).

Toutes ces notions s'appliquent sans modification à un demi-groupe D.

Si $\mathfrak{T}$ est un idéal complètement premier propre d'un anneau A (resp. d'un demi-groupe D), le complément A — $\mathfrak{T}$ (resp. D — $\mathfrak{T}$) est multiplicativement fermé.

Si $\mathfrak{T}$ est un idéal premier propre d'un anneau A (resp. d'un demi-groupe D), A — $\mathfrak{T}$ (resp. D — $\mathfrak{T}$) est un m-système de A (resp. de D) conformément à la définition suivante :

Définition 1.15. — On appelle *m-système*, dans un anneau A (resp. un demi-groupe D), un sous-ensemble non vide $\mathfrak{M}$ de A (resp. de D) tel que :

$$b \in \mathfrak{M}, \quad c \in \mathfrak{M} \Rightarrow \exists x \in \mathrm{A} \quad (\text{resp. D}) \quad \text{avec} \quad bxc \in \mathfrak{M}.$$

La théorie des m-systèmes, qui généralise celle des systèmes multiplicativement fermés, permet d'étendre au cas non commutatif des résultats démontrés par W. Krull dans le cas commutatif (*Cf.* W. Krull, [47], p. 9).

THÉORÈME 1.1. — *$\mathfrak{J}$ étant un idéal bilatère de l'anneau* A (*resp. du demi-groupe* D), *il y a identité entre les idéaux suivants :*

a. l'intersection S_a *des idéaux premiers contenant* $\mathfrak{J}$;

b. l'ensemble S_b *des éléments x tels que tout m-système contenant x rencontre* $\mathfrak{J}$;

c. l'intersection S_c *des idéaux semi-premiers contenant* $\mathfrak{J}$, *c'est-à-dire le plus petit idéal semi-premier contenant* $\mathfrak{J}$.

Démonstration. — 1° Il est clair que $S_c \subseteq S_a$.

2° Montrons que $S_b \subseteq S_c$. Soit $\beta \in S_b$, $\beta \notin S_c$; il existe donc un idéal semi-premier $\mathfrak{S} \supseteq \mathfrak{J}$ ne contenant pas β. On a $(\beta)^{\mathfrak{l}} \nsubseteq \mathfrak{S}$, en désignant par (β) l'idéal bilatère engendré par β. Par suite, il existe $\lambda \in \mathrm{A}$ (resp. D) tel que $\beta_1 = \beta\lambda\beta \notin \mathfrak{S}$. En recommençant ce raisonnement avec $\beta_1 \notin \mathfrak{S}$, on considère $\beta_2 = \beta_1\lambda_1\beta_1 \notin \mathfrak{S}$ et ainsi de suite; on obtient alors un m-système $\{\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots\}$ qui ne rencontre pas $\mathfrak{S}$, donc qui ne rencontre pas $\mathcal{J}$ et qui contient β, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3° On a aussi $S_a \subseteq S_b$. Supposons $\alpha \in S_a$, $\alpha \notin S_b$; il existe donc un m-système $\mathcal{M}$ contenant α et ne rencontrant pas $\mathcal{J}$. Le théorème de Zorn entraîne l'existence d'un idéal maximal $\mathfrak{T}$ contenant $\mathcal{J}$ et ne rencontrant pas $\mathcal{M}$. Cet idéal $\mathfrak{T}$ est premier : en effet, soit $\mathcal{B} \supset \mathfrak{T}$, $\mathcal{C} \supset \mathfrak{T}$; il existe $b \in \mathcal{B} \cap \mathcal{M}$, $c \in \mathcal{C} \cap \mathcal{M}$, d'où λ tel que $b\lambda c \in \mathcal{M}$ et par suite $b\lambda c \notin \mathfrak{T}$, d'où $\mathcal{BC} \nsubseteq \mathfrak{T}$. L'idéal $\mathfrak{T}$ est bien premier et l'on devrait avoir $\alpha \in \mathfrak{T}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

En résumé, $S_c \subseteq S_a \subseteq S_b \subseteq S_c$, ce qui démontre le théorème.

Corollaire. — *Pour qu'un idéal soit semi-premier, il faut et il suffit qu'il soit l'intersection (finie ou infinie) d'idéaux premiers.*

Définition 1.16. — L'idéal déterminé dans le théorème 1.1 s'appelle le *radical de* Baer *et* Mac Coy de $\mathcal{J}$ et se note $\mathcal{R}(\mathcal{J})$. C'est donc l'idéal semi-premier minimum contenant $\mathcal{J}$ ou encore l'intersection des idéaux premiers contenant $\mathcal{J}$.

Nous le retrouverons plus loin dans le cas d'une condition de chaîne sous le nom de radical primaire (*voir* chap. V, th. 5.1). Il a été obtenu par R. Baer en 1943 sous le nom de *radical inférieur* (lower radical, R. Baer [8]). La démonstration du théorème utilisant les m-systèmes et les idéaux premiers est dûe en substance à N. H. Mac Coy [60]. L'extension aux demi-groupes a été faite en particulier par K. Iseki [43].

L'application $\mathcal{J} \to \mathcal{R}(\mathcal{J})$ vérifie les propriétés suivantes mises en évidence par S. A. Amitsur [4] dans sa théorie générale des radicaux et qu'on peut déduire facilement du théorème 1.1.

1° $$\mathcal{R}(\mathcal{J}) \supseteq \mathcal{J};$$
2° $$\mathcal{R}(\mathcal{R}(\mathcal{J})) = \mathcal{R}(\mathcal{J});$$
3° $$\mathcal{R}(\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2) = \mathcal{R}(\mathcal{J}_1) \cap \mathcal{R}(\mathcal{J}_2).$$

Signalons également une théorie récente des radicaux, utile pour la classification des groupes, qui est due à l'école soviétique (*cf.* A. G. Kurosh [49], B. I. Plotkin [65]).

Définition 1.17. — Un anneau A est dit *semi-premier* si l'idéal nul est semi-premier.

Pour qu'un anneau A soit semi-premier, il faut donc et il suffit que le radical de Baer et Mac Coy de O soit nul.

La notion de radical s'étend aux idéaux à gauche X d'un anneau A grâce à *l'idéal bilatère* $X\cdot .A$ *appelé résiduel à gauche de* X *par* A, qui est l'ensemble des éléments $x \in A$ tels que $xA \subseteq X$. On définit de même l'idéal bilatère $X\cdot .D$ relatif à l'idéal à gauche X d'un demi-groupe D avec zéro, ou l'idéal bilatère $X\cdot .M$ relatif au sous-module X d'un A-module M, ce qui permet d'étendre la notion de radical aux idéaux à gauche d'un anneau ou aux sous-modules d'un module. L'idéal $X\cdot .M$ s'appelle encore *ombré de* X *dans* M (*cf.* J. Guérindon [41], p. 462); lorsque X est le module nul, $O\cdot .M$ *est dit l'annulateur de* M.

Définition 1.18. — On appelle *radical de* Baer *et* Mac Coy *de l'idéal à gauche* X *d'un anneau* A (resp. de l'idéal à gauche X d'un demi-groupe D avec zéro, du sous-module X d'un A-module M) le radical de Baer et Mac Coy de l'idéal bilatère $X\cdot .A$ de A (resp. de l'idéal bilatère $X\cdot .D$ de D, de l'idéal bilatère $X\cdot .M$ de A).

5. Idéaux primitifs et radical de Jacobson. — *Définition* 1.19. — X étant un idéal à gauche d'un anneau A, on dit que *e est élément unité à droite modulo* X si on a, pour tout $a \in A$,

$$a - ae \in X.$$

S'il existe un élément unité à droite modulo X, on dit que l'idéal à gauche X est *régulier* (*cf.* N. Jacobson [44], p. 5; N. Bourbaki [13], chap. VIII, p. 161).

Si A possède un élément unité e, cet élément e est élément unité à droite modulo X, quel que soit l'idéal à gauche X.

Propriété 1.3. — *Soit* X *un idéal à gauche propre régulier, e étant élément unité à droite modulo* X. *On peut trouver un idéal à gauche maximal* Y *contenant* X *tel que e soit élément unité à droite modulo* Y.

Remarquons en effet que e n'appartient pas à X; sinon on aurait $X = A$ en vertu de $a - ae \in X$. L'ensemble des idéaux contenant X et ne contenant pas e est inductif; soit Y un idéal maximal parmi ceux qui ont cette propriété (théorème de Zorn). Y est alors un idéal maximal au sens de la définition 1.7 car on a d'abord $Y \neq A$ puisque $e \notin Y$ et, si $Z \supset Y$, on a

$$e \in Z, \quad \text{d'où} \quad \forall a \in A, \quad a = a - ae + ae \in Z$$

et par suite $Z = A$. De plus, e est élément unité à droite modulo Y.

Définition 1.20. — Un idéal bilatère $\mathfrak{T}$ est dit *primitif* (*à gauche*) s'il est de la forme $\mathfrak{T} = M^{\cdot}.A$ où M est un idéal à gauche maximal régulier de l'anneau A.

Il revient au même de dire que $\mathfrak{T}$ est l'annulateur d'un A-module simple $\mathfrak{M}$ tel que $A\mathfrak{M} \neq O$ (*cf.* N. Jacobson [44], p. 4).

Propriété 1.4. — *Tout idéal primitif est premier* (*cf.* N. Jacobson [44], p. 195). Cette propriété est un cas particulier d'une propriété générale qui sera vue plus loin : tout résiduel à gauche propre essentiel de M est un idéal premier (chap. VII, § 2, prop. 7.6).

Propriété 1.5. — *a étant un élément n'appartenant pas à l'idéal à gauche maximal* M, *l'idéal à gauche* $X = M^{\cdot}.a$ (4) *est ou bien l'idéal* A *ou bien un idéal à gauche maximal régulier.*

En effet, soit $b \notin M^{\cdot}.a$ donc $ba \notin M$. M étant maximal, il existe $e \in (b|$ (5) tel que $a = ea + m$ avec $m \in M$. On a

$$(x - xe)a = xea + xm - xea = xm \in M,$$

d'où $x - xe \in M^{\cdot}.a$, ce qui prouve que e est élément unité à droite modulo $M^{\cdot}.a$. De plus, $x \in M^{\cdot}.a + (b|$ pour tout $b \notin M^{\cdot}.a$, ce qui montre que $M^{\cdot}.a$ est maximal.

Théorème 1.2. — *$\mathfrak{J}$ étant un idéal bilatère d'un anneau* A, *il y a identité entre les idéaux suivants :*

a. l'intersection S_a des idéaux primitifs contenant $\mathfrak{J}$;

b. l'intersection S_b des idéaux à gauche maximaux réguliers contenant $\mathfrak{J}$.

Montrons que $S_a \subseteq S_b$. $\mathfrak{T} = M^{\cdot}.A$ étant un idéal primitif, on a $\mathfrak{T} \subseteq M$; en effet, pour $x \in \mathfrak{T}$, on a, en désignant par e l'élément

(4) $M^{\cdot}.a$ désigne l'idéal à gauche formé par les éléments $x \in A$ tels que $xa \in M$.
(5) $(b|$ représente l'idéal à gauche engendré par b.

unité à droite modulo M, $x - xe \in M$, d'où $x \in M$ puisque $xe \in M$. Il en résulte $S_a \subseteq S_b$.

Inversement, montrons que $S_b \subseteq S_a$. En effet,

$$S_a = \bigcap_{M} (M \cdot . A) = \bigcap_{M \cdot . a} (M \cdot . a)$$

est l'intersection d'idéaux à gauche maximaux réguliers d'après la propriété 1.5. On a donc bien $S_b \subseteq S_a$.

Définition 1.21. — L'idéal bilatère défini par le théorème 1.2 s'appelle le *radical* de Jacobson (à gauche) de $\mathcal{J}$ dans A. On le note $\mathcal{R}_J(\mathcal{J})$.

On définit de même le radical de Jacobson à droite de $\mathcal{J}$. Un résultat remarquable est l'identité du radical de Jacobson à gauche et du radical de Jacobson à droite. On le démontre au moyen de la notion d'élément quasi régulier dans le cas où $\mathcal{J} = O$, ce qui ne restreint pas la généralité, grâce à la considération de l'anneau quotient $A/\mathcal{J}$.

Définition 1.22. — On dit que $a \in A$ est *quasi régulier à gauche* s'il existe un élément b tel que $a + b - ba = 0$.

Si A possède un élément unité, cette propriété équivaut à $(1 - b)(1 - a) = 1$ et elle exprime que $1 - a$ est inversible à gauche. On définit de même un élément quasi régulier à droite. Un élément a est *quasi régulier* s'il existe b tel que

$$a + b - ba = a + b - ab = 0.$$

On a alors la propriété caractéristique suivante du radical de Jacobson à gauche $\mathcal{R}_J(\mathcal{J})$:

PROPRIÉTÉ 1.6. — *Le radical de Jacobson à gauche de* O [6] *est le plus grand idéal à gauche constitué d'éléments quasi réguliers.*

Montrons d'abord que $\mathcal{R}_J(O)$ est le plus grand idéal à gauche constitué d'éléments quasi réguliers à gauche. Soit $a \in \mathcal{R}_J(O)$. Les éléments de la forme $b - ba$ avec $b \in A$ forment un idéal à gauche X. Si cet idéal X est égal à A, il existe b tel que $b - ba = -a$ et a est quasi régulier à gauche. Sinon, X est propre et régulier et a est

---

[6] Qu'on appelle aussi radical de Jacobson de l'anneau.

élément unité à droite modulo X. X est donc contenu d'après la propriété 1.3 dans un idéal à gauche maximal Y ayant les mêmes propriétés. On aurait donc $a \in Y$ d'où $b = b - ba + ba \in Y$ quel que soit $b \in A$ c'est-à-dire $Y = A$. ce qui est contraire à l'hypothèse. Réciproquement, supposons a contenu dans un idéal à gauche dont tous les éléments sont quasi réguliers à gauche; si l'on avait $a \notin M$, où M est un idéal à gauche maximal régulier tel que e soit élément unité à droite modulo M, il existerait $c \in (a|$ et $m \in M$ avec $e = m + c$. On en déduirait, puisque c est quasi régulier à gauche, l'existence de b tel que $c + b - bc = 0$, c'est-à-dire $e - m + b - b(e-m) = 0$, d'où $e \in M$, ce qui est impossible.

La propriété 1.6 en résulte d'après la propriété suivante :

Propriété 1.7. — *Un idéal à gauche* X *dont tous les éléments sont quasi réguliers à gauche a tous ses éléments quasi réguliers.*

Soit en effet $a \in X$, il existe donc b tel que

$$a + b - ba = 0.$$

On en déduit $b \in X$. Donc il existe c tel que

$$c + b - cb = 0, \qquad \text{d'où} \qquad (c+b)a - c(a+b) = 0,$$

c'est-à-dire

$$ba - cb = 0 \qquad \text{ou} \qquad a - c = 0$$

et

$$a + b - ab = 0$$

(C. Q. F. D.).

Les propriétés 1.6 et 1.7 entraînent l'identité du radical de Jacobson à gauche et du radical de Jacobson à droite. On a aussi le corollaire suivant :

Corollaire. — *Tout nil-idéal à gauche est contenu dans le radical de Jacobson de l'anneau.*

Un nil-idéal à gauche est en effet un idéal à gauche dont tous les éléments sont nilpotents et un élément nilpotent est en particulier quasi régulier car $a^n = 0$ entraîne, en posant $b = -a - a^2 - \ldots - a^{n-1}$,

$$a + b - ba = a + b - ab = 0.$$

PROPRIÉTÉ 1.8. — *Le radical de Baer et Mac Coy d'un idéal bilatère $\mathcal{J}$ est contenu dans le radical de Jacobson de $\mathcal{J}$.*

Le premier est en effet l'intersection de tous les idéaux premiers contenant $\mathcal{J}$ (théorème 1.1) tandis que le deuxième est l'intersection de ceux de ces idéaux premiers qui sont primitifs (théorème 1.2).

On n'a pas en général l'égalité $\mathcal{R}(\mathcal{J}) = \mathcal{R}_J(\mathcal{J})$ comme le montre déjà le cas commutatif : cas d'un anneau d'intégrité commutatif local et unitaire dont l'idéal maximal M est non nul, qui donne $\mathcal{R}(O) = O$ et $\mathcal{R}_J(O) = M$ [exemples : anneau des fractions $\frac{a}{b}$ où a et b sont entiers, b n'étant pas un multiple du nombre premier p; anneau des fractions $\frac{f(x)}{g(x)}$, où $f(x)$, $g(x) \in K[x]$, avec $g(0) \neq 0$]. Nous verrons au chapitre II (§ 3, propriété 2.4) un cas intéressant pour lequel $\mathcal{R}(\mathcal{J}) = \mathcal{R}_J(\mathcal{J})$ (cas d'un anneau artinien unitaire). D'une façon plus générale, les anneaux pour lesquels $\mathcal{R}(\mathcal{J}) = \mathcal{R}_J(\mathcal{J})$ pour tout idéal bilatère $\mathcal{J}$ sont appelés *anneaux de* Jacobson et ils jouissent d'intéressantes propriétés. (*cf.* O. Goldmann [38] ou W. Krull [48]).

La notion de radical de Jacobson peut s'étendre à un idéal à gauche X d'un anneau A en considérant l'idéal bilatère $X \cdot . A$, ou à un sous-module X d'un A-module M en considérant l'idéal bilatère $X \cdot . M$, conformément à définition suivante :

Définition 1.23. — On appelle *radical de Jacobson d'un idéal à gauche* X d'un anneau A (resp. d'un sous-module X d'un A-module M) le radical de Jacobson de l'idéal bilatère $X \cdot . A$ (resp. de l'idéal bilatère $X \cdot . M$).

Ainsi, le radical de Jacobson de l'idéal à gauche X d'un anneau A unitaire coïncide avec l'intersection des idéaux à gauche maximaux contenant $X \cdot . A$, mais il ne coïncide pas nécessairement avec l'intersection des idéaux à gauche maximaux contenant X, si X n'est pas un idéal bilatère. Par exemple, si A est l'anneau des matrices carrées d'ordre $n \geq 2$ sur un corps K, et si X est un idéal à gauche maximal de A, le radical de Jacobson de X est nul, donc différent de X. On peut donc aussi considérer avec certains auteurs un autre radical de l'idéal à gauche X de l'anneau A supposé unitaire (resp. du sous-module X du A-module M) égal à l'intersection des idéaux à gauche maximaux contenant X (resp. des sous-modules maximaux contenant X) (*cf.* N. Bourbaki [13], chap. VIII, modules et anneaux semi-simples, p. 63). De même, on peut considérer le radical de Jacobson à gauche d'un idéal à gauche d'un demi-groupe D à élément unité comme l'intersection des idéaux à gauche maximaux de D contenant X; il faut alors remarquer, dans le cas où $X = \mathfrak{J}$ est bilatère, que le radical de Jacobson à gauche de $\mathfrak{J}$ ne coïncide pas nécessairement avec le radical de Jacobson à droite, contrairement à ce qui se passe dans un anneau. Il en est ainsi par exemple pour le demi-groupe D des applications d'un ensemble infini E dans lui-même (7).

Signalons enfin que l'application $\mathfrak{J} \to \mathcal{R}_J(\mathfrak{J})$ satisfait pour un anneau aux propriétés de S. A. Amitsur déjà signalées pour le radical de Baer et Mac Coy.

CHAPITRE II.

Conditions de chaîne.

1. Anneaux, modules et demi-groupes nœthériens. — *Définition* 2.1. — On dit qu'un *anneau* A *est nœthérien à gauche* (resp. à droite, bilatère) s'il vérifie la condition de chaîne ascendante (finie) pour les idéaux à gauche (resp. à droite, bilatères). L'anneau A est dit *nœthérien* s'il est nœthérien à gauche et à droite.

Cette condition a été introduite par E. Nœther (*cf.* [63]) dans le cas commutatif en 1921 pour exprimer que toute suite strictement croissante d'idéaux

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$$

est nécessairement finie. Elle équivaut à la *condition maximale* qui signifie que tout ensemble d'idéaux de A possède au moins un idéal maximal; elle équivaut encore à la *condition de base finie* qui signifie que tout idéal de A possède un nombre fini de générateurs.

On peut donner des exemples d'anneaux nœthériens à gauche et non à droite : anneau de polynomes à deux variables x et y non

(7) Le radical de Jacobson à gauche est alors l'idéal à gauche propre maximal constitué par toutes les applications non injectives. Le radical de Jacobson à droite est l'idéal à droite propre maximal constitué par toutes les applications non surjectives.

permutables, à coefficients dans un corps commutatif K dont les éléments sont permutables avec x et y avec les relations $yx = 0$, $yy = 0$ (*cf.* H. Cartan et S. Eilenberg [16], p. 16). L'anneau précédent n'est pas premier, mais en considérant l'anneau des polynomes à une variable x et à coefficients dans le corps $K(y)$, avec les relations

$$\forall f(y) \in K(y), \qquad xf(y) = f(y^2)x,$$

on obtient un anneau d'intégrité, donc premier, qui est nœthérien à gauche et non à droite (*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [56], ex. 1).

Dans le cas commutatif, l'exemple le plus important d'anneau nœthérien est l'anneau $A = K[X_1, \ldots, X_n]$ des polynomes à n variables permutables sur un corps commutatif K (théorème de la base finie, démontré en 1890 par D. Hilbert [42]). Dans le cas non commutatif, on ne possède pas d'aussi bons exemples de transfert du caractère nœthérien ([8]). Cependant, un exemple important d'anneau non commutatif nœthérien est constitué par *l'algèbre enveloppante universelle* A(L) *d'une algèbre de Lie* L *de dimension finie sur un corps commutatif* K, qu'on peut obtenir de la façon suivante :

Soit A l'anneau des polynomes à n variables $X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ non permutables, à coefficients dans un corps commutatif K; l'anneau A(L) est l'anneau-quotient de A obtenu en imposant les relations

$$X_i X_j - X_j X_i = L_{ij}(X),$$

où $L_{ij}(X) = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k X_k$ est une forme linéaire donnée ($i, j = 1, 2, \ldots, n$; $i < j$). Si les formes $L_{ij}(X)$ sont nulles, A(L) est l'anneau $K[X_1, \ldots, X_n]$; si elle ne sont pas toutes nulles, A(L) est un anneau non commutatif. La méthode originale de Hilbert peut être appliquée pour montrer que A(L) *est un anneau d'intégrité non commutatif nœthérien à gauche et à droite* ([9]).

([8]) L'anneau des polynomes à deux variables non permutables x et y sur un corps commutatif K n'est pas nœthérien, car l'idéal bilatère engendré par les éléments $xy^n x (n = 1, 2, \ldots)$ n'a pas de base finie.

([9]) Ce résultat est aussi une conséquence du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (*cf.* H. Cartan et S. Eileiberg [16], p. 271).

Tout anneau quotient d'un anneau nœthérien à gauche, tout produit d'un nombre fini d'anneaux nœthériens à gauche sont encore des anneaux nœthériens à gauche.

Définition 2.2. — On dit qu'un A-module à gauche M est *nœthérien* si M vérifie la condition de chaîne ascendante pour les sous-modules.

Propriété 2.1. — *Tout module à gauche* M *unitaire de type fini (c'est-à-dire ayant un nombre fini de générateurs) sur un anneau* A *nœthérien a gauche est nœthérien.*

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre p des générateurs $x_i (i = 1, 2, \ldots, p)$.

1° Supposons $p = 1$, donc $M = Ax_1$; soit M_n un sous-module de M. Considérons l'idéal à gauche I_n de l'anneau A défini par

$$I_n = M_n^{\cdot}.x_1 = \{\alpha \in A;\, \alpha x_1 \in M_n\}.$$

On a

$$M_n = I_n x_1.$$

Une suite strictement croissante de sous-modules M_n définit ainsi une suite strictement croissante d'idéaux à gauche X_n qui est finie par hypothèse. La suite $\{M_n\}$ est donc également finie.

2° Supposons la propriété vraie pour $p - 1$. Considérons un sous-module M_n du A-module $M = Ax_1 + \ldots + Ax_p$. L'ensemble des éléments $\alpha_1 \in A$ tels qu'il existe $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$ avec $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p \in M_n$ est un idéal à gauche I_n de l'anneau A. Les idéaux I_n croissent avec n lorsque $\{M_n\}$ forme une suite croissante de sous-modules. Ils sont donc stationnaires à partir d'un certain rang m. Soit $k \geqq m$ et

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p \in M_k;$$

on a $\alpha_1 \in I_k = I_m$; il existe donc

$$y = \alpha_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p \in M_m, \qquad \text{d'où} \qquad x - y \in M_k \cap (Ax_2 + \ldots + Ax_p).$$

On en déduit $M_k = M_m + M_k \cap (Ax_2 + \ldots + Ax_p)$ pour $k \geqq m$. La propriété en résulte d'après l'hypothèse d'induction faite sur les sous-modules de $Ax_2 + \ldots + Ax_p$.

Appliquée aux demi-groupes, la condition de chaîne ascendante conduit à la notion de demi-groupe nœthérien.

Définition 2.3. — On dit qu'un *demi-groupe* D *est nœthérien à gauche* (resp. à droite, bilatère) s'il vérifie la condition de chaîne ascendante pour les idéaux à gauche (resp. à droite, bilatères). Le demi-groupe est dit *nœthérien* s'il est nœthérien à gauche et à droite.

2. **Anneaux, modules et demi-groupes artiniens.** — *Définition* 2.4. — Un *anneau* A *est dit artinien à gauche* (resp. à droite, bilatère) s'il vérifie la condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche de A (resp. à droite, bilatères). L'anneau est dit *artinien* quand il est artinien à gauche et à droite.

L'expression d'anneau artinien, ou anneau d'Artin, a été donnée en raison de travaux d'E. Artin (*cf.* [5]) publiés en 1927

Dans un anneau d'Artin, toute suite strictement décroissante d'idéaux

$$X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$$

est nécessairement finie, tout ensemble d'idéaux possède un idéal minimal, toute intersection infinie d'idéaux est l'intersection d'une partie finie d'entre eux.

L'exemple le plus simple d'anneau artinien est constitué par l'anneau M_n des matrices carrées d'ordre n sur un corps K commutatif ou non. Cet anneau est en même temps artinien et nœthérien, car M_n est aussi un espace vectoriel E à gauche sur K, de base e_{ij} (10), de dimension finie n^2, et un idéal à gauche de M_n est en particulier un sous-espace vectoriel de E. Or ces sous-espaces vectoriels vérifient les conditions de chaîne ascendante et descendante. L'anneau M_n est aussi un anneau premier qui ne contient pas d'autre idéal bilatère que O. En effet, on montre aisément que, pour $a \neq 0$, il existe x_i et y_i tels que

$$1 = \sum_{i=1}^{i=n} x_i a y_i \quad (^{11})$$

(10) e_{ij} est la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf l'élément a_{ij} qui est l'élément unité de K.

(11) *Cf.* B. L. Van der Waerden [68], t. II, p. 109. Si $a = \sum_{i,j} \alpha_{ij} e_{ij}$ avec $\alpha_{pq} \neq 0$, on forme $\alpha_{pq}^{-1} e_{rp} a e_{qr} = e_{rr}$ et l'on obtient $\sum_{r=1}^{r=n} e_{rr} = 1$.

L'hypothèse $aAb = O$, $a \neq o$, entraîne donc $b = \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i a y_i\right) b = o$, ce qui prouve que $A = M_n$ est un anneau premier, d'où :

Propriété 2.2. — *L'anneau* M_n *des matrices carrées d'ordre n sur un corps quelconque* K *est un anneau artinien premier unitaire.*

Il est commode dans certains cas de considérer la *condition de chaîne descendante* (*finie*), *restreinte* aux idéaux à gauche (resp. à droite, bilatères) qui contiennent un idéal donné $X_0 \neq O$ (*cf.* I. S. Cohen [21], H. Grell [39]).

La définition 2.4 s'applique évidemment aux demi-groupes :

Définition 2.5. — Un *demi-groupe* D *est appelé artinien à gauche* (resp. à droite, bilatère) s'il vérifie la condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche (resp. à droite, bilatères) de D. Le demi-groupe est dit *artinien* s'il est artinien à gauche et à droite.

On pourra trouver une exploitation intéressante de conditions minimales portant sur d'autres sous-ensembles que les idéaux dans P. Lefebvre [51].

Exemple. — Soit D l'ensemble $\{N, \infty\}$ des nombres naturels 1, 2, ..., n, ... complétés par ∞. En prenant comme opération $ab = \min\{a, b\}$, on obtient un demi-groupe artinien non nœthérien; en prenant comme opération $ab = \max\{a, b\}$, on obtient un demi-groupe nœthérien non artinien.

Dans le cas des modules, on pose la définition suivante :

Définition 2.6. — On dit qu'un A-*module à gauche* M *est artinien* si M vérifie la condition de chaîne descendante pour les sous-modules.

Propriété 2.3. — *Tout module à gauche* M *unitaire de type fini sur un anneau* A *artinien à gauche est artinien.*

Il suffit de reprendre avec quelques modifications évidentes la démonstration de la propriété 2.1 qui s'applique aussi bien au cas artinien qu'au cas nœthérien.

3. Structure d'un anneau premier unitaire artinien à gauche. — Nous avons vu comme exemple d'anneau artinien premier unitaire le cas de l'anneau M_n des matrices carrées d'ordre n sur un corps quelconque K (propriété 2.2), ou ce qui est équivalent, l'anneau isomorphe $\mathcal{L}_K(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur un corps K. Nous allons montrer que, réciproquement, tout anneau premier unitaire artinièn à gauche peut être obtenu de cette façon.

Soit A un anneau unitaire artinien à gauche, M un idéal à gauche minimal de A que nous considérons comme un A-module à gauche. L'anneau $\mathcal{L}_A(M)$ des endomorphismes de M [12] est un corps K (*lemme de Schur*); écrivons l'endomorphisme $\alpha : x \to x\alpha$, de sorte que M devient un espace vectoriel à droite E sur K. L'homothétie $x \to ax$ de M dans lui-même est un endomorphisme de l'espace vectoriel E sur K. Nous allons voir que, réciproquement, tout endomorphisme de l'espace vectoriel E sur K est une homothétie. On utilise pour cela le *lemme de densité* dont nous allons donner l'énoncé et la démonstration :

Lemme de densité. — *Soient* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *des éléments de* E *linéairement indépendants sur* K. *Si* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *sont des éléments quelconques de* E, *il existe un élément* $a \in A$ *tel que* $y_i = ax_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

La démonstration se fait au moyen de la relation suivante :

$$0.\cdot\left(\bigcap_{i=1}^{n}(0\cdot.x_i)\right) = x_1K + \ldots + x_nK, \tag{1}$$

où $0\cdot.x_i$ désigne l'annulateur de $x_i \in E$ dans A et $0.\cdot S$ l'annulateur de $S \subseteq A$ dans E.

1° $n = 1$ ou $0.\cdot(0\cdot.x_1) = x_1K$.

On a l'inclusion $x_1K \subseteq 0.\cdot(0\cdot.x_1)$ puisque $ax_1 = 0$ entraîne $\forall \alpha \in K$, $ax_1\alpha = 0$. Inversement, supposons

$$ax_1 = 0 \Rightarrow ay = 0.$$

[12] Appelé encore *commutant* de M (*cf.* N. Bourbaki [13], chap. VIII, § 1, p. 10 et § 4, p. 40).

Cette relation permet la définition d'un endomorphisme α de $M = Ax_1$ par l'application $\alpha : ax_1 \rightarrow \alpha y$. On a donc, pour tout $a \in A$, $ay = ax_1\alpha$ et en particulier $y = x_1\alpha \in x_1K$.

2° *n quelconque*. On a l'inclusion

$$O.\cdot\left(\bigcap_{i=1}^{n} O\cdot . x_i\right) \supseteq x_1K + \ldots + x_nK.$$

Inversement, supposons

$$ax_1 = 0, \ldots, ax_{n-1} = 0, \; ax_n = 0 \Rightarrow ay = 0.$$

Cette relation permet de définir pour tous les a tels que $ax_1 = 0, \ldots,$ $ax_{n-1} = 0$, un endomorphisme α_n de E par l'application $\alpha_n : ax_n \rightarrow ay_n$. En effet, ax_n ne peut être nul pour tous les a tels que

$$ax_1 = \ldots = ax_{n-1} = 0,$$

sans quoi l'on aurait $x_n \in x_1K + \ldots + x_{n-1}K$ d'après l'hypothèse d'induction. On peut alors mettre tout élément de E sous la forme $a'x_n$ avec $a'x_1 = \ldots = a'x_{n-1} = 0$. On a donc, pour tout a tel que

$$ax_1 = \ldots = ax_{n-1} = 0, \qquad ay = ax_n\alpha_n \quad \text{ou} \quad a(y - x_n\alpha_n) = 0.$$

On en déduit, d'après l'hypothèse d'induction,

$$y - x_n\alpha_n = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_{n-1}\alpha_{n-1},$$

donc

$$y \in x_1K + \ldots + x_nK.$$

Appliquons la relation (1) à la démonstration du lemme. On choisit $a_i \in A$ de façon que $a_ix_i \neq 0$ et $a_ix_j = 0$ pour tout $j \neq i$.

Puis on prend $b_i \in A$ tel que $y_i = b_ia_ix_i$ et enfin $a = \sum_{i=1}^{i=n} b_ia_i$, ce qui démontre le lemme de densité.

Le lemme de densité nous permet d'identifier un endomorphisme quelconque de l'espace vectoriel E avec une homothéthie $x \rightarrow ax$ à condition que E soit de dimension finie sur K. Or cela résulte aussi de la relation (1) car les sous-espaces vectoriels croissants $V_n = x_1K + \ldots + x_nK$ définissent les idéaux à gauche décroissants $\bigcap_{i=1}^{i=n}(O^{\cdot}.x_i)$; ces idéaux à gauche stationnent au bout d'un certain rang n en vertu de la condition minimale. Il en est de même des sous-espaces V_n d'après la relation (1).

L'application $a \rightarrow f_a : x \rightarrow ax$ est une bijection car l'égalité $ax = bx$ pour tout $x \in M$ entraîne $(a - b)M = O$ ou $(a - b)AM = O$, c'est-à-dire $a - b = 0$ puisque l'anneau A est premier, d'où $a = b$.

On a donc établi le théorème suivant qui donne la structure d'un anneau premier unitaire artinien à gauche :

Théorème 2.1. — *Pour qu'un anneau* A *soit un anneau premier unitaire artinien à gauche, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel* E *de dimension finie n sur un corps* K (ou encore à l'anneau des matrices carrées d'ordre n sur un corps K).

Corollaire 1. — *Si* A *est un anneau unitaire artinien à gauche, tout idéal bilatère premier* $\mathfrak{T}$ *est un idéal bilatère maximal* [13].

En effet $A/\mathfrak{T}$ est un anneau *premier* unitaire artinien à gauche dans lequel l'idéal O est un idéal bilatère maximal.

Corollaire 2. — *Tout anneau premier unitaire artinien à gauche est artinien et nœthérien.*

Définition 2.7. — On appelle *anneau simple* un anneau premier unitaire artinien à gauche.

Propriété 2.4. — *Tout anneau artinien à gauche unitaire est un anneau de Jacobson.*

On montre en effet, pour un idéal bilatère $\mathfrak{J}$ quelconque, la relation $\mathfrak{R}(\mathfrak{J}) = \mathfrak{R}_J(\mathfrak{J})$. Cela résulte de la définition de $\mathfrak{R}(\mathfrak{J})$ par l'intersection des idéaux premiers contenant $\mathfrak{J}$ (théorème 1.1), de la définition de $\mathfrak{R}_J(\mathfrak{J})$ par l'intersection des idéaux primitifs contenant $\mathfrak{J}$ (théorème 2.1) et du fait que tout idéal bilatère maximal (en tant qu'idéal bilatère) est primitif.

(13) On peut aussi établir cette propriété directement (*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [53], II, p. 470 et ce fascicule, chap. IX, th. 9.5).

Nous reviendrons en cours de route sur les anneaux unitaires artiniens à gauche et nous verrons notamment que ce sont des anneaux nœthériens à gauche (Chap. III, théorème 3.4).

La structure d'un anneau premier nœthérien à gauche n'est pas aussi simple; elle a été donnée récemment dans le cas d'un anneau premier *nœthérien à gauche et à droite* par A. W. Goldie (*cf.* [37]); celui-ci a montré qu'un tel anneau A possède un anneau de quotients à gauche ([13 bis]) et à droite Q qui est précisément un anneau M_n artinien premier unitaire. Nous avons de même montré (*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [56]) qu'un anneau premier *nœthérien à gauche* possède un anneau de quotients à gauche qui est encore un anneau M_n et nous avons donné des exemples d'anneaux premiers nœthériens à gauche qui ne sont pas nœthériens à droite (*cf.* § 1).

CHAPITRE III.

ALGÈBRES D'IDÉAUX ET DE SOUS-MODULES. RÉSIDUELS A DROITE ET A GAUCHE.

1. Définition d'une ($\mathfrak{T}$)-algèbre. — Malgré les distinctions à faire entre les idéaux d'un demi-groupe d'une part et les idéaux d'un anneau ou les sous-modules d'un module d'autre part, le besoin d'unifier les raisonnements valables dans les deux cas a donné naissance à une algèbre développée d'abord dans le cas des idéaux bilatères par L. Lesieur [52], puis dans le cas général par L. Lesieur et R. Croisot [53], I. Nous allons donner les axiomes de cette algèbre ainsi que les premières propriétés.

Une ($\mathfrak{T}$)-algèbre (L) est constituée par deux treillis ($\mathfrak{T}$) et (L) satisfaisant aux axiomes suivants :

AXIOME A. — *($\mathfrak{T}$) est un demi-groupe réticulé quasi-entier complet* ([14]).

([13 bis]) Anneau Q tel que tout élément de Q se mette sous la forme $b^{-1}a$, avec $a \in A$, $b \in A$, b régulier (c'est-à-dire non diviseur de zéro).

([14]) Nous rappelons brièvement les définitions. Pour plus de détails, se reporter à M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT [23].

$(\mathcal{T})$ est donc muni d'une structure de demi-groupe multiplicatif et d'une structure de treillis complet. Les opérations du treillis $(\mathcal{T})$ seront notées $+$ pour l'union (ou addition) (elle correspond à l'addition dans la plupart des applications algébriques que nous avons en vue), $\cap$ pour l'intersection; la relation d'ordre est notée $\subseteq$ et la relation d'ordre strict associée $\subset$. La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}\mathcal{B}+\mathcal{A}\mathcal{C}; \qquad (\mathcal{B}+\mathcal{C})\mathcal{A}=\mathcal{B}\mathcal{A}+\mathcal{C}\mathcal{A}.$$

De plus, la distributivité a lieu même pour une somme infinie :

$$\mathcal{A}\Big(\sum_{\iota\in \mathrm{I}}\mathcal{B}_\iota\Big)=\sum_{\iota\in \mathrm{I}}\mathcal{A}\mathcal{B}_\iota; \qquad \Big(\sum_{\iota\in \mathrm{I}}\mathcal{B}_\iota\Big)\mathcal{A}=\sum_{\iota\in \mathrm{I}}\mathcal{B}_\iota\mathcal{A}.$$

On a aussi $\mathcal{A}\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ ($(\mathcal{T})$ quasi-entier).

Enfin l'élément maximum de $(\mathcal{T})$, ou élément universel, sera noté $\mathcal{E}$ et l'élément nul ou minimum O. Les éléments de $(\mathcal{T})$ seront notés par des majuscules surannées.

Dans les applications, $(\mathcal{T})$ est le treillis des idéaux bilatères d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro. L'opération $+$ représente l'addition des idéaux bilatères d'un anneau ou la réunion des idéaux bilatères d'un demi-groupe. La multiplication est celle des idéaux.

Axiome B. — (L) *est un treillis complet.*

Les opérations du treillis (L) seront notées $+$ (union ou addition) et $\cap$, la relation d'ordre $\subseteq$ et la relation d'ordre strict associée $\subset$, l'élément maximum ou universel U, l'élément nul ou minimum O. Les éléments de (L) seront notés par des majuscules d'imprimerie.

Dans les applications, (L) est le treillis des idéaux à gauche d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro ou le treillis des sous-modules d'un module. Dans le cas où l'on étudie les idéaux bilatères d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro, on prend $(\mathrm{L})=(\mathcal{T})$.

Axiome C. — *Les éléments de* $(\mathcal{T})$ *sont opérateurs dans* (L) qui est ainsi muni d'une opération externe faisant correspondre à tout $\mathcal{A}\in(\mathcal{T})$ et tout $\mathrm{X}\in(\mathrm{L})$ un élément $\mathcal{A}\mathrm{X}\in(\mathrm{L})$, avec les lois suivantes :

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathrm{X}=\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathrm{X}); \qquad \mathcal{A}\mathrm{X}\subseteq\mathrm{X};$$
$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathrm{X}=\mathcal{A}\mathrm{X}+\mathcal{B}\mathrm{X}; \qquad \mathcal{A}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})=\mathcal{A}\mathrm{X}+\mathcal{A}\mathrm{Y}.$$

Ces deux dernières relations sont aussi supposées valables pour les sommes infinies :

$$\Big(\sum_{\iota \in \mathrm{I}} \mathfrak{A}_\iota\Big)\mathrm{X} = \sum_{\iota \in \mathrm{I}} \mathfrak{A}_\iota \mathrm{X}; \qquad \mathfrak{A}\Big(\sum_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota\Big) = \sum_{\iota \in \mathrm{I}} \mathfrak{A}\mathrm{X}_\iota.$$

De plus,

$$0\mathrm{X} = 0; \qquad \mathfrak{A}0 = 0.$$

Dans le cas des idéaux à gauche d'un anneau A ou d'un demi-groupe D avec zéro, $\mathfrak{A}\mathrm{X}$ représente l'idéal à gauche produit de l'idéal bilatère $\mathfrak{A}$ de l'anneau A (resp. du demi-groupe D) par l'idéal à gauche X de l'anneau A (resp. du demi-groupe D). Dans le cas des sous-modules d'un A-module M, $\mathfrak{A}\mathrm{X}$ est le sous-module produit de l'idéal bilatère $\mathfrak{A}$ de l'anneau A par le sous-module X du module M. Dans le cas des idéaux bilatères d'un anneau A ou d'un demi-groupe D avec zéro, $\mathfrak{A}\mathrm{X}$ est le produit des deux idéaux bilatères $\mathfrak{A}$ et X.

Définition 3.1. — On appelle $(\mathfrak{T})$-*algèbre* (L) l'ensemble de deux treillis $(\mathfrak{T})$ et (L) satisfaisant aux axiomes A, B, C.

Exemple 1. — $(\mathfrak{T})$ et (L) sont confondus avec l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau A.

Exemple 2. — $(\mathfrak{T})$ et (L) sont confondus avec l'ensemble des idéaux bilatères d'un demi-groupe D avec zéro.

Exemple 3. — $(\mathfrak{T})$ est l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau A et (L) l'ensemble de ses idéaux à gauche.

Exemple 4. — $(\mathfrak{T})$ est l'ensemble des idéaux bilatères d'un demi-groupe D avec zéro et (L) l'ensemble de ses idéaux à gauche.

Exemple 5. — $(\mathfrak{T})$ est l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau A et (L) l'ensemble des sous-modules d'un A-module M.

Conformément aux notions du chapitre II, on définit le cas nœthérien ou artinien de la façon suivante :

Définition 3.2. — On dit que la $(\mathfrak{T})$-algèbre (L) est *nœthérienne* (resp. *artinienne*) si le treillis (L) satisfait à la condition de chaîne *ascendante* (resp. *descendante*).

Notons que $(\mathfrak{T})$ constitue un demi-anneau réticulé et que la plupart des notions que nous donnons pour les *éléments* de $(\mathfrak{T})$

pourraient être étudiées pour les *idéaux réticulés* de $(\mathfrak{T})$. C'est la voie suivie par A. Almeida Costa [3] et M. L. Noronha Galvão [36].

2. **Résiduels à gauche et à droite.** — Les deux propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de l'axiome C :

PROPRIÉTÉ 3.1. — X *et* Y *étant donnés dans* (L), *l'ensemble des éléments* $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{T})$ *tels que* $\mathfrak{A}Y \subseteq X$ *possède un élément maximum noté* $X \cdot . Y$ *et appelé résiduel à gauche de* X *par* Y.

PROPRIÉTÉ 3.2. — X *et* $\mathfrak{A}$ *étant donnés* $(X \in (L),\ \mathfrak{A} \in (\mathfrak{T}))$, *l'ensemble des éléments* $Y \in (L)$ *tels que* $\mathfrak{A}Y \subseteq X$ *possède un élément maximum noté* $X . \cdot \mathfrak{A}$ *et appelé résiduel à droite de* X *par* $\mathfrak{A}$.

Dans les exemples 1, 2, 3, 4 on emploie aussi les expressions de *transporteur à gauche* pour désigner le résiduel à gauche $X \cdot . Y$ et de *transporteur à droite* pour désigner le résiduel à droite $X . \cdot \mathfrak{A}$. Si X est l'élément nul de (L), on parlera aussi d'*annulateur* de Y à gauche (resp. de $\mathfrak{A}$ à droite) pour noter le résiduel à gauche $O \cdot . Y$ (resp. le résiduel à droite $O . \cdot \mathfrak{A}$).

Pour développer la théorie des $(\mathfrak{T})$-algèbres, nous supposerons vérifiée une condition de chaîne sur les résiduels qu'on peut mettre sous la forme suivante :

AXIOME D. — *L'ensemble des résiduels à gauche et l'ensemble des résiduels à droite de tout élément* $X \in (L)$ *vérifient la condition de chaîne ascendante.*

Cet axiome est vérifié en particulier dans l'un ou l'autre des cas importants suivants :

1° Les treillis $(\mathfrak{T})$ et (L) vérifient la condition de chaîne ascendante;

2° Les treillis $(\mathfrak{T})$ et (L) vérifient la condition de chaîne descendante;

3° Le treillis (L) vérifie la condition de chaîne ascendante et la condition de chaîne descendante;

4° Le treillis $(\mathfrak{T})$ vérifie la condition de chaîne ascendante et la condition de chaîne descendante.

Bien que ces résultats se rattachent à des propriétés générales de la résiduation donnée par P. Dubreil et R. Croisot [25], on peut en donner ici une démonstration directe. Démontrons par exemple que l'axiome D est vérifié si les treillis $(\mathfrak{T})$ et (L) vérifient la condition de chaîne descendante (cas 2°).

Considérons une chaîne croissante de résiduels à droite de X :

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X_n \subseteq \ldots \subseteq \ldots.$$

Cette chaîne définit une chaîne décroissante de résiduels à gauche :

$$X^{\cdot}.X_1 \supseteq X^{\cdot}.X_2 \supseteq \ldots \supseteq X^{\cdot}.X_n \supseteq \ldots.$$

L'égalité $X^{\cdot}.X_n = X^{\cdot}.X_{n+1}$ entraîne $X.^{\cdot}(X^{\cdot}.X_n) = X.^{\cdot}(X^{\cdot}.X_{n+1})$ c'est-à-dire $X_n = X_{n+1}$ puisque X_n et X_{n+1} sont des résiduels à droite de X. On démontre ainsi que la condition de chaîne descendante sur les résiduels à gauche entraîne la condition de chaîne ascendante sur les résiduels à droite. On démontre d'une façon analogue que la condition de chaîne descendante sur les résiduels à droite entraîne la condition de chaîne ascendante sur les résiduels à gauche.

Définition 3.3. — Le résiduel à gauche $\mathfrak{L} = X^{\cdot}.Y$ de X est dit *propre* si $Y \nsubseteq X$. L'élément $\mathfrak{L} \in (\mathfrak{T})$ est dit *premier* si l'on a la propriété

$$\mathcal{BC} \subseteq \mathfrak{L} \Rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathfrak{L} \text{ ou } \mathcal{C} \subseteq \mathfrak{L}.$$

PROPRIÉTÉ 3.3. — *Tout élément* X *de* (L), *autre que* U, *possède au moins un résiduel à gauche propre premier.*

En effet, considérons d'après l'axiome D un résiduel à gauche propre maximal $\mathfrak{L}$ de X et montrons que $\mathfrak{L} = X^{\cdot}.Y$ est premier. Les relations $\mathcal{BC} \subseteq \mathfrak{L}$, $\mathcal{C} \nsubseteq \mathfrak{L}$, entraînent $\mathcal{BC}Y \subseteq X$ avec $\mathcal{C}Y \nsubseteq X$. On en déduit $\mathcal{B} \subseteq X^{\cdot}.\mathcal{C}Y$. Mais $X^{\cdot}.\mathcal{C}Y$ est un résiduel à gauche propre de X qui contient $X^{\cdot}.Y$. Il en résulte $X^{\cdot}.\mathcal{C}Y = X^{\cdot}.Y$ et $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{L}$.

PROPRIÉTÉ 3.4. — *Pour que* $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{T})$ *soit un résiduel à gauche propre de* $X \in (L)$, *il faut et il suffit que :*

$$X^{\cdot}.(X.^{\cdot}\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}, \quad \text{avec} \quad X.^{\cdot}\mathfrak{A} \supset X.$$

La condition est suffisante. Pour voir qu'elle est nécessaire, on vérifie l'égalité $X^{\cdot}.(X.^{\cdot}\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ dans le cas où $\mathfrak{A} = X^{\cdot}.Y$, puis la relation $X.^{\cdot}(X^{\cdot}.Y) \supseteq Y$ ce qui implique $X.^{\cdot}(X^{\cdot}.Y) \supset X$ puisque $Y \nsubseteq X$.

On peut alors établir le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Étant donné* $X \neq U$ *dans* (L), *il existe un nombre fini d'éléments premiers* $\mathfrak{T}_i \in (\mathfrak{C})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *tels que*

$$\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\ldots\mathfrak{T}_n U \subseteq X, \qquad \mathfrak{T}_i \supseteq X\cdot.U \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$\mathfrak{T}_i$ *étant un résiduel à gauche propre maximal de* $X.\cdot\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\ldots\mathfrak{T}_{i-1}$.

Considérons en effet un résiduel à gauche propre maximal $\mathfrak{T}_1$ de X, soit $X\cdot.Y_1$. Formons $X.\cdot\mathfrak{T}_1 = X_1$. On a $X_1 \supset X$ d'après la propriété 3.4, et $\mathfrak{T}_1 = X\cdot.Y_1 \supseteq X\cdot.U$. Si X_1 est différent de U, on considère de même un résiduel à gauche propre maximal $\mathfrak{T}_2$ de X_1 et l'on a

$$\mathfrak{T}_2 = X_1\cdot.Y_2 \supseteq X\cdot.Y_2 \supseteq X\cdot.U$$

d'où, en posant $X_2 = X_1.\cdot\mathfrak{T}_2 = X.\cdot\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$,

$$X \subset X_1 \subset X_2.$$

En vertu de la condition de chaîne ascendante sur les résiduels à droite de X (axiome D), on en déduit l'existence de n tel que

$$X_n = U = X.\cdot\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\ldots\mathfrak{T}_n,$$

c'est-à-dire $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\ldots\mathfrak{T}_n U \subseteq X$, avec $\mathfrak{T}_i \supseteq X\cdot.U$, ce qui démontre le théorème.

Nous verrons une application importante de ce théorème au chapitre V, à la notion de radical primaire, ainsi que dans ce chapitre, à l'étude des anneaux artiniens unitaires.

Les résiduels à gauche propres premiers d'un élément X permettent également de reconnaître si un résiduel à droite $X.\cdot\mathfrak{A}$ est strictement plus grand que X, d'après le théorème suivant :

THÉORÈME 3.2. — *Pour que* $X.\cdot\mathfrak{A} \supset X$, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{A}$ *soit contenu dans un résiduel à gauche propre premier de* X.

La condition est nécessaire car $X.\cdot\mathfrak{A} \supset X$ entraîne $\mathfrak{A} \subseteq X\cdot.(X.\cdot\mathfrak{A})$, qui est un résiduel à gauche propre de X; ce résiduel est contenu dans un résiduel à gauche propre maximal $\mathfrak{T}$ qui est premier (propriété 3.3). Elle est suffisante car, de $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{T} = X\cdot.Y$, on déduit $X.\cdot\mathfrak{A} \supseteq X.\cdot\mathfrak{T} = X\cdot.(X.\cdot Y) \supseteq Y$; il en résulte $X.\cdot\mathfrak{A} \supset X$ puisque $Y \nsubseteq X$.

L'intérêt du théorème 3.2 réside dans le fait que l'ensemble des résiduels à gauche propres premiers de X est fini.

THÉORÈME 3.3. — *Tout élément* $X \neq U$ *ne possède qu'un nombre fini de résiduels à gauche propres premiers.*

Soit un résiduel à gauche propre premier de X, dont l'existence est assurée par la propriété 3.3. Considérons les éléments $\mathfrak{T}_i$ qui figurent dans le théorème 3.1. On a

$$\mathfrak{T} = X^{\cdot}.Y \supseteq X^{\cdot}.U \supseteq \mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\ldots\mathfrak{T}_n.$$

$\mathfrak{T}$ étant premier, il existe au moins un i tel que $\mathfrak{T}_i \subseteq \mathfrak{T}$ et l'on peut supposer $\mathfrak{T}_j \nsubseteq \mathfrak{T}$ pour $j = 1, 2, \ldots, i-1$. De $\mathfrak{T}_1 \nsubseteq \mathfrak{T}$ avec $\mathfrak{T}$ résiduel à gauche propre premier de X, on déduit d'après une propriété des résiduels pour laquelle nous renvoyons à L. Lesieur et R. Croisot [53], I (propriété 2.3, p. 87), que $\mathfrak{T}$ est résiduel à gauche propre de $X_1 = X.\cdot\mathfrak{T}_1$. En répétant ce raisonnement, on démontre que $\mathfrak{T}$ est résiduel à gauche propre premier de $X.\cdot\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\ldots\mathfrak{T}_{i-1} = X_{i-1}$. Comme $\mathfrak{T}_i$ est résiduel à gauche propre premier maximal de X_{i-1}, la relation $\mathfrak{T}_i \subseteq \mathfrak{T}$ entraîne $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_i$, ce qui démontre le théorème.

3. **Axiome de modularité.** — Dans l'exemple de la ($\mathfrak{T}$)-algèbre (L) des idéaux à gauche ou bilatères d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro, ou des sous-modules d'un module, le treillis (L) considéré est *modulaire*, c'est-à-dire vérifie la loi suivante :

$$B \subseteq A \Rightarrow A \cap (B + C) = B + (A \cap C).$$

Dans le cas des idéaux à gauche ou bilatères d'un demi-groupe avec zéro, (L) est même *distributif*, c'est-à-dire obéit à la loi :

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C),$$

qui implique (voir *Théorie des treillis* [23], p. 73)

$$A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C).$$

Cette remarque nous conduit à postuler dans une ($\mathfrak{T}$)-algèbre (L) l'axiome de modularité.

AXIOME DE MODULARITÉ ([14 bis]). — *Le treillis* (L) *est modulaire.*

Nous ferons également appel à la propriété pour le treillis (L) d'être *faiblement* $\cap$*-continu*, c'est-à-dire que la relation

$$X \cap \left(\sum_i Y_i\right) = \sum_i (X \cap Y_i)$$

est valable lorsque les éléments Y_i forment un ensemble totalement ordonné. Cette propriété est évidemment vérifiée dans les exemples algébriques **1**, **2**, **3**, **4**, **5** du paragraphe **1**.

On appelle ($\mathfrak{T}$)-*algèbre modulaire* une ($\mathfrak{T}$)-algèbre vérifiant l'axiome de modularité et la propriété de $\cap$-continuité faible.

De même, on pourra définir une ($\mathfrak{T}$)-*algèbre distributive* comme une ($\mathfrak{T}$)-algèbre dans laquelle le treillis (L) est distributif, et qui est faiblement $\cap$-continue.

L'une des applications les plus importantes de la modularité consiste dans le *théorème* de Jordan-Hölder (voir *Théorie des treillis* [23], p. 88) :

S'il existe dans (L) *une chaîne maximale de longueur finie n* ([15]), *toute autre chaîne sans répétition allant de* O *à* U *est de longueur finie* $\leqq n$ *et toutes les chaînes maximales ont même longueur n.*

En particulier, une ($\mathfrak{T}$)-*algèbre* (L) *modulaire est à la fois nœthérienne et artinienne dans le cas où il existe une chaîne maximale finie dans* (L). Elle est dite alors de *longueur finie.*

Dans le cas d'une ($\mathfrak{T}$)-algèbre distributive, l'existence d'une chaîne maximale finie dans (L) a des conséquences encore plus fortes; elle entraîne que (L) n'a qu'un nombre fini d'éléments (*cf.* G. Birkhoff [11], p. 139) : *une* ($\mathfrak{T}$)-*algèbre distributive de longueur finie est une algèbre finie.*

Un exemple de ($\mathfrak{T}$)-algèbre de longueur finie est fourni par les algèbres nœthériennes ou artiniennes *semi-simples.*

([14 bis]) Pour un grand nombre de propriétés, on a besoin seulement de la *semi-modularité du treillis* (L) (*voir* L. LESIEUR et R. CROISOT [53]).

([15]) C'est-à-dire une chaîne $O \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n = U$ dans laquelle $X_i \subset Y \subset X_{i+1}$ est impossible.

Définition 3.4. — Une ($\mathfrak{T}$)-algèbre est dite *semi-simple* si elle est modulaire et si l'élément universel U de (L) est somme d'éléments minimaux.

En particulier, un module est *semi-simple* s'il est somme de sous modules simples (*cf.* N. Bourbaki [13], chap. VIII, § 3, p. 32).

On dit qu'un anneau A est *semi-simple* s'il est unitaire et semi-simple en tant que A-module à gauche, ce qui est équivalent au fait qu'il soit semi-simple en tant que A module à droite; de plus, un anneau semi-simple est artinien et nœthérien (*cf.* N. Bourbaki [13], chap. VIII, § 5, p. 46, définition 1, remarque et proposition 2).

Propriété 3.5. — *Si une* ($\mathfrak{T}$)*-algèbre semi-simple est soit artinienne, soit nœthérienne, elle est de longueur finie.*

En effet, le treillis (L) est modulaire, faiblement $\cap$-continu, et tel que U soit somme d'éléments minimaux. Il en résulte que ce treillis est complémenté (*cf.* [23], p. 289) et par suite de longueur finie lorsqu'il vérifie une condition de chaîne.

Remarque. — Dans le cas général d'une ($\mathfrak{T}$)-algèbre semi-simple, la démonstration précédente s'applique encore pour montrer que (L) est un treillis complémenté. (L) est alors un treillis géométrique, de longueur finie ou infinie au sens de M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot [23], p. 264. On retrouve ainsi une propriété signalée pour les modules semi-simples par N. Bourbaki [13] (chap. VIII, § 3, proposition 7, p. 32).

Voici un exemple important d'anneau semi-simple :

On voit facilement que l'anneau M_n des matrices carrées d'ordre n sur un corps K est somme directe de n idéaux à gauche minimaux I_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), I_j étant l'ensemble des matrices dont toutes les colonnes, sauf la colonne d'indice j, sont formées de 0. Par suite, d'après le théorème 2.1, *tout anneau simple est semi-simple.*

On démontre, plus généralement, la propriété suivante :

Propriété 3.6. — *Pour qu'un anneau soit semi-simple, il faut et il suffit qu'il soit composé direct d'un nombre fini de sous-anneaux simples* (*cf.* N. Bourbaki [13], chap. VIII, § 5, théorème 1, p. 48).

Certaines classes d'anneaux (ou de modules) se laissent ainsi caractériser par des propriétés du treillis de leurs idéaux à gauche (ou de leurs sous-modules). Dans le cas commutatif, ce point de vue a déjà fait l'objet de travaux intéressants (*cf.* J. Guérindon [4]). Dans le cas non commutatif, E. A. Behrens [10] a étudié plus particulièrement les anneaux (ou les modules) pour lesquels le treillis des idéaux à gauche (ou des sous-modules) est distributif ([15 bis]).

Notons encore une propriété intéressante d'un anneau simple A. Un tel anneau est *isotypique* ce qui signifie que ses idéaux à gauche minimaux sont des A-modules tous isomorphes (*cf.* N. Bourbaki [13], chap. VIII, § 1, p. 12).

4. **Anneaux artiniens à gauche unitaires.** — Soit A un anneau artinien à gauche unitaire. D'après le théorème 3.1 appliqué au cas $X = O$, on peut trouver n idéaux premiers $\mathfrak{T}_i$ tels que

$$\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \ldots \mathfrak{T}_n = O.$$

L'anneau $A/\mathfrak{T}_n$ est alors un anneau premier artinien à gauche unitaire, donc nœthérien à gauche, d'après le corollaire 2 du théorème 2.1 et il existe une chaîne maximale finie d'idéaux à gauche allant de $\mathfrak{T}_n$ à A. Considérons les idéaux $X_i = \mathfrak{T}_i \mathfrak{T}_{i+1} \ldots \mathfrak{T}_n$ et $X_{i+1} = \mathfrak{T}_{i+1} \mathfrak{T}_{i+2} \ldots \mathfrak{T}_n$. L'anneau quotient $A_i = X_{i+1}/X_i$ est un $A/\mathfrak{T}_i$-module à gauche. L'anneau $A/\mathfrak{T}_i$ étant somme d'idéaux à gauche minimaux (propriété 3.6), il en résulte que $A_i = X_{i+1}/X_i$ est une somme de sous-modules minimaux. Comme A_i vérifie la condition de chaîne descendante, A_i vérifie la condition de chaîne ascendante (propriété 3.5). Donc il existe une chaîne maximale finie allant de X_i à X_{i+1}. En résumé, il existe une chaîne maximale finie allant de O à A et, d'après le théorème de Jordan-Hölder, l'anneau A est nœthérien à gauche.

D'autre part, tout idéal bilatère premier $\mathfrak{T}$ de A est un idéal bilatère maximal (corollaire 1 du théorème 2.1). De plus, l'anneau $A/\mathfrak{T}$ étant un anneau simple, tout élément régulier ([16]) de cet anneau est inversible.

Montrons que ces conditions nécessaires suffisent pour qu'un anneau A unitaire nœthérien à gauche soit artinien à gauche.

([15 bis]) Signalons également les travaux relatifs aux demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes est distributif ou modulaire : L. N. Chevrine [19], M. Ego [27].

([16]) C'est-à-dire non diviseur de zéro à droite (et par suite non diviseur de zéro à gauche).

En effet, toujours d'après le théorème 3.1, on peut trouver n idéaux premiers $\mathfrak{T}_i$ tels que

$$\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \ldots \mathfrak{T}_n = 0.$$

Pour tout i, l'anneau $A/\mathfrak{T}_i$ est un anneau premier nœthérien à gauche unitaire dans lequel tout élément régulier ([17]) est inversible. Il en résulte que cet anneau coïncide avec son anneau des quotients à gauche (*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [56]), donc qu'il est simple. On peut alors faire un raisonnement analogue à celui qui a été utilisé pour montrer qu'un anneau unitaire artinien à gauche est nœthérien à gauche et en déduire cette fois la condition de chaîne descendante à partir de la condition de chaîne ascendante.

Nous avons établi le théorème suivant :

THÉORÈME 3.4. — *Pour qu'un anneau unitaire* A *soit artinien à gauche, il faut et il suffit qu'il soit nœthérien à gauche et que,* $\mathfrak{T}$ *étant un idéal premier quelconque de* A, *tout élément régulier de* $A/\mathfrak{T}$ *soit inversible.*

Remarquons que ces conditions suffisantes entraînent que tout idéal bilatère premier $\mathfrak{T}$ est maximal. Dans le cas commutatif, si $\mathfrak{T}$ est maximal, $A/\mathfrak{T}$ est un corps et le théorème 3.4 redonne alors une propriété caractéristique des anneaux artiniens unitaires : anneaux nœthériens unitaires dans lesquels tout idéal premier est maximal (*cf.* O. Zariski et P. Samuel [69], p. 203). Dans le cas non commutatif, cette propriété n'est plus caractéristique car il existe des anneaux unitaires nœthériens à gauche sans idéal bilatère propre non nul qui ne sont pas artiniens à gauche (*cf.* N. Bourbaki [13], chap. VIII, § 5, exercice 13, p. 60).

5. Homomorphisme, sous-algèbre, algèbre quotient, algèbre duale. — 1° *Homomorphisme.* — Soient (L) et (L′) deux $(\mathfrak{C})$-algèbres ayant le même treillis d'opérateurs $(\mathfrak{C})$. On appelle homomorphisme de (L) dans (L′) une application f de (L) dans (L′) qui vérifie les propriétés suivantes :

$$f\left(\sum_{i\in I} X_i\right) = \sum_{i\in I} f(X_i); \qquad f(\mathfrak{A}X) = \mathfrak{A}f(X);$$

([17]) C'est-à-dire non diviseur de zéro à droite (et par suite non diviseur de zéro à gauche).

f est *surjectif* si $f(L) = L'$, *injectif* si

$$f(X) = f(X') \Rightarrow X = X';$$

(L) et (L′) sont *isomorphes* s'il existe un homomorphisme f *bijectif* de (L) dans (L′) (c'est-à-dire à la fois surjectif et injectif).

2° *Sous-algèbre.* — On appelle sous-algèbre (L′) de (L) une partie (L′) de (L) qui est stable par rapport à l'addition infinie et par rapport à la multiplication par tout élément de $(\mathfrak{T})$.

Exemple : sous-algèbre (X_0) des éléments contenus dans un élément fixe $X_0 \in (L)$.

3° *Algèbre quotient.* — Soit (L′) une sous-algèbre de (L); soit $\mathcal{R}$ l'équivalence définie dans (L) par :

$$X \equiv Y \ (\mathrm{mod}\ \mathcal{R}) \Longleftrightarrow \exists Z \in (L'), \qquad \text{avec} \quad X + Z = Y + Z.$$

$\mathcal{R}$ est compatible avec l'addition infinie et avec la multiplication par les éléments de $(\mathfrak{T})$. Elle définit donc un treillis $(L)/\mathcal{R}$ admettant $(\mathfrak{T})$ comme treillis d'opérateurs, et par suite une $(\mathfrak{T})$-algèbre qu'on appelle *algèbre quotient de* (L) *par* (L′).

En particulier, si $X_0 \in (L)$, on définit ainsi la sous-algèbre quotient $(L)/(X_0)$ en prenant pour (L′) la sous-algèbre (X_0) des éléments contenus dans (X_0).

4° *Algèbre duale.* — Soit (L) une $(\mathfrak{T})$-algèbre. Considerons le treillis (L′) obtenu à partir de (L) en prenant pour relation d'ordre la relation d'ordre opposée, et le treillis $(\mathfrak{T}')$ obtenu à partir de $(\mathfrak{T})$ en prenant pour multiplication l'antimultiplication de $(\mathfrak{T})$. Prenons pour nouvelle opération externe :

$$\mathfrak{A} \circ X = X \cdot\!\cdot \mathfrak{A}.$$

On obtient alors une $(\mathfrak{T}')$-algèbre (L′) qu'on appelle *algèbre duale* de (L) (*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [57]).

CHAPITRE IV.

Idéaux et sous-modules primaux.

Dans ce chapitre et dans les suivants, nous étudions des idéaux (ou des sous-modules) particuliers autres que ceux du chapitre I, et les théorèmes de décomposition d'un idéal (ou d'un sous-module) comme intersection d'un nombre fini d'entre eux. Nous commençons par les *idéaux* (*ou sous-modules*) *primaux* qui ont été introduits par L. Fuchs en 1950 [33] dans le cas d'un anneau commutatif.

1. **Définition et propriétés caractéristiques.** — Les définitions et les propriétés générales sont relatives à une ($\mathfrak{T}$)-algèbre (L) modulaire vérifiant l'axiome D (chap. III, § 1 et 2). Lorsqu'il s'agira des exemples 1, 2, 3, 4, 5 (chap. III, § 1), nous le mentionnerons explicitement.

Définition 4.1. — Un élément X d'une ($\mathfrak{T}$)-algèbre (L) est dit *primal* si l'on a :

$$X.\cdot\mathfrak{A}_1 \supset X,\ X.\cdot\mathfrak{A}_2 \supset X \Rightarrow (X.\cdot\mathfrak{A}_1) \cap (X.\cdot\mathfrak{A}_2) \supset X$$

(*cf.* L. Lesieur [52], p. 170 et C. W. Curtis [22], p. 688).

Propriété 4.1. — *Tout élément* $\cap$*-irréductible de* (L) *est primal.*

Propriété 4.2. — *Pour que* $X \neq U$ *soit primal, il faut et il suffit qu'il admette un seul résiduel à gauche propre premier maximal* $\mathfrak{T}$.

La condition est suffisante car, d'après le théorème 3.2, $X.\cdot\mathfrak{A}_1 \supset X$ équivaut à $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{T}$. Donc les relations $X.\cdot\mathfrak{A}_1 \supset X$, $X.\cdot\mathfrak{A}_2 \supset X$ entraînent $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{T}$, $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{T}$ d'où

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{T} \quad \text{et} \quad (X.\cdot\mathfrak{A}_1) \cap (X.\cdot\mathfrak{A}_2) = X.\cdot(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) \supset X.$$

La condition est nécessaire car deux résiduels à gauche propres premiers maximaux distincts $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ de X donneraient lieu aux relations :

$$X.\cdot\mathfrak{T}_1 \supset X, \qquad X.\cdot\mathfrak{T}_2 \supset X, \qquad (X.\cdot\mathfrak{T}_1) \cap (X.\cdot\mathfrak{T}_2) = X.$$

Définition 4.2. — $X \neq U$ étant primal et $\mathfrak{T}$ étant son unique résiduel à gauche propre premier maximal, on dit que X est $\mathfrak{T}$*-primal*, que $\mathfrak{T}$ est le *résiduel maximum* de X, ou encore l'*élément premier associé* à X.

Dans le cas d'un anneau ou d'un module, la notion d'élément primal coïncide avec celle qui a été donnée par W. E. Barnes pour les idéaux bilatères d'un anneau (*cf.* [9], p. 2) d'après la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 4.3. — *Pour que l'idéal* X (*à gauche ou bilatère*) *d'un anneau* A, *pour que le sous-module* X *d'un* A-*module soit primal, il faut et il suffit qu'on ait :*

$$X.\cdot(a_1)\supset X,\ X.\cdot(a_2)\supset X \Rightarrow X.\cdot(a_1+a_2)\supset X$$

a_1 *et* a_2 *étant des éléments de* A, (a_i) *l'idéal bilatère engendré par* a_i.

La condition est nécessaire d'après la relation

$$X.\cdot(a_1+a_2)\supseteq X.\cdot(a_1)\cap X.\cdot(a_2).$$

Montrons qu'elle est suffisante. Supposons que X ne soit pas primal; X aurait donc, d'après la propriété 4.2, les résiduels à gauche propres premiers maximaux $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_n (n \geqq 2)$. Comme on a $\mathfrak{T}_2 \ldots \mathfrak{T}_n \nsubseteq \mathfrak{T}_1$, il existe $a_1 \notin \mathfrak{T}_1$, $a_1 \in \mathfrak{T}_j (j \neq 1)$; de même, on peut trouver $a_i \notin \mathfrak{T}_i$, $a_i \in \mathfrak{T}_j (j \neq i)$. On en déduit, en posant $a'_1 = a_2 + \ldots + a_n$, $a'_1 \in \mathfrak{T}_1$, $a'_1 \notin \mathfrak{T}_j (j \neq 1)$. On aurait alors, d'après le théorème 3.2, $X.\cdot(a_1)\supset X$; $X.\cdot(a'_1)\supset X$ et $X.\cdot(a_1+a'_1) = X$, puisque $a_1 + a'_1 \notin \mathfrak{T}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. La propriété 4.3 est établie.

Remarquons que, dans le cas des anneaux, des demi-groupes ou des modules, la définition d'un idéal ou d'un sous-module primal peut être donnée sous la forme suivante : X est primal si et seulement si les relations

$$(a_i)\,x_i \subseteq X, \qquad x_i \notin X \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

entraînent l'existence de $x \notin X$ tel que

$$(a_i)\,x \subseteq X \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [53], II, p. 460, 464, 465).

2. **Théorèmes de décomposition.** — Nous allons montrer que tout élément $X \in (L)$ est l'intersection d'un nombre fini d'éléments primaux

$$X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n.$$

On pourrait passer par l'intermédiaire des éléments $\cap$-irréductibles, mais nous préférons utiliser une méthode plus constructive fournissant un résultat plus précis; nous obtenons une décomposition dans laquelle les éléments X_i sont des résiduels à droite de X et qui est réduite au sens de la définition suivante :

Définition 4.3. — La décomposition $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ est dite *réduite* si aucun X_i n'est superflu et si X_i ne peut être remplacé par un résiduel à droite de X_i strictement plus grand que lui ([18]).

Un élément primal X admet une décomposition réduite $X = X_1$. Nous allons voir qu'un élément quelconque X, même non primal, possède une décomposition réduite en un nombre fini d'éléments primaux. Le premier stade de la décomposition est fourni par la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 4.4. — *Tout élément* X *non primal admet une décomposition réduite en deux éléments résiduels à droite de* X,

$$X = X_1 \cap X'_1$$

dans laquelle X_1 *est primal.*

En effet, si X n'est pas primal, il existe $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ tels que $X = (X . \cdot \mathfrak{A}_1) \cap (X . \cdot \mathfrak{A}_2)$ avec $X . \cdot \mathfrak{A}_1 \supset X$, $X . \cdot \mathfrak{A}_2 \supset X$. Soit Y_1 un résiduel à droite de X minimal tel que $X \subset Y_1 \subseteq X . \cdot \mathfrak{A}_2$. Son existence est assurée par la condition de chaîne sur les résiduels à droite (axiome D) et l'on a $X = (X . \cdot \mathfrak{A}_1) \cap Y_1$. Soit X_1 un résiduel à droite de X maximal vérifiant $X_1 \supseteq X . \cdot \mathfrak{A}_1$ et $X = X_1 \cap Y_1$, dont l'existence est encore assurée par la condition de chaîne déjà citée. L'élément X_1 est primal; sinon la relation $X_1 = (X_1 . \cdot \mathfrak{B}_1) \cap (X_1 . \cdot \mathfrak{B}_2)$ avec $X_1 . \cdot \mathfrak{B}_1 \supset X_1$, $X_1 . \cdot \mathfrak{B}_2 \supset X_1$, donnerait $(X_1 . \cdot \mathfrak{B}_1) \cap Y_1 = Y_1$ et $(X_1 . \cdot \mathfrak{B}_2) \cap Y_1 = Y_1$, d'où $Y_1 \subseteq X_1$ et $X = Y_1$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc $X = X_1 \cap Y_1$ avec $X_1 \supset X$, $Y_1 \supset X$, X_1 primal, X_1 et Y_1 résiduels à droite de X. Considérons alors un résiduel à droite X'_1 de X, contenant Y_1. et maximal parmi ceux qui vérifient $X = X_1 \cap X'_1$. La décomposition $X = X_1 \cap X'_1$ satisfait à la propriété 4.4.

([18]) Cette définition s'inspire de celle donnée par L. FUCHS (*cf.* [33], p. 3) dans le cas des idéaux d'un anneau commutatif. Pour $X \neq U$, elle est plus forte que celle que nous avions choisie auparavant (*cf.* L. LESIEUR [52], p. 173, et L. LESIEUR et R. CROISOT [53], I, p. 89 et [53], III, p. 79); elle nous paraît préférable à cette dernière qui n'excluait pas l'existence d'éléments superflus.

PROPRIÉTÉ 4.5. — *Tout élément* X *non primal possède une décomposition réduite en un nombre fini d'éléments primaux qui sont des résiduels à droite de* X.

En effet, appliquons la propriété 4.4 qui donne $X = X_1 \cap X'_1$. Si X'_1 est primal, la propriété 4.5 est établie. Si X'_1 n'est pas primal, on a, d'après la propriété 4.4, $X'_1 = X_2 \cap X'_2$, qui est une décomposition réduite de X'_1 en deux résiduels à droite dé X'_1, donc de X, avec X_2 primal. On en tire $X = X_1 \cap X_2 \cap X'_2$ qui donne une décomposition *réduite* de X avec $X \subset X'_1 \subset X'_2$. Si X'_2 n'est pas primal, on répète ce procédé qui, en vertu de la condition de chaîne, doit prendre fin et fournit une décomposition réduite de X en résiduels à droite de X qui sont primaux, soit

$$X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n. \tag{1}$$

On peut aller plus loin en opérant certains groupements; si X_1 est $\mathfrak{T}_1$-primal et si X_2 est $\mathfrak{T}_2$-primal, avec $\mathfrak{T}_2 \subseteq \mathfrak{T}_1$, l'élément $Y_1 = X_1 \cap X_2$ est $\mathfrak{T}_1$-primal et la décomposition $X = Y_1 \cap X_3 \cap \ldots \cap X_n$ est réduite. En effet, pour $\mathfrak{A} \nsubseteq \mathfrak{T}_1$, on a

$$Y_1 . \cdot \mathfrak{A} = (X_1 . \cdot \mathfrak{A}) \cap (X_2 . \cdot \mathfrak{A}) = Y_1;$$

de plus $Y_1 . \cdot \mathfrak{T}_1 \supset Y_1$ car $Y_1 . \cdot \mathfrak{T}_1 = Y_1$ entraînerait

$$X = (X_1 . \cdot \mathfrak{T}_1) \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n,$$

ce qui est impossible, si la décomposition (1) est réduite; on voit de plus que la décomposition $X = Y_1 \cap X_3 \cap \ldots \cap X_n$ est réduite. Cette remarque nous permet d'obtenir en définitive une décomposition réduite en éléments X_i $\mathfrak{T}_i$-primaux, les éléments premiers $\mathfrak{T}_i$ étant deux à deux incomparables. D'où :

THÉORÈME 4.1. (Existence des décompositions réduites). — *Tout élément* X *de* (L) *autre que* U *admet une décomposition réduite comme intersection d'un nombre fini d'éléments* X_i $\mathfrak{T}_i$*-primaux qui sont des résiduels à droite de* X *tels que les éléments premiers associés* $\mathfrak{T}_i$ *soient deux à deux incomparables.*

On peut obtenir un théorème d'unicité partielle en utilisant les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 4.6. — *Tout résiduel à gauche propre premier de* $X = X_1 \cap X_2$ *est un résiduel à gauche propre premier de* X_1 *ou de* X_2.

En effet, $\mathfrak{T} = X \cdot . Y = (X_1 \cdot . Y) \cap (X_2 \cdot . Y)$ implique, si $\mathfrak{T}$ est premier, $\mathfrak{T} = X_1 \cdot . Y$ ou $\mathfrak{T} = X_2 \cdot . Y$. Supposons $\mathfrak{T} = X_1 \cdot . Y$. Si $Y \nsubseteq X_1$, la propriété est démontrée. Si $Y \subseteq X_1$, on a $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}$ (élément maximum de $(\mathfrak{T})$), d'où $X_2 \cdot . Y = \mathfrak{T}$, avec $Y \nsubseteq X_2$ car $Y \nsubseteq X$.

Propriété 4.7. — *Si la décomposition* $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ *est réduite, tout résiduel à gauche propre premier maximal parmi l'ensemble des résiduels à gauche propres premiers de tous les éléments* X_i *est un résiduel à gauche propre premier maximal de* X.

En effet, soit $\mathfrak{T}_1$ un tel résiduel, supposé par exemple résiduel de X_1. Si l'on avait $X . \cdot \mathfrak{T}_1 = X$ avec $X_1 . \cdot \mathfrak{T}_1 \supset X_1$ on en déduirait $X = (X_1 . \cdot \mathfrak{T}_1) \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ et la décomposition ne serait pas réduite. On a donc $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}$ où $\mathfrak{T}$ est un résiduel à gauche propre premier maximal de X. D'après la propriété 4.6, $\mathfrak{T}$ est contenu dans un résiduel à gauche propre premier maximal $\mathfrak{T}_i$ de l'un des X_i. On a donc

$$\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}_i, \qquad \text{d'où} \qquad \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 \qquad \text{si } \mathfrak{T}_1 \text{ est supposé maximal.}$$

On en déduit le théorème d'unicité partielle suivant, qui est une conséquence immédiate des propriétés 4.6 et 4.7.

Théorème 4.2 (Unicité des décompositions réduites). — *Soient*

$$X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n = X'_1 \cap X'_2 \cap \ldots \cap X'_{n'},$$

deux décompositions réduites de $X \neq U$ *en éléments* X_i $\mathfrak{T}_i$*-primaux tels que les* $\mathfrak{T}_i$ *soient deux à deux incomparables et en éléments* X'_j $\mathfrak{T}'_j$*-primaux tels que les* $\mathfrak{T}'_j$ *soient deux à deux incomparables. On a* $n = n'$ *et l'ensemble* $\{\mathfrak{T}_i\}$ *coïncide avec l'ensemble* $\{\mathfrak{T}'_j\}$ *et avec l'ensemble des résiduels à gauche propres premiers maximaux de* X.

3. Décomposition réduite minimum. — Nous allons mettre en évidence, pour chaque élément non primal X de (L), une décomposition particulière de la forme précédente dont les composantes vont être obtenues de la façon suivante :

Propriété 4.8. — *Pour tout élément* X *de* (L) *et tout élément premier* $\mathfrak{T}$ *de* $(\mathfrak{T})$ *distinct de* $\mathfrak{S}$, *l'ensemble des éléments de la* *forme* $X.\cdot\mathfrak{A}$ *avec* $\mathfrak{A}\nsubseteq\mathfrak{T}$ *possède un élément maximum que nous noterons* $X_{]\mathfrak{T}[}$.

En effet, soit $X.\cdot\mathfrak{A}_1$ avec $\mathfrak{A}_1\nsubseteq\mathfrak{T}$ un résiduel à droite maximal de la forme $X.\cdot\mathfrak{A}$ avec $\mathfrak{A}\nsubseteq\mathfrak{T}$. Soit $X.\cdot\mathfrak{B}$, avec $\mathfrak{B}\nsubseteq\mathfrak{T}$ un autre élément de cette forme. On a $X.\cdot\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\supseteq X.\cdot\mathfrak{A}_1$ puisque $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{B}$ donc $X.\cdot\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}=X.\cdot\mathfrak{A}_1$ car $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\nsubseteq\mathfrak{T}$ et $X.\cdot\mathfrak{A}_1$ est maximal. Comme $X.\cdot\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\supseteq X.\cdot\mathfrak{B}$ on a bien $X.\cdot\mathfrak{B}\subseteq X.\cdot\mathfrak{A}_1$.

Propriété 4.9. — *Si* $X=X_1\cap X_2\cap\ldots\cap X_n (n\geqq 2)$ *est une décomposition réduite de* X *en intersection d'éléments primaux dont les éléments premiers associés* $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_n$ *sont incomparables deux à deux, l'élément* $X_{]\mathfrak{T}_1[}$, *par exemple, est* $\mathfrak{T}_1$*-primal. On a* $X_{]\mathfrak{T}_1[}\subseteq X_1$ *et* $X=X_{]\mathfrak{T}_1[}\cap X_2\cap\ldots\cap X_n$ *est une décomposition réduite.*

Puisque n est supérieur ou égal à 2, on a $\mathfrak{T}_1\neq\mathfrak{S}$. L'élément $X_{]\mathfrak{T}[}$ est égal à $X_{1]\mathfrak{T}_1[}\cap X_{2]\mathfrak{T}_1[}\cap\ldots\cap X_{n]\mathfrak{T}_1[}$, d'où résulte $X\subseteq X_{]\mathfrak{T}_1[}\subseteq X_1$ car on a $X_{1]\mathfrak{T}_1[}=X_1$. Par suite, on a bien

$$X=X_{]\mathfrak{T}_1[}\cap X_2\cap\ldots\cap X_n.$$

Montrons maintenant que $X_{]\mathfrak{T}_1[}$ est $\mathfrak{T}_1$-primal. En effet, d'une part, tout résiduel à gauche propre de $X_{]\mathfrak{T}_1[}$ est contenu dans $\mathfrak{T}_1$ car la relation $\mathfrak{A}\nsubseteq\mathfrak{T}_1$ entraîne $X_{]\mathfrak{T}_1[}.\cdot\mathfrak{A}=X_{]\mathfrak{T}_1[}$. D'autre part, $\mathfrak{T}_1$ est contenu dans un résiduel à gauche propre de $X_{]\mathfrak{T}_1[}$ car, $\mathfrak{T}_1$ étant résiduel à gauche de X, on a $X.\cdot\mathfrak{T}_1\supset X$, d'où

$$X=X_{]\mathfrak{T}_1[}\cap X_2\cap\ldots\cap X_n\subset(X_{]\mathfrak{T}_1[}.\cdot\mathfrak{T}_1)\cap X_2\cap\ldots\cap X_n=X.\cdot\mathfrak{T}_1.$$

Par suite, $\mathfrak{T}_1$ est bien résiduel à gauche propre maximal de $X_{]\mathfrak{T}_1[}$ et $X_{]\mathfrak{T}_1[}$ est bien $\mathfrak{T}_1$-primal. De plus, la décomposition

$$X=X_{]\mathfrak{T}_1[}\cap X_2\cap\ldots X_n$$

est réduite. En effet, supposons par exemple

$$X=X_{]\mathfrak{T}_1[}\cap(X_2.\cdot\mathfrak{A})\cap\ldots\cap X_n,\qquad\text{avec}\quad X_2\subset X_2.\cdot\mathfrak{A}.$$

On en déduirait

$$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{T}_2\qquad\text{et}\qquad X=X_{]\mathfrak{T}_1[}\cap(X_2.\cdot\mathfrak{T}_2)\cap\ldots\cap X_n=X.\cdot\mathfrak{T}_2,$$

puisque $\mathfrak{T}_2\nsubseteq\mathfrak{T}_i (i\neq 2)$, ce qui est impossible.

Corollaire 1. — *L'élément* $X_{]\mathfrak{T}_1[}$ *est le plus petit élément* $\mathfrak{T}_1$*-primal intervenant dans une décomposition réduite de* X *comme intersection d'éléments primaux dont les éléments premiers associés sont incomparables deux à deux.*

Propriété 4.10. — *L'élément* $X_{]\mathfrak{T}_1[}$ *est le plus petit élément* $\mathfrak{T}$*-primal contenant* X *avec* $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}_1$ (21).

On a alors le théorème suivant :

Théorème 4.3. — X *étant un élément non primal dont les résiduels à gauche propres maximaux sont* $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_n$, *on a*

$$X = X_{]\mathfrak{T}_1[} \cap X_{]\mathfrak{T}_2[} \cap \ldots \cap X_{]\mathfrak{T}_n[}$$

qui est une décomposition de X *en intersection réduite d'éléments primaux dont les éléments premiers associés sont incomparables deux à deux. Pour une telle décomposition*

$$X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n,$$

les $\mathfrak{T}_i$ *étant les éléments premiers associés aux* X_i *de même indice, on a*

$$X_{]\mathfrak{T}_i[} \subseteq X_i \qquad \text{pour tout } i.$$

Il suffit pour le voir d'appliquer n fois la propriété 4.9.

Ce résultat justifie la définition suivante :

Définition 4.4. — La décomposition réduite obtenue dans le théorème 4.2 s'appelle *décomposition réduite minimum* de X en éléments primaux.

4. **Radical primal.** — Lorsque $X \in (L)$ est un élément $\mathfrak{T}$-primal, l'élément $\mathfrak{T} \in (\mathfrak{T})$ est l'élément maximum $\mathfrak{A}$ tel que $X . \cdot \mathfrak{A} \supset X$. Dans le cas général où X n'est pas primal, on a vu au paragraphe 2 que X est l'intersection réduite d'éléments $\mathfrak{T}_i$-primaux X_i dont les $\mathfrak{T}_i$ sont les résiduels à gauche propres premiers maximaux de X. Nous allons donner une propriété caractéristique de l'intersection de ces éléments $\mathfrak{T}_i$.

(21) W. E. Barnes ([9], th. 8) établit ce résultat dans le cas des idéaux bilatères d'un anneau nœthérien bilatère.

THÉORÈME 4.4. — *L'ensemble des éléments* $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{T})$ *tels qu'on ait*

$$(X.\cdot\mathfrak{A}) \cap (X.\cdot\mathfrak{B}) = X \quad \textit{entraîne} \quad X.\cdot\mathfrak{B} = X$$

possède un élément maximum $\mathfrak{R}$. *Cet élément est l'intersection des résiduels à gauche propres premiers maximaux de* X [22] (*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [53], III, th. 1.5, p. 84).

Soit $\mathfrak{A}$ un élément satisfaisant à la condition du théorème; soit $\mathfrak{P}$ un résiduel à gauche propre premier maximal de X. La relation $\mathfrak{A} \nsubseteq \mathfrak{P}$ entraînerait $X.\cdot(\mathfrak{A} + \mathfrak{P}) = X = (X.\cdot\mathfrak{A}) \cap (X.\cdot\mathfrak{P})$, d'où $X.\cdot\mathfrak{P} = X$, ce qui est impossible. Par suite

$$\mathfrak{A} \subseteq \bigcap_{i=1}^{i=n} \mathfrak{P}_i = \mathfrak{R}$$

où les $\mathfrak{P}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) sont les résiduels à gauche propres maximaux de X.

Inversement, montrons que $\mathfrak{R}$ satisfait à la condition du théorème. Supposons

$$(X.\cdot\mathfrak{R}) \cap (X.\cdot\mathfrak{B}) = X$$

c'est-à-dire $X.\cdot(\mathfrak{R} + \mathfrak{B}) = X$. Il en résulte que $\mathfrak{R} + \mathfrak{B}$ n'est contenu dans aucun résiduel à gauche propre premier de X, donc que $\mathfrak{B}$ lui-même possède cette propriété, et par suite $X.\cdot\mathfrak{B} = X$.

Définition 4.5. — L'élément $\mathfrak{R} \in (\mathfrak{T})$ intervenant dans le théorème 4.4 est appelé *radical primal* de X et *noté* $\mathfrak{R}_4(X)$ (pour des raisons d'homogénéité avec les notations des autres radicaux qui interviendront dans la suite). Il a été rencontré par C. W. Curtis [22] dans le cas d'un anneau nœthérien bilatère sous le nom d'*idéal adjoint* de X.

Dans le cas d'un anneau, d'un demi-groupe ou d'un module, le radical primal $\mathfrak{R}_4(X)$ contient évidemment le radical de Baer et Mac Coy.

La notion de radical primal permet de donner une définition simple d'un élément primal :

PROPRIÉTÉ 4.11. — *Pour que* $X \in (L)$ *soit primal, il faut et il suffit qu'on ait, en désignant par* $\mathfrak{R}_4(X)$ *le radical primal de* X :

$$\mathfrak{A}Y \subseteq X, \qquad Y \nsubseteq X \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{R}_4(X).$$

[22] Pour $X = U$, on a $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$.

La condition est nécessaire. Si X est $\mathfrak{T}$-primal, son radical primal est $\mathfrak{T}$ et la relation $X.\cdot\mathfrak{A}\supset X$ entraîne $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{T}$. Elle est suffisante car si l'on suppose $X=(X.\cdot\mathfrak{A})\cap(X.\cdot\mathfrak{B})$ avec $X.\cdot\mathfrak{A}\supset X$, on en déduit $\mathfrak{A}\subseteq\mathcal{R}_4(X)$ et $X.\cdot\mathfrak{B}=X$; donc X est bien primal.

Le radical primal d'une intersection n'a pas les propriétés simples du radical de Baer' et Mac Coy. On démontre que si $X=X_1\cap X_2\cap\ldots\cap X_n$ est une intersection réduite au sens de la définition 4.3, on a seulement $\mathcal{R}_4(X)\supseteq\mathcal{R}_4(X_1)\cap\ldots\cap\mathcal{R}_4(X_n)$ (23) et que cette propriété n'est même plus vraie en général lorsque l'intersection n'est pas réduite (*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [53], III, p. 84 et 88).

CHAPITRE V.

Idéaux et sous-modules primaires.

Le cas d'un anneau commutatif montre que la décomposition d'un idéal comme intersection d'idéaux primaux est moins fine que la décomposition comme intersection d'idéaux primaires. Nous étudierons dans ce chapitre l'extension naturelle des idéaux primaires au cas non nécessairement commutatif. Bien que nous ayons seulement en vue l'étude des idéaux d'un anneau ou d'un demi-groupe et celle des sous-modules d'un module, nous envisageons le cas abstrait d'une ($\mathfrak{G}$)-algèbre qui permet d'unifier les raisonnements.

Commençons par la notion de radical primaire qui, indépendamment de son intérêt propre, nous sera utile pour définir les éléments primaires.

1. **Radical primaire d'un élément de** (L). — Soit (L) une ($\mathfrak{G}$)-algèbre satisfaisant à l'axiome D du chapitre III.

Théorème 5.1. — X *étant un élément quelconque de* (L), *l'ensemble des éléments* $\mathfrak{A}$ *de* ($\mathfrak{G}$) *tels qu'il existe un entier m vérifiant*

$$\mathfrak{A}^m\subseteq X\cdot.U$$

(23) On pourra voir plus loin, dans l'exemple 6.2, que l'intersection réduite $O=A\cap B$ donne $\mathcal{R}_4(O)=D$, $\mathcal{R}_4(A)=D$, $\mathcal{R}_4(B)=I$, d'où $\mathcal{R}_4(O)\not\subseteq\mathcal{R}_4(A)\cap\mathcal{R}_4(B)$.

a un élément maximum $\mathcal{R}_1(X)$ *qui est l'intersection des éléments premiers minimaux de* $(\mathfrak{T})$ *contenant* $X\cdot.U$.

En effet, pour $X = U$, on a évidemment $\mathcal{R}_1(X) = \mathcal{S}$; pour $X \neq U$, d'après le théorème 3.1, on peut trouver un nombre fini d'éléments premiers

$$\mathfrak{P}_i \in (\mathfrak{T}) \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \qquad \text{tels que} \quad \mathfrak{P}_i \supseteq X\cdot.U \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{P}_i \subseteq X\cdot.U.$$

Les éléments minimaux parmi ces $\mathfrak{P}_i$ sont les éléments premiers minimaux de $(\mathfrak{T})$ contenant $X\cdot.U$.

Soit alors $\mathfrak{A}$ un élément de $(\mathfrak{T})$ satisfaisant à l'hypothèse du théorème.

On a, pour tout $i = 1, 2, \ldots, k$,

$$\mathfrak{A}^m \subseteq X\cdot.U \subseteq \mathfrak{P}_i, \qquad \text{d'où} \qquad \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}_i \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{A} \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{P}_i.$$

D'autre part, on a

$$\left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{P}_i\right)^k \subseteq \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{P}_i \subseteq X\cdot.U$$

ce qui montre que $\mathcal{R}_1(X) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{P}_i$ est l'élément maximum possédant la propriété envisagée.

Définition 5.1. — L'élément $\mathcal{R}_1(X)$ est appelé *radical primaire* de l'élément X.

Nous voyons donc que $\mathcal{R}_1(X)$ coïncide avec le radical de Baer et Mac Coy dans le cas des idéaux ou des sous-modules (définition 1.18); ceci montre que, moyennant des conditions de chaîne convenables assurant l'axiome D, le radical de Baer et Mac Coy de X est *nilpotent* modulo $X\cdot.U$. De même, d'après la propriété 2.4, le radical de Jacobson d'un idéal bilatère à gauche X d'un anneau artinien à gauche unitaire est nilpotent modulo $X\cdot.U$ (définition 1.23). Signalons, dans le même ordre d'idées, le *théorème de* Levitski : dans un anneau nœthérien à gauche, tout nil-idéal à gauche (idéal à gauche dont tous les éléments sont nilpotents) est nilpotent (*cf.* N. Jacobson [44], p. 199).

Le radical primaire permet aussi de caractériser les anneaux semi-simples.

THÉORÈME 5.2. — *Les anneaux semi-simples coïncident avec les anneaux artiniens dont le radical primaire* $\mathcal{R}_1(O)$ *est nul* (24) (*cf.* B. L. Van der Waerden [68], t. II, chap. XVI, § 117).

Le radical primaire vérifie la propriété suivante, que nous avons déjà indiquée pour le radical de Baer et Mac Coy et qui est une conséquence immédiate de la définition.

PROPRIÉTÉ 5.1. — *Quel que soit un nombre fini d'éléments* X_1, $X_2, \ldots, X_n$ *de* (L), *on a*

$$\mathcal{R}_1(X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n) = \mathcal{R}_1(X_1) \cap \mathcal{R}_1(X_2) \cap \ldots \cap \mathcal{R}_1(X_n).$$

2. Éléments primaires. — *Définition* 5.2. — Un élément Q de (L) est dit *primaire* si l'on a

$$\mathfrak{A}X \subseteq Q, \qquad X \nsubseteq Q \Rightarrow \exists k \text{ entier positif tel que } \mathfrak{A}^k U \subseteq Q \quad (^{25}).$$

La notion de radical primaire d'un élément de (L) permet de mettre cette définition sous d'autres formes.

Un élément Q de (L) est *primaire* si l'on a

$$\mathfrak{A}X \subseteq Q, \qquad X \nsubseteq Q \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{R}_1(Q),$$

ou encore

$$\mathfrak{A} \nsubseteq \mathcal{R}_1(Q) \Rightarrow Q.\cdot\mathfrak{A} = Q.$$

La notion suivante constitue un cas particulier important de celle d'élément primaire.

Définition 5.3. — Un élément Q de (L) est dit *premier à droite* si l'on a

$$\mathfrak{A}X \subseteq Q, \qquad X \nsubseteq Q \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq Q\cdot.U \quad (^{26}).$$

(24) Dans cet énoncé, on peut même supposer seulement la condition minimale sur les idéaux à gauche principaux (*cf.* C. FAITH [28]).

(25) Lorsque les treillis ($\mathfrak{G}$) et (L) coïncident, cette définition est celle d'un élément primaire à droite donnée par L. LESIEUR [52], p. 117. Dans ce cas, et s'il y a risque de confusion, nous dirons qu'un élément Q satisfaisant à la définition ci-dessus est *primaire à droite*.

(26) Lorsque les treillis ($\mathfrak{G}$) et (L) coïncident et constituent un demi groupe réticulé *entier*, cette définition est celle d'un élément premier de ($\mathfrak{G}$). Si ($\mathfrak{G}$) n'est pas entier, il n'en est plus de même, par exemple dans le cas des idéaux bilatères d'un anneau de carré nul.

Par exemple, tout idéal à gauche d'un anneau premier unitaire artinien à gauche (anneau simple) est premier à droite (*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [56], p. 162).

On peut caractériser les éléments premiers à droite parmi les éléments primaires.

PROPRIÉTÉ 5.2. — *Si* Q *est primaire, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Q est premier à droite,

(2) $Q\cdot .U$ est un élément premier de $(\mathfrak{T})$,

(3) $Q\cdot .U = \mathcal{R}_1(Q)$

(*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [53], I, p. 97).

Il est possible de caractériser les éléments primaires de (L) au moyen de leurs résiduels à gauche propres premiers.

THÉORÈME 5.3. — *Pour que* $Q \neq U$ *soit primaire, il faut et il suffit qu'il admette un seul résiduel à gauche propre premier* $\mathfrak{T}$ *qui soit élément premier minimum contenant* $Q\cdot .U$. *L'élément* $\mathfrak{T}$ *est alors le radical primaire de* Q.

Supposons que $Q \neq U$ soit primaire et soit $\mathfrak{T}$ un résiduel à gauche propre premier de Q. D'après le théorème 3.2, on a $Q.\cdot\mathfrak{T} \supset Q$, d'où résulte $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{R}_1(Q)$ et par suite $\mathfrak{T} = \mathcal{R}_1(Q)$, d'où l'unicité de $\mathfrak{T}$. De plus, tout élément premier de $(\mathfrak{T})$ contenant $Q\cdot .U$ contient $\mathcal{R}_1(Q)$ et $\mathfrak{T}$ est bien minimum pour cette propriété.

Réciproquement, si $\mathfrak{T}$ est élément premier minimum contenant $Q\cdot .U$, on a $\mathfrak{T} = \mathcal{R}_1(Q)$. Si, de plus, $\mathfrak{T}$ est le seul résiduel à gauche propre premier de Q, la relation $\mathfrak{A} \nsubseteq \mathfrak{T} = \mathcal{R}_1(Q)$ implique $Q.\cdot\mathfrak{A} = Q$ et Q est bien primaire.

COROLLAIRE. — *Tout élément primaire est primal.*

Définition 5.4. — Lorsque $Q \neq U$ est primaire, son radical primaire étant $\mathfrak{T}$, on dit que Q est *$\mathfrak{T}$-primaire*. On dit encore, conformément à la définition 4.2, que $\mathfrak{T}$ est l'élément premier associé à Q. On appelle *exposant* à droite de Q le plus petit entier positif k tel que $\mathfrak{T}^k U \subseteq Q$.

De même, lorsque $Q \neq U$ est premier à droite, son radical primaire étant $\mathfrak{T}$, on dit que Q est *$\mathfrak{T}$-premier à droite*.

Pour qu'un élément $\mathfrak{P}$-primaire Q soit $\mathfrak{P}$-premier à droite, il faut et il suffit que son exposant à droite soit égal à 1.

La propriété suivante, qui permet de caractériser un élément primaire et son élément premier associé, va nous servir à montrer que l'intersection d'un nombre fini d'éléments $\mathfrak{P}$-primaires est un élément $\mathfrak{P}$-primaire.

Propriété 5.3. — *Si* $Q \in (L)\ (Q \neq U)$ *et* $\mathfrak{P} \in (\mathfrak{T})$ *sont tels que :*

1° $\mathcal{A}X \subseteq Q,\ X \nsubseteq Q \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}$;

2° $\exists$ *n entier positif tel que* $\mathfrak{P}^n U \subseteq Q$, *soit* $\mathfrak{P} \subseteq \mathcal{R}_1(Q)$, $\mathfrak{P}$ *est premier dans* $(\mathfrak{T})$ *et* Q *est* $\mathfrak{P}$*-primaire.*

En effet, Q est primaire car $\mathcal{A}X \subseteq Q,\ X \nsubseteq Q \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P} \Rightarrow \mathcal{A}^n U \subseteq Q$. Soit $\mathfrak{P}'$ le radical primaire de Q et k l'exposant à droite de Q. Si $k = 1$, on a $\mathfrak{P}' = Q\cdot.U$ d'où $\mathfrak{P}'U = (Q\cdot.U)U \subseteq Q$ et, d'après 1°, $\mathfrak{P}' \subseteq \mathfrak{P}$; si $k > 1$, on a $\mathfrak{P}'^{k-1}U \nsubseteq Q$ avec $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'^{k-1}U \subseteq Q$ et, d'après 1°, $\mathfrak{P}' \subseteq \mathfrak{P}$.

D'autre part, d'après, 2°, on a $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}'$. d'où $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$.

Propriété 5.4. — *L'intersection d'un nombre fini d'éléments* $\mathfrak{P}$*-primaires de* (L) *est* $\mathfrak{P}$*-primaire.*

Soient Q_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) ces éléments. On peut supposer $Q_i \neq U$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Il suffit alors de vérifier les conditions 1° et 2° de la propriété 5.3.

Propriété 5.5. — *L'intersection d'un nombre fini ou infini d'éléments* $\mathfrak{P}$*-premiers à droite de* (L) *est un élément* $\mathfrak{P}$*-premier à droite.*

En effet, $\mathcal{A}X \subseteq \bigcap_i Q_i,\ X \nsubseteq \bigcap_i Q_i \Rightarrow \exists\, i$ tel que

$$X \nsubseteq Q_i \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq Q_i\cdot.U = \mathfrak{P} = \Big(\bigcap_i Q_i\Big)\cdot.U.$$

La propriété 5.4 s'étend aux intersections même infinies qui contiennent un élément $\mathfrak{P}$-primaire fixé. Elle ne s'étend pas en l'absence de cette restriction, comme le montre l'exemple des idéaux (p^n) de l'anneau des entiers, p étant un nombre premier fixé.

Signalons que la notion d'élément primaire a été utilisée dans l'étude des demi-groupes intégralement clos par G. Maury [62].

3. Décomposition d'un élément de (L) comme intersection d'éléments primaires. — Si ($\mathfrak{T}$) et (L) coïncident avec l'ensemble des idéaux d'un anneau commutatif nœthérien, on sait (*cf.* par exemple B. L. Van der Waerden [68], t. II, chap. XII) que tout élément X de (L) est intersection d'un nombre fini d'éléments primaires. De plus, cette décomposition peut être supposée réduite et elle vérifie alors deux propriétés d'unicité :

1° unicité du nombre des composants et des radicaux primaires des composants;

2° unicité des composants primaires isolés.

Dans le cas général, ces deux propriétés d'unicité subsistent pour les décompositions existantes, mais la propriété d'existence n'est plus assurée.

Soit $X \neq U$ pour lequel nous supposons l'existence d'une décomposition comme intersection d'un nombre fini d'éléments primaires que nous appelons *composants primaires*. D'après la propriété 5.4, on peut toujours supposer que les radicaux primaires de deux éléments primaires intervenant dans cette décomposition sont distincts. De plus, en supprimant éventuellement des composants, on obtient une décomposition sans élément superflu. Une décomposition satisfaisant à ces deux conditions est dite *décomposition réduite*. Les radicaux primaires des composants primaires d'une telle décomposition sont appelés les *éléments premiers associés* à la décomposition.

PROPRIÉTÉ 5.6. — *Deux décompositions réduites d'un même élément* X *de* (L) *autre que* U *comme intersection d'éléments primaires ont même nombre de composants et mêmes éléments premiers associés.*

La démonstration, classique dans le cas des idéaux d'un anneau commutatif, s'étend facilement au cas d'une ($\mathfrak{T}$)-algèbre (*cf.* P. M. Grundy [40]).

La notion de frontière va nous permettre d'obtenir le théorème d'unicité des composants primaires isolés.

Définition 5.5. — On appelle *frontière* d'un élément X de (L) tout élément $F \in (L)$ pour lequel il existe $\mathcal{C} \in (\mathfrak{T})$ et n entier positif tels que

$$F = X . \cdot \mathcal{C}^n = X . \cdot \mathcal{C}^{n+1}.$$

A tout élément $\mathcal{C} \in (\mathcal{T})$, on peut ainsi associer une frontière de X dont l'existence est assurée par la condition D du chapitre III. Nous la noterons $X_{[\mathcal{C}]}$.

Théorème 5.4. — *Un élément quelconque* X *de* (L) *n'a qu'un nombre fini de frontières.*

Il suffit de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de la forme $X_{[\mathcal{C}]}$ distincts de X. Soit $Y = X_{[\mathcal{C}]} = X.\cdot\mathcal{C}^n = X.\cdot\mathcal{C}^{n+1}$ un tel élément. On a donc $X.\cdot\mathcal{C} \supset X$ et, par suite, d'après le théorème 3.2, on a $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{P}_1$ où $\mathfrak{P}_1$ est un résiduel à gauche propre premier de X. Il en résulte

$$X.\cdot\mathcal{C} \supseteq X.\cdot\mathfrak{P}_1, \qquad \text{d'où} \qquad Y = X.\cdot\mathcal{C}^{n+1} \supseteq (X.\cdot\mathfrak{P}_1).\cdot\mathcal{C}^n \supseteq X.\cdot\mathcal{C}^n = Y$$

et, par suite, $Y = (X.\cdot\mathfrak{P}_1).\cdot\mathcal{C}^n = X_1.\cdot\mathcal{C}^n$, avec $X_1 = X.\cdot\mathfrak{P}_1 \supset X$. De plus, on a

$$X_1.\cdot\mathcal{C}^{n+1} = (X_1.\cdot\mathcal{C}^n).\cdot\mathcal{C} = (X.\cdot\mathcal{C}^n).\cdot\mathcal{C} = X.\cdot\mathcal{C}^{n+1} = Y, \qquad \text{d'où} \qquad Y = X_{1[\mathcal{C}]}.$$

Si $X_1.\cdot\mathcal{C} = X_1$, on a $Y = X_1$. Sinon, on a $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{P}_2$, où $\mathfrak{P}_2$ est un résiduel à gauche propre premier de X_1 et, comme ci-dessus, $Y = X_2.\cdot\mathcal{C}^n = X_2.\cdot\mathcal{C}^{n+1}$ avec $X_2 = X_1.\cdot\mathfrak{P}_2 = X.\cdot\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ et $X_2 \supset X_1 \supset X$.

Si l'on a $X_2.\cdot\mathcal{C} \supset X_2$, le raisonnement se poursuit et la condition de chaîne ascendante sur les résiduels à droite de X implique

$$Y = X.\cdot\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\ldots\mathfrak{P}_k \qquad (k \geqq 1),$$

où $\mathfrak{P}_i$ est pour $i = 2, \ldots, k$ un résiduel à gauche propre premier de $X.\cdot\mathfrak{P}_1\ldots\mathfrak{P}_{i-1}$. Les éléments de cette forme étant en nombre fini, ceci démontre le théorème.

Propriété 5.7. — *Pour qu'un élément* Q *de* (L) *autre que* U *soit primaire, il faut et il suffit qu'il admette pour seules frontières les éléments* Q *et* U.

En effet, si Q est $\mathfrak{P}$-primaire, on a $Q.\cdot\mathfrak{A} = Q$ pour $\mathfrak{A} \nsubseteq \mathfrak{P}$ et $Q.\cdot\mathfrak{A}^k = U$ pour $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}$ si k est assez grand.

Réciproquement, si les seules frontières de Q sont Q et U, la relation $Q.\cdot\mathfrak{A} \supset Q$ implique $Q.\cdot\mathfrak{A}^k = U$ pour une certaine valeur de k et $\mathfrak{A}$ est contenu dans le radical primaire $\mathcal{R}$ de Q; donc Q est $\mathcal{R}$-primaire.

Propriété 5.8. — *Soit* $X = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ *une décomposition réduite de* X *comme intersection d'éléments primaires, les radicaux primaires de ces éléments étant* $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_n$. *Si l'on a* $\mathfrak{A} \nsubseteq \mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_m$ $(0 \leqq m \leqq n)$ *et* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{T}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{T}_n$, *on a* $X_{[\mathfrak{A}]} = Q_1 \cap \ldots \cap Q_m$. (Pour $m = 0$, on a $X_{[\mathfrak{A}]} = U$.)

En effet, on a $Q_{i[\mathfrak{A}]} = U$ ou $Q_{i[\mathfrak{A}]} = Q_i$ selon que $\mathfrak{A}$ est contenu ou non dans $\mathfrak{T}_i$.

Définition 5.6. — Un ensemble $\{ \mathfrak{T}_i \}_{i \leqq m}$ $(0 < m < n)$ d'éléments premiers associés à une décomposition réduite $X = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ est dit isolé si l'on a $\mathfrak{T}_j \nsubseteq \mathfrak{T}_i$ quels que soient $i \leqq m$ et $j \geqq m + 1$. L'élément $Q_1 \cap \ldots \cap Q_m$ est alors dit *composant isolé de* X.

En particulier, $\mathfrak{T}_1$ est isolé et Q_1 composant isolé si et seulement si $\mathfrak{T}_1$ est minimal parmi les éléments premiers associés à la décomposition.

Théorème 5.5. — *Pour que* X' $(\neq U$ *et* $\neq X)$ *soit un composant isolé de* X, *il faut et il suffit qu'il existe* $\mathfrak{A}$ *tel que* $X_{[\mathfrak{A}]} = X'$. *Un composant isolé est uniquement déterminé par la connaissance de* X *et des* $\mathfrak{T}_i$ *correspondants; il ne dépend pas de la décomposition réduite envisagée.*

Soit $\{ \mathfrak{T}_i \}_{i \leqq m}$ $(0 < m < n)$ un ensemble isolé d'éléments premiers associés à la décomposition réduite $X = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$. Posons

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{T}_{m+1} \ldots \mathfrak{T}_n.$$

On a

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{T}_j \quad \text{pour tout } j \geqq m + 1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{A} \nsubseteq \mathfrak{T}_i \quad \text{pour tout } i \leqq m.$$

D'où $X_{[\mathfrak{A}]} = Q_1 \cap \ldots \cap Q_m$. L'unicité en résulte.

Réciproquement, soit $X_{[\mathfrak{A}]} = X'$ $(\neq U$ et $\neq X)$. Supposons qu'on ait $\mathfrak{A} \nsubseteq \mathfrak{T}_i$ pour $i \leqq m$ et $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{T}_j$ pour $j \geqq m+1$, ce qui est réalisable en ordonnant convenablement les composants primaires. On a $\mathfrak{T}_j \nsubseteq \mathfrak{T}_i$, l'ensemble $\{ \mathfrak{T}_i \}_{i \leqq m}$ est isolé, et il en résulte $X_{[\mathfrak{A}]} = Q_1 \cap \ldots \cap Q_m$ d'après la propriété 5.8.

PROPRIÉTÉ 5.9. — *Soient* $X = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n = Q'_1 \cap \ldots \cap Q'_n$ *deux décompositions réduites de* X *comme intersections d'éléments primaires,* Q_i *et* Q'_i *ayant pour radical primaire* $\mathfrak{T}_i$. *On a*

$$X = Q'_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n.$$

Soient $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_m \subseteq \mathfrak{T}_1$ $(m \geqq 1)$ et $\mathfrak{T}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{T}_n \subsetneq \mathfrak{T}_1$. L'ensemble $\{\mathfrak{T}_i\}_{1 < i \leqq m}$ est isolé ainsi que l'ensemble $\{\mathfrak{T}_i\}_{1 \leqq i \leqq m}$ (si l'on a $m < n$).

On a

$$\begin{matrix} Q_1 \cap \ldots \cap Q_m = Q'_1 \cap \ldots \cap Q'_m \\ Q_2 \cap \ldots \cap Q_m = Q'_2 \cap \ldots \cap Q'_m \end{matrix} \qquad (\text{pour } m < n \text{ et pour } m = n).$$

D'où résulte

$$Q'_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_m = Q'_1 \cap Q'_2 \cap \ldots \cap Q'_m = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_m$$

et

$$Q'_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n.$$

COROLLAIRE. — *Si* X *a pour éléments premiers associés* $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_n$ *et si, quel que soit* i, *il existe une décomposition réduite de* X *telle que le composant primaire de radical primaire* $\mathfrak{T}_i$ *soit* Q_i, *on a* $X = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n$ *et cette décomposition est réduite.*

En particulier, considérons, pour tout i, les composants $\mathfrak{T}_i$-primaires des différentes décompositions réduites de X dont l'exposant à droite est minimal. L'intersection X_i de ces composants $\mathfrak{T}_i$-primaires est un élément $\mathfrak{T}_i$-primaire d'après la propriété 5.3 et l'on a $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ qui constitue une décomposition réduite de X vérifiant la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 5.10. — *Si* X *possède une décomposition réduite comme intersection finie d'éléments primaires, il possède une décomposition réduite unique* $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ *pour laquelle le composant* $\mathfrak{T}_i$*-primaire* X_i *est d'exposant minimum et est minimum pour cette propriété.*

Ce résultat est dû à V. Ortiz [64].

L'exemple suivant, dû à W. Krull [46], montre qu'il n'existe pas nécessairement une décomposition comme intersection d'éléments primaires.

Exemple 5.1. — *a*. Considérons le demi-groupe D à quatre éléments o, a, b, c dont la table de multiplication est la suivante :

	o	a	b	c
o	o	o	o	o
a	o	o	a	o
b	o	o	b	o
c	o	a	o	c

Considérons l'ensemble $(\mathfrak{T})$ de ses idéaux bilatères : $O = \{o\}$, $A = \{o, a\}$, $B = \{o, a, b\}$, $C = \{o, a, c\}$, $D = \{o, a, b, c\}$; B, C, D sont premiers. Figurons le diagramme du treillis $(\mathfrak{T})$.

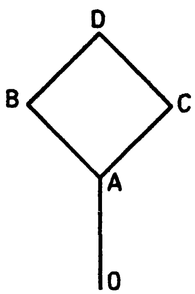

Fig. 1.

L'idéal bilatère O *est* $\cap$*-irréductible* et admet pour résiduels à gauche propres $O\cdot.A = O\cdot.C = B$ et $O\cdot.B = O\cdot.D = O$; il possède donc un seul résiduel à gauche propre premier B; mais on a $O\cdot.D = O$ et B n'est pas un élément premier minimum contenant $O\cdot.D$; par suite, O *n'est pas primaire*. D'ailleurs, on a $O.\cdot B = C \supset O$ et B n'est pas contenu dans le radical primaire de O qui est A.

b. Construisons, sur le corps K des nombres rationnels, une algèbre R dont les éléments générateurs a, b, c se multiplient conformément à la table de multiplication du demi-groupe D précédent. L'ensemble des idéaux bilatères de R est constitué par (o), (a), (a, b), (a, c) et (a, b, c). En tant que treillis multiplicatif, il est isomorphe au treillis $(\mathfrak{T})$ précédent. Ici encore, (o) *est* $\cap$*-irréductible sans être primaire*.

c. En outre, R possède les idéaux à gauche $(c + ka|$ pour tout $k \in K$. Tous ces idéaux à gauche sont $\cap$*-irréductibles et non primaires*.

CHAPITRE VI.

Idéaux et sous modules secondaires.

Les éléments primaires ne permettant pas d'obtenir un théorème d'existence des décompositions comme intersection de ces éléments, nous introduisons dans ce chapitre les éléments secondaires qui en constituent une généralisation naturelle dans le cas non commutatif. Nous verrons au chapitre IX que ces éléments permettent d'obtenir le théorème de décomposition pour les anneaux unitaires artiniens à gauche et pour les modules unitaires artiniens sur un anneau artinien à gauche.

1. Éléments secondaires et radical secondaire d'un élément de (L). — Nous considérons à nouveau une ($\mathfrak{T}$)-algèbre satisfaisant à la condition D du chapitre III.

Définition 6.1. — Un élément Q de (L) est dit *secondaire* si l'on a $\mathcal{A}X \subseteq Q$, $X \nsubseteq Q \Rightarrow \exists k_i$ entiers positifs ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $n \geqq 0$) et $\mathcal{L}_i \in (\mathfrak{T})$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) tels que $Q . \cdot \mathcal{L}_i = Q$ et

$$\mathcal{A}^{k_0}\mathcal{L}_1\mathcal{A}^{k_1}\mathcal{L}_2\mathcal{A}^{k_2} \ldots \mathcal{L}_n\mathcal{A}^{k_n}U \subseteq Q \quad (27).$$

Naturellement, un élément primaire de (L) est secondaire. Réciproquement, si ($\mathfrak{T}$) est commutatif, un élément secondaire de (L) est primaire.

La notion de radical secondaire d'un élément de (L) permet de mettre cette définition sous d'autres formes.

Théorème 6.1. — X *étant un élément quelconque de* (L), *l'ensemble des éléments* $\mathcal{A}$ *de* ($\mathfrak{T}$) *tels qu'il existe des entiers positifs* k_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $n \geqq 0$) *et des éléments* $\mathcal{L}_i \in (\mathfrak{T})$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) *vérifiant* $X . \cdot \mathcal{L}_i = X$ *et* $\mathcal{A}^{k_0}\mathcal{L}_1\mathcal{A}^{k_1}\mathcal{L}_2\mathcal{A}^{k_2} \ldots \mathcal{L}_n\mathcal{A}^{k_n} \subseteq X \cdot .U$ *a un élément maximum* $\mathcal{R}_2(X)$. *Cet élément est l'intersection des éléments premiers de* ($\mathfrak{T}$) *contenant* $X \cdot .U$ *et contenus dans un résiduel à gauche propre premier de* X (28).

(27) Lorsque les treillis ($\mathfrak{T}$) et (L) coïncident, s'il y a risque de confusion, nous dirons qu'un élément Q satisfaisant à la définition ci-dessus est *secondaire à droite*.

(28) Pour $X = U$, on a $\mathcal{R}_2(X) = \mathcal{O}$.

Considérons, en effet, les éléments premiers minimaux $\mathfrak{T}'_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) contenant $X^{\cdot}.U$ et contenus dans un résiduel à gauche propre premier de X. $\mathfrak{A}$ étant un élément de ($\mathfrak{G}$) satisfaisant à l'hypothèse du théorème, on a $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{T}'_j$ pour tout j, d'où $\mathfrak{A} \subseteq \bigcap_{j=1}^{m} \mathfrak{T}'_j$.

D'autre part, d'après le théorème 3.1, il existe des éléments premiers $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_k$ contenant $X^{\cdot}.U$ tels que $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \ldots \mathfrak{T}_k \subseteq X^{\cdot}.U$. Parmi eux figurent tous les $\mathfrak{T}'_j$ précédents. Les autres sont de deux espèces : ou bien ils vérifient $X.^{\cdot}\mathfrak{T}_i \supset X$ et sont contenus dans un résiduel à gauche propre premier, donc contiennent un $\mathfrak{T}'_j$ ou bien ils vérifient $X.^{\cdot}\mathfrak{T}_i = X$. On en déduit aisément que $\bigcap_{j=1}^{m} \mathfrak{T}'_j$ satisfait à l'hypothèse du théorème et est, par conséquent, le plus grand élément de ($\mathfrak{G}$) ayant cette propriété.

Définition 6.2. — L'élément $\mathcal{R}_2(X)$ est appelé *radical secondaire* de l'élément X ([29]).

Le radical secondaire vérifie la propriété suivante (*voir* L. Lesieur et R. Croisot [53], III, p. 79).

PROPRIÉTÉ 6.1. — *Si l'on a* $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ *et si les résiduels à gauche propres maximaux de tous les éléments* X_i *coïncident, on a*

$$\mathcal{R}_2(X) \supseteq \mathcal{R}_2(X_1) \cap \mathcal{R}_2(X_2) \cap \ldots \cap \mathcal{R}_2(X_n).$$

Nous pouvons définir un élément secondaire Q de (L) au moyen de son radical secondaire :

Q est *secondaire* si l'on a

$$\mathfrak{A} X \subseteq Q, \qquad X \nsubseteq Q \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{R}_2(Q)$$

([29]) Dans le cas où X est un idéal bilatère d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro ou, plus généralement, dans le cas où (L) coïncide avec ($\mathfrak{G}$), et s'il y a lieu de considérer en même temps que $\mathcal{R}_2(X)$ le radical secondaire défini symétriquement en permutant les résiduations à gauche et à droite, on dira que $\mathcal{R}_2(X)$ est le radical secondaire à *droite* de X.

ou encore

$$\mathcal{A} \nsubseteq \mathcal{R}_2(Q) \Rightarrow Q.\cdot\mathcal{A} = Q.$$

Il est possible de caractériser un élément secondaire à l'aide de ses résiduels à gauche propres premiers.

Théorème 6.2. — *Pour que* $Q \neq U$ *soit secondaire, il faut et il suffit qu'il admette un seul résiduel à gauche propre premier* $\mathfrak{P}$ *qui soit élément premier minimal contenant* $Q\cdot.U$. *L'élément* $\mathfrak{P}$ *est alors le radical secondaire de* Q.

Supposons que $Q \neq U$ soit secondaire et soit $\mathfrak{P}$ un résiduel à gauche propre premier de Q. D'après le théorème 3.2, on a $Q.\cdot\mathfrak{P} \supset Q$, d'où résulte $\mathfrak{P} \subseteq \mathcal{R}_2(Q)$ et par suite $\mathfrak{P} = \mathcal{R}_2(Q)$, d'où l'unicité de $\mathfrak{P}$. De plus, tout élément premier de $(\mathfrak{T})$ contenant $Q\cdot.U$ et contenu dans $\mathfrak{P}$ contient $\mathcal{R}_2(Q)$; donc, il coïncide avec $\mathfrak{P}$ qui est bien un élément premier minimal contenant $Q\cdot.U$.

Réciproquement, si $\mathfrak{P}$ est l'unique résiduel à gauche propre premier de Q et s'il est premier minimal contenant $Q\cdot.U$, on a $\mathcal{R}_2(Q) = \mathfrak{P}$ et la relation $\mathcal{A} \nsubseteq \mathfrak{P} = \mathcal{R}_2(Q)$ implique $Q.\cdot\mathcal{A} = Q$ ce qui prouve que Q est secondaire.

Corollaire. — *Tout élément secondaire est primal.*

Définition 6.3. — Lorsque $Q \neq U$ est secondaire, son radical secondaire étant $\mathfrak{P}$, on dit que Q est *$\mathfrak{P}$-secondaire* et que $\mathfrak{P}$ est l'élément premier associé à Q.

Propriété 6.2. — *Si* $Q \in (L)$ $(Q \neq U)$ *et* $\mathfrak{P} \in (\mathfrak{T})$ *sont tels que*

1° $$\mathcal{A}X \subseteq Q, \quad X \nsubseteq Q \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P};$$

2° $\exists\, k_0, k_1, \ldots, k_n$ *entiers positifs* $(n \geqq 0)$, $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ *éléments de* $(\mathfrak{T})$ *tels que* $\mathfrak{P}^{k_0}\mathcal{L}_1\mathfrak{P}^{k_1}\ldots\mathcal{L}_n\mathfrak{P}^{k_n}U \subseteq Q$ *avec* $Q.\cdot\mathcal{L}_i = Q$, *soit* $\mathfrak{P} \subseteq \mathcal{R}_2(Q)$,

$\mathfrak{P}$ est premier dans $(\mathfrak{T})$ et Q est $\mathfrak{P}$ secondaire.

En effet, Q est secondaire car

$$\mathcal{A}X \subseteq Q, \quad X \nsubseteq Q \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P} \Rightarrow \mathcal{A}^{k_0}\mathcal{L}_1\mathcal{A}^{k_1}\ldots\mathcal{L}_n\mathcal{A}^{k_n}U \subseteq Q.$$

Soit $\mathfrak{T}'$ le radical secondaire de Q. Si $\mathfrak{T}' = Q\cdot .U$, on a $\mathfrak{T}' \subseteq \mathfrak{T}$ d'après 1°. Sinon, on peut trouver des entiers positifs $l_0, l_1, \ldots, l_m$ et des éléments $\mathfrak{M}_j \in (\mathfrak{G})$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ tels que

$$\mathfrak{T}'^{l_0} \mathfrak{M}_1 \mathfrak{T}'^{l_1} \ldots \mathfrak{M}_m \mathfrak{T}'^{l_m} U \subseteq Q,$$

avec

$$Q.\cdot \mathfrak{M}_j = Q \quad \text{et} \quad \mathfrak{T}'^{l_0 - 1} \mathfrak{M}_1 \mathfrak{T}'^{l_1} \ldots \mathfrak{M}_m \mathfrak{T}'^{l_m} U \nsubseteq Q;$$

on en déduit $\mathfrak{T}' \subseteq \mathfrak{T}$. D'autre part, d'après 2°, on a $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}'$, d'où $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'$.

PROPRIÉTÉ 6.3. — *L'intersection d'un nombre fini d'éléments $\mathfrak{T}$-secondaires de* (L) *est $\mathfrak{T}$-secondaire.*

Soient Q_i ces éléments $(i = 1, 2, \ldots, n)$. On peut supposer $Q_i \neq U$ quel que soit $i = 1, 2, \ldots, n$. Il suffit alors de vérifier les conditions 1° et 2° de la propriété 6.2 en utilisant le fait que $Q_i.\cdot \mathfrak{L} = Q_i$ équivaut à $\mathfrak{L} \nsubseteq \mathfrak{T}$.

2. Décomposition d'un élément de (L) comme intersection d'éléments secondaires. — Les éléments secondaires, plus généraux que les éléments primaires, permettront, dans certains cas, d'obtenir l'existence d'une décomposition pour tout élément de (L) (*voir* l'exemple 6.1 ci-dessous). Néanmoins, ceci n'a pas lieu dans le cas général (*voir* l'exemple 6.2 ci-dessous). En ce qui concerne l'unicité, la première propriété d'unicité reste valable (nous pourrions le démontrer ici mais ceci résultera d'une propriété plus forte établie plus loin au chapitre VIII). La deuxième propriété d'unicité (unicité des composants isolés) cesse d'être valable (*voir* l'exemple 6.3 ci-dessous).

Exemple 6.1. — Reprenons l'exemple 5.1 [cas (*a*), (*b*) et (*c*)].

Les idéaux $\cap$-irréductibles B, C, D sont premiers donc *a fortiori* secondaires. L'idéal O qui est lui aussi $\cap$-irréductible est secondaire car son radical secondaire est B [10] et l'on a $O.\cdot C = O.\cdot D = O$. *Par conséquent, dans cet exemple, tout idéal $\cap$-irréductible est secondaire et, par suite, tout idéal est intersection d'idéaux secondaires.* Il en est de même dans le cas (*b*) et dans le cas (*c*) où les idéaux à gauche $(c + ka|$ sont tous B-secondaires).

([10]) Nous voyons que le radical secondaire à droite de O est distinct du radical secondaire à gauche de O qui est C.

Exemple 6.2. — *a*. Considérons le demi-groupe D à quatre éléments o, a, b, c dont la table de multiplication est la suivante :

·	o	a	b	c
o	o	o	o	o
a	o	o	o	a
b	o	o	o	b
c	o	a	o	c

Considérons l'ensemble $(\mathfrak{T})$ de ses idéaux bilatères : $O = \{o\}$, $A = \{o, a\}$, $B = \{o, b\}$, $I = \{o, a, b\}$, $D = \{o, a, b, c\}$. I et D sont premiers. Figurons le diagramme du treillis $(\mathfrak{T})$:

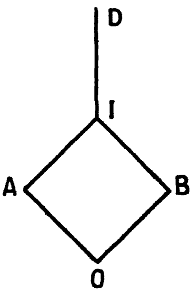

Fig. 2.

Envisageons l'élément A de $(\mathfrak{T})$. Ses résiduels à gauche propres sont $A\cdot.I = D$ et $A\cdot.D = A$. Par suite, A possède un seul résiduel à gauche propre premier D; mais on a $A\cdot.D = A$ et D n'est pas premier minimal contenant $A\cdot.D$; donc A *est* $\cap$*-irréductible et non secondaire.*

b. Construisons sur le corps des nombres rationnels une algèbre R dont les éléments générateurs a, b, c se multiplient conformément à la table de multiplication du demi-groupe précédent. L'ensemble des idéaux bilatères de R est constitué par (o), (a), (b), (a, b) et (a, b, c). Il est isomorphe au treillis $(\mathfrak{T})$ précédent en tant que treillis multiplicatif. Ici encore, (a) est $\cap$*-irréductible sans être secondaire.*

c. Les idéaux à gauche de R sont tous bilatères. Par suite, l'idéal à gauche (a) est $\cap$*-irréductible et non secondaire* ([31]).

([31]) On voit immédiatement, d'après la définition 6.1, qu'un idéal bilatère d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro est secondaire en tant qu'idéal bilatère si et seulement si il est secondaire en tant qu'idéal à gauche.

Cet exemple montre la nécessité d'une autre généralisation de la notion d'idéal primaire.

Exemple 6.3. — Considérons un groupe abélien G, produit d'un groupe cyclique d'ordre 2 par un groupe cyclique d'ordre 4, et étudions son anneau d'endomorphismes A. Nous notons (ξ, η) les éléments de G, ξ étant élément de l'anneau Z_2 des classes résiduelles modulo 2 et étant représenté par 0 ou 1, η étant élément de l'anneau Z_4 des classes résiduelles modulo 4 et étant représenté par 0, 1, 2 ou 3. Nous notons

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}$$

les endomorphismes de G, avec $\alpha, \alpha' \in Z_2$ et $\beta, \beta' \in Z_4$, l'élément β pouvant prendre seulement les valeurs 0 et 2; (α, β) désigne le transformé de l'élément $(1, 0)$ et (α', β') le transformé de l'élément $(0, 1)$ de G. Si l'on désigne par $(\xi, \eta)a$ le transformé de l'élément (ξ, η) de G par l'endomorphisme a, on voit que ce transformé qui est $(\xi\alpha + \eta\alpha', \xi\beta + \eta\beta')$ ($\xi\alpha + \eta\alpha'$ étant réduit modulo 2, $\xi\beta + \eta\beta'$ étant réduit modulo 4) s'obtient en multipliant la « matrice »-ligne (ξ, η) par la « matrice » représentant a. On vérifie également que le produit [32] des endomorphismes

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 \end{pmatrix}$$

est l'endomorphisme

$$aa_1 = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 + \beta\alpha'_1 & \alpha\beta_1 + \beta\beta'_1 \\ \alpha'\alpha_1 + \beta'\alpha'_1 & \alpha'\beta_1 + \beta'\beta'_1 \end{pmatrix}$$

($\alpha\alpha_1 + \beta\alpha'_1$ et $\alpha'\alpha_1 + \beta'\alpha'_1$ étant réduits modulo 2, $\alpha\beta_1 + \beta\beta'_1$ et $\alpha'\beta_1 + \beta'\beta'_1$ étant réduits modulo 4) qu'on obtient donc en faisant la multiplication des « matrices » représentant a et a_1 ligne par colonne.

Soit L un idéal à gauche de A. Si l'endomorphisme

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 \end{pmatrix}$$

([32]) Dans le produit aa_1, on applique d'abord l'endomorphisme a puis l'endomorphisme a_1, conformément à la notation $(\xi, \eta)a$ du transformé d'un élément par un endomorphisme.

appartient à L, il en est de même des endomorphismes

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 \end{pmatrix}$$

qu'on obtient en multipliant a_1 à gauche par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivement. Par suite, L est caractérisé par l'ensemble S des couples (α_1, β_1) et l'ensemble S′ des couples (α'_1, β'_1) qui sont des éléments de G. Posons donc $L = (S, S')$. Les ensembles S et S′ sont des sous-groupes de G. Or. les sous-groupes de G sont :

$$G = \{(\gamma, \gamma')\}, \quad A_0 = \{(0, \gamma')\}, \quad A_1 = \{(\gamma', \gamma')\}, \quad A_2 = \{(\gamma, 2\gamma')\},$$
$$B_0 = \{(\gamma, 0)\}, \quad B_1 = \{(\gamma, 2\gamma)\}, \quad B_2 = \{(0, 2\gamma')\}, \quad C = \{(0, 0)\},$$

où γ et γ' sont quelconques, et leur treillis est représenté par le diagramme ci-dessous :

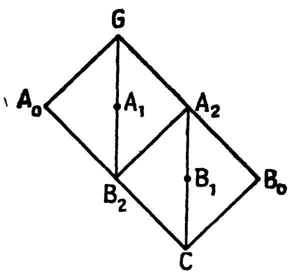

Fig. 3.

D'autre part, S est un sous-groupe de A_2 puisque β est pair, S est un sous-groupe de S′ et 2S′ ([33]) est un sous-groupe de S car on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha'_1 & 2\beta'_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

([33]) Pour $S' = \{(\xi, \eta)\}$, on pose $2S' = \{(2\xi, 2\eta)\}$.

On voit aisément que les conditions ci-dessus imposées à S et S′ sont suffisantes. Les idéaux à gauche de A sont alors les suivants :

$$O = (C, C),\quad I_0 = (C, B_0),\quad I_1 = (C, B_1),\quad I_2 = (C, B_2),$$
$$J = (C, A_2),\quad J_0 = (B_0, B_0),\quad J_1 = (B_1, B_1),\quad J_2 = (B_2, B_2),$$
$$K_0 = (B_0, A_2),\quad K_1 = (B_1, A_2),\quad K_2 = (B_2, A_2),$$
$$L_0 = (B_2, A_0),\quad L_1 = (B_2, A_1),$$
$$P_1 = (A_2, A_2),\quad P_2 = (B_2, G),\quad A = (A_2, G).$$

Figurons le diagramme de leur treillis ci-dessous :

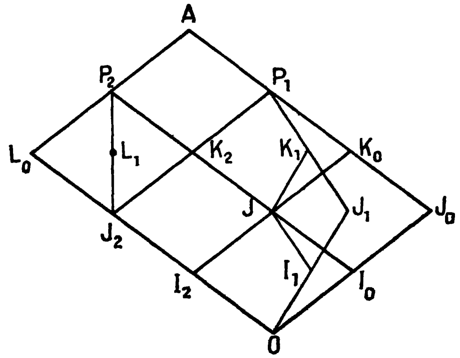

Fig. 4.

Supposons que l'idéal à gauche L soit bilatère. On voit alors par multiplication à droite par les endomorphismes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que le sous-groupe S doit contenir en même temps que l'élément (α, β) les éléments $(\alpha, 0)$, $(0, \beta)$, $(0, 2\alpha)$ et $(\beta, 0)$ ce qui lui impose d'être l'un des sous-groupes suivants de G : G, A_2, B_2, C. Le sous-groupe S′ doit vérifier les mêmes conditions, donc être l'un de ces quatre sous-groupes de G. Réciproquement, si S et S′ sont ainsi choisis, L est bilatère. Par suite, les idéaux bilatères de A sont O, I_2, J, J_2, K_2, P_1, P_2 et A. Figurons le diagramme de leur treillis (*fig.* 5).

Les idéaux premiers propres sont P_1 et P_2. L'idéal bilatère J est secondaire, son idéal premier associé étant $J \cdot . K_2 = P_2$. L'idéal à gauche J_0 est également secondaire, son idéal premier associé étant $J_0 \cdot . K_0 = P_1$. Or, on a $I_0 = J \cap J_0 = P_2 \cap J_0$, ce qui montre que le *théorème d'unicité des composants primaires isolés ne s'étend pas aux décompositions d'un idéal à gauche comme intersection d'idéaux à gauche secondaires.*

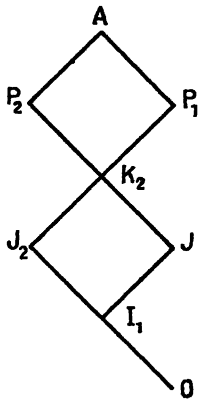

Fig. 5.

CHAPITRE VII.

Idéaux et sous-modules tertiaires.

Dans ce chapitre, est présentée la notion d'idéal (resp. sous-module) tertiaire que nous avons introduite en 1956 (*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [53], I et II). Elle généralise encore celle d'idéal (resp. sous-module) secondaire et elle permet d'obtenir en toute généralité les théorèmes de décomposition. Nous allons d'abord présenter la notion d'idéal (resp. sous-module) unirésidué qui en est un cas particulier important.

1. Éléments unirésidués et radical unirésidué d'un élément de (L). — Nous considérons toujours une ($\mathfrak{T}$)-algèbre satisfaisant à la condition D du chapitre III. De plus, nous supposons que cette ($\mathfrak{T}$)-algèbre est modulaire (chap. III, § 3).

D'après les théorèmes 5.3 et 6.2, les notions d'élément primaire et d'élément secondaire sont des cas particuliers de la notion suivante.

Définition 7.1. — Un élément Q de (L) est dit *unirésidué* s'il est égal à U ou s'il possède un seul résiduel à gauche propre premier.

Tout élément unirésidué est évidemment primal.

Introduisons également la notion de *radical unirésidué*.

THÉORÈME 7.1. — X *étant un élément quelconque de* (L), *l'ensemble des éléments* $\mathcal{A}$ *de* $(\mathcal{T})$ *vérifiant la condition*

$$\mathcal{A}\mathrm{C} \nsubseteq \mathrm{X} \Rightarrow \exists \mathcal{B} \in (\mathcal{T}) \quad \textit{tel que} \quad \mathcal{B}\mathrm{C} \nsubseteq \mathrm{X} \quad \textit{et} \quad \mathcal{A}\mathcal{B}\mathrm{C} \subseteq \mathrm{X}$$

a un élément maximum $\mathcal{R}'(\mathrm{X})$. *Cet élément est l'intersection des résiduels à gauche propres premiers de* X [34].

Soit $\mathcal{A}$ un élément satisfaisant à la condition du théorème. Considérons un résiduel à gauche propre premier $\mathcal{X}$ de X et montrons qu'on a $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et soit $\mathrm{C} \nsubseteq \mathrm{X}$ tel que $\mathcal{X} = \mathrm{X} \cdot .\mathrm{C}$; on aurait $\mathcal{A}\mathrm{C} \nsubseteq \mathrm{X}$ et, par suite, il existerait $\mathcal{B}$ vérifiant $\mathcal{B}\mathrm{C} \nsubseteq \mathrm{X}$ et $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathrm{C} \subseteq \mathrm{X}$, d'où $\mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{X}$ et $\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ ce qui entraînerait, $\mathcal{X}$ étant premier, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ et contredirait notre hypothèse. On a donc

$$\mathcal{A} \subseteq \bigcap_i \mathcal{X}_i,$$

où $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ désigne l'ensemble des résiduels à gauche propres premiers de X.

Montrons maintenant que l'élément $\mathcal{J} = \bigcap_i \mathcal{X}_i$ satisfait à la condition du théorème. Soit, en effet, $\mathcal{J}\mathrm{C} \nsubseteq \mathrm{X}$. Considérons un résiduel à gauche propre de X de la forme $\mathrm{X} \cdot .\mathcal{B}\mathrm{C}$ qui soit maximal parmi les résiduels à gauche propres de cette forme. La démonstration de la propriété 3.3 montre que c'est un résiduel à gauche propre premier, soit, par exemple, $\mathcal{X}_1$. On a alors $\mathcal{B}\mathrm{C} \nsubseteq \mathrm{X}$ et $\mathcal{J}\mathcal{B}\mathrm{C} \subseteq \mathcal{X}_1\mathcal{B}\mathrm{C} \subseteq \mathrm{X}$. Par conséquent, l'élément $\bigcap_i \mathcal{X}_i$ est bien le plus grand élément de $(\mathcal{T})$ satisfaisant à la condition du théorème.

Définition 7.2. — L'élément $\mathcal{R}'(\mathrm{X})$ est appelé *radical unirésidué* de l'élément X.

---

[34] Pour $\mathrm{X} = \mathrm{U}$, on a $\mathcal{R}'(\mathrm{X}) = \mathcal{E}$.

Le radical unirésidué vérifie la propriété suivante (*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [53], III, p. 80).

PROPRIÉTÉ 7.1. — *Quel que soit un nombre fini d'éléments* X_1, $X_2, \ldots, X_n$ *de* (L), *on a*

$$\mathcal{R}'(X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n) \supseteq \mathcal{R}'(X_1) \cap \mathcal{R}'(X_2) \cap \ldots \cap \mathcal{R}'(X_n).$$

La notion de radical unirésidué permet de caractériser un élément unirésidué :

Q est *unirésidué* si l'on a

$$\mathfrak{A}X \subseteq Q, \qquad X \nsubseteq Q \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{R}'(Q)$$

ou encore

$$\mathfrak{A} \nsubseteq \mathcal{R}'(Q) \Rightarrow Q.\cdot\mathfrak{A} = Q.$$

Définition 7.3. — Lorsque $Q \neq U$ est unirésidué, son radical unirésidué étant $\mathfrak{T}$, on dit que Q est $\mathfrak{T}$-*unirésidué* et que $\mathfrak{T}$ est l'élément premier associé à Q.

PROPRIÉTÉ 7.2. — *Si* $Q \neq U$ *et* $\mathfrak{T}$ *sont tels qu'on ait*

1° $$\mathfrak{A}X \subseteq Q, \qquad X \nsubseteq Q \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{T};$$

2° $$\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{R}'(Q),$$

$\mathfrak{T}$ *est premier et* Q *est* $\mathfrak{T}$-*unirésidué*.

D'abord, Q est unirésidué d'après les conditions 1° et 2°. De plus, on a $Q.\cdot\mathcal{R}'(Q) \supset Q$, d'où $\mathcal{R}'(Q) \subseteq \mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T} = \mathcal{R}'(Q)$, ce qui montre que $\mathfrak{T}$ est le radical unirésidué de Q et, par suite, qu'il est premier.

PROPRIÉTÉ 7.3. — *L'intersection d'un nombre fini d'éléments* $\mathfrak{T}$-*unirésidués est un élément* $\mathfrak{T}$-*unirésidué*.

Ceci résulte immédiatement de la propriété 4.6.

Les éléments unirésidués généralisent effectivement les éléments secondaires comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 7.1. — Reprenons l'exemple 6.2 [cas (*a*), (*b*) et (*c*)].

L'élément A *est unirésidué sans être secondaire*.

Remarquons que l'anneau R n'a pas d'élément unité, mais seulement un élément unité *à droite*. En fait, nous verrons plus loin (chap. IX) que, *dans un anneau à élément unité à gauche vérifiant la condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche, tout idéal unirésidué est secondaire. Par contre, on peut donner des exemples de demi-groupes finis à élément unité dans lesquels un idéal unirésidué n'est pas secondaire :* il en est ainsi du demi-groupe ci-dessus auquel on adjoint un élément unité (prendre l'idéal A).

En ce qui concerne les décompositions d'un élément de (L) en intersection d'éléments unirésidués, le théorème d'unicité reste valable, comme il résultera du théorème d'unicité plus général du chapitre VIII. Le théorème d'existence est valable dans certains cas (demi-groupes artiniens à gauche par exemple, *cf.* théorème 9.2) mais ceci n'a pas lieu en toute généralité pour une ($\mathfrak{G}$)-algèbre modulaire satisfaisant à l'axiome D, comme le montre l'exemple abstrait suivant.

Exemple 7.2. — Prenons pour ($\mathfrak{G}$), confondu avec (L), le demi-groupe réticulé à trois éléments O, A, B avec $O \subset A \subset B$ et $XY = O$ sauf si $X = Y = B$ auquel cas $XY = B$. L'élément O admet $O\cdot.A = B$ et $O\cdot.B = A$ comme résiduels à gauche propres premiers et il est $\cap$-irréductible.

Toutefois, nous ne connaissons aucun exemple d'anneau, de demi-groupe ou de module (satisfaisant à une condition de chaîne convenable pour que la théorie s'applique) dans lequel il existe un idéal ou un sous-module $\cap$-irréductible non unirésidué.

Néanmoins, ne pouvant démontrer le théorème d'existence des décompositions en intersection d'éléments unirésidués, il est nécessaire de généraliser la notion d'élément unirésidué par la notion d'élément tertiaire.

2. Éléments tertiaires et radical tertiaire d'un élément de (L). — *Définition* 7.4. — Un élément Q de (L) est dit *tertiaire* si les relations

$$Q\cdot.\mathfrak{A} \supset Q \quad \text{et} \quad (Q\cdot.\mathfrak{A}) \cap X = Q \quad \text{impliquent} \quad X = Q.$$

On obtient une définition équivalente en supposant que les relations

$$Q\cdot.\mathfrak{A} \supset Q \quad \text{et} \quad (Q\cdot.\mathfrak{A}) \cap X \subseteq Q \quad \text{impliquent} \quad X \subseteq Q.$$

Evidemment, tout élément $\cap$-irréductible de (L) est tertiaire et tout élément tertiaire est primal.

PROPRIÉTÉ 7.4. — *Pour que* Q *soit tertiaire, il faut et il suffit :*

1° *qu'il soit primal;*

2° *que,* $\mathfrak{T}$ *désignant le résiduel maximum de* Q,

$$(Q.\cdot\mathfrak{T})\cap X = Q \quad \textit{implique} \quad X = Q.$$

La condition est évidemment nécessaire.

Réciproquement, si elle est vérifiée et si l'on a $Q.\cdot\mathfrak{A}\supset Q$ et $(Q.\cdot\mathfrak{A})\cap X = Q$, on en déduit $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{T}$, d'où $Q.\cdot\mathfrak{A}\supseteq Q.\cdot\mathfrak{T}$, puis $(Q.\cdot\mathfrak{T})\cap X = Q$, d'où $X = Q$.

Dans la propriété 7.4, on peut remplacer l'implication du 2° par la suivante :

$$(Q.\cdot\mathfrak{T})\cap X\subseteq Q \quad \text{implique} \quad X\subseteq Q.$$

Nous allons maintenant introduire la notion de *radical tertiaire* grâce à la notion de résiduel essentiel (*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [54]).

Définition 7.5. — On appelle *résiduel essentiel* d'un élément X de (L) un élément $\mathfrak{T}$ de $(\mathfrak{G})$ tel qu'il existe $Y\supset X$ avec $\mathfrak{T} = X\cdot.Y$ et

$$X\subset Z\subseteq Y \Rightarrow X\cdot.Z = X\cdot.Y.$$

Cette définition est équivalente à la suivante : il existe $Y\nsubseteq X$ avec $\mathfrak{T} = X\cdot.Y$ et

$$Z\subseteq Y,\qquad Z\nsubseteq X\Rightarrow X\cdot.Z = X\cdot.Y.$$

PROPRIÉTÉ 7.5. — *Tout résiduel à gauche propre maximal de* X *est résiduel essentiel de* X.

En effet, si l'on a $\mathfrak{T} = X\cdot.Y$ avec $X\subset Y$ et si $\mathfrak{T}$ est un résiduel à gauche propre maximal de X, pour tout Z tel que $X\subset Z\subseteq Y$, on a $X\cdot.Z\supseteq X\cdot.Y = \mathfrak{T}$, d'où $\mathfrak{T} = X\cdot.Z$ et $\mathfrak{T}$ est bien essentiel.

PROPRIÉTÉ 7.6. — *Tout résiduel essentiel de* X *est un résiduel à gauche propre premier de* X.

En effet, si $\mathfrak{T} = X\cdot.Y$ est un résiduel essentiel de X et si l'on a $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\subseteq$ avec $\mathfrak{C}\nsubseteq\mathfrak{T}$, c'est-à-dire $\mathfrak{B}\mathfrak{C}Y\subseteq X$ avec $\mathfrak{C}Y\nsubseteq X$, on en tire, puisque $\mathcal{C}Y \subseteq Y$, $X\cdot .\mathcal{C}Y = X\cdot .Y = \mathfrak{X}$, d'où $\mathcal{B} \subseteq X\cdot .CY = \mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}$ est bien premier.

Théorème 7.2. — X *étant un élément quelconque de* (L), *l'ensemble des éléments* $\mathcal{A}$ *de* $(\mathfrak{T})$ *tels qu'on ait*

$$(X.\cdot\mathcal{A}) \cap C = X \Rightarrow C = X$$

a un élément maximum $\mathcal{R}_3(X)$. *Cet élément est l'intersection des résiduels essentiels de* X [35].

Soit $\mathcal{A}$ un élément satisfaisant à la condition du théorème. Considérons un résiduel essentiel $\mathfrak{X}$ de X et montrons qu'on a $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{X}$. Il existe $Y \supset X$ tel qu'on ait $\mathfrak{X} = X\cdot .Y$ et

$$X \subset Z \subseteq Y \Rightarrow X\cdot .Z = X\cdot .Y.$$

On a $\mathcal{A} \subseteq X\cdot .(X.\cdot\mathcal{A}) \subseteq X\cdot .[(X.\cdot\mathcal{A}) \cap Y]$. De $Y \supset X$ résulte $(X.\cdot\mathcal{A}) \cap Y \supset X$ d'où, compte tenu de $(X.\cdot\mathcal{A}) \cap Y \subseteq Y$,

$$X\cdot .[(X.\cdot\mathcal{A}) \cap Y] = X\cdot .Y = \mathfrak{X}.$$

On a donc bien $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{X}$ et, par suite, $\mathcal{A} \subseteq \bigcap_i \mathfrak{X}_i$, où $\{\mathfrak{X}_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ désigne l'ensemble des résiduels essentiels de X.

Montrons maintenant que $\mathcal{I} = \bigcap_i \mathfrak{X}_i$ satisfait à la condition du théorème. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et soit C un élément de (L) tel qu'on ait

$$(X.\cdot\mathcal{I}) \cap C = X \quad \text{et} \quad C \supset X.$$

L'élément $X\cdot .C$ de $(\mathfrak{T})$ est alors un résiduel à gauche propre de X. Si l'on n'a pas

$$X \subset Z \subseteq C \Rightarrow X\cdot .Z = X\cdot .C,$$

on peut choisir $C_1 \subseteq C$ satisfaisant à $C_1 \supset X$ et $X\cdot .C_1 \supset X\cdot .C$. En répétant ce raisonnement autant de fois qu'il est possible, on voit d'après l'axiome D, qui implique la condition de chaîne ascendante pour les résiduels à gauche, qu'on peut trouver un élément $C' \subseteq C$ satisfaisant à $C' \supset X$ et

$$X \subset Z \subseteq C' \Rightarrow X\cdot .Z = X\cdot .C'.$$

---

[35] Pour $X = U$, on a $\mathcal{R}_3(X) = \mathcal{E}$.

On a alors évidemment

$$(X.\cdot\mathcal{J})\cap C' = X \qquad \text{et} \qquad C' \supset X,$$

et l'élément $\mathfrak{T} = X\cdot.C'$ est un résiduel essentiel de X. On en déduit $\mathcal{J} \subseteq \mathfrak{T}$ et

$$X.\cdot\mathcal{J} \supseteq X.\cdot\mathfrak{T} \supseteq C',$$

d'où $C' = (X.\cdot\mathcal{J})\cap C' = X$, ce qui contredit $C' \supset X$. L'élément $\bigcap_i \mathfrak{T}_i$ est donc bien le plus grand élément de $(\mathfrak{T})$ satisfaisant à la condition du théorème.

Définition 7.6. — L'élément $\mathcal{R}_3(X)$ est appelé *radical tertiaire* de l'élément X.

Le radical tertiaire $\mathcal{R}_3(X)$ d'un élément X de (L) peut encore être défini comme le plus grand élément $\mathfrak{A}$ de $(\mathfrak{T})$ tel qu'on ait

$$(X.\cdot\mathfrak{A})\cap C \subseteq X \Rightarrow C \subseteq X.$$

Notons la propriété suivante du radical tertiaire (*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [53], III, p. 83).

Propriété 7.7. — *Quels que soient les éléments* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *de* (L), *on a*

$$\mathcal{R}_3(X_1\cap X_2\cap\ldots\cap X_n) \supseteq \mathcal{R}_3(X_1)\cap\mathcal{R}_3(X_2)\cap\ldots\cap\mathcal{R}_3(X_n).$$

Il suffit de faire la démonstration pour $n = 2$.

Soit $\mathfrak{A} = \mathcal{R}_3(X_1)\cap\mathcal{R}_3(X_2)$, et soit C tel qu'on ait

$$[(X_1\cap X_2).\cdot\mathfrak{A}]\cap C \subseteq X_1\cap X_2.$$

On en tire $(X_1.\cdot\mathfrak{A})\cap(X_2.\cdot\mathfrak{A})\cap C \subseteq X_1$, d'où, en vertu de $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{R}_3(X_1)$,

$$(X_2.\cdot\mathfrak{A})\cap C \subseteq X_1 \subseteq X_1.\cdot\mathfrak{A},$$

ce qui entraîne

$$(X_2.\cdot\mathfrak{A})\cap C = (X_1.\cdot\mathfrak{A})\cap(X_2.\cdot\mathfrak{A})\cap C \subseteq X_1\cap X_2 \subseteq X_2.$$

Mais, de $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{R}_3(X_2)$, résulte alors :

$$C \subseteq X_2 \subseteq X_2.\cdot\mathfrak{A}$$

et, par suite,

$$C = (X_2.\cdot\mathfrak{A})\cap C \subseteq X_1,$$

d'où $C \subseteq X_1\cap X_2$. On a donc bien $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{R}_3(X_1\cap X_2)$.

Remarque. — Pour des éléments quelconques $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de (L), on n'a pas, en général,

$$\mathcal{R}_3(X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n) = \mathcal{R}_3(X_1) \cap \mathcal{R}_3(X_2) \cap \ldots \cap \mathcal{R}_3(X_n).$$

C'est ainsi que, dans l'exemple 7.1, $A \subseteq I$, $\mathcal{R}_3(A) = D$ et $\mathcal{R}_3(I) = I$ avec $D \not\subseteq I$ et par suite $\mathcal{R}_3(A \cap I) \neq \mathcal{R}_3(A) \cap \mathcal{R}_3(I)$.

La notion de radical tertiaire permet de donner d'un élément tertiaire les définitions suivantes :

Q est *tertiaire* si l'on a

$$\mathfrak{A}X \subseteq Q, \qquad X \not\subseteq Q \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{R}_3(Q)$$

ou encore

$$\mathfrak{A} \not\subseteq \mathcal{R}_3(Q) \Rightarrow Q \,.\!\cdot \mathfrak{A} = Q.$$

Propriété 7.8. — *Tout élément unirésidué de* (L) *est tertiaire.*

Ceci résulte immédiatement de la relation $\mathcal{R}'(X) \subseteq \mathcal{R}_3(X)$.

Théorème 7.3. — *Pour que* $Q \neq U$ *soit tertiaire, il faut et il suffit qu'il possède un seul résiduel essentiel.*

Si Q est tertiaire et si $\mathfrak{T}$ est un résiduel essentiel de Q, on a $Q \,.\!\cdot \mathfrak{T} \supset Q$ d'après le théorème 3.2. Il en résulte $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{R}_3(Q)$, d'où $\mathfrak{T} = \mathcal{R}_3(Q)$, ce qui établit l'unicité de $\mathfrak{T}$.

Réciproquement, si Q possède un seul résiduel essentiel $\mathfrak{T}$, on a $\mathcal{R}_3(Q) = \mathfrak{T}$; d'autre part, $\mathfrak{T}$ est résiduel à gauche propre maximum et la relation $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{T} = \mathcal{R}_3(Q)$ implique $Q \,.\!\cdot \mathfrak{A} = Q$; par suite, Q est tertiaire.

Définition 7.7. — Lorsque $Q \neq U$ est tertiaire, son radical tertiaire étant $\mathfrak{T}$, seul résiduel essentiel de Q, on dit que Q est *$\mathfrak{T}$-tertiaire* et que $\mathfrak{T}$ est l'élément premier associé à Q.

Propriété 7.9. — *Si* $Q \neq U$ *et* $\mathfrak{T}$ *sont tels qu'on ait*

1° $$\mathfrak{A}X \subseteq Q, \qquad X \not\subseteq Q \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{T};$$

2° $$\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{R}_3(Q),$$

$\mathfrak{T}$ est premier et Q est $\mathfrak{T}$-tertiaire.

En effet, Q est alors tertiaire d'après les conditions 1° et 2°. De plus, on a $Q \,.\!\cdot \mathcal{R}_3(Q) \supset Q$, d'où $\mathcal{R}_3(Q) \subseteq \mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T} = \mathcal{R}_3(Q)$; donc, $\mathfrak{T}$ est le radical tertiaire de Q et il est premier.

PROPRIÉTÉ 7.10. — *L'intersection d'un nombre fini d'éléments $\mathcal{T}$-tertiaires est un élément $\mathcal{T}$-tertiaire.*

En effet, la condition 1° de la propriété 7.9 est vérifiée ainsi que la condition 2°, d'après la propriété 7.7.

3. Cas des anneaux, des demi-groupes et des modules. — Considérons plus spécialement le cas d'un anneau ou d'un demi-groupe avec élément zéro. Nous supposons naturellement qu'une condition de chaîne convenable est vérifiee de façon à assurer l'axiome D. On peut alors définir les radicaux tertiaire et unirésidué en utilisant les éléments de l'anneau ou du demi-groupe.

PROPRIÉTÉ 7.11. — *Si* X *est un idéal à gauche d'un anneau ou d'un demi-groupe avec élément zéro, son radical tertiaire* $\mathcal{R}_3(\mathrm{X})$ *est l'ensemble des éléments* a *vérifiant la condition*

$$b \notin \mathrm{X} \Rightarrow \exists c \in (b| \quad \textit{tel que} \quad c \notin \mathrm{X} \quad \textit{et} \quad a(c| \subseteq \mathrm{X}.$$

En effet, soit $a \in \mathcal{R}_3(\mathrm{X})$, c'est-à-dire $(a) \subseteq \mathcal{R}_3(\mathrm{X})$ et $b \notin \mathrm{X}$, c'est-à-dire $(b| \nsubseteq \mathrm{X}$. Il en résulte, d'après la définition de $\mathcal{R}_3(\mathrm{X})$ (théorème 7.2),

$$(\mathrm{X}.\cdot(a)) \cap (b| \nsubseteq \mathrm{X}.$$

Choisissons alors $c \notin \mathrm{X}$ tel que $c \in \mathrm{X}.\cdot(a) \cap (b|$. On a bien $c \in (b|$ et $(a)c \subseteq \mathrm{X}$ qui s'écrit encore $a(c| \subseteq \mathrm{X}$. L'élément a vérifie donc la condition indiquée.

Réciproquement, soit un élément a vérifiant cette condition et soit un idéal à gauche $\mathrm{C} \nsubseteq \mathrm{X}$. Pour montrer que a est élément de $\mathcal{R}_3(\mathrm{X})$, il suffit d'établir

$$(\mathrm{X}.\cdot(a)) \cap \mathrm{C} \nsubseteq \mathrm{X}.$$

Pour cela, soit $b \notin \mathrm{C}$ avec $b \nsubseteq \mathrm{X}$. Alors, il existe $c \in (b|$ avec $c \notin \mathrm{X}$ et $a(c| \subseteq \mathrm{X}$. On en déduit $c \in \mathrm{C}$ et $c \in \mathrm{X}.\cdot(a)$ avec $c \notin \mathrm{X}$, ce qui établit la relation envisagée.

PROPRIÉTÉ 7.12. — *Si* $\mathfrak{X}$ *est un idéal bilatère d'un anneau ou d'un demi-groupe avec élément zéro, son radical tertiaire* $\mathcal{R}_3(\mathfrak{X})$ *est l'ensemble des éléments* a *vérifiant la condition*

$$b \notin \mathfrak{X} \Rightarrow \exists c \in (b) \quad \textit{tel que} \quad c \notin \mathfrak{X} \quad \textit{et} \quad a(c) \subseteq \mathfrak{X}.$$

La démonstration est la même que celle de la propriété 7.11, tous les idéaux à gauche étant remplacés par des idéaux bilatères.

Remarque. — Si nous considérons l'idéal bilatère $\mathfrak{X}$ comme un idéal à gauche $X (X = \mathfrak{X})$, il possède un radical tertiaire $\mathcal{R}_3(X)$ qui n'est pas *a priori* identique à son radical tertiaire $\mathcal{R}_3(\mathfrak{X})$ en tant qu'idéal bilatère. On a seulement $\mathcal{R}_3(X) \subseteq \mathcal{R}_3(\mathfrak{X})$. Nous verrons plus loin (chap. IX) qu'il y a égalité dans le cas où l'on impose la condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche. Nous ne connaissons d'ailleurs aucun exemple où l'on ait $\mathcal{R}_3(X) \neq \mathcal{R}_3(\mathfrak{X})$ ([36]).

Par contre, le radical unirésidué $\mathcal{R}'(\mathfrak{X})$ d'un idéal bilatère coïncide avec le radical unirésidué de cet idéal considéré comme idéal à gauche car les résiduels à gauche propres de $\mathfrak{X}$ sont les mêmes, que $\mathfrak{X}$ soit considéré comme idéal bilatère ou comme idéal à gauche.

La propriété suivante caractérise le radical unirésidué d'un idéal à gauche ou d'un idéal bilatère.

Propriété 7.13. — *Si* X *est un idéal à gauche ou un idéal bilatère d'un anneau ou d'un demi-groupe avec élément zéro* U, *son radical unirésidué est l'ensemble des éléments a vérifiant la condition*

$$Ub \nsubseteq X \Rightarrow \exists c \in U \quad \textit{tel que} \quad c(b| \nsubseteq X \quad \textit{et} \quad a(c)(b| \subseteq X.$$

En effet, soit $a \in \mathcal{R}'(X)$, c'est-à-dire $(a) \subseteq \mathcal{R}'(X)$, et $Ub \nsubseteq X$, d'où résulte $(b| \nsubseteq X$. Si l'on a $(a)(b| \subseteq X$, on choisit $c \in U$ tel que $cb \notin X$ et la condition ci-dessus est vérifiée. Si l'on a $(a)(b| \nsubseteq X$, d'après la définition de $\mathcal{R}'(X)$ (théorème 7.1), il existe c tel que $(c)(b| \nsubseteq X$ et $(a)(c)(b| \subseteq X$; on en déduit $c(b| \nsubseteq X$ et $a(c)(b| \subseteq X$, ce qui montre que la condition est encore vérifiée.

Réciproquement, soit a un élément vérifiant cette condition. Il nous suffit de montrer que a appartient à tout résiduel à gauche propre premier de X. Un tel résiduel peut toujours se mettre sous la forme $X \cdot . (b|$ avec $b \notin X$. Si l'on a $Ub \subseteq X$, la propriété est évidente car on a $X \cdot . (b| = U$. Sinon, il existe c tel que $c(b| \nsubseteq X$ et $a(c)(b| \subseteq X$,

([36]) L'exemple 6.1 (*cf.* note [30], page 58) montre que le radical tertiaire à droite peut être distinct du radical tertiaire à gauche.

c'est-à-dire $c \notin X^{\cdot}.(b|$ et $a(c) \subseteq X^{\cdot}.(b|$, d'où résulte, puisque $X^{\cdot}.(b|$ est premier, $a \in X^{\cdot}.(b|$.

On peut également donner d'un idéal à gauche ou bilatère tertiaire ou unirésidué les définitions suivantes :

Pour que l'idéal à gauche X soit tertiaire, il faut et il suffit qu'on ait

$$(a)b \subseteq X, \qquad b \notin X \Rightarrow a \in \mathcal{R}_3(X).$$

Pour que l'idéal bilatère $\mathfrak{X}$ soit tertiaire, il faut et il suffit qu'on ait

$$(a)b \subseteq \mathfrak{X}, \qquad b \notin \mathfrak{X} \Rightarrow a \in \mathcal{R}_3(\mathfrak{X}).$$

Pour que l'idéal à gauche ou bilatère X soit unirésidué, il faut et il suffit qu'on ait

$$(a)b \subseteq X, \qquad b \notin X \Rightarrow a \in \mathcal{R}'(X).$$

Considérons de même le cas d'un module satisfaisant à une condition de chaîne convenable. On a les propriétés suivantes, dont nous omettons la démonstration.

Propriété 7.14. — *Si* X *est un sous-module d'un module* M *par rapport à un anneau* $\mathfrak{A}$, *son radical tertiaire* $\mathcal{R}_3(X)$ *est l'ensemble des éléments* $a \in \mathfrak{A}$ *vérifiant la condition*

$$b \notin X \Rightarrow \exists c \in (b) \quad \textit{tel que} \quad c \notin X \quad \textit{et} \quad a(c) \subseteq X$$

[on désigne par (b) par exemple le sous-module engendré par l'élément b].

Propriété 7.15. — *Si* X *est un sous-module d'un* $\mathfrak{A}$*-module* M, *son radical unirésidué* $\mathcal{R}'(X)$ *est l'ensemble des éléments* $a \in \mathfrak{A}$ *vérifiant la condition*

$$\mathfrak{A}b \nsubseteq X \Rightarrow \exists c \in M \quad \textit{tel que} \quad c(b) \nsubseteq X \quad \textit{et} \quad a(c)(b) \subseteq X.$$

Nous pouvons également définir un sous-module tertiaire ou unirésidué de la manière suivante :

Pour que le sous-module X soit tertiaire, il faut et il suffit qu'on ait

$$(a)b \supseteq X, \qquad b \notin X \Rightarrow a \in \mathcal{R}_3(X).$$

Pour que le sous-module X soit unirésidué, il faut et il suffit qu'on ait

$$(a)b \subseteq X, \qquad b \notin X \Rightarrow a \in \mathcal{R}'(X).$$

U étant un anneau ou un demi-groupe avec zéro, démontrons la propriété suivante qui nous sera utile plus loin.

PROPRIÉTÉ 7.16. — T *étant un idéal à gauche* $\mathfrak{T}$*-tertiaire de* U *et* a *un élément de* U, *si l'on a* $\mathrm{U}a \nsubseteq \mathrm{T}$, *l'idéal à gauche* $\mathrm{T}\cdot.a$ *est* $\mathfrak{T}$*-tertiaire.*

Montrons d'abord que le radical tertiaire de $\mathrm{T}\cdot.a$ est $\mathfrak{T}$. Soit en effet $r \in \mathfrak{T}$ et $b \notin \mathrm{T}\cdot.a$, donc $ba \notin \mathrm{T}$. Il existe $x \in (ba|$ tel que $x \notin \mathrm{T}$ et $r(x| \subseteq \mathrm{T}$. De $x \in (ba|$, on tire $x = ca$ avec $c \in (b|$. On a alors $c \notin \mathrm{T}\cdot.a$ et $r(c| \subseteq \mathrm{T}\cdot.a$. Il en résulte $r \in \mathcal{R}_3(\mathrm{T}\cdot.a)$ et, par suite, $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{R}_3(\mathrm{T}\cdot.a)$. Inversement, soit $r \in \mathcal{R}_3(\mathrm{T}\cdot.a)$; de $\mathrm{U}a \nsubseteq \mathrm{T}$, résulte l'existence de $x \notin \mathrm{T}\cdot.a$. On peut donc trouver $x' \in (x|$ tel qu'on ait $r(x'| \subseteq \mathrm{T}\cdot.a$ avec $x' \notin \mathrm{T}\cdot.a$, soit $r(x'a| \subseteq \mathrm{T}$ avec $x'a \notin \mathrm{T}$. Comme T est $\mathfrak{T}$-tertiaire, on en déduit $r \in \mathfrak{T}$, d'où $\mathcal{R}_3(\mathrm{T}\cdot.a) \subseteq \mathfrak{T}$.

Supposons maintenant $b(c| \subseteq \mathrm{T}\cdot.a$ avec $c \notin \mathrm{T}\cdot.a$, donc $ca \notin \mathrm{T}$. On en déduit $b(ca| \subseteq \mathrm{T}$, d'où, puisque T est $\mathfrak{T}$-tertiaire,

$$b \in \mathfrak{T} = \mathcal{R}_3(\mathrm{T}\cdot.a).$$

L'idéal à gauche $\mathrm{T}\cdot.a$ est bien $\mathfrak{T}$-tertiaire.

4. Cas où tout élément de ($\mathfrak{G}$) est somme d'éléments L-principaux. — Revenant à une ($\mathfrak{G}$)-algèbre abstraite modulaire vérifiant l'axiome D, examinons maintenant un cas particulier qui s'applique notamment aux anneaux et demi-groupes commutatifs ainsi qu'aux modules sur un anneau commutatif.

Définition 7.8. — Un élément $\mathfrak{A}$ de ($\mathfrak{G}$) est dit *L-principal* si $\mathrm{X}' \subseteq \mathfrak{A}\mathrm{B}$ entraîne l'existence de $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{B}$ tel que $\mathrm{X}' = \mathfrak{A}\mathrm{X}$.

LEMME 7.1. — *Le produit d'un nombre fini d'éléments* L*-principaux de* ($\mathfrak{G}$) *est un élément* L*-principal.*

Il suffit de le démontrer pour deux éléments $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$. Si l'on a $\mathrm{X}' \subseteq \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathrm{B}$, il existe $\mathrm{C} \subseteq \mathfrak{A}_2\mathrm{B}$ tel que $\mathrm{X}' = \mathfrak{A}_1\mathrm{C}$; puis il existe $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{B}$ tel que $\mathrm{C} = \mathfrak{A}_2\mathrm{X}$, d'où $\mathrm{X}' = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathrm{X}$.

LEMME 7.2. — *Si l'élément* $\mathfrak{A}$ *de* ($\mathfrak{G}$) *est* L*-principal, la relation* $\mathrm{X}' \subseteq \mathfrak{A}\mathrm{B}$ *implique* $\mathrm{X}' = \mathfrak{A}(\mathrm{X}'.\cdot\mathfrak{A})$.

On a, en effet, $\mathfrak{A}(\mathrm{X}'.\cdot\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{X}'$ et $\mathrm{X}' = \mathfrak{A}\mathrm{X}$, d'où $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{X}'.\cdot\mathfrak{A}$ et, par suite, $\mathrm{X}' = \mathfrak{A}\mathrm{X} \subseteq \mathfrak{A}(\mathrm{X}'.\cdot\mathfrak{A})$.

THÉORÈME 7.4. — *Si tout élément de* $(\mathfrak{T})$ *est somme d'éléments* L-*principaux, on a, pour tout élément* X *de* (L),

$$\mathcal{R}_3(X) = \mathcal{R}_1(X).$$

On a évidemment d'abord $\mathcal{R}_1(X) \subseteq \mathcal{R}_3(X)$. Posons $\mathfrak{A} = \mathcal{R}_3(X)$ et supposons qu'on ait $\mathfrak{A} \nsubseteq \mathcal{R}_1(X)$. On peut écrire $\mathfrak{A} = \sum_{\iota \in I} \mathfrak{A}_\iota$, où les $\mathfrak{A}_\iota$ sont L-principaux. On peut donc choisir $\mathfrak{A}_\iota$ tel que $\mathfrak{A}_\iota \nsubseteq \mathcal{R}_1(X)$ et l'on a $\mathfrak{A}_\iota^n \nsubseteq X\cdot .U$, quel que soit n entier positif. Soit, d'après l'axiome D, k un entier positif tel que

$$X.\cdot\mathfrak{A}_\iota^k = X.\cdot\mathfrak{A}_\iota^{k+1}.$$

On a

$$(X.\cdot\mathfrak{A}_\iota) \cap \mathfrak{A}_\iota^k U = \mathfrak{A}_\iota^k[((X.\cdot\mathfrak{A}_\iota) \cap \mathfrak{A}_\iota^k U).\cdot\mathfrak{A}_\iota^k],$$

d'après le lemme 7.2, puisque $\mathfrak{A}_\iota^k$ est L-principal, d'après le lemme 7.1. D'où

$$(X.\cdot\mathfrak{A}_\iota) \cap \mathfrak{A}_\iota^k U = \mathfrak{A}_\iota^k(X.\cdot\mathfrak{A}_\iota^{k+1}) = \mathfrak{A}_\iota^k(X.\cdot\mathfrak{A}_\iota^k) \subseteq X$$

et $\mathfrak{A}_\iota^k U \subseteq X$ puisqu'on a $\mathfrak{A}_\iota \subseteq \mathcal{R}_1(X)$. Nous obtenons une contradiction.

COROLLAIRE. — *Si tout élément de* $(\mathfrak{T})$ *est somme d'éléments* L-*principaux, on a, pour tout élément* X *de* (L),

$$\mathcal{R}_3(X) = \mathcal{R}'(X) = \mathcal{R}_2(X) = \mathcal{R}_1(X),$$

et les notions d'élément tertiaire, unirésidué, secondaire et primaire coïncident.

CHAPITRE VIII.

THÉORÈMES DE DÉCOMPOSITION EN IDÉAUX OU SOUS-MODULES TERTIAIRES.

Après avoir précisé nos hypothèses, qui s'appliquent notamment aux idéaux à gauche d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro nœthérien à gauche ou artinien à gauche, ainsi qu'aux sous-modules d'un module unitaire de type fini sur un anneau nœthérien à gauche ou artinien à gauche, nous définissons des décompositions réduites en éléments tertiaires pour lesquelles nous établissons un théorème d'existence et un théorème d'unicité. Nous donnons ensuite quelques applications et quelques exemples destinés à illustrer la théorie.

1. Hypothèses. — Nous considérons une $(\mathfrak{T})$-algèbre nœthérienne ou artinienne modulaire, satisfaisant à la condition D du chapitre III. Ces hypothèses sont réalisées, en particulier, pour une $(\mathfrak{T})$-algèbre modulaire telle qu'on ait l'une des conditions suivantes :

(1) $(\mathfrak{T})$ et (L) vérifient la condition de chaîne ascendante;

(2) $(\mathfrak{T})$ et (L) vérifient la condition de chaîne descendante;

(3) (L) est de longueur finie.

La condition (1) est réalisée si $(\mathfrak{T})$ et (L) coïncident avec l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro qui soit nœthérien bilatère. Elle l'est si $(\mathfrak{T})$ est l'ensemble des idéaux bilatères et (L) l'ensemble des idéaux à gauche d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro qui soit nœthérien à gauche. Elle l'est encore si $(\mathfrak{T})$ est l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau nœthérien bilatère $\mathfrak{A}$ et si (L) est l'ensemble des sous-modules d'un $\mathfrak{A}$-module nœthérien.

La condition (2) est réalisée si $(\mathfrak{T})$ et (L) coïncident avec l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro qui soit artinien bilatère. Elle l'est si $(\mathfrak{T})$ est l'ensemble des idéaux bilatères et (L) l'ensemble des idéaux à gauche d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro qui soit artinien à gauche. Elle l'est encore si $(\mathfrak{T})$ est l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau artinien bilatère $\mathfrak{A}$ et si (L) est l'ensemble des sous-modules d'un $\mathfrak{A}$-module artinien.

La condition (3) est réalisée si $(\mathfrak{T})$ est l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau quelconque $\mathfrak{A}$ et si (L) est l'ensemble des sous-modules d'un $\mathfrak{A}$-module de longueur finie.

Pour obtenir le théorème d'existence, nous utiliserons naturellement les décompositions d'un élément de (L) comme intersection d'éléments $\cap$-irréductibles. Une telle décomposition est toujours possible si (L) est une $(\mathfrak{T})$-algèbre nœthérienne. Elle l'est aussi pour un anneau artinien à gauche et pour un module artinien d'après la propriété 1.1. Dans le cas abstrait, lorsque (L) vérifie la condition de chaîne descendante, elle résulte du théorème suivant (*cf.* L. Lesieur [52], §5).

THÉORÈME 8.1. — *Si* (L) *est un treillis complet, faiblement* $\cap$*-continu, satisfaisant à la condition de chaîne descendante, tout élément* $X \in (L)$ *est l'intersection d'un nombre fini d'éléments* $\cap$*-irréductibles.*

X étant un élément quelconque, l'ensemble des éléments $\cap$-irréductibles $Z \supseteq X$ n'est pas vide puisqu'il contient l'élément universel U. L'intersection I de ces éléments existe; elle vérifie $I \supseteq X$. Nous allons établir l'égalité $I = X$. D'après la condition de chaîne descendante, l'hypothèse $I \supset X$ entraînerait l'existence d'un élément minimal P tel que $I \supseteq P \supset X$. L'ensemble (F) des éléments $Y \in (L)$ qui vérifient $P \cap Y = X$ est inductif; en effet, si l'on a $P \cap Y_\alpha = X$ pour tous les éléments d'une chaîne $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$, on peut écrire, (L) étant faiblement $\cap$-continu :

$$P \cap \left(\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} Y_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} (P \cap Y_\alpha) = X.$$

D'après le théorème de Zorn, cet ensemble (F) admet un élément maximal Z. Supposons qu'on ait $Z = Z_1 \cap Z_2$, avec $Z_1 \supset Z$, $Z_2 \supset Z$. On aurait donc : $Z_1 \cap P \supset X$, $Z_2 \cap P \supset X$ d'où $Z_1 \cap P = Z_2 \cap P = P$, et $Z \cap P = P$, ce qui serait contraire à l'hypothèse $Z \cap P = X$. Donc Z est $\cap$-irréductible. Il en résulte d'après la définition de I, $Z \supseteq I$, d'où $Z \supseteq P$ et $Z \cap P = P$, ce qui est impossible. On a donc bien $I = X$ et le théorème est démontré, puisque l'intersection I d'un nombre quelconque d'éléments est égale à l'intersection d'un nombre fini d'entre eux.

2. **Décompositions réduites. Théorèmes d'existence et d'unicité.** — *Définition* 8.1. — Un décomposition d'un élément $A \neq U$ de (L) comme intersection d'éléments tertiaires

$$A = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_k$$

est dite *réduite* si aucun Q_i n'est superflu et si les éléments premiers associés aux Q_i sont tous distincts.

On démontre aisément la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 8.1. — *Une décomposition réduite de* $A \neq U$ *comme intersection d'éléments tertiaires est en particulier une décomposition réduite de* A *au sens de la définition* 4.3.

La possibilité de décomposer un élément comme intersection d'éléments $\cap$-irréductibles et la propriété 7.10 donnent :

THÉORÈME 8.2. — *Pour tout* $A \neq U$, *il existe au moins une décomposition réduite comme intersection d'un nombre fini d'éléments tertiaires.*

Nous allons démontrer le théorème d'unicité en utilisant la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 8.2. — *Soient* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$ *deux éléments premiers de* $(\mathfrak{S})$ *tels que* $\mathfrak{T} \not\subseteq \mathfrak{T}'$. *Soient* Q *un élément* $\mathfrak{T}$-*tertiaire de* (L) *et* Q' *un élément* $\mathfrak{T}'$-*tertiaire de* (L). *La relation*

$$A = Q \cap X = Q' \cap X' \quad \textit{entraîne} \quad A = X \cap X'.$$

On a, en effet, $Q' . \cdot \mathfrak{T} = Q'$ d'après le théorème 3.2. Il en résulte

$$A . \cdot \mathfrak{T} = (Q . \cdot \mathfrak{T}) \cap (X . \cdot \mathfrak{T}) = Q' \cap (X' . \cdot \mathfrak{T})$$

d'où en prenant l'intersection avec $X \cap X'$,

$$(Q . \cdot \mathfrak{T}) \cap X \cap X' = Q' \cap X \cap X' = A \subseteq Q$$

et, puisque Q est $\mathfrak{T}$-tertiaire, $X \cap X' \subseteq Q$, d'où résulte

$$A = Q \cap X \cap X' = X \cap X'.$$

THÉORÈME 8.3. — *Soient deux décompositions réduites d'un même élément de* (L) *comme intersection d'éléments tertiaires :*

$$A = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_k = Q'_1 \cap Q'_2 \cap \ldots \cap Q'_{k'}.$$

On a $k = k'$ *et les éléments premiers* $\mathfrak{T}_i$ *associés aux* Q_i *sont les mêmes que les éléments premiers* $\mathfrak{T}'_j$ *associés aux* Q'_j.

Il suffit de montrer que $\mathfrak{T}_1$ par exemple est égal à un $\mathfrak{T}'_j$. S'il n'en était pas ainsi, on aurait les relations suivantes :

(1)	$\mathfrak{T}_1 \not\subseteq \mathfrak{T}'_1$	ou	$\mathfrak{T}'_1 \not\subseteq \mathfrak{T}_1$,
(2).	$\mathfrak{T}_1 \not\subseteq \mathfrak{T}'_2$	ou	$\mathfrak{T}'_2 \not\subseteq \mathfrak{T}_1$,
.....	.....	.....	.....,
(k')	$\mathfrak{T}_1 \not\subseteq \mathfrak{T}'_{k'}$	ou	$\mathfrak{T}'_{k'} \not\subseteq \mathfrak{T}_1$.

La relation (1) entraîne, d'après la propriété 8.2,

$$A = Q'_2 \cap \ldots \cap Q'_{k'} \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_k.$$

De la relation (2) et de l'égalité

$$A = Q'_2 \cap \ldots \cap Q'_{k'} \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_k = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_k,$$

on déduit alors, de la même manière,

$$A = Q'_3 \cap \ldots \cap Q'_{k'} \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_k.$$

De même, de la relation (3) et de l'égalité

$$A = Q'_3 \cap \ldots \cap Q'_{k'} \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_k = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_k,$$

on tire

$$A = Q'_4 \cap \ldots \cap Q'_{k'} \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_k.$$

Le procédé se poursuit et conduit, après application des relations (1), (2), ..., (k'), à

$$A = Q_2 \cap \ldots \cap Q_k,$$

ce qui contredit le fait que Q_1 n'est pas superflu.

3. **Applications.** — Afin d'étudier les résiduels essentiels d'un élément X de (L), démontrons d'abord la propriété suivante.

Propriété 8.3. — *Soit $\mathfrak{T}$ un résiduel essentiel de* X, Y *un élément satisfaisant à la condition de la définition* 7.5 *et* $X = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_k$ *une décomposition réduite de* X *comme intersection d'éléments tertiaires. Il existe un* Q_i *et un seul satisfaisant à* $X = Q_i \cap Y$ *et l'on a* $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_i$, *si* $\mathfrak{T}_i$ *désigne l'élément premier associé à* Q_i.

Considérons, parmi les éléments $Q_i (i = 1, 2, \ldots, k)$, un ensemble minimal, par exemple $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ tel qu'on ait $X = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_m \cap Y$. De $X \subset Y$, résulte $m \geqq 1$. Formons $Y' = Q_2 \cap \ldots \cap Q_m \cap Y$. On a $X \subset Y' \subseteq Y$ d'après le choix de Q_1, $Q_2, \ldots, Q_m$. Il en résulte $\mathfrak{T} = X \cdot . Y'$ d'après la définition de Y. Mais on a $X \cdot . Y' = Q_1 \cdot . Y'$ et $Y' \nsubseteq Q_1$ car $Y' \subseteq Q_1$ entraînerait $Y' \subseteq X$. On en déduit $Q_1 \cdot . Y' \subseteq \mathfrak{T}_1$ c'est-à-dire $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}_1$. On a d'autre part $(Y' . \cdot \mathfrak{T}_1) \cap Y' = (Q_1 . \cdot \mathfrak{T}_1) \cap Y' \nsubseteq Q_1$ puisque Q_1 est $\mathfrak{T}_1$-tertiaire et, par suite, $X \subset (X . \cdot \mathfrak{T}_1) \cap Y' \subseteq Y$. Il en résulte $\mathfrak{T} = X \cdot . Y = X \cdot . [(X . \cdot \mathfrak{T}_1) \cap Y'] \supseteq X \cdot . (X . \cdot \mathfrak{T}_1) \supseteq \mathfrak{T}_1$. On obtient ainsi $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1$. De plus, l'hypothèse $m > 1$ aurait donné de même $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_2$ et l'égalité $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$ ce qui est impossible. On a donc nécessairement $X = Q_1 \cap Y$ avec, pour la même raison, $Q_2 \cap Q_3 \cap \ldots \cap Q_k \cap Y \supset X$.

Théorème 8.4. — *Les résiduels essentiels de* X *coïncident avec les éléments premiers associés aux éléments tertiaires d'une décomposition réduite de* X *comme intersection d'éléments tertiaires.*

Soit $X = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_k$ une telle décomposition, l'élément Q_i étant $\mathfrak{T}_i$-tertiaire. Un résiduel essentiel $\mathfrak{T}$ de X est nécessairement l'un des éléments $\mathfrak{T}_i$ d'après la propriété 8.3. Inversement, posons $X' = Q_2 \cap \ldots \cap Q_k$ et considérons les résiduels de X de la forme $X \cdot . Z$ avec $X \subset Z \subseteq X'$. Ils admettent un élément maximal au moins $\mathfrak{T}$ qui est de la forme $X \cdot . Y$ avec $X \subset Y \subseteq X'$ et qui est résiduel essentiel de X. Comme on a $Y \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_k = Y \cap X' = Y \supset X$, on a nécessairement, d'après la propriété 8.3, $X = Q_1 \cap Y$ et $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1$.

On démontre de même que $\mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_k$ sont des résiduels essentiels de X.

Corollaire. — *Le radical tertiaire de* X *est l'intersection des éléments premiers associés aux éléments tertiaires d'une décomposition réduite de* X *comme intersection d'éléments tertiaires.*

Théorème 8.5. — *Si* $X = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_k$ *est une décomposition réduite de* X *comme intersection d'éléments unirésidués et si* $\mathfrak{T}_i$ *désigne l'élément premier associé à* Q_i, *les résiduels à gauche propres premiers de* X *sont tous des résiduels essentiels, ils coïncident avec les* $\mathfrak{T}_i$ *et l'on a*

$$\mathcal{R}'(X) = \mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{T}_k = \mathcal{R}_3(X).$$

En effet, la décomposition considérée est en particulier une décomposition de X comme intersection d'éléments tertiaires. Or, tout résiduel à gauche propre premier de X est résiduel à gauche propre premier de l'un des Q_i d'après la propriété 4.6; donc il coïncide avec l'un des $\mathfrak{T}_i$. Réciproquement, tout $\mathfrak{T}_i$ est résiduel essentiel de X d'après le théorème 8.4, ce qui établit le théorème.

4. Exemples. — *Exemple* 8.1. — Considérons le demi-groupe D à cinq éléments o, b, c, d, e dont la table de multiplication est la suivante :

	o	b	c	d	e
o	o	o	o	o	o
b	o	o	o	b	b
c	o	o	o	c	c
d	o	b	o	d	d
e	o	b	c	d	e

Construisons, sur le corps K des nombres rationnels, une algèbre A dont les éléments générateurs b, c, d, e se multiplient conformément à la table de multiplication du demi-groupe D précédent et considérons la structure d'anneau de A. Les idéaux bilatères de A sont :

$$O = \{o\},\quad B = (b),\quad C = (c),\quad I = (b, c),\quad J = (c, d-e),$$
$$P_1 = (b, c, d),\quad P_2 = (b, c, d-e),\quad A = (b, c, d, e).$$

Seuls, les idéaux P_1, P_2 et A sont premiers (17). En outre, on a comme idéaux à gauche : $N = (d-e|$, $M = (b, d-e|$ et, quel que soit λ non nul, $N_\lambda = (\lambda c + d - e|$, $M_\lambda = (b, \lambda c + d - e|$. Le treillis ($\mathfrak{T}$) des idéaux bilatères et le treillis (L) des idéaux à gauche sont les suivants :

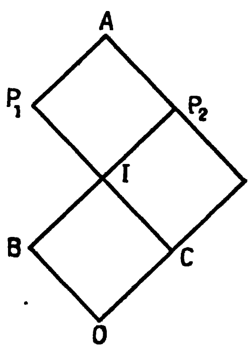

Fig. 6.

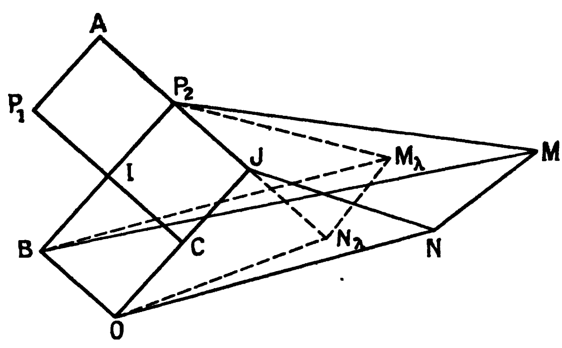

Fig. 7.

(37) Conformément à la théorie des anneaux unitaires artiniens à gauche, les idéaux bilatères premiers propres sont maximaux (en tant qu'idéaux bilatères propres) (*cf.* chap. IX).

(Les idéaux N_λ et M_λ sont joints entre eux et aux autres idéaux qui leur sont comparables par des traits pointillés afin de mettre en évidence que la famille de ces idéaux est infinie; naturellement on a $N_\lambda \subseteq M_{\lambda'}$ si et seulement si $\lambda = \lambda'$.)

Les idéaux P_1-tertiaires sont P_1, B, M et M_λ quel que soit λ. On a $M \cdot . A = M_\lambda \cdot . A = B$ ce qui prouve que les idéaux B, M et M_λ sont P_1-secondaires sans être primaires puisqu'on a $B \subseteq P_2$.

Les idéaux P_2-tertiaires sont P_2 et J qui est P_2-primaire.

Les autres idéaux propres se décomposent comme intersection d'un idéal P_1-tertiaire et d'un idéal P_2-tertiaire. Ces décompositions sont d'ailleurs uniques :

$$\begin{aligned} I &= P_1 \cap P_2, \\ C &= P_1 \cap J, \\ N_\lambda &= M_\lambda \cap J, \\ N &= M \cap J, \\ O &= B \cap J. \end{aligned}$$

Signalons, à propos de cet exemple, une théorie de la décomposition due à E. H. Feller [29] qui, appliquée ici à la décomposition $N = M \cap J$, donne un résultat moins fin que la décomposition en idéaux tertiaires (*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [53], I, p. 116).

Exemple 8.2. — Soit M_n l'anneau des matrices carrées d'ordre n dont les éléments appartiennent à un anneau commutatif nœthérien A, par exemple l'anneau des polynomes à p variables permutables et à coefficients dans un corps K commutatif. Un idéal bilatère $\mathfrak{A}$ de M_n est formé par les matrices dont les éléments décrivent un idéal $\mathfrak{A}'$ de A. Soit I un idéal à gauche de M_n; les vecteurs lignes des matrices qui constituent I forment un sous-module I' du A-module A^n : L'application $I \to I'$ est un isomorphisme du treillis des idéaux à gauche de M_n sur le treillis des sous-modules du A-module A^n. Comme celui-ci est nœthérien, l'anneau M_n est nœthérien à gauche.

D'autre part, dans l'application $I \to I'$, l'idéal à gauche $\mathfrak{A}X$ a pour image le sous-module $\mathfrak{A}'X'$; les résiduels $Y . \cdot \mathfrak{A}$ et $Y \cdot . X$ ont donc respectivement pour images $Y' . \cdot \mathfrak{A}'$ et $Y' \cdot . X'$. Il en résulte qu'un idéal à gauche I de M_n est tertiaire (primaire) si et seulement si le sous-module I' correspondant de A^n est tertiaire (primaire). Or, d'après le corollaire du théorème 7.4, tout sous-module tertiaire d'un module sur un anneau commutatif A est primaire. On obtient donc le théorème suivant :

THÉORÈME 8.6. — *L'anneau* M_n *des matrices carrées d'ordre* n *sur un anneau commutatif nœthérien est nœthérien à gauche. Tout idéal à gauche tertiaire est primaire et tout idéal à gauche est intersection d'un nombre fini d'idéaux à gauche primaires.*

On trouvera dans L. Lesieur et R. Croisot [53], I, p. 117, une étude détaillée de l'exemple suivant relatif à un demi-groupe nœthérien bilatère mais non nœthérien à gauche.

Exemple 8.3. — Soit D le demi-groupe avec élément o et élément unité e engendré par trois générateurs l, m, n auxquels on impose les relations $ml = l^2 m$, $nl^2 = ln$, $mn = nm$, $l^4 = 0$.

Les idéaux (l, n^ν) $(\nu \geqq 1)$ sont (l, n)-primaires. Les idéaux (l^2, m^μ) $(\mu \geqq 1)$ sont (l, m)-primaires. Les idéaux (l^2, nm^μ) $(\mu \geqq 1)$ sont (l, m)-secondaires et non primaires. L'idéal (l^2, n) est (l, m, n)-tertiaire et non secondaire ainsi que l'idéal (n).

CHAPITRE IX.

COMPLÉMEMTS RELATIFS AU CAS ARTINIEN.

Nous examinons dans ce chapitre les cas particuliers d'un anneau et d'un demi-groupe avec élément zéro artiniens à gauche et celui d'un module artinien sur un anneau artinien à gauche, cas dans lesquels les résultats obtenus sont plus forts que dans le cas général [*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [53], II, (partie IV)].

1. Propriétés communes aux demi-groupes et aux anneaux artiniens à gauche. — Soit U un anneau ou un demi-groupe avec élément zéro artinien à gauche. Soit $(\mathfrak{T})$ l'ensemble de ses idéaux bilatères et (L) l'ensemble de ses idéaux à gauche. Nous avons donc une $(\mathfrak{T})$-algèbre vérifiant les conditions imposées au chapitre VIII [cas (2) du paragraphe 1].

PROPRIÉTÉ 9.1. — T *étant un idéal à gauche* $\mathfrak{T}$*-tertiaire de* U *et* S *un sous-ensemble quelconque de* U, *si l'on a* $US \not\subseteq T$, *l'idéal à gauche* $T^{\cdot}.S$ *est* $\mathfrak{T}$*-tertiaire.*

En effet, d'après la condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche, on peut trouver dans S des éléments a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) tels qu'on ait

$$T^{\cdot}.S = \bigcap_i (T^{\cdot}.a_i).$$

S'il n'y a aucun a_i qui soit superflu, on a $Ua_i \not\subseteq T$ pour tout i et, d'après la propriété 7.16, les idéaux à gauche $T^{\cdot}.a_i$ sont $\mathfrak{T}$-tertiaires. Par suite, d'après la propriété 7.10, $T^{\cdot}.S$ est aussi $\mathfrak{T}$-tertiaire.

THÉORÈME 9.1. — *Pour que l'idéal à gauche* T *soit* $\mathfrak{T}$*-tertiaire, il faut et il suffit qu'il soit* $\mathfrak{T}$*-unirésidué.*

Il suffit de montrer que, si T est $\mathfrak{T}$-tertiaire, il est unirésidué, c'est-à-dire que, d'après la propriété 7.13, il vérifie la condition suivante :

$$(a)b \subseteq T, \qquad b \notin T, \qquad Uc \not\subseteq T \Rightarrow \exists r \in U$$

tel que

$$r(c| \not\subseteq T \qquad \text{et} \qquad a(r)(c| \subseteq T.$$

Supposons donc que T soit $\mathfrak{T}$-tertiaire et soit trois éléments a, b, c de U vérifiant l'hypothèse de la condition ci-dessus. De $Uc \not\subseteq T$, résulte que $T^{\cdot}.(c|$ est $\mathfrak{T}$-tertiaire d'après la propriété 9.1 en prenant $S = (c|$. De $(a)b \subseteq T$ et $b \notin T$, résulte $a \in \mathfrak{T}$. Donc, il existe, d'après la propriété 7.11, un élément $r \in U$ tel qu'on ait $r \notin T^{\cdot}.(c|$ et $a(r| \subseteq T^{\cdot}.(c|$ c'est-à-dire $r(c| \not\subseteq T$ et $a(r|(c| = a(r)(c| \subseteq T$.

En rapprochant certains résultats antérieurs (théorèmes 8.2, 9.1, 8.5 et 8.3), on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 9.2. — *Tout idéal à gauche* A *distinct de* U *possède au moins une décomposition réduite comme intersection d'un nombre fini d'idéaux à gauche unirésidués et l'on a toujours* $\mathcal{R}_3(A) = \mathcal{R}'(A)$. *Deux décompositions réduites d'un idéal à gauche* A *comme intersection d'idéaux à gauche unirésidués ont même nombre de composants et mêmes idéaux premiers associés.*

Les lemmes suivants vont nous servir à montrer que le radical tertiaire d'un idéal bilatère $\mathfrak{X}$ coïncide avec le radical tertiaire de l'idéal $\mathfrak{X}$ considéré comme idéal à gauche.

LEMME 9.1. — *Si* U *est un demi-groupe, et si* $b \in U$ *est tel que l'idéal à gauche* A *soit couvert par l'idéal à gauche* $A + (b|$ [18], *la condition*

$$(1) \qquad x \in (b|, \quad \mathcal{C}x \subseteq A \Rightarrow x \in A,$$

où $\mathcal{C}$ *est un idéal bilatère de* U, *entraîne la condition*

$$(2) \qquad x \in (b|, \quad x \notin A \Rightarrow x \in \mathcal{C}x.$$

En effet, supposons que l'idéal à gauche A soit couvert par l'idéal à gauche $A + (b|$ et que la condition (1) soit vérifiée. Prenons $x \in (b|$ avec $x \notin A$. Considérons l'idéal à gauche $A + \mathcal{C}x$. Il contient A strictement puisqu'on a $\mathcal{C}x \nsubseteq A$ d'après la condition (1) et il est contenu dans $A + (b|$. On a donc $A + \mathcal{C}x = A + (b|$ et, de $x \in (b|$, résulte $x \in \mathcal{C}x$.

LEMME 9.2. — *Si* U *est un anneau, et si* $b \in U$ *est tel que l'idéal à gauche* A *soit couvert par l'idéal à gauche* $A + (b|$, *la condition*

$$(1) \qquad x \in (b|, \quad \mathcal{C}x \subseteq A \Rightarrow x \in A,$$

où $\mathcal{C}$ *est un idéal bilatère de* U, *entraîne la condition*

$$(2) \qquad \begin{cases} x_i \in (b| \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \exists c \in \mathcal{C} \\ \textit{tel que} \quad x_i - cx_i \in A \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Soit $x_1 \in (b|$. Si l'on a $x_1 \notin A$, on a $\mathcal{C}x_1 \nsubseteq A$ et, par suite, l'idéal $A + \mathcal{C}x_1$ contient strictement A. Puisqu'il est contenu dans $A + (b|$ qui couvre A, on a donc $A + \mathcal{C}x_1 = A + (b|$. Par conséquent, il existe $c \in \mathcal{C}$ tel que $x_1 - cx_1 \in A$. Si l'on a $x_1 \in A$, on peut prendre pour c n'importe quel élément de $\mathcal{C}$.

La propriété est donc vraie pour $n = 1$. Supposons-la établie pour $n = p - 1$ et démontrons-la pour $n = p$. Il existe par hypothèse $c \in \mathcal{C}$ tel que $x_i - cx_i \in A$ pour $i = 1, 2, \ldots, p - 1$. Si l'on a $x_p - cx_p \in A$, la propriété est vraie. Sinon, il existe $c' \in \mathcal{C}$ tel que

$$(x_p - cx_p) - c'(x_p - cx_p) \in A.$$

Il suffit alors de considérer l'élément $c + c' - c'c \in \mathcal{C}$.

([18]) Rappelons que l'opération notée + désigne la réunion pour les idéaux à gauche d'un demi-groupe (*cf.* chap. III, § 1).

THÉORÈME 9.3. — *Le radical tertiaire (à droite) d'un idéal bilatère de* U *coïncide avec son radical tertiaire en tant qu'idéal à gauche.*

Pour qu'un idéal bilatère de U *soit un idéal $\mathfrak{T}$-tertiaire (à droite), il faut et il suffit qu'il soit $\mathfrak{T}$-tertiaire en tant qu'idéal à gauche.*

Il suffit de démontrer que le radical tertiaire $\mathcal{R}_3(\mathfrak{A})$ d'un idéal bilatère $\mathfrak{A} = \mathrm{A}$ est égal à son radical tertiaire $\mathcal{R}_3(\mathrm{A})$ en tant qu'idéal à gauche. Or, on a évidemment

$$\mathcal{R}_3(\mathrm{A}) \subseteq \mathcal{R}_3(\mathfrak{A}).$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $a \in \mathcal{R}_3(\mathfrak{A})$ tel qu'on ait $a \notin \mathcal{R}_3(\mathrm{A})$. Il existerait donc $b \notin \mathrm{A}$ tel qu'on ait

$$x \in (b\,|, \qquad a(x\,| \subseteq \mathrm{A} \Rightarrow x \in \mathrm{A}.$$

La condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche permet de choisir b de manière que l'idéal à gauche A soit couvert par l'idéal à gauche engendré par A et b.

Supposons d'abord que U soit un demi-groupe : d'après le lemme 9.1 appliqué avec $\mathcal{C} = (a)$, on aurait

$$x \in (b\,|, \qquad x \notin \mathrm{A} \Rightarrow x \in (a)x.$$

Soit alors $y \in (b)$ avec $a(y\,| \subseteq \mathrm{A}$. Si l'on a $y \notin (b\,|$, il existe $x \in (b\,|$ et $r \in \mathrm{U}$ tel que $y = xr$. Pour $x \in \mathrm{A}$, on a $y \in \mathrm{A}$, puisque A est bilatère. Pour $x \notin \mathrm{A}$, on a $y = xr \in (a)xr = (a)y$ et, par suite, $y \in (a)y \subseteq \mathrm{A}$. Si l'on a $y \in (b\,|$, on en déduit également $y \in \mathrm{A}$. Ceci contredit le fait que a appartient à $\mathcal{R}_3(\mathfrak{A})$.

Supposons maintenant que U soit un anneau : d'après le lemme 9.2 appliqué avec $\mathcal{C} = (a)$, on aurait

$$x_i \in (b\,| \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \exists c \in (a)$$
$$\text{tel que} \quad x_i - cx_i \in \mathrm{A} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Soit alors $y \in (b)$ avec $a(y\,| \subseteq \mathrm{A}$. Si l'on a $y \notin (b\,|$, il existe $x \in (b\,|$, $x_i \in (b\,|$ et $r_i \in \mathrm{U}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ tels que $y = x + \sum_{i=1}^{n} x_i r_i$; choisissons $c \in (a)$ tel que $x - cx \in \mathrm{A}$ et $x_i - cx_i \in \mathrm{A}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$; on aurait $y - cy \in \mathrm{A}$, d'où $y \in \mathrm{A}$. Si l'on a $y \in (b\,|$, on en déduit également $y \in A$. Ceci contredit le fait que a appartient à $\mathcal{R}_3(\mathfrak{A})$.

Corollaire. — *Pour qu'un idéal bilatère soit $\mathfrak{T}$-tertiaire, il faut et il suffit qu'il soit $\mathfrak{T}$-unirésidué.*

Théorème 9.4. — *Tout idéal bilatère $\mathfrak{A}$ distinct de* U *possède au moins une décomposition réduite comme intersection d'un nombre fini d'idéaux bilatères unirésidués et l'on a toujours $\mathcal{R}_3(\mathfrak{A}) = \mathcal{R}'(\mathfrak{A})$. Deux décompositions réduites d'un idéal bilatère $\mathfrak{A}$ comme intersection d'idéaux bilatères unirésidués ont même nombre de composants et mêmes idéaux premiers associés.*

Il suffit d'appliquer le théorème 8.2, le corollaire du théorème 9.3 et les théorèmes 8.5 et 8.3.

2. Propriétés particulières aux anneaux artiniens à gauche. — Limitons-nous maintenant au cas où U est un anneau artinien à gauche.

Propriété 9.2. — *Soient, dans l'anneau* U, A *un idéal à gauche,* X *un idéal à gauche couvrant* A, *et* $\mathcal{C}$ *un idéal bilatère. La relation*

$$A = (A.\cdot\mathcal{C}) \cap X$$

entraîne

$$(A\cdot.X) + \mathcal{C} = U.$$

En effet, on peut poser $X = A + (b|$ avec $b \notin A$ et, d'après la condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche, il existe un nombre fini d'éléments $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ $(x_i \in (b|$ et $x_i \notin A)$ tels que $A\cdot.(b| = (A\cdot.x_1) \cap (A\cdot.x_2) \cap \ldots \cap (A\cdot.x_n)$. D'après le lemme 9.2, il existe $c \in \mathcal{C}$ tel qu'on ait $x_i - cx_i \in A$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$. Soit alors r un élément quelconque de U. On a $rx_i - rcx_i \in A$ pour tout i, d'où $(r - rc)x_i \in A$ et $r - rc \in A\cdot.x_i$ pour tout i, ce qui entraîne

$$r - rc \in A\cdot.(b| \qquad \text{et} \qquad r \in A\cdot.(b| + \mathcal{C}.$$

Nous allons retrouver par cette voie le corollaire 1 du théorème 2.1 qui est valable même en l'absence d'élément unité sous la forme suivante :

THÉORÈME 9.5. — *Dans l'anneau* U, *tout idéal bilatère propre premier est maximal* (*en tant qu'idéal bilatère propre*).

Soit un idéal bilatère propre premier $\mathfrak{P}$. Soit $\mathfrak{X}$ un idéal bilatère tel qu'on ait $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{X}$. D'après la condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche, il existe un élément b contenu dans $\mathfrak{X}$ tel que l'idéal à gauche $\mathrm{X} = \mathfrak{P} + (b|$ couvre $\mathfrak{P}$. Posons $\mathcal{C} = \mathrm{X} + \mathrm{XU}$ qui est un idéal bilatère contenu dans $\mathfrak{X}$.

Démontrons qu'on a $\mathfrak{P} = (\mathfrak{P}\,.\cdot\mathcal{C}) \cap \mathrm{X}$. En effet, soit $x \in \mathrm{X}$; si l'on a $\mathcal{C}x \subseteq \mathfrak{P}$, on en déduit

$$\mathcal{C}(x) \subseteq \mathfrak{P}, \qquad \text{d'où} \qquad (x) \subseteq \mathfrak{P},$$

puisque $\mathfrak{P}$ est premier, c'est-à-dire $x \in \mathfrak{P}$. Par suite, d'après la propriété 9.2, on a

$$(\mathfrak{P}\cdot.(b|) + \mathcal{C} = \mathrm{U}.$$

Or, $\mathfrak{P}\cdot.(b|$ est un idéal bilatère $\mathfrak{Z}$ tel qu'on ait

$$\mathfrak{Z}\mathrm{X} \subseteq \mathfrak{P}.$$

Il en résulte $\mathfrak{Z}\mathrm{XU} \subseteq \mathfrak{P}$, d'où $\mathfrak{Z}\mathcal{C} = \mathfrak{Z}\mathrm{X} + \mathfrak{Z}\mathrm{XU} \subseteq \mathfrak{P}$, avec $\mathcal{C} \nsubseteq \mathfrak{P}$. Par conséquent, on en déduit

$$\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{P}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathfrak{Z} = \mathfrak{P} \qquad \text{et} \qquad (\mathfrak{P}\cdot.(b|) + \mathcal{C} = \mathfrak{P} + \mathcal{C} = \mathcal{C}.$$

Il en résulte $\mathcal{C} = \mathrm{U}$ et $\mathfrak{P}$ est bien maximal.

On en déduit alors les théorèmes suivants.

THÉORÈME 9.6. — *Un anneau* U *artinien à gauche ne possède qu'un nombre fini d'idéaux bilatères premiers.*

En effet, soit $\mathfrak{P}$ un idéal bilatère propre premier de U. D'après le théorème 3.1, il existe un nombre fini d'idéaux bilatères premiers $\mathfrak{P}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) tels qu'on ait :

$$0 = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\ldots\mathfrak{P}_n \subseteq \mathfrak{P}.$$

On en déduit, pour une valeur de i, $\mathfrak{P}_i \subseteq \mathfrak{P}$, d'où $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_i$ d'après le théorème 9.5.

THÉORÈME 9.7. — *Dans l'anneau* U, *tout idéal à gauche* $\mathfrak{P}$-*primal, avec* $\mathfrak{P} \neq \mathrm{U}$, *est* $\mathfrak{P}$-*secondaire. Par suite, pour* $\mathfrak{P} \neq \mathrm{U}$, *les quatre notions d'idéal à gauche $\mathfrak{T}$-primal, $\mathfrak{T}$-tertiaire, $\mathfrak{T}$-unirésidué et $\mathfrak{T}$-secondaire coincident.*

Il suffit d'appliquer le théorème 9.5 : Si un idéal à gauche X de U est $\mathfrak{T}$-primal avec $\mathfrak{T} \neq U$, l'idéal bilatère premier $\mathfrak{T}$ qui est le résiduel à gauche propre maximum de X est nécessairement le seul résiduel à gauche propre premier de X et c'est évidemment un idéal premier minimal contenant $X \cdot . U$. Par conséquent, X est $\mathfrak{T}$-secondaire, donc aussi $\mathfrak{T}$-unirésidué et $\mathfrak{T}$-tertiaire.

COROLLAIRE. — *Si l'anneau* U *possède un élément unité à gauche, les quatre notions d'idéal à gauche primal, tertiaire, unirésidué et secondaire coincident.*

En effet, dans ce cas, il n'y a pas d'idéal à gauche propre admettant U pour résiduel à gauche propre.

THÉORÈME 9.8. — *Si l'anneau* U *possède un élément unité à gauche, tout idéal à gauche* A *distinct de* U *possède au moins une décomposition réduite comme intersection d'un nombre fini d'idéaux à gauche secondaires.*

Soient $A = T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_k = T'_1 \cap T'_2 \cap \ldots \cap T'_{k'}$ *deux telles décompositions. On a* $k = k'$ *et les idéaux premiers associés aux* T_i *sont les mêmes que les idéaux premiers associés aux* T'_j.

Il suffit d'appliquer les théorèmes 8.2, 9.7 et 8.3.

THÉORÈME 9.9. — *Si l'anneau* U *possède un élément unité à gauche, tout idéal bilatère* $\mathfrak{A}$ *distinct de* U *possède au moins une décomposition réduite comme intersection d'un nombre fini d'idéaux bilatères secondaires (à droite).*

Soient $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{T}_k = \mathfrak{T}'_1 \cap \mathfrak{T}'_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{T}'_{k'}$ *deux telles décompositions. On a* $k = k'$ *et les idéaux premiers associés aux* $\mathfrak{T}_i$ *sont les mêmes que les idéaux premiers associés aux* $\mathfrak{T}'_j$.

Il suffit d'appliquer les théorèmes 8.2, 9.3, 9.7 et 8.3.

PROPRIÉTÉ 9.3. — *Si l'anneau* U *possède un élément unité à gauche, pour tout idéal à gauche ou bilatère* X, *on a*

$$\mathcal{R}_2(X) = \mathcal{R}'(X) = \mathcal{R}_3(X) = \mathcal{R}_4(X).$$

En effet, d'après le théorème 9.5, tout idéal bilatère contenant $X\cdot.U$ et contenu dans un résiduel à gauche propre de X est un résiduel à gauche propre maximal de X. On a donc $\mathcal{R}_2(X) = \mathcal{R}_4(X)$ et les autres égalités en résultent.

Remarque. — Si l'anneau U vérifie la condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche mais n'a pas d'élément unité à gauche, il peut se faire qu'il existe des idéaux U-primaux non U-tertiaires et des idéaux U-tertiaires non U-secondaires [*cf.* exemple 6.2, (*b*) : L'idéal O est primal et non tertiaire et l'idéal (a) est tertiaire et non secondaire; remarquons que l'anneau considéré dans cet exemple possède un élément unité à droite].

3. **Propriétés des modules artiniens sur un anneau artinien à gauche.** — Considérons maintenant le cas où ($\mathfrak{T}$) est l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau $\mathfrak{S}$ artinien à gauche et (L) l'ensemble des sous-modules d'un $\mathfrak{S}$-module artinien. Ici encore, nous avons une ($\mathfrak{T}$)-algèbre satisfaisant aux conditions du chapitre VIII [cas (2) du paragraphe 1].

Le théorème 9.5 donne immédiatement comme ci-dessus les résultats suivants :

THÉORÈME 9.10. — *Tout sous-module $\mathfrak{T}$-primal, avec $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{S}$, est $\mathfrak{T}$-secondaire. Par suite, pour $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{S}$, les quatre notions de sous-module $\mathfrak{T}$-primal, $\mathfrak{T}$-tertiaire, $\mathfrak{T}$-unirésidué et $\mathfrak{T}$-secondaire coïncident.*

COROLLAIRE. — *Si l'on a $\mathfrak{S}X = X$ pour tout sous-module X, les quatre notions de sous-module primal, tertiaire, unirésidué et secondaire coïncident.*

THÉORÈME 9.11. — *Si l'on a $\mathfrak{S}X = X$ pour tout sous-module X, tout sous-module A distinct de U possède au moins une décomposition réduite comme intersection de sous-modules secondaires.*

Soient $A = T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_k = T'_1 \cap T'_2 \cap \ldots \cap T'_{k'}$, deux telles décompositions. On a $k = k'$ et les idéaux premiers associés aux T_i sont les mêmes que les idéaux premiers associés aux T'_j.

PROPRIÉTÉ 9.4. — *Si l'on a $\mathfrak{S}X = X$ pour tout sous-module X, on a*

$$\mathcal{R}_2(X) = \mathcal{R}'(X) = \mathcal{R}_3(X) = \mathcal{R}_4(X).$$

Signalons que J. Fort [39] a récemment étendu ces résultats sur les modules au cas où l'anneau $\mathfrak{S}$ est artinien à gauche et où le $\mathfrak{S}$-module U est nœthérien, cas qui ne rentre pas directement dans l'étude faite au chapitre VIII.

4. Exemples. — Nous étudions deux exemples. Le premier montre d'une part un demi-groupe artinien à gauche qui illustre les décompositions en idéaux unirésidués, d'autre part un anneau artinien à gauche qui illustre les décompositions en idéaux secondaires; le second est constitué par un groupe abélien considéré comme module sur un sous-anneau de son anneau d'endomorphismes.

Exemple 9.1. — *a*. Considérons le demi-groupe D à cinq éléments o, a, b, c, e dont la table de multiplication est la suivante :

	o	a	b	c	e
o	o	o	o	o	o
a	o	o	o	o	a
b	o	o	b	b	b
c	o	a	b	c	c
e	o	a	b	c	e

Les idéaux à gauche de D sont : $O = \{o\}$, $A = \{o, a\}$, $B = \{o, b\}$, $C = \{o, b, c\}$, $I = \{o, a, b\}$, $J = \{o, a, b, c\}$ et D.

Le treillis des idéaux à gauche est représenté par le diagramme suivant :

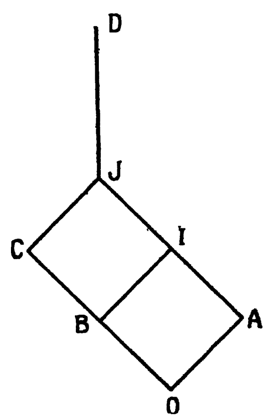

Fig. 8.

[39] *Cf.* J. Fort [31].

Tous les idéaux à gauche autres que C sont bilatères.

Les idéaux premiers sont A, I, J et D, ce qui montre que le théorème 9.5 n'est pas valable pour un demi-groupe. L'idéal à gauche C est I-tertiaire ainsi que l'idéal bilatère B. Conformément au théorème 9.1 et au corollaire du théorème 9.3, ils sont aussi I-unirésidués. L'idéal O se décompose de deux manières :

$$O = A \cap B = A \cap C$$

et l'on vérifie la propriété d'unicité du théorème 9.2.

b. Construisons sur le corps K des nombres rationnels une algèbre R dont les éléments générateurs a, b, c, e se multiplient selon la table de multiplication du demi-groupe D précédent.

Les idéaux à gauche de R sont $O = \{0\}$, $A = [a]$, $B = [b]$, $C_\alpha = [b,\ c - \alpha a]$ pour tout $\alpha \in K$, $I = [a,\ b]$, $J = [a,\ b,\ c]$, $K_\alpha = [b - c + \alpha a]$, $L = [a, c - e]$, $M = [a, b - c]$, $N = [a, b, c - e]$, $H = [a,\ b - c,\ c - e]$ et R ($[a]$ par exemple désigne le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel R (sur K) engendré par l'élément a).

Le treillis des idéaux à gauche est représenté par le diagramme suivant :

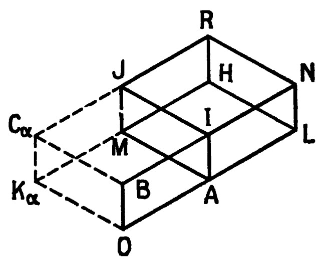

Fig. 9.

Les idéaux K_α et C_α sont les seuls qui ne soient pas bilatères. Les idéaux premiers sont J, N et H; ils sont maximaux conformément au théorème 9.5. Les idéaux B et C_α sont N-tertiaires (donc N-secondaires). Tout idéal est représentable comme intersection d'idéaux tertiaires (ou secondaires) et la représentation est ici unique.

Exemple 9.2. — Considérons un groupe abélien G, produit de trois groupes cycliques d'ordre 2. Nous notons (ξ, η, ζ) les éléments de G, où ξ, η, ζ sont éléments de l'anneau Z_2 des classes résiduelles modulo 2 et sont représentés par 0 ou 1. Envisageons les trois endomorphismes i, p, p' de G définie de la manière suivante ([40]) :

$$i(1, 0, 0) = (1, 1, 0), \qquad i(0, 1, 0) = (1, 1, 0), \qquad i(0, 0, 1) = (0, 0, 0);$$
$$p(1, 0, 0) = (1, 1, 0), \qquad p(0, 1, 0) = (0, 0, 0), \qquad p(0, 0, 1) = (0, 0, 0);$$
$$p'(1, 0, 0) = (1, 0, 0), \qquad p'(0, 1, 0) = (1, 0, 0), \qquad p'(0, 0, 1) = (0, 0, 1).$$

Considérons le sous-anneau de l'anneau des endomorphismes de G engendré par i, p, p'.

Les éléments de A sont les huit éléments $\alpha i + \beta p + \beta' p'$ où α, β, β' prennent les valeurs 0 ou 1 car l'ensemble d'endomorphismes $\{0, i, p, p'\}$ est multiplicativement fermé, la table de multiplication étant donnée par

	0	i	p	p'
0	0	0	0	0
i	0	0	0	i
p	0	i	p	i
p'	0	0	0	p'

L'élément $-i+p+p'$ de A est l'élément unité. Les idéaux bilatères de $A = \mathfrak{E}$ sont $\mathfrak{Z} = \{0\}$, $\mathfrak{J} = (i)$, $\mathfrak{P} = (i, p)$, $\mathfrak{P}' = (i, p')$ et $\mathfrak{E} = (i, p, p')$. Les idéaux premiers propres sont $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$.

Envisageons, d'autre part, les sous-groupes de G qui sont stables pour les endomorphismes i, p, p'. Ce sont

$$N = \{(0, 0, 0)\}, \qquad N' = \{(0, 0, 0), (1, 1, 0)\},$$
$$B = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}, \qquad B' = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\},$$
$$C = \{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\},$$
$$M = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\} \qquad \text{et} \qquad G = U.$$

Représentons leur treillis par le diagramme de la figure 10.

Le groupe $G = U$ est ainsi un module sur l'anneau non commutatif $A = \mathfrak{E}$. Les sous-modules de U sont N, N', B, B', C, M, U.

Les sous-modules B, B', C, M sont $\cap$-irréductibles donc tertiaires et, par suite, secondaires d'après le corollaire du théorème 9.10. Les égalités $N' = B' \cap M = B' \cap C = C \cap M$ prouvent que les idéaux premiers associés à B', C et M sont nécessairement les mêmes. Or,

([40]) On note ici ag le transformé d'un élément g de G par un endomorphisme a.

p' n'appartient pas au radical tertiaire de B' car, dans le sous-module engendré par l'élément (1, 0, 0) ($\notin B'$) qui est M, il n'existe aucun élément qui ne soit dans B' et dont le transformé par p' soit dans B'.

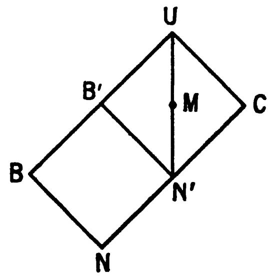

Fig. 10.

Donc l'idéal premier associé à B', C et M est nécessairement $\mathfrak{T}$; ces sous-modules sont $\mathfrak{T}$-tertiaires, donc $\mathfrak{T}$-secondaires (ils sont même $\mathfrak{T}$-primaires) et il en est de même de N'. D'autre part, le radical tertiaire du sous-module B ne peut contenir p car, dans le sous-module engendré par l'élément (1, 0, 0) ($\notin B$) qui est M, il n'existe aucun élément qui ne soit dans B et dont les transformés par p et i (i appartient à pU) soient tous deux dans B. Par suite, l'idéal premier associé à B est nécessairement $\mathfrak{T}'$ et B est $\mathfrak{T}'$-tertiaire, donc $\mathfrak{T}'$-secondaire (mais non primaire). On a $N = B \cap M = B \cap C = B \cap N'$, décompositions conformes au théorème 9.11.

CHAPITRE X.

Sous modules isotypiques.

On peut retrouver et éclairer la théorie des idéaux à gauche tertiaires d'un anneau et, plus généralement, celle des sous-modules tertiaires d'un module, au moyen de la notion d'enveloppe injective qui conduira même à une théorie plus fine dans certains cas. Cette notion a été introduite par B. Eckmann et A. Schopf en 1953 (*cf.* [26]); elle a été appliquée à l'étude de la décomposition en sous-modules primaires pour un module sur un anneau commutatif par E. Matlis en 1958 (*cf.* [61]) et à la décomposition en sous-modules isotypiques pour un module quelconque par P. Gabriel en 1959 (*cf.* [34], (40 bis)).

1. Immersion d'un module dans un module injectif. — Les A-modules considérés dans tout ce chapitre sont supposés unitaires. Rappelons d'abord la définition d'un module injectif, notion introduite en 1940 par R. Baer (*cf.* [7]).

Définition 10.1. — Un A-module M est dit *injectif* si, pour tout A-module Q, tout sous-module P de Q et tout homomorphisme f de P dans M, il existe un homomorphisme $\bar{f}$ de Q dans M prolongeant f (*cf.* H. Cartan et S. Eilenberg [16], p. 8).

Remarquons qu'un module M, somme directe de deux sous-modules, est injectif si et seulement si ces deux sous-modules sont injectifs.

Propriété 10.1. — *Pour que* M *soit un* A-*module injectif, il faut et il suffit que, pour tout idéal à gauche* I *de* A *et tout homomorphisme* f *de* I *dans* M, f *soit réalisé par une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe* $x_0 \in M$ *tel que* $f(a) = ax_0$ *pour tout* $a \in I$ (*cf.* H. Cartan et S. Eilenberg [16], p. 8).

En effet, la condition est nécessaire puisque l'homomorphisme f est extensible à un homomorphisme $\bar{f}$ de A dans M, ce qui donne pour $a \in I$:

$$f(a) = \bar{f}(a) = \bar{f}(a.1) = a\bar{f}(1).$$

Montrons que la condition est suffisante. Soient un A-module Q, un sous-module P de Q et un homomorphisme f de P dans M. Considérons la famille $\mathfrak{F}$ des couples (P_1, f_1), où P_1 est un sous-module de Q contenant P et f_1 un homomorphisme de P_1 dans M, avec une relation d'ordre définie par : $(P_1, f_1) \leq (P_2, f_2) \Leftrightarrow P_1 \subseteq P_2$ et la restriction de f_2 à P_1 coïncide avec f_1. Cette famille est inductive et possède donc un élément maximal (P_0, f_0) d'après le théorème de Zorn. Nous allons établir l'égalité $P_0 = Q$. S'il n'en est pas ainsi, soit $x \in Q$ tel que $x \notin P_0$. Considérons l'idéal $I = P_0^{\cdot} . x$ et l'homomorphisme $i \to f_0(ix)$ de I dans M. Celui-ci pouvant être

(40 bis) Cette notion a également été appliquée dans d'autres travaux récents. Citons en particulier : R. E. Johnson et E. T. Wong [45], J. Lambek [50], L. Lesieur et R. Croisot [58].

réalisé par une homothétie, il existe $m \in M$ tel que $f_0(ix) = im$. En posant, pour $x_0 \in P_0$ et $\lambda \in A$,

$$\bar{f}(x_0 + \lambda x) = f_0(x_0) + \lambda m$$

on obtient un homomorphisme $\bar{f}$ de $P_0 + Ax$ dans M qui prolonge f_0, ce qui est contraire au choix de (P_0, f_0).

Un groupe abélien peut être considéré comme un module sur l'anneau Z des entiers. Nous dirons qu'un groupe abélien est injectif si c'est un Z-module injectif. La propriété 10.1 donne immédiatement la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 10.2. — *Pour qu'un groupe abélien* G *soit injectif, il faut et il suffit qu'il soit divisible* ([41]).

Nous allons montrer qu'un A-module M quelconque peut être plongé dans un A-module injectif. Nous utiliserons pour cela la méthode de B. Eckmann et A. Schopf ([42]) qui consiste à plonger d'abord M considéré comme un groupe abélien dans un groupe abélien injectif.

PROPRIÉTÉ 10.3. — *Tout groupe abélien peut être plongé dans un groupe abélien injectif.*

Soit G un groupe abélien quelconque. Considérons un ensemble dont les éléments sont indexés par les éléments de G, soit $E = \{ x_g \}_{g \in G}$. Soit F l'espace vectoriel libre engendré par l'ensemble E sur le corps K des nombres rationnels et, dans F, la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ compatible avec l'addition, définie par

$$\sum k_g x_g \equiv \sum k'_g x_g \,(\mathcal{R}) \Longleftrightarrow k_g - k'_g = n_g \in Z \quad \text{et} \quad \sum n_g x_g = 0.$$

L'espace-quotient $F/\mathcal{R}$ est alors un groupe abélien injectif qui contient un sous-groupe isomorphe à G.

Pour tout anneau A et tout groupe abélien G, nous considérons l'ensemble des Z-homomorphismes de A dans G que nous notons $\mathrm{Hom}_Z(A, G)$. Pour tout élément f de $\mathrm{Hom}_Z(A, G)$, nous

---

([41]) C'est-à dire que, pour tout n entier positif et tout élément $a \in G$, il existe $x \in G$ tel que $nx = a$.

([42]) Une autre méthode est exposée dans H. CARTAN et S. EILENBERG [16], p. 9 Cette méthode est en substance celle de R. Baer.

notons $(a)f$ l'élément de G, transformé de $a \in A$ par f (43). et nous définissons, pour tout $b \in A$, l'élément bf de $\mathrm{Hom}_Z(A, G)$ par $(a)(bf) = (ab)f$. Définissant d'autre part la somme de deux éléments de $\mathrm{Hom}_Z(A, G)$ d'une manière naturelle, nous faisons de $\mathrm{Hom}_Z(A, G)$ un A-module à gauche.

Nous avons les propriétés suivantes dont la première est évidente :

Propriété 10.4. — *Si* G *est un sous-groupe du groupe abélien* G', $\mathrm{Hom}_Z(A, G)$ *est un sous-module de* $\mathrm{Hom}_Z(A, G')$.

Propriété 10.5. — *Si* G *est un groupe abélien injectif*, $\mathrm{Hom}_Z(A, G)$ *est un* A-*module injectif.*

En effet, soit Q un A-module, P un sous-module de Q, et soit φ un A-homomorphisme de P dans $\mathrm{Hom}_Z(A, G)$. On a donc $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ pour tout $\lambda \in A$ et tout $x \in P$. On en déduit (1) $\varphi(\lambda x) = (\lambda)\varphi(x)$. Posons

$$(1)\ \varphi(x) = \psi(x) \in G.$$

ψ est un Z-homomorphisme de P dans G qui peut être étendu, puisque G est un groupe abélien injectif, à un Z-homomorphisme $\overline{\psi}$ de Q dans G. Pour tout $y \in Q$, définissons $\overline{\varphi}(y)$ comme étant l'élément suivant de $\mathrm{Hom}_Z(A, G)$:

$$a \rightarrow (a)\overline{\varphi}(y) = \overline{\psi}(ay).$$

L'application $\overline{\varphi} : y \rightarrow \overline{\varphi}(y)$ est un A-homomorphisme de Q dans $\mathrm{Hom}_Z(A, G)$ qui coïncide avec φ sur P.

Propriété 10.6. — *Si* G *est un* A-*module* M, $\mathrm{Hom}_Z(A, M)$ *possède un sous-module isomorphe à* M.

En effet, l'ensemble des homothéties de A dans M constitue un sous-module de $\mathrm{Hom}_Z(A, M)$ isomorphe à M.

Les propriétés précédentes conduisent au théorème suivant :

Théorème 10.1. — *Tout* A-*module peut-être plongé dans un* A-*module injectif.*

(43) Cette notation est justifiée par le fait que, si G est un A-module M, pour tout $m \in M$, l'homothétie $a \rightarrow am$ est un élément de $\mathrm{Hom}_Z(A, M)$.

En effet, soit M un A-module et $\overline{M}$ un groupe abélien injectif contenant le groupe abélien M. On a $M \subseteq \mathrm{Hom}_Z(A, M) \subseteq \mathrm{Hom}_Z(A, \overline{M})$, d'après les propriétés 10.6 et 10.4. Or $\mathrm{Hom}_Z(A, \overline{M})$ est un module injectif d'après la propriété 10.5.

2. Enveloppe injective d'un module ([44]). — La notion d'enveloppe injective d'un module est intimement liée à celle d'extension essentielle.

Définition 10.2. — M étant un sous-module du A-module E, on dit que E *est une extension essentielle de* M si, X étant un sous-module de E, la relation $M \cap X = O$ implique $X = O$.

Remarquons que, si trois A-modules M, P, E sont tels que $M \subseteq P \subseteq E$, E est extension esssentielle de M si et seulement si E est extension essentielle de P et P extension essentielle de M.

On se propose d'étudier toutes les extensions essentielles d'un module M. En supposant M plongé dans un module injectif N (théorème 10.1), nous allons voir qu'on peut se limiter à rechercher les extensions essentielles de M contenues dans N. Ceci résulte de la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 10.7. — *Si* M *est sous-module du module injectif* N, *toute extension essentielle* E *de* M *est isomorphe* (*relativement à* M) *à un sous-module de* N *contenant* M. *Si* M *est injectif, il ne possède pas d'extension propre essentielle.*

En effet, le plongement canonique de M dans N peut être étendu à un homomorphisme f de E dans N puisque N est injectif. Si X est le noyau de cet homomorphisme, on a évidemment $X \cap M = O$, d'où $X = O$, puisque E est extension essentielle de M. Il en résulte que E est isomorphe à $f(E)$ qui est un sous-module de N contenant M. En particulier, si M est injectif, on peut prendre $N = M$ et M ne possède pas d'extension propre essentielle.

THÉORÈME 10.2. — M *étant un* A-*module donné, il existe un* A-*module* E *contenant* M, *défini à un isomorphisme près relativement à* M, *et ayant les propriétés équivalentes suivantes :*

([44]) *Cf.* B. ECKMANN et A. SCHOPF [26].

(1 *a*) E *est une extension essentielle maximale de* M ([45]);

(1 *b*) E *est une extension essentielle de* M *et* E *est facteur direct dans toute extension de* E ([46]);

(1 *c*) E *est une extension essentielle injective de* M;

(1 *d*) E *est une extension injective minimale de* M ([47]).

En effet, N étant une extension injective de M, considérons la famille des sous-modules de N qui constituent des extensions essentielles de M. Cette famille est inductive; elle possède donc un élément maximal E d'après le théorème de Zorn. Aucune extension propre de E n'est extension essentielle de M, sinon ce serait une extension essentielle de E et il en existerait une image isomorphe relativement à E dans N d'après la propriété 10.7; celle-ci serait aussi une extension essentielle de M, ce qui est contraire au choix de E. Le théorème d'existence pour la propriété (1 *a*) est donc établi.

Démontrons maintenant l'équivalence des propriétés (1 *a*), (1 *b*), (1 *c*), (1 *d*).

(1 *a*) entraîne (1 *b*). Soit F une extension de E. Considérons un sous-module maximal E′ de F tel que $E \cap E' = O$ (complément relatif de E) dont l'existence est assurée par le théorème de Zorn. Le module F/E' contient $(E + E')/E' \simeq E$; c'est donc une extension essentielle de E qui est par suite égale à E et l'on a

$$E + E' = F, \qquad E \cap E' = 0.$$

(1 *b*) entraîne (1 *c*). Soit N une extension injective de E (théorème 10.1). E est alors facteur direct dans le module injectif N, et comme tel est injectif.

(1 *c*) entraîne (1 *d*). Soit P une extension injective de M telle que $P \subseteq E$. Alors E est une extension essentielle de P qui ne possède pas d'extension propre essentielle d'après la propriété 10.7. On a donc $P = E$.

([45]) C'est-à-dire que E est une extension essentielle de M et qu'aucune extension propre de E n'est extension essentielle de M.

([46]) On dit qu'un sous-module P d'un module Q est *facteur direct* dans Q s'il existe un sous-module P′ de Q tel que Q soit la somme directe de P et P′ (*cf.* N. BOURBAKI [13], chap. VIII, § 1, p. 8).

([47]) C'est-à-dire que E est une extension injective de M et qu'aucun sous-module propre de E n'est extension injective de M.

Enfin, (1 *d*) entraîne (1 *a*). Si E n'était pas extension essentielle de M, E contiendrait proprement une extension essentielle de M qui serait injective puisque (1 *a*) entraîne (1 *d*), contrairement à la minimalité de E. D'autre part, E ne possède pas d'extension propre essentielle d'après la propriété 10.7 et constitue donc une extension essentielle maximale de M.

Il reste à montrer l'isomorphisme relativement à M de deux extensions E et E′ de M ayant les propriétés précédentes. D'après la propriété 10.7, E′ est isomorphe relativement à M à un sous-module E″ de E contenant M. Mais E étant une extension injective minimale de M, on a $E'' = E$.

COROLLAIRE. — *Pour qu'un module soit injectif, il faut et il suffit qu'il soit facteur direct dans toutes ses extensions.*

Ceci résulte de l'équivalence de (1 *b*) et (1 *d*).

Définition 10.3. — Un module E satisfaisant aux propriétés du théorème 10.2 s'appelle (par abus de langage) *l'enveloppe injective de* M et se note E(M).

3. **Sous-modules isotypiques.** — *Définition* 10.4. — On dit qu'un A-module M est *indécomposable* si ses seuls facteurs directs sont O et M.

PROPRIÉTÉ 10.8. — *Soit* M *un* A-*module. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1 *a*) O *est* $\cap$-*irréductible dans* M;

(1 *b*) *l'enveloppe injective* E(M) *est indécomposable;*

*(1 *c*) E(M) *est l'enveloppe injective de tout sous-module non nul de* M (*cf.* E. Matlis [ ]).

(1 *a*) entraîne (1 *b*). En effet, si E(M) est décomposable, on a $E(M) = E_1 \oplus E_2$ avec $E_1 \neq O$, $E_2 \neq O$. On en déduit $X_1 = E_1 \cap M \neq O$ et $X_2 = E_2 \cap M \neq O$ puisque E(M) est extension essentielle de M. D'autre part, on a $X_1 \cap X_2 \subseteq E_1 \cap E_2 = O$, ce qui contredit (1 *a*).

(1 *b*) entraîne (1 *c*). Soit M′ un sous-module non nul de M. L'enveloppe injective E(M′) du module M′ peut être considérée comme un sous-module non nul de E(M). Mais E(M′) étant injectif, est facteur direct dans E(M), ce qui implique $E(M') = E(M)$.

Enfin, (1 c) entraîne (1 a). Si $O = X_1 \cap X_2$ où X_1 et X_2 sont deux sous-modules non nuls de M, E(M) ne peut être extension essentielle de X_1, ce qui contredit (1 c).

Corollaire. — *Pour que deux* A-*modules* M_1 *et* M_2, *dans lesquels le sous-module nul est* $\cap$*-irréductible, aient leurs enveloppes injectives isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe un sous-module non nul de* M_1 *isomorphe à un sous-module de* M_2.

La condition est suffisante d'après l'équivalence de (1 a) et (1 c). Montrons qu'elle est nécessaire. Si $E(M_1)$ est isomorphe à $E(M_2)$, M_2 est isomorphe à un sous-module M'_1 de $E(M_1)$ et l'on a $M'_1 \cap M_1 \neq O$ puisque $E(M_1)$ est extension essentielle de M_1. Le sous-module non nul $M'_1 \cap M_1$ de M_1 est isomorphe à un sous-module de M_2.

Théorème 10.3. — *Soit* M *un* A-*module artinien ou noethérien. Soit* $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ *une décomposition d'un sous-module* X *de* M *comme intersection d'un nombre fini de sous-modules* $\cap$*-irréductibles sans élément superflu. L'enveloppe injective de* M/X *est somme directe de n sous-modules isomorphes respectivement aux enveloppes injectives indécomposables des modules* M/X_i (*cf.* E. Matlis [61]).

Soit $\varphi_i : \overline{m} \to \varphi_i(\overline{m})$ l'homomorphisme canonique de M/X sur M/X_i. Désignons par P le A-module produit des A-modules M/X_i que nous pouvons considérer comme sous-modules de P. L'application $\varphi : \overline{m} \to (\varphi_1(\overline{m}), \varphi_2(\overline{m}), \ldots, \varphi_n(\overline{m}))$ est une injection de M/X dans P, et par suite dans le produit E des A-modules $E(M/X_i)$. Pour établir le théorème, il suffit de montrer que E est extension essentielle de $\varphi(M/X)$. On a d'abord $\varphi(M/X) \cap M/X_i \neq O$ pour tout i. En effet, soit $m \in M$ tel que $m \notin X_i$ et $m \in X_j$ pour $j \neq i$. L'élément $\varphi(\overline{m})$ est non nul et appartient à M/X_i. D'après la propriété 10.8, $E(M/X_i)$ est l'enveloppe injective de $\varphi(M/X) \cap M/X_i$. Prenons alors un élément non nul $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$. Si i_1 est l'indice de la première composante non nulle de x, il existe $a_1 \in A$ tel que $a_1 x_{i_1} \in \varphi(M/X) \cap M/X_{i_1}$, avec $a_1 x_{i_1} \neq 0$, puisque $E(M/X_{i_1})$ est extension essentielle de $\varphi(M/X) \cap M/X_{i_1}$. On opère de même sur la deuxième composante non nulle de $a_1 x$ et l'on continue de proche en proche. On obtient finalement un élément $ax \in \varphi(M/X)$ avec $ax \neq 0$, ce qui prouve que E est extension essentielle de $\varphi(M/X)$.

On arrive ainsi à une décomposition du module injectif $E(M/X)$ en somme directe d'un nombre fini de sous-modules injectifs indécomposables.

Les décompositions d'un module injectif en somme directe de sous-modules injectifs indécomposables ont été étudiées par G. Azumaya (*cf.* [6]) qui a démontré en particulier le théorème suivant :

Théorème 10.4. — *Soit* M *un* A-*module qui est somme directe d'un nombre fini de sous-modules injectifs indécomposables. Pour deux décompositions de* M *en somme directe d'un nombre fini de sous-modules injectifs indécomposables*,

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n = M'_1 \oplus M'_2 \oplus \ldots \oplus M'_{n'},$$

on a $n = n'$ *et il existe une permutation* σ *de l'ensemble* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *telle que* M_i *soit isomorphe à* $M'_{\sigma(i)}$ *pour tout* i (48).

Nous allons déduire ce théorème du théorème de Kurosh-Ore (49), d'après lequel les égalités

$$O = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n = X'_1 \cap X'_2 \cap \ldots \cap X'_{n'},$$

où X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et $X'_{i'}$ $(i' = 1, 2, \ldots, n')$ sont des sous-modules $\cap$-irréductibles de M dont aucun n'est superflu, entraînent $n = n'$.

En effet, désignons par X_i le sous-module de M qui est la somme des sous-modules M_j pour $j \neq i$, par $X'_{i'}$ le sous-module de M qui est la somme des sous-modules $M'_{j'}$ pour $j' \neq i'$. Les sous-modules X_i et $X'_{i'}$ sont $\cap$-irréductibles d'après la propriété 10.8, car on a, par exemple, $M/X_i \simeq M_i$ et M_i est un module injectif indécomposable. D'autre part, on a

$$O = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n = X'_1 \cap X'_2 \cap \ldots \cap X'_{n'},$$

ces décompositions étant sans élément superflu, d'où résulte déjà $n = n'$ par application directe du théorème de Kurosh-Ore.

Pour compléter la démonstration du théorème, raisonnons par récurrence sur n. Le résultat est évident pour $n = 1$. Supposons-le établi pour $n - 1$. En écrivant

$$O = X'_1 \cap X'_2 \cap \ldots \cap X'_n \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$$

(48) Le théorème d'Azumaya est plus général car il concerne les décompositions en somme directe d'un nombre éventuellement infini de sous-modules injectifs indécomposables.

(49) *Cf.* G. Birkhoff [11], p. 93, ou M.-L. Dubreil Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot [23], p. 122.

et en supprimant les $X'_{i'}$ superflus, on voit, toujours d'après le théorème de Kurosh-Ore, qu'il existe un i' que nous notons $\sigma(1)$ tel que

$$0 = X'_{\sigma(1)} \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n = X'_{\sigma(1)} \cap M_1.$$

On en déduit l'isomorphisme $M_1 \simeq (M_1 + X'_{\sigma(1)})/X'_{\sigma(1)}$. Or, on a $M_1 \not\subseteq X'_{\sigma(1)}$, d'où résulte que le sous-module injectif $(M_1 + X'_{\sigma(1)})/X'_{\sigma(1)}$ de $M/X'_{\sigma(1)} \simeq M'_{\sigma(1)}$ n'est pas nul et, par suite, coïncide avec $M/X'_{\sigma(1)}$ d'après la propriété 10.8. On a donc $M_1 \simeq M'_{\sigma(1)}$. De plus, on a $M = M_1 \oplus X'_{\sigma(1)}$, ce qui entraîne $X'_{\sigma(1)} \simeq M/M_1 \simeq X_1$. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence aux deux modules isomorphes X_1 et $X'_{\sigma(1)}$.

COROLLAIRE. — *Deux décompositions d'un module injectif* M *comme somme directe d'un nombre fini de sous-modules injectifs indécomposables se déduisent l'une de l'autre par un automorphisme de* M.

Le cas où tous les sous-modules injectifs indécomposables d'une décomposition de $E(M/X)$ sont isomorphes conduit à la notion de sous-module isotypique.

DÉFINITION 10.5. — *On dit que* X *est un sous-module isotypique de* M *si l'enveloppe injective de* M/X *est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables tous isomorphes* ([50]).

En particulier, un sous-module X $\cap$-irréductible de M est isotypique puisque $E(M/X)$ est alors indécomposable.

La propriété suivante donne une caractérisation des sous-modules isotypiques de M.

PROPRIÉTÉ 10.9. — *Pour que le sous-module* X *de* M *soit isotypique, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition suivante :*

$X = X_1 \cap X_2$ *avec* $X_1 \supset X$, $X_2 \supset X \Rightarrow$ *il existe* Y_1 *et* Y_2 *tels que* $X_1 \supseteq Y_1 \supset X$, $X_2 \supseteq Y_2 \supset X$ *et* Y_1/X *isomorphe à* Y_2/X ([51]).

En effet, supposons que X soit isotypique et qu'on ait $X = X_1 \cap X_2$ avec $X_1 \supset X$, $X_2 \supset X$. De $X \subset X_1 \subseteq M$, on déduit $0 \subset X_1/X \subseteq M/X$

([50]) Cela signifie que le module $E(M/X)$ est isotypique au sens de N. BOURBAKI (*cf.* [13], chap. VIII, § 1, p. 12).

([51]) Cette propriété nous a été communiquée oralement par P. Gabriel.

et $E(X_1/X) \subseteq E(M/X)$. Il en résulte que $E(X_1/X)$ est facteur direct dans $E(M/X)$, donc est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables isomorphes à ceux qui interviennent dans la décomposition de $E(M/X)$. Si Z_1 est l'un de ces sous-modules, on a $Z_1 \cap X_1/X \neq O$ puisque $E(X_1/X)$ est extension essentielle de X_1/X. De même, il existe Z_2 isomorphe à Z_1 tel que $Z_2 \cap X_2/X \neq O$. Soit f un isomorphisme de Z_1 sur Z_2. On a

$$Y'_2 = f(X_1/X \cap Z_1) \cap X_2/X \neq O$$

puisque Z_2 est extension essentielle de X_2/X. Dès lors, les modules $f^{-1}(Y'_2) = Y'_1$ et Y'_2 sont isomorphes et de la forme Y_1/X et Y_2/X avec $X \subset Y_1 \subseteq X_1$, $X \subset Y_2 \subseteq X_2$.

Réciproquement, supposons vérifiée la condition de la propriété 10.9. Soit $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ une décomposition de X en sous-modules $\cap$-irréductibles sans élément superflu. On a, d'après le théorème 10.3,

$$E(M/X) = E(M/X_1) \oplus \ldots \oplus E(M/X_n).$$

Or $E(M/X_1) \cap M/X = Y'_1 \neq O$ puisque $E(M/X)$ est extension essentielle de M/X. De même, $E(M/X_2) \cap M/X = Y'_2 \neq O$. De plus, $Y'_1 \cap Y'_2 = O$, car $E(M/X_1) \oplus E(M/X_2)$ est somme directe. Par hypothèse, Y'_1 et Y'_2 contiennent des sous-modules Z_1 et Z_2 non nuls isomorphes. Or deux injectifs indécomposables contenant des sous-modules non nuls isomorphes sont eux-mêmes isomorphes d'après le corollaire de la propriété 10.8. Il en résulte $E(M/X_1) \simeq E(M/X_2)$ et l'on a de la même façon $E(M/X_1) \simeq E(M/X_i)$ pour tout $i = 3, \ldots, n$. Le sous-module X est donc isotypique.

4. **Décompositions en sous-modules isotypiques.** — *Définition* 10.6. — I étant un sous-module isotypique de M, $E(M/I)$ est un module dont tous les facteurs directs indécomposables sont isomorphes. La classe π d'isomorphie de ces facteurs directs indécomposables s'appelle le *type* de I. On dit aussi que I est π-*isotypique*.

Propriété 10.10. — *L'intersection de deux sous-modules π-isotypiques est un sous-module π-isotypique.*

En effet, soit $X = X_1 \cap X_2$, X_1 et X_2 étant π-isotypiques. On a $E(M/X) \subseteq E(M/X_1) \oplus E(M/X_2)$. $E(M/X)$ étant facteur direct dans $E(M/X_1) \oplus E(M/X_2)$, la propriété en résulte d'après le théorème 10.4.

Cette propriété permet, dans une décomposition comme intersection de sous-modules isotypiques, de rassembler les sous-modules de même type. Une décomposition comme intersection de sous-modules isotypiques de types tous différents sans élément superflu s'appelle une *décomposition réduite.*

On a alors les théorèmes d'existence et d'unicité suivants :

THÉORÈME 10.5. — *Tout sous-module* X *d'un module artinien ou noethérien admet une décomposition réduite comme intersection de sous-modules isotypiques.*

Ceci résulte immédiatement de la propriété 10.10.

THÉORÈME 10.6. — *Soient deux décompositions réduites*

$$X = I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n = I'_1 \cap I'_2 \cap \ldots \cap I'_{n'}$$

d'un même sous-module X *comme intersection de sous-modules isotypiques. On a* $n = n'$ *et les types des* I_i *sont les mêmes que les types des* $I'_{i'}$.

C'est une conséquence immédiate du théorème 10.4.

Nous allons maintenant utiliser les décompositions comme intersection de sous-modules isotypiques pour l'étude des décompositions comme intersection de sous-modules tertiaires.

Nous considérons toujours un A-module M noethérien ou artinien. Nous supposons, de plus, que la $(\mathfrak{T})$-algèbre des sous-modules de M satisfait à l'axiome D du chapitre III. Autrement dit, nos hypothèses sont celles du chapitre VIII.

Définition 10.7. — Soit X un sous-module $\cap$-irréductible de M et soit $\mathfrak{T}$ son unique résiduel essentiel. Tout sous-module non nul N de l'enveloppe injective indécomposable E de M/X contient un sous-module non nul de E qui a pour annulateur $\mathfrak{T}$ et, par suite, N a pour annulateur un idéal bilatère de A contenu dans $\mathfrak{T}$. Nous dirons que $\mathfrak{T}$ est l'*annulateur maximum* de E.

THÉORÈME 10.7. — *Les résiduels essentiels d'un sous-module* X *de* M *coïncident avec les annulateurs maxima des facteurs directs indécomposables* E_i *de l'enveloppe injective de* M/X.

Soit $\mathfrak{T}$ un résiduel essentiel de X. Il existe un sous-module Y de M contenant X tel que $\mathfrak{T}$ soit l'annulateur de tout sous-module non nul de Y/X. Or, on a $Y/X \subseteq M/X \subseteq E(M/X)$ et ce dernier module est la somme directe des sous-modules E_i. Il en résulte aisément que $\mathfrak{T}$, qui est un idéal bilatère $\cap$-irréductible, est annulateur d'un sous-module N d'un E_i et de tout sous-module non nul de N. Par suite, $\mathfrak{T}$ est l'annulateur maximum de E_i.

Réciproquement, soit $\mathfrak{T}$ l'annulateur maximum d'un E_i. Le module M/X est contenu dans E(M/X) qui est somme directe des sous-modules E_i. Or, E(M/X) est extension essentielle de M/X et, par suite, on a $M/X \cap E_i \neq O$. Ce sous-module non nul de E_i contient un sous-module N qui admet $\mathfrak{T}$ pour annulateur, tout sous-module non nul de N admettant également $\mathfrak{T}$ pour annulateur. Il en résulte que $\mathfrak{T}$ est résiduel essentiel de X.

Les conséquences que nous allons tirer du théorème 10.7 vont nous permettre de retrouver, dans le cas particulier des sous-modules d'un module, les résultats du chapitre VIII.

Remarquons d'abord qu'un sous-module tertiaire est caractérisé d'après le théorème 7.3 par l'existence d'un résiduel essentiel unique. On en déduit donc :

Propriété 10.11. — *Pour que le sous-module* X *de* M *soit tertiaire, il faut et il suffit que les facteurs directs indécomposables de l'enveloppe injective de* M/X *aient tous le même annulateur maximum.*

Il en est ainsi en particulier dans le cas d'un sous-module isotypique puisque deux modules isomorphes ont le même annulateur maximum. Par suite :

Propriété 10.12. — *Tout sous-module isotypique est tertiaire.*

Définition 10.8. — I étant un sous-module isotypique du module M, son unique résiduel essentiel $\mathfrak{T}$ est appelé *l'idéal premier associé* à I.

Propriété 10.13. — *Deux sous-modules isotypiques de même type ont même idéal premier associé.*

Le théorème 10.7 montre aussi que l'intersection de deux sous-modules $\mathfrak{T}$-tertiaires est un sous-module $\mathfrak{T}$-tertiaire. Il prouve donc l'existence des décompositions réduites comme intersection de sous-modules tertiaires. Il permet également d'obtenir le théorème d'unicité relatif à ces décompositions. Finalement, il montre que les résiduels essentiels d'un sous-module coïncident avec les idéaux premiers associés aux composantes tertiaires d'une décomposition de ce sous-module.

Les réciproques des propriétés 10.12 et 10.13 sont inexactes comme le montrent les exemples suivants dans lesquels nous présentons, dans un anneau noethérien à gauche, des idéaux isotypiques de type différent ayant le même idéal premier associé, ainsi qu'un idéal à gauche tertiaire et même premier à droite non isotypique.

Exemple 10.1 ([52]). — Soient K le corps des nombres réels et $K(y)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans K et à une variable y. Considérons les polynomes à coefficients dans $K(y)$ et à une variable x non permutable avec les coefficients et imposons les relations $xf(y)=f(y)x+f'(y)$, où $f'(y)$ désigne la dérivée de $f(y)$ par rapport à y. Nous obtenons un anneau A dont les éléments peuvent se mettre d'une manière unique sous la forme :

$$P(x)=f_n(y)x^n+f_{n-1}(y)x^{n-1}+\ldots+f_1(y)x+f_0(y)$$

avec n entier positif ou nul et $f_n(y)\neq 0$.

Tout idéal à gauche de A est principal : il est engendré par chacun de ses polynomes de degré minimum. Par suite, A est noethérien à gauche ([53]).

L'anneau A n'a pas de diviseur de zéro. Il en résulte que l'idéal O est premier et est un idéal à gauche $\cap$-irréductible ([54]). Il est donc *isotypique, son type étant défini par le corps des quotients à gauche de* A ([55]).

L'anneau A n'a pas d'idéaux bilatères autres que A et O. Par suite, puisqu'il est unitaire, tous ses idéaux à gauche propres sont

---

([52]) *Cf.* N. Bourbaki [13], chap. VIII, § 5, exercice 13, p. 60. Cet exemple nous a été signalé par P. Gabriel.

([53]) On voit que A est aussi noethérien à droite mais qu'il n'est pas artinien à gauche ni artinien à droite.

([54]) *Cf.* L. Lesieur et R. Croisot [56], § 2, théorème 1.

([55]) *Cf.* P. Gabriel [34], p. 5.

O-*premiers à droite*. Il en est ainsi en particulier des idéaux à gauche $(x-a|$ avec $a \in K(y)$ qui sont maximaux, donc $\cap$-irréductibles. Ces idéaux à gauche sont donc *isotypiques* et ont O pour *idéal premier associé*.

Pourtant, ils ne peuvent être du même type que l'idéal O car l'enveloppe injective de $A/(x-a|$ ne peut être A-isomorphe au corps des quotients à gauche de A. En effet, $A/(x-a|$ n'est pas isomorphe à un sous-module du corps des quotients à gauche de A puisque l'annulateur $O^{\cdot}.a$ de tout élément non nul du corps des quotients à gauche est O alors que l'annulateur de l'élément 1 de $A/(x-a|$ est $(x-a|$. Par conséquent, le corps des quotients à gauche, qui n'est pas une extension de $A/(x-a|$, ne peut en être l'enveloppe injective. La réciproque de la propriété 10.13 n'est donc pas exacte.

De plus, l'idéal à gauche $(x-a|$ et l'idéal à gauche $(x-b|$ ne peuvent être de même type pour $b \neq a$ d'après le corollaire de la propriété 10.8. En effet, les modules $A/(x-a|$ et $A/(x-b|$ sont simples et non isomorphes puisqu'ils n'ont pas même annulateur. L'intersection $(x-a| \cap (x-b|$ est donc un idéal O-*premier à droite non isotypique*, ce qui montre que la réciproque de la propriété 10.12 n'est pas valable. On voit même qu'*un idéal primaire n'est pas nécessairement isotypique*.

Exemple 10.2 ([56]). — On obtient des résultats analogues en considérant l'anneau des polynomes à coefficients dans $K(y)$ et à une variable x avec les relations $xf(y) = f(y^2)x$.

On voit encore que tout idéal à gauche est principal et que A est noethérien à gauche ([57]).

L'anneau A n'a pas de diviseur de zéro et l'idéal O est *isotypique*, son type étant défini par le corps des quotients à gauche de A.

Un calcul facile montre que les idéaux à gauche $(x-a|$ avec $a \in K$ et $a \neq 0$ sont O-*premiers à droite*. D'autre part, ils sont maximaux, donc $\cap$-irréductibles et l'on peut répéter à leur propos ce qui a été dit à l'exemple précédent.

Cependant, la réciproque de la propriété 10.12 est valable dans certains cas.

([56]) *Cf.* L. Lesieur et R. Croisot [56], § 7, exemple 1.

([57]) A n'est pas noethérien à droite (*cf. loc. cit.*).

Propriété 10.14. — *Soit* Q *un sous-module tertiaire du* A-*module* M. *Pour qu'il soit isotypique, il suffit que l'hypothèse suivante soit vérifiée :*

(H) *Les idéaux à gauche de* A *qui sont annulateurs d'un sous-ensemble du* A-*module* M/Q *vérifient la condition de chaîne descendante.*

On peut évidemment supposer que Q n'est pas $\cap$-irréductible. Soit alors $Q=\bigcap_{i=1}^{i=n} X_i$ une décomposition de Q comme intersection de sous-modules X_i $\cap$-irréductibles, aucun d'eux n'étant superflu; soit $\mathfrak{T}$ l'idéal premier associé à Q, donc à X_i ($i=1, 2, \ldots, n$). Nous allons montrer que l'enveloppe injective du A-module $A/\mathfrak{T}$ est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables isomorphes entre eux et isomorphes à $E(M/X_i)$ pour tout i, ce qui établira bien que Q est isotypique.

Soit i fixé et $X_i=X$ le composant correspondant. On peut écrire $Q=X\cap Y$, X étant complément relatif de Y. L'idéal $\mathfrak{T}$ est de la forme $\mathfrak{T}=X^{\cdot}.Am$, avec $m\in M$, $m\notin X$. On a donc $(X+Am)\cap Y\supset Q$ et, par suite, il existe $y\in Y$ tel que $y=x+\alpha m\notin Q$, avec $x\in M$, $\alpha\in A$. Il en résulte

$$X^{\cdot}.\alpha m = X^{\cdot}.(x+\alpha m) = X^{\cdot}.y, \qquad \text{avec} \quad \alpha m\notin X,$$

d'où $\mathfrak{T}=X^{\cdot}.A\alpha m=Q^{\cdot}.Ay$. On peut trouver, d'après l'hypothèse (H), r éléments $\alpha_j\in A$ ($j=1, 2, \ldots, r$) tels que

$$\mathfrak{T}=\bigcap_{j=1}^{r}(Q^{\cdot}.\alpha_j y)=\bigcap_{j=1}^{r}(X^{\cdot}.\alpha_j\alpha m).$$

Or

$$E(A/X^{\cdot}.\alpha_j\alpha m)\simeq E(X+A\alpha_j\alpha m/X)=E(M/X).$$

Par suite, $E(A/\mathfrak{T})$ est une somme directe de sous-modules injectifs indécomposables isomorphes à $E(M/X)$.

L'hypothèse (H) n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple 10.1 dans lequel les idéaux à gauche $(x-a|$ et $(x-b|$ ne la vérifient pas [si ces idéaux à gauche vérifiaient (H), il en serait de même de leur intersection qui serait donc isotypique].

La propriété suivante montre que l'hypothèse (H) est vérifiée pour tous les sous-modules tertiaires de M dans des cas assez généraux.

Propriété 10.15. — *L'hypothèse* (H) *est vérifiée quel que soit* Q *sous-module tertiaire de* M, *dans l'un ou l'autre des cas suivants :*

(1) *L'anneau* A *est artinien à gauche;*

(2) *Tous les idéaux à gauche de* A *sont bilatères;*

(3) *Le module* M *est noethérien et l'anneau* A *est un module à gauche de type fini sur le centre de* A ([58]) [*cf.* P. Gabriel [34], p. 19 ([59])].

Dans le cas (1), il est bien clair que la condition (H) est vérifiée.

Dans le cas (2), les idéaux à gauche de A de la forme $Q^{\cdot}.x$ avec $x \in M$ sont des résiduels à gauche de Q car on a $Q^{\cdot}.x = Q^{\cdot}.Ax$ et la condition (H) résulte de la condition D du chapitre III.

Dans le cas (3), si C désigne le centre de l'anneau A, le A-module M est un C-module noethérien. H étant un sous-ensemble quelconque de M, considérons alors les sous-modules $Q.^{\cdot}(Q^{\cdot}.H)$ de ce C-module. Puisqu'ils vérifient la condition de chaîne ascendante et qu'on a $Q^{\cdot}.H = Q^{\cdot}.[Q.^{\cdot}(Q^{\cdot}.H)]$, les idéaux à gauche $Q^{\cdot}.H$ de A vérifient la condition de chaîne descendante.

Finalement, la propriété suivante indique deux cas où l'hypothèse (H) est vérifiée pour certains idéaux à gauche tertiaires d'un anneau A (considéré comme A-module à gauche).

Propriété 10.16. — *L'hypothèse* (H) *est vérifiée :*

(1) *Pour tout idéal bilatère premier d'un anneau noethérien à gauche;*

(2) *Pour tout idéal bilatère d'un anneau noethérien* (*à gauche et à droite*).

([58]) Ceci a lieu en particulier pour un module noethérien sur un anneau commutatif, cas examiné par E. Matlis (*cf.* [61]). La notion de sous-module isotypique coïncide alors avec celle de sous-module tertiaire, c'est-à-dire avec celle de sous-module primaire.

([59]) P. Gabriel montre même que, dans l'un ou l'autre de ces cas, la réciproque de la propriété 10.13 est vraie.

Dans le cas (1), la propriété résulte de l'étude de L. Lesieur et R. Croisot sur les anneaux premiers noethériens à gauche (*cf.* [56], notamment propriété 7 et théorème 2).

Dans le cas (2), Q étant un idéal bilatère, considérons, pour tout sous-ensemble H de A, les idéaux à droite $Q.\cdot(Q\cdot.H)$. Puisqu'ils vérifient la condition de chaîne ascendante et qu'on a $Q\cdot.H = Q\cdot.[Q.\cdot(Q\cdot.H)]$, les idéaux à gauche de $Q\cdot.H$ vérifient la condition de chaîne descendante.

La propriété 10.16 montre que *tout idéal premier d'un anneau noethérien à gauche est isotypique* et que *tout idéal bilatère, tertiaire en tant qu'idéal à gauche, d'un anneau noethérien est isotypique*.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. Albert, *Structure of algebras* (*Amer. Math. Soc. Coll. publ.*, vol. 24, 1939).

[2] A. Almeida-Costa, *Anéis associativos não comutativos* (*Memorias e estudos*, Faculdade de Ciencias de Lisboa, 1955, 313 pages).

[3] A. Almeida Costa, *Sur la théorie générale des demi-anneaux*, I et II (*Séminaire Dubreil Pisot*, 1961, p. 24 01 à 24 17 et 25-01 à 25 11).

[4] S. A. Amitsur, *A general theory of radicals*, I, II, III (*Amer. J. Math.*, t. 74, 1952, p. 774-786; t. 76, 1954, p. 100-125 et 126 136).

[5] E. Artin, *Zur theorie der hyperkomplexen Zahlen* (*Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, t. 5, 1927, p. 251 260).

[6] G. Azumaya, *Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remak-Schmidt's theorem* (*Nagoya Math.*, t. 1, 1950, p. 117-124).

[7] R. Baer, *Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 46, 1940, p. 800-806).

[8] R. Baer, *Radical ideals* (*Amer. J. Math.*, t. 65, 1943, p. 537-568).

[9] W. E. Barnes, *Prime ideals and isolated components in non commutative rings* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 82, 1956, p. 1-16).

[10] E. A. Behrens, *Eine Charakterisierung der* T-*moduln mit distributivem Untermodulverband bei halbprimären* T (*Archiv. Math.*, t. 8, 1957, p. 265-273).

[11] G. Birkhoff, *Lattice theory* (New-York, revised edition 1948.)

[12] O. Borůvka, *Grundlagen der Gruppoid und Gruppentheorie* (Berlin, 1960).

[13] N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématique*, Livre II : *Algèbre* (*Actualités scientifiques et industrielles*, Hermann, Paris).

[14] N. BOURBAKI, *Eléments de mathématiques*, *Algèbre commutative* (*Actualites scientifiques et industrielles*, Hermann, Paris).

[15] R. H. BRUCK, *A survey of binary systems* (Springer, Berlin, 1958).

[16] H. CARTAN et S. EILENBERG, *Homological Algebra* (Princeton, 1956).

[17] A. CHATELET, *Arithmétique et Algèbre modernes*, t. I et II (Presses Universitaires, Paris, 1956).

[18] C. CHEVALLEY, *Theory of Lie groups* (I, Princeton, 1946, II, Hermann, Paris, 1951; III, Hermann, Paris, 1955).

[19] L. N. CHEVRINE (*en russe*), *Des propriétés structurelles des demi-groupes* (*Acad. Sc. de l'U. R. S. S.*, t. 138, 1961, p. 73-76, 796-798, et *Revue math. de Sibérie*, t. 3, 3, 1962, p. 446-470).

[20] A. H. CLIFFORD et G. B. PRESTON, *The algebraic theory of semi-groups* (*Publ. Amer. Math Soc.*, 1961).

[21] I. S. COHEN, *Commutative rings with restricted minimum condition* (*Duke Math. J.*, t. 17, 1950, p. 27-42).

[22] C. W. CURTIS, *On additive ideal theory in general rings* (*Amer. J. Math.*, t. 74, 1952, p. 687-700).

[23] M.-L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques* (*Cahiers scientifiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1953).

[24] P. DUBREIL, *Algèbre*, t. I, 2e édition (*Cahiers scientifiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1954).

[25] P. DUBREIL et R. CROISOT, *Propriétés générales de la résiduation en liaison avec les correspondances de Galois* (*Collectanea Mathematica, Seminario matematico de Barcelona*, t. 7, 1954, 193-203).

[26] B. ECKMANN et A. SCHOPF, *Ueber injektive Moduln* (*Archiv. der Math.*, t. 4, 1953, p. 75-78).

[27] M. EGO, *Structure d'un demi groupe dont le treillis des sous-demi-groupes est distributif, semi modulaire ou modulaire* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 252, 1961, p. 2490 2492, t. 254, 1962, p. 1723 et t. 255, 1962, p. 1840).

[28] C. FAITH, *Rings with minimum condition on principal ideals* (*Archiv der Math.*, t. 10, 1959, p. 327-330).

[29] E. H. FELLER, *The lattice of submodules of a module over a non commutative ring* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 81, 1956, p. 342-357).

[30] H. FITTING, *Primärkomponentenzerlegung in nicht kommutativen Ringen* (*Math. Ann.*, t. 111, 1935, p. 19-41).

[31] J. FORT, *Quelques proprietés des sous modules tertiaires d'un module sur un anneau non nécessairement commutatif* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959, p. 1748-1750).

[32] J. FORT, *Quelques proprietés des sous-modules tertiaires* (*C. R. Acad. Sc.* t. 254, 1962, p. 1900 1902).

[33] L. FUCHS, *On primal ideals* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 1, 1950, p. 1).

[34] P. Gabriel, *Objets injectifs dans les catégories abéliennes* (*Sém. P. Dubreil, M. L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot*, t. 17, 1959, p. 17-01 à 17-32).

[35] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes* (*Thèse*, Paris, 1961).

[36] M. L. Noronha Galvão, *Sur les idéaux réguliers d'un semi-anneau et sur la théorie de Noether-Krull dans les semi-anneaux* (*Rev. Fac-C*, Lisboa, Série 2 A, *Mat.*, t. 8, 1960).

[37] A. W. Goldie, *The structure of prime rings with maximum condition* (*Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 44, 1958, p. 589-608). *Semi prime rings with maximum condition* (*Proc. London Math. Soc.*, t. 10, 1960, p. 201-220).

[38] O. Goldmann, *Hilbertrings and the Hilbert-Nullstellensatz* (*Math. Zeit.*, t. 54, 1951, p. 136-140).

[39] H. Grell, *Ueber die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie* (*Ber. Math. Tagung, Tübingen*, 1946-1947, p. 67).

[40] P. M. Grundy, *A generalization of additive ideal theory* (*Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, t. 38, 1942, p. 241-279).

[41] J. Guérindon, *Propriétés d'irréductibilité dans les modules, théorie multiplicative*, S-*normalité* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 85, 1957, p.459-522).

[42] D. Hilbert, *Ueber die Theorie der algebraischen Formen* (*Math. Ann.*, t. 36, 1890, p, 473).

[43] K. Iseki, *Sur les demi-groupes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1524-1525).

[44] N. Jacobson, *Structure of rings* (*Amer. Math. Soc. Coll. publ.*, vol. 37, 1956).

[45] R. E. Johnson et E. T. Wong, *Self injective rings* (*Canad Math. Bull.*, t. 2, 1959, p. 167-174). *Quasi injective moduls and irreducible rings* (*J. London Math. Soc.*, t. 36, 1961, p. 260-268).

[46] W. Krull, *Zur Theorie der zweiseitigen Ideale in nicht-kommutativen Bereichen* (*Math. Zeit.*, t. 28, 1927, p. 481-503).

[47] W. Krull, *Idealtheorie* (*Ergebnisse der Math.*, Berlin, 1935).

[48] W. Krull, *Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensiontheorie* (*Math. Zeit.*, t. 54, 1951, p. 354-387).

[49] A. G. Kurosh, *Radicals in the theöry of groups* (*Doklady, Acad. of Sciences of the U. S. S. R.*, t. 141, 1961, p. 784-792).

[50] J. Lambek, *On the structure of semi-prime rings and their rings of quotients* (*Canad. J. Math.*, t. 13, 1961, p. 392-417).

[51] P. Lefebvre, *Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes* (*Ann. di Matematica pura ed applicata*, t. 59, p. 77-164).

[52] L. Lesieur, *Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaîne* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 83, 1955, p. 161-193).

[53] L. LESIEUR et R. CROISOT, *Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif*, I (*Colloque d'Algèbre Supérieure, C. B. R. M., Bruxelles*, 1956, p. 79-121).
Ibid., II (*Math. Ann.*, t. 134, 1958, p. 458-476).
Ibid., III (*Acad. Royale de Belgique*, t. 44, 1958, p. 75-93).

[54] L. LESIEUR et R. CROISOT, *La notion de résiduel essentiel* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 246, 1958, p. 357-360).

[55] L. LESIEUR et R. CROISOT, *Une propriété caractéristique des idéaux tertiaires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 246, 1958, p. 517-520).

[56] L. LESIEUR et R. CROISOT, *Sur les anneaux premiers noethériens à gauche* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 76, 1959, p. 161-183).

[57] L. LESIEUR et R. CROISOT, *Sur la dualité dans les* ($\mathfrak{T}$)*-algébres. Application aux anneaux, aux modules, aux demi-groupes* (*Ann. Scient. E. N. S.*, t. 77, 1960, p. 175-195).

[58] L. LESIEUR et R. CROISOT, *Cœur d'un module* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 252, 1961, p. 52-54 et *Journ. de Math. pures et appliquées*, (*à paraître*).

[59] E. S. LYAPIN, *Semi-groups* (Moscou, 1960).

[60] N. H. MAC COY, *Prime ideals in general rings* (*Amer. J. Math.*, t. 71, 1948, p. 823-833).

[61] E. MATLIS, *Injective modules over noetherian rings*, (*Pacif. J. of Math.*, t. 8, 1958, p. 511-528).

[62] G. MAURY, *La condition « intégralement clos » dans quelques structures algèbriques* (*Ann. Scient. E. N. S.*, t. 68, 1961, p. 31-100).

[63] E. NOETHER, *Idealtheorie in Ringbereichen* (*Math. Ann.*, t. 83, 1921, p. 24-66).

[64] V. ORTIZ, *Sur une certaine décomposition canonique d'un idéal en intersection d'idéaux primaires dans un anneau noethérien commutatif* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959, p. 3385-3387).

[65] B. I. PLOTKIN, *Radicals in group pairs* (*Doklady, Acad. of Sciences of the U. S. S. R.*, t. 140, 1961, p. 1019-1022).

[66] D. REES, *On semi-groups* (*Proc. of the Cambrige Phil. Soc.*, t. 36, 1940, p. 387-400).

[67] P. SAMUEL, *Algèbre locale* (*Mémorial Sc. Math.*, fasc. CXXIII, 1953).

[68] B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra* (4e édit., Springer, Berlin, t. I, 1955 et t. II, 1959).

[69] O. ZARISKI et P. SAMUEL, *Commutative Algebra*, Vol. I (Princeton, 1958).

INDEX TERMINOLOGIQUE.

TABLE DES MATIÈRES.