MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

JEAN BASS

Les fonctions pseudo-aléatoires

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 153 (1962)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1962__153__3_0>

© Gauthier-Villars, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

J. BASS

LES FONCTIONS PSEUDO-ALEATOIRES

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur; H. VILLAT

FASCICULE CLIII

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES
38 - SAINT - MARTIN - D'HÈRES

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, EDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1962

LES FONCTIONS PSEUDO-ALEATOIRES

Par M. J. BASS.

1. **Introduction.** — Il arrive fréquemment en Physique que, en partant de données expérimentales bien simples, on obtienne des phénomènes de structure compliquée. De tels phénomènes se rencontrent, par exemple, en Aérodynamique à propos de la turbulence, en Électricité à propos du bruit de fond. Le dispositif expérimental employé est construit de telle sorte que le phénomène reçoive une quantité d'énergie proportionelle au temps et soit permanent à grande échelle. Mais, à échelle fine, il n'est absolument pas permanent, et présente dans le détail des oscillations très irrégulières qui, bien que relativement petites, jouent un rôle essentiel. Le problème mathématique qui se pose alors est celui de l'étude de fonctions $f(t)$ du temps, permanentes en moyenne, mais compliquées dans le détail. Comment peut-on essayer de représenter de telles fonctions?

La méthode naturelle à laquelle on pense est celle de l'*analyse harmonique*, dont l'objet est de représenter la fonction $f(t)$ par superposition de fonctions circulaires de périodes et d'amplitudes diverses. Cette superposition consiste mathématiquement en une intégrale de Fourier-Stieltjes, qui peut se réduire soit à une série de Fourier, soit à une intégrale de Fourier ordinaire. Mais l'intégrale de Fourier-Stieltjes n'a qu'un champ d'application limité. Comme nous le verrons plus loin, elle est valable seulement dans deux cas:

phénomène amorti dans le temps;

phénomène à forte auto-corrélation temporelle.

Ce dernier cas est celui de la série de Fourier généralisée, dont la somme est une fonction presque-périodique. Les fonctions presque-périodiques sont trop proches des fonctions périodiques pour représenter les phénomènes à faible auto-corrélation, ceux pour lesquels ce qui se passe dans le détail à l'instant t n'a pratiquement pas d'influence sur ce qui se passe à un instant ultérieur suffisamment éloigné. L'analyse harmonique classique laisse donc échapper toute une classe importante de phénomènes naturels.

Comme ces phénomènes se rencontrent fréquemment, on a souvent essayé d'en donner, à défaut de mieux, une représentation approximative par des séries de Fourier. Mais cette représentation n'est guère satisfaisante. C'est à peine un outil de travail provisoire. On obtiendrait une représentation correcte en utilisant des transformées de Fourier de distributions, au sens de L. Schwartz. Encore faudrait-il connaître les types de distributions à employer, et il n'est pas très sûr que cette représentation serait très maniable.

A défaut de bonnes représentations purement analytiques, on a fait appel au calcul des probabilités et aux fonctions aléatoires. Le rôle fondamental joué par diverses moyennes est une justification *a priori* de l'intérêt de ces méthodes. On considère alors la fonction $f(t)$ comme le résultat d'une épreuve sur une fonction aléatoire stationnaire, et, par le jeu d'un principe ergodique, on interprète les moyennes temporelles comme des moyennes stochastiques. Ce mode de représentation est excellent en principe, et permet un maniement commode des moyennes. Il est aussi bien adapté aux phénomènes à forte auto-corrélation qu'aux phénomènes à faible auto-corrélation. Mais il ne donne pas en général d'indications bien précises sur les propriétés de la fonction $f(t)$ elle-même. Or ces propriétés sont essentielles lorsque $f(t)$ est assujettie à vérifier une équation fonctionnelle, ce qui est le plus souvent le cas. En outre, surtout s'il s'agit d'une équation fonctionnelle non linéaire, la représentation de $f(t)$ par une fonction aléatoire est parfois tout à fait inefficace.

Le problème se pose donc de donner une image directe des fonctions $f(t)$ ayant les propriétés qualitatives suivantes:

Ce sont des fonctions du temps qui représentent un phénomène permanent et indéfini à grande échelle;

Comme elles sont très irrégulières dans le détail, on pourrait songer à les représenter par des fonctions discontinues. Mais l'irrégularité n'est pas une propriété locale. Elle a bien un caractère global, qu'il est d'ailleurs difficile de spécifier d'une façon mathématique précise. Nous verrons qu'elle se traduit par des oscillations illimitées dans le temps. La période de ces oscillations définit ce qu'on peut appeler l'échelle fine du phénomène. Mais il faut bien distinguer cette irrégularité des propriétés mathématiques locales de $f(t)$. En pratique, il y a presque toujours intérêt à traiter $f(t)$ comme une fonction continue et dérivable.

$f(t)$ sera surtout caractérisée par ses propriétés moyennes. Les moyennes attachées à $f(t)$ ne doivent plus présenter cette irrégularité à échelle fine, qui se place entre les propriétés locales et les propriétés macroscopiques. En particulier, la fonction de corrélation de $f(t)$ en deux instants t et $t+h$ doit être une fonction continue de h, qui s'amortit très vite lorsque h augmente, sans présenter d'oscillations irrégulières.

L'ensemble de ces propriétés conduit à un type de fonctions auxquelles on a donné le nom de *fonctions pseudo-aléatoires* et dont on trouvera la définition précise au paragraphe 6.

L'analyse harmonique élémentaire de ces fonctions est encore mal connue. On sait peu de choses sur la structure de leurs transformées de Fourier. Par contre leur *analyse harmonique énergétique* est très simple et de structure classique. Leur fonction de corrélation apparaît en général comme transformée de Fourier d'une fonction ordinaire (densité spectrale). Elles ont donc, en ce sens, un spectre continu. Mais il faut bien se rappeler que la notion de distribution d'énergie suivant les fréquences nous renseigne fort incomplétement sur la manière dont $u(t)$ est décomposable en une somme d'harmoniques. Il faut soigneusement distinguer l'analyse spectrale énergétique et l'analyse spectrale élémentaire.

On trouvera dans le présent fascicule un exposé d'ensemble des propriétés actuellement connues des fonctions pseudo-aléatoires. Certains des résultats obtenus ont fait l'objet de publications antérieures (en particulier [3], où sont développées les bases de la théorie). Les applications aux équations aux dérivées partielles sont résumées dans [4] et [8] et ont fait l'objet de divers exposés oraux (Faculté des Sciences de Grenoble, avril 1960; Congrès international de Mécanique appliquée de Stresa, septembre 1960). On a surtout développé ici la comparaison entre les fonctions presque-périodiques et les fonctions pseudo-aléatoires, les techniques de transformation des fonctions pseudo-aléatoires, et l'application de ces fonctions à la résolution de deux équations aux dérivées partielles, l'une linéaire, l'autre non. On a peu insisté sur l'interprétation arithmétique, et les applications aux méthodes de calcul numérique (méthodes de Monte-Carlo) ont seulement été signalées (§ 10). On trouvera à leur sujet des indications plus complètes dans [7] et [12].

2. **Fonctions de corrélation.** — Soit $f(t)$ une fonction du temps, définie pour des valeurs de t positives et aussi grandes qu'on le désire. $f(t)$ reste

bornée et varie d'une façon irrégulière, en subissant des oscillations nombreuses, non périodiques, mais suggérant l'idée d'une *périodicité qualitative*. Cette fonction représente un certain phénomène naturel, qui évolue en fonction du temps, et dont le procédé générateur implique l'idée de *permanence* macroscopique dans le temps. Un bon exemple d'un tel phénomène est celui de la turbulence dans un écoulement fluide en régime permanent. La fonction $f(t)$ peut représenter une composante, en un point fixé, de la vitesse du fluide. Un autre exemple est constitué par le courant responsable du "bruit de fond" dans un conducteur. Je me propose d'étudier le problème suivant: donner de $f(t)$ une représentation mathématique correcte et utilisable, aussi peu empirique que possible.

La solution de ce problème peut être envisagée sous deux aspects: solution détaillée, solution statistique. La solution statistique est bien naturelle, et elle a parfois été considérée comme la seule possible. En effet la fonction $f(t)$ est très compliquée, et il semble illusoire de chercher à lui donner une forme mathématique précise. D'ailleurs, de faibles variations des causes du phénomène risquent de provoquer localement des perturbations très sérieuses de $f(t)$, et cette instabilité fondamentale semble peu favorable à une représentation mathématique. La méthode statistique remédie partiellement à ces défauts. Elle consiste à associer à $f(t)$ certaines moyennes temporelles mesurables, et possédant le caractère de stabilité qui manque à $f(t)$. Il est évidemment difficile de caractériser complètement $f(t)$ par des moyennes. Mais certaines moyennes élémentaires fournissent sur $f(t)$ des renseignements utiles, quoique partiels. La plus simple est la moyenne proprement dite $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. C'est par hypothèse une constante. On peut toujours supposer que, par une réduction préalable, cette moyenne est nulle:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = 0.$$

Cette réduction étant faite, on introduit une moyenne du second ordre appelée *fonction de corrélation* (ou fonction d'auto-corrélation, ou covariance) de $f(t)$. Si, comme il est commode de le supposer, $f(t)$ est une fonction complexe, la fonction de corrélation $\gamma(h)$ est définie par

$$\gamma(h) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \overline{f}(t)\,f(t+h)\,dt,$$

où $\bar{f}$ est la quantité complexe conjuguée de f. C'est une fonction de l'intervalle de temps h.

Si l'on suppose que $f(t) = 0$ pour $t < 0$, c'est-à-dire que le phénomène considéré débute à l'instant $t = 0$ [1], on voit tout de suite que $\gamma(h)$ a la symétrie hermitienne

$$\gamma(-h) = \bar{\gamma}(h).$$

En particulier, $\gamma(0)$ est réel et non négatif.

L'inégalité de Schwarz montre d'autre part que

$$|\gamma(h)| \leqslant \gamma(0)$$

et que, si $\gamma(h)$ est continue pour $h = 0$, $\gamma(h)$ est continue pour tout h.

Dans la plupart des applications, $\gamma(h)$ a des *propriétés énergétiques*. La quantité

$$\gamma(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt$$

est la densité d'énergie moyenne du phénomène étudié. Cette remarque peut être d'ailleurs bien précisée grâce au théorème suivant (cas particulier du théorème de Bochner): *il existe une fonction $\sigma(\omega)$, monotone non décroissante, à variation totale bornée, telle que*

$$\gamma(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega h} d\sigma(\omega).$$

$\sigma(\omega)$ s'appelle la *fonction spectrale* (énergétique) relative à $f(t)$. Lorsque $\sigma(\omega)$ est continue, on dit que $f(t)$ a un spectre continu (ou spectre de bande).

Si, en un point ω_k, $\sigma(\omega)$ subit un saut σ_k, nécessairement positif, on dit que le spectre possède une raie en ω_k. $\sigma(\omega)$ est la somme d'une fonction continue $\sigma_1(\omega)$ et d'une fonction de sauts, et l'on peut écrire, en séparant le spectre continu et le spectre de raies,

$$\gamma(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega h} d\sigma_1(\omega) + \sum_k \sigma_k \, e^{2i\pi\omega_k h}.$$

Le plus souvent, $\sigma_1(\omega)$ admet une dérivée dont elle résulte par intégration, de sorte que

$$d\sigma_1(\omega) = \sigma_1'(\omega) \, d\omega.$$

---

[1] Dans le cas contraire, il est plus commode d'introduire des moyennes de la forme $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T}$.

La formule précédente réalise *l'analyse harmonique énergétique* du phénomène considéré.

Bien entendu, cette analyse est loin de définir $f(t)$. De très nombreuses fonctions $f(t)$ ont la même fonction de corrélation. Malgré les difficultés qu'on risque de rencontrer, il y a donc intérêt à essayer de trouver une véritable représentation de $f(t)$. L'analyse énergétique pourra alors se faire soit par des mesures expérimentales directes de moyennes, soit par des calculs numériques de moyennes sur la fonction $f(t)$ elle-même. Mais la connaissance de $f(t)$ contiendra plus de renseignements sur le phénomène étudié que celle de $\gamma(h)$. Nous posons donc la question suivante: Quels sont les types de représentation qui puissent *a priori* être valables? C'est une question tout à la fois précise et un peu formelle. Elle est précise, parce que, comme nous allons le voir, la réponse repose sur des bases bien délimitées, et qu'elle conduit à une classification utile des "fonctions oscillantes". Il ne s'agit pas d'interpoler au mieux $f(t)$ sur un intervalle fini, ce qui serait tout à fait illusoire pour une fonction si irrégulière. Il s'agit, à partir de propriétés moyennes bien spécifiées, de trouver les types de fonctions qui sont susceptibles de représenter $f(t)$ d'une façon aussi approfondie qu'il est permis de le demander. Mais cette représentation reste naturellement formelle tant qu'on n'introduit pas les causes détaillées et la nature particulière du phénomène. Nous allons nous limiter à l'étude générale de ces représentations, sans examiner de cas particuliers concrets, et montrer que la structure de la fonction de corrélation $\gamma(h)$ permet de définir et de classer des types de représentation bien différents, et utilisables dans les applications[1].

3. **Intégrales de Fourier-Stieltjes. Fonctions presque-périodiques.** — Si $f(t)$ est exactement périodique, on sait que, moyennant des conditions de régularité mathématique fort générales, $f(t)$ est développable en série de Fourier. Cette affirmation n'est d'ailleurs pas tout à fait exacte, puisque $f(t)$, n'ayant de signification qu'à partir d'un instant initial $t = 0$, ne peut pas être mathématiquement périodique. Mais, si l'on convient par exemple de prolonger fictivement $f(t)$ aux valeurs négatives de t, on peut écrire

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \, e^{2i\pi k\omega t},$$

[1] Nous ne nous occupons pas ici des fonctions $f(t)$ dont la fonction de corrélation n'existe pas, sauf pour $h=0$.

la série étant convergente pour tout t, et les coefficients c_k tendant vers zéro d'autant plus vite que $f(t)$ est plus régulière. On a alors (fig. 1)

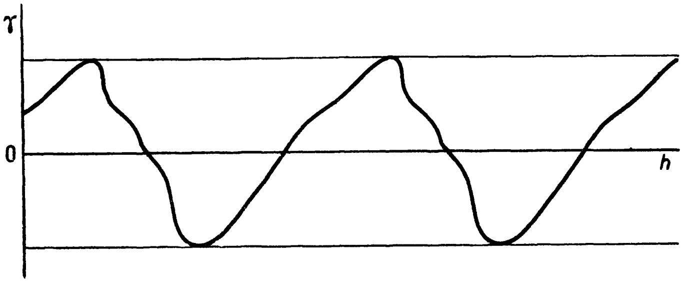


Fig. 1

$$\gamma(h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 e^{2i\pi k\omega h}.$$

Le spectre ne comporte que des raies, et, avec les notations du paragraphe précédent,

$$\omega_k = k\omega, \qquad \sigma_k = |c_k|^2.$$

On voit bien, dans ce cas très simple, les renseignements que la connaissance de la fonction de corrélation $\gamma(h)$ fournit au sujet de $f(t)$. On connaît les modules des coefficients c_k, mais non leurs arguments. $\gamma(h)$ est, comme $f(t)$, une fonction périodique.

L'extension la plus naturelle des séries de Fourier consiste à remplacer les fréquences $k\omega$, multiples d'une fréquence fondamentale ω, par des fréquences quelconques ω_k. Plus généralement, il est souvent indiqué de représenter $f(t)$ par une *intégrale de Fourier-Stieltjes*:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega t}\, d\xi(\omega).$$

$\xi(\omega)$ est une fonction à variation bornée, somme d'une fonction continue $\xi_1(\omega)$ et d'une fonction de sauts $\xi_2(\omega)$ (non nécessairement monotone). $\xi_2(\omega)$ subit, au point ω_k, la variation brusque c_k, et reste constante entre ω_k et ω_{k+1}. Si, comme cela arrive le plus souvent, $\xi_1(\omega)$ admet une dérivée $\xi_2'(\omega)$, on a

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega t}\, \xi_1'(\omega)\, d\omega + \sum_k c_k\, e^{2i\pi\omega_k t}.$$

$f(t)$ est la somme d'une intégrale de Fourier ordinaire, et d'une série de Fourier généralisée. La fonction $\xi_1'(\omega)$ et les nombres c_k doivent vérifier les conditions suivantes: l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |\xi'(\omega)|\,d\omega$ et la série $\sum |c_k|$ sont convergentes.

On sait que, dans ces conditions, l'intégrale de Fourier tend vers zéro lorsque $t \to \infty$. Elle n'est donc pas susceptible, à elle seule, de représenter un phénomène de caractère parmanent, car la permanence s'oppose à ce que $f(t)$ tende vers une limite, sauf bien entendu si $f(t)$ est une constante. D'ailleurs en général l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |\xi_2'(\omega)|^2\, d\omega$ existe, et l'énergie *totale* du phénomène représenté par une intégrale de Fourier ordinaire est finie Donc son énergie moyenne est nulle. On démontre d'une façon précise que, si $\xi_1(\omega)$ est une fonction continue (dérivable ou non), la fonction de corrélation de $f(t)$ est nulle pour tout h, y compris $h = 0$. (Bien entendu le coefficient de corrélation, fonction de corrélation *normée*, n'a aucune raison d'être identiquement nul).

L'existence d'un spectre de raies est donc indispensable pour qu'on puisse représenter par une intégrale de Fourier-Stieltjes un phénomène de caractère permanent, auquel on fournit par unité de temps une quantité finie d'énergie. C'est d'ailleurs la partie discontinue du spectre qui joue le rôle essentiel, et l'on peut se limiter au cas où $\xi(\omega)$ n'a pas de partie continue. On a alors

$$f(t) = \sum_k c_k\, e^{2i\pi\omega_k t}.$$

On dit que $f(t)$ est une *fonction presque-périodique*(²). Elle a pour fonction de corrélation

(²) La définition des fonctions presque-périodiques continues ne fait pas d'habitude appel aux séries d'exponentielles. Elle repose sur une extension naturelle de la notion de période: On dit qu'un ensemble de points sur une droite est relativement dense s'il existe un nombre positif l tel que tout intervalle de longueur l contienne des points de l'ensemble.

On dit d'autre part que h est un nombre de translation de $f(t)$, associé à ε, si l'inégalité $|f(t+h)-f(t)| < \varepsilon$ a lieu pour tout t réel.

On dit alors qu'une fonction continue $f(t)$ est *presque-périodique* si l'ensemble de ses nombres de translation, pour tout ε donné, est relativement dense.

Si $f(t)$ est périodique de période T, chaque période est évidemment un nombre de translation, associé à n'importe quel ε, et il y a une période, multiple de T, dans tout intervalle de longueur l au moins égale à T.

On démontre que toute série de la forme $\sum_k c_k\, e^{2i\pi\omega_k t}$, où la série $\Sigma |c_k|$ est convergente, a pour somme une fonction presque-périodique continue.

$$\gamma(h) = \sum_k |c_k|^2 e^{2i\pi\omega_k h}.$$

La série $\Sigma|c_k|^2$ est alors convergente. Réciproquement, si la série $\Sigma|c_k|^2$ est convergente, la suite des sommes

$$S_N(t) = \sum_{|k|<N} c_k e^{2i\pi\omega_k t}$$

converge en moyenne quadratique, lorsque $N \to \infty$, vers une fonction $S(t)$ presque-périodique et les c_k sont les coefficients de Fourier de $S(t)$. $S(t)$ n'est pas nécessairement continue. Elle l'est si la série $\Sigma|c_k|$ est convergente.

Cette formule généralise immédiatement la formule relative aux fonctions périodiques.

On remarque surtout que $\gamma(h)$ est, comme $f(t)$, une fonction presque-périodique. Sa seule particularité est d'avoir des coefficients positifs, qui mesurent les sauts, nécessairement positifs, de la fonction spectrale *énergétique* $\sigma(\omega)$. Il importe de bien distinguer l'*analyse harmonique élémentaire* de $f(t)$ et *son analyse harmonique énergétique*. Nous allons voir que l'analyse élémentaire de Fourier n'est pas toujours valable, tout au moins à l'aide d'intégrales de Fourier-Stieltjes, alors que l'analyse harmonique énergétique reste toujours la même: $\gamma(h)$ est toujours une intégrale de Fourier-Stieltjes définie par une fonction $\sigma(\omega)$ non décroissante

$$\gamma(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega h} d\sigma(\omega).$$

4. **Discussion. Première extension.** — La formule

$$f(t) = \sum c_k e^{2i\pi\omega_k t}$$

permet de représenter un phénomène dont la fonction de corrélation $\gamma(h)$ a la propriété essentielle de ne tendre vers aucune limite lorsque l'intervalle h augmente indéfiniment. Dans la mesure où il est permis d'employer le langage statistique, le coefficient de corrélation entre $f(t)$ et $f(t+h)$ subit des fluctuations, et il existe des valeurs de h aussi grandes qu'on le désire pour lesquelles il prend, sinon la valeur 1, du moins des valeurs aussi voisines qu'on le désire de 1. $f(t)$ représente donc alors un phénomène très particulier possédant une forte hérédité, qui ne s'affaiblit pas au cours du temps. Ce qui se passe à l'instant t a une forte influence sur ce qui se passe à certains instants ultérieurs, même très éloignés. En résumé, l'intégrale de Fourier-Stieltjes convient soit aux phénomènes ayant une énergie *totale* finie, soit aux phénomènes à forte hérédité (forte corrélation interne).

Ces derniers phénomènes sont d'ailleurs exceptionnels. En général, ce qui se passe à l'instant t a d'autant moins d'influence sur ce qui se passe à l'instant $t+h$ que h est plus grand. Comment peut-on représenter les fonctions $f(t)$ dont la fonction de corrélation $\gamma(h)$ est *continue*, non nulle pour $h = 0$ (*é*nergie *moyenne* finie) et *nulle à l'infini* (affaiblissement progressif de la corrélation)?

Dans le cas presque-périodique, $f(t)$ est une combinaison linéaire (série) de fonctions fondamentales de type *exponentiel* $e^{2i\pi\omega t}$. Essayons d'agir sur la forme de la fonction de corrélation $\gamma(h)$ en modifiant l'exposant de l'exponentielle. Remplaçons la fonction linéaire ωt, polynome du premier degré, par un polynome $\varphi(t)$ de degré $\nu \geqslant 2$. A $f(t) = e^{2i\pi\omega t}$ correspond la fonction de corrélation sinusoïdale $\gamma(h) = e^{2i\pi\omega h}$. Calculons la fonction de corrélation de

$$f(t) = e^{2i\pi\varphi(t)}.$$

Elle est évidemment égale à 1 pour $h = 0$. Si $h \neq 0$, on a

$$\gamma(h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2i\pi[\varphi(t+h)-\varphi(t)]}\, dt.$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^T e^{2i\pi[\varphi(t+h)-\varphi(t)]}\, dt.$$

L'exposant $\varphi(t+h)-\varphi(t)$ est un polynome degré 1 au moins. On peut choisir T_0 assez grand pour qu'il soit monotone dès que $t > T_0$. Le changement de variable $\varphi(t+h)-\varphi(t) = u$ est alors possible, et l'on démontre facilement que l'intégrale

$$\int_{T_0}^{\infty} e^{2i\pi[\varphi(t+h)-\varphi(t)]}\, dt$$

est convergente. Par suite la *moyenne* $\frac{1}{T}\int_0^T$ tend vers zéro. $\gamma(h)$ *est une fonction discontinue*, égale à 1 si $h = 0$, à 0 si $h \neq 0$ (fig. 2).

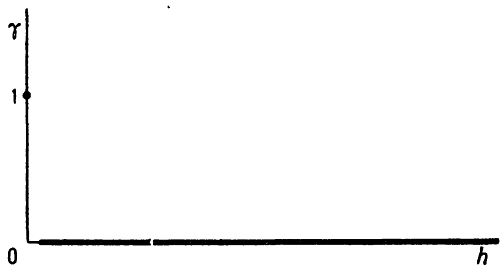


Fig. 2

Ce mode de représentation ne semble donc pas utilisable. On conçoit difficilement qu'un phénomène naturel irrégulier et non amorti puisse avoir une fonction de corrélation de ce type.

5. **Passage aux fonctions pseudo-aléatoires** ([2], [3]). — Pour obtenir, un mode de représentation plus intéressant, et répondant aux conditions imposées:

$\gamma(h)$ continue, non identiquement nulle, et tendant vers zéro avec $1/h$, nous allons faire subir à la fonction fondamentale $e^{2\pi i\varphi(t)}$ une opération qui présentera une certaine analogie avec celle qui a permis d'introduire en Physique la constante de Planck.

En Mécanique statistique classique, l'énergie E d'un oscillateur harmonique linéaire est une grandeur aléatoire, et sa valeur moyenne est donnée par la formule

$$\frac{\int_0^\infty \mathrm{E}\, e^{-\frac{\mathrm{E}}{k\mathrm{T}}}\, d\mathrm{E}}{\int_0^\infty e^{-\frac{\mathrm{E}}{k\mathrm{T}}}\, d\mathrm{E}} = k\mathrm{T},$$

où T est la température de l'oscillateur. La densité de probabilité, qui est égale à $e^{-\frac{\mathrm{E}}{k\mathrm{T}}}$ (à un facteur constant près), comporte en exposant une fonction continue et linéaire.

Quantifier, c'est remplacer E, moyennant un choix convenable des unités, par sa *partie entière*, que nous noterons $\hat{\mathrm{E}}$.

On remplace donc la fonction linéaire $\frac{E}{kT}$ par une fonction en escalier, dont la croissance générale reste linéaire (fig. 3).

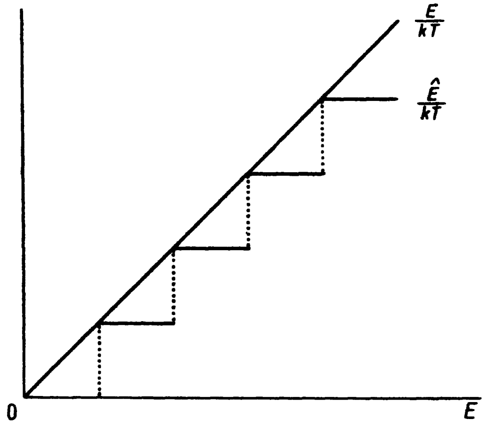


Fig. 3

La valeur moyenne de E devient

$$\mathfrak{M}\mathrm{E} = \frac{\int_0^\infty e^{-\frac{\hat{\mathrm{E}}}{k\mathrm{T}}} d\mathrm{E}}{\int_0^\infty e^{-\frac{\hat{\mathrm{E}}}{k\mathrm{T}}} d\mathrm{E}} = \frac{\sum_{n=0}^\infty n e^{-\frac{n}{k\mathrm{T}}}}{\sum_{n=0}^\infty e^{-\frac{n}{k\mathrm{T}}}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{k\mathrm{T}}} - 1}$$

En Physique, le „choix convenable des unités" est naturellement essentiel, et l'intervalle „unité" est en réalité le produit ε de la fréquence par la constante de Planck. En remplaçant 1 par ε partout où il le faut, on trouve

$$\mathfrak{M}\mathrm{E} = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{k\mathrm{T}}} - 1},$$

formule qui se réduit à $\mathfrak{M}\mathrm{E} = k\mathrm{T}$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Revenons maintenant au problème de la représentation des fonctions $f(t)$ par combinaisons linéaires de fonctions fondamentales $e^{2i\pi\varphi(t)}$, fonctions exponentielles à exposant imaginaire pur. Si $\varphi(t)$ est un polynome du premier degré, la représentation obtenue est utile, mais ses applications sont trop restreintes; si $\varphi(t)$ est un polynome de degré > 1, les fonctions correspondantes ne semblent pas bien intéressantes. *Remplaçons alors t par sa partie entière $\hat{t}$* et étudions les fonctions[3]

$$f(t) = e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}.$$

L'intérêt de cette transformation repose sur le théorème général suivant [3]:

Si la fonction de corrélation $\gamma(h)$ de $f(t)$ *existe pour les valeurs entières de h, elle existe pour tout h, est continue et varie linéairement entre $h = n$ et $h = n+1$.*

En effet

$$\gamma(h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{f}(t) f(h+t)\, dt.$$

On ne modifie pas la limite en choisissant pour T un entier N. Alors

$$\int_0^N = \sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+1}.$$

Si l'on pose $t = n+s$, on a

---

(3) La notation $e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$ est la plus commode. Mais on peut aussi représenter $f(t)$ par la série

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z(t-n)\, e^{2i\pi\varphi(n)},$$

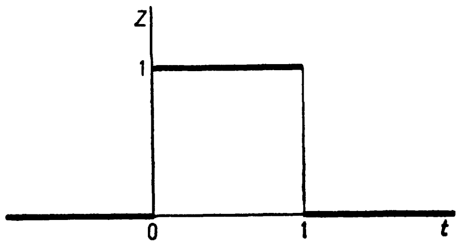


Fig. 4

où $Z(t)$ est la fonction égale à 1 si $0 < t < 1$, et à 0 pour les autres valeurs de t (fig. 4). On a d'ailleurs

$$Z(t) = Y(t) - Y(t-1),$$

où $Y(t)$ est la fonction d'Heaviside, nulle par $t < 0$, égale à 1 pour $t > 0$. Notons enfin qu'on peut représenter $Z(t)$ par une intégrale de Fourier élémentaire:

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi tz}\, \frac{e^{2i\pi tz} - 1}{2i\pi z}\, dz.$$

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE 38 - SAINT-MARTIN-D'HÈRES
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES

$$\hat{t} = n$$

$$\widehat{t+h} = n + \widehat{s+h} = n + \hat{h} \qquad \text{si} \quad s < 1 - \mathfrak{h},$$
$$= n + \hat{h} + 1 \qquad \text{si} \quad s > 1 - \mathfrak{h},$$

la notation $\mathfrak{h}$ désignant $h - \hat{h}$, partie fractionnaire de h. Donc

$$\gamma(h) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_0^1 ds \sum_{n=0}^{N-1} \bar{f}(n) f(n + \widehat{s+h})$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1-\mathfrak{h}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{f}(n) f(n + \hat{h}) + \lim_{N\to\infty} \frac{\mathfrak{h}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{f}(n) f(n + \hat{h} + 1)$$

$$= (1 - \mathfrak{h}) \gamma(\hat{h}) + \mathfrak{h}\gamma(\hat{h} + 1),$$

$\hat{h}$ étant entier, cette formule exprime bien le théorème annoncé. Appliquons-le à la fonction $f(t) = e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$, où $\varphi(t)$ est un polynome de degré ν.

Premier cas ($\nu = 1$): $\varphi(t) = \omega t$. Pour $h = \hat{h}$ entier, on a

$$\gamma(h) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi\omega(n+\hat{h})} e^{-2i\pi\omega n} = e^{2i\pi\omega\hat{h}}.$$

Si donc h est entier, la fonction de corrélation de $e^{2i\pi\omega\hat{t}}$ a la même valeur que celle de $e^{2i\pi\omega t}$. Mais, entre les valeurs entières de h, celle de $e^{2i\pi\omega\hat{t}}$ varie linéairement, alors que celle de $e^{2i\pi\omega t}$ varie d'une façon sinusoïdale (fig. 5).

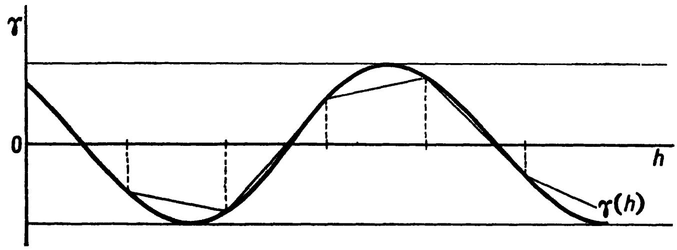


Fig. 5

$\gamma(h)$ ne tend donc vers aucune limite lorsque $h \to \infty$. Son comportement est voisin de celui de la fonction de corrélation sinusoidale, et, comme fonction de base, $e^{2i\pi\omega\hat{t}}$ ne semble pas présenter un grand intérêt[4].

---

[4] M. Bertrandias a fait remarquer que cette fonction est presque-périodique. Mais elle n'est pas continue. Ses coeffients de Fourier c_k tendent vers zéro comme $\frac{1}{k}$. La série $\Sigma|c_k|^2$ converge, mais non la série $\Sigma|c_k|$.

Deuxième cas ($\nu \geqslant 2$): $\varphi(t)$ est un polynome de la forme

$$\varphi(t) = At^{\nu} + A_1 t^{\nu-1} + \dots + A_{\nu},$$

de sorte que

$$\varphi(\hat{t}) = A\hat{t}^{\nu} + A_1 \hat{t}^{\nu-1} + \dots + A_{\nu}.$$

Si les coefficients $A, A_1, \dots, A_{\nu-1}$ sont tous des *nombres rationnels*, on peut les mettre sous la forme $\frac{B}{P}, \frac{B_1}{P}, \dots, \frac{B_{\nu-1}}{P}$, où P est le plus petit commun multiple des dénominateurs des fractions irréductibles $A, A_1, \dots, A_{\nu-1}$.

Si l'on remplace t par $t+P$, c'est-à-dire $\hat{t}$ par $\hat{t}+P$, on remplace $\varphi(\hat{t})$ par $\varphi(\hat{t})$+entier, et l'on ne modifie pas $f(t) = e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$.

Dans ce cas, $f(t)$ *est une fonction périodique de période* P. Sa fonction de corrélation est périodique. Ce cas n'est pas nouveau en soi. Il est cependant intéressant en ce sens qu'il fait apparaître les fonctions périodiques comme cas limite des fonctions pseudo-aléatoires dont il va être maintenant question.

Supposons ensuite que l'un au moins des coefficients du polynome $\varphi(t) - \varphi(0)$ soit irrationnel. Si A_k est le premier coefficient irrationnel, on peut écrire

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t),$$

avec

$$\varphi_1(t) = At^{\nu} + \dots + A_{k-1} t^{\nu-k+1},$$

$$\varphi_2(t) = A_k t^{\nu-k} + \dots + A_{\nu}.$$

$\varphi_1(t)$ est un polynome à coefficients rationnels. On a alors

$$f(t) = e^{2i\pi\varphi_1(\hat{t})}\, e^{2i\pi\varphi_2(\hat{t})}.$$

Le premier facteur est une fonction périodique de t. Seul le second facteur présente des caractères nouveaux. Or $\varphi_2(t)$ est un polynome dont le premier coefficient (coefficient du terme de degré le plus élevé) est irrationnel. On peut toujours se ramener à ce cas, comme nous le verrons au paragraphe 7. Nous supposerons donc dans la suite que $\varphi(t)$ *est un polynome de degré* $\nu \geqslant 2$, *dans lequel le coefficient* A *de* t^{ν} *est irrationnel.*

On démontre alors les résultats suivants [3]:

THÉORÈME. — *La fonction égale à* $f(t) = e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$ *pour* $t > 0$, *à* 0 *pour* $t < 0$, *a une valeur moyenne nulle. Sa fonction de corrélation* $\gamma_0(h)$ *existe, est nulle si* $|h| \geqslant 1$, *et est égale à* $1 - |h|$ *si* $|h| \leqslant 1$ (fig. 6).

Pour démontrer ce théorème, on utilise trois lemmes importants, que nous allons d'abord examiner:

LEMME 1. — *Si la fonction de corrélation d'une certaine fonction $f(t)$ existe et tend vers zéro lorsque $h \to \infty$, alors $\gamma(h)$ a par rapport à h une moyenne nulle.*

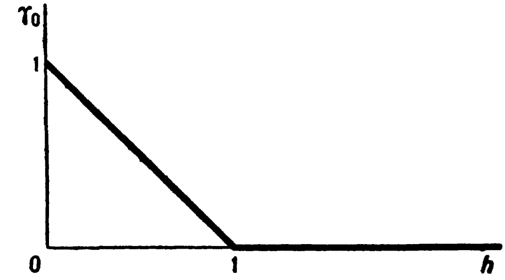


Fig. 6

En particulier, si $\gamma(h)$ s'annule pour tout $h > h_0$, où h est un nombre positif fixé, alors la moyenne de $\gamma(h)$ est nulle.

En effet, si H_1 est un nombre fixé,

$$\frac{1}{H}\int_0^H \gamma(h)\,dh = \frac{1}{H}\int_0^{H_1} \gamma(h)\,dh + \frac{1}{H}\int_{H_1}^H \gamma(h)\,dh.$$

Lorsque H tend vers l'infini, le premier terme du second membre tend vers zéro.

D'autre part, on peut choisir H_1 suffisamment grand pour que, si $h > H_1$, on ait $|\gamma(h)| < \varepsilon$. La seconde intégrale est donc en module inférieure à

$$\varepsilon \frac{1}{H}\int_{H_1}^H dh < \varepsilon.$$

Elle est arbitrairement petite.

LEMME 2. — *Si la fonction de corrélation $\gamma(h)$ de $e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$ s'annule pour les valeurs entières non nulles de h, alors $\gamma(h)$ est identiquement nulle pour $h \geqslant 1$.*

Cela résulte immédiatement des propriétés d'interpolation linéaire de $\gamma(h)$.

LEMME 3. — *La moyenne de $\gamma(h)$ par rapport à h est réelle, non négative, et au moins égale au carré du module de la moyenne de $f(t)$.*

La démonstration de ce théorème se trouve dans [3]. Nous n'allons pas la donner en détail. Nous allons seulement en indiquer les grandes lignes.

Comme nous l'avons signalé à la fin du paragraphe 2, on peut mettre $\gamma(h)$ sous la forme

$$\gamma(h)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega h}\,d\sigma(\omega),$$

où $\sigma(\omega)$ est une fonction réelle non décroissante à variation totale bornée. $\sigma(\omega)$ n'est pas en général continue, et l'on démontre d'abord que le saut de $\gamma(h)$ à l'origine, c'est-à dire la quantité

$$\gamma(+0)-\gamma(-0)=\lim_{\varepsilon\to 0}[\gamma(\varepsilon)-\gamma(-\varepsilon)] \qquad (\varepsilon>0)$$

est égal à la valeur moyenne de $\gamma(h)$, c'est-à-dire à

$$\lim_{H\to\infty}\frac{1}{H}\int_0^H \gamma(h)\,dh.$$

Le saut en question est d'ailleurs réel et non négatif. Par suite la moyenne de $\gamma(h)$ est elle même réelle et non négative.

Si maintenant m désigne la moyenne de $f(t)$, on pose

$$f(t)=m+f'(t).$$

Entre les fonctions de corrélation $\gamma(h)$ et $\gamma'(h)$ de $f(t)$ et de $f'(t)$, on a la relation

$$\gamma(h)=|m|^2+\gamma'(h).$$

Or la fonction $\gamma'(h)$ a les mêmes propriétés que la fonction $\gamma(h)$. Sa moyenne est réelle et non négative. Par suite, la moyenne de $\gamma(h)$ est au moins égale à $|m|^2$. C'est le résultat annoncé.

De ces trois lemmes, ou déduit facilement la démonstration du théorème. Tout revient à la proposition suivante:

La fonction de corrélation $\gamma(h)$ de $e^{2i\pi\hat{\varphi}(t)}$ est nulle pour les valeurs entières et positives de h.

En effet, si d'abord $\nu=2$, on a

$$\varphi(t)=At^2+Bt+C.$$

A un facteur constant près, $\gamma(p)$ est égale à la moyenne de

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{4i\pi Apn}.$$

Un calcul élémentaire de progressions géométriques montre que cette moyenne est nulle.

Si maintenant $\nu \geqslant 2$, on procède par récurrence. On suppose que pour *tout* polynome φ du type considéré et de degré au plus égal à $\nu - 1$, la moyenne

$$m = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum e^{2i\pi\varphi(n)}$$

soit nulle.

Si φ est un polynome de degré ν, la fonction de corrélation

$$\gamma(p) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi[\varphi(n+p)-\varphi(n)]}$$

est la moyenne attachée à un polynome $\varphi(t+p)-\varphi(t)$ de degré $\nu - 1$. Par hypothèse, elle est nulle. Par conséquent, $\gamma(h)$ a une moyenne nulle, et, d'après le lemme *3*, la fonction $e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$ a une moyenne nulle. Toute fonction de la forme $e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$ attachée à un polynome de degré ν a donc une moyenne nulle, et en particulier la fonction de corrélation relative à un polynome de degré $\nu+1$ est nulle. C'est bien ce qu'on voulait démontrer.

On remarquera que la moyenne de $f(t)$ est égale à

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi\varphi(n)}$$

et que la fonction de corrélation de $f(t)$, pour un écart h égal à un *entier* p, est égale à

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi[\varphi(n+p)-\varphi(n)]}.$$

Les deux moyennes ainsi écrites ont été étudiées par H. Weyl en 1916 [19].

Les théorèmes énoncés ci-dessus sont l'équivalent, en un langage différent, des théorèmes de H. Weyl, relatifs aux suites équiréparties, et dont voici la substance:

Soit x_n une suite de nombres compris entre 0 et 1. Considérons les N premiers termes $x_1, \ldots, x_N$ de la suite. Soit N′ le nombre de ceux de ces termes qui appartiennent à un intervalle arbitraire (α, β) intérieur à (0, 1). Si lorsque $N \to \infty$, le rapport $\frac{N'}{N}$ tend vers une limite égale à la longueur $\beta - \alpha$ de l'intervalle, alors la suite x_n est dite *équirépartie ou uniformément dense* sur le segment (0, 1). Les théorèmes de H. Weyl s'énoncent de la façon suivante;

a. *Pour que la suite* $x_n = \varphi(n)$ *soit équirépartie sur* (0, 1) *modulo* 1, *il faut et il suffit que, quel soit l'entier* $l \neq 0$, *on ait*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi l \varphi(n)} = 0.$$

b. *Si* $\varphi(t) = At^\nu + \ldots + A_\nu$ *est un polynome de degré* $\nu \geqslant 1$, *dont le coefficient* A *est irrationnel, la suite* $\varphi(n)$ *est équirépartie modulo* 1.

Les fonctions $e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$ sont donc essentiellement différentes de la fonction $e^{2i\pi\omega t}$. La dernière est périodique et a pour fonction de corrélation une fonction sinusoïdale. Au contraire, $e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$ n'est pas périodique et sa fonction de corrélation $\gamma_0(h)$ est nulle à l'infini.

La fonction $e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$ ne donne pas la solution générale du problème posé, qui consistait à trouver les fonctions telles que la corrélation entre $f(t)$ et $f(t+h)$ soit d'autant plus faible que h est plus grand. Mais elle fournit cependant un exemple fondamental de fonction de cette nature, qui va nous servir de base pour en construire d'autres plus générales. Elle va jouer dans la théorie un rôle analogue à celui de $e^{2i\pi\omega t}$ dans la théorie des fonctions presque-périodiques, avec cette différence qu'elle dépend d'un *polynome arbitraire* $\varphi(t)$. C'est une fonction en escalier, qui change de valeur pour chaque valeur entière de t. Les valeurs qu'elle prend sont des nombres complexes de module 1. Elle ne peut pas prendre toutes les valeurs de module 1, mais ses valeurs sont denses sur le cercle unité, et même uniformément denses.

6. **Fonctions pseudo-aléatoires** [*3*]. — *On appelle d'une façon générale fonction pseudo-aléatoire une fonction* $f(t)$ *complexe, bornée et nulle pour* $t < 0$, *dont la fonction de corrélation* $\gamma(h)$ *existe, est continue, n'est pas nulle pour* $h = 0$ *et tend vers zéro lorsque* $h \to \infty$. Dans la théorie des fonctions pseudo-aléatoires, $e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$ joue un rôle analogue à celui de $e^{2i\pi\omega t}$ dans la théorie des fonctions presque-périodiques et plus généralement dans celle des intégrales de Fourier-Stieltjes.

Puisque $\gamma(h)$ tend vers zéro à l'infini, *la fonction spectrale énergétique σ d'une fonction pseudo-aléatoire est continue.*

En effet, d'après le lemme *1* du paragraphe *5*, $\gamma(h)$ a une moyenne nulle, et, d'après la démonstration du lemme *3*, est continue à l'origine. Mais on a aussi

$$\gamma(h)\, e^{2i\pi\omega_0 h} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi(\omega+\omega_0)h}\, d\sigma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega h}\, d\sigma(\omega-\omega_0).$$

Puisque $\gamma(h)$ tend vers zéro à l'infini, il en est de même de $\gamma(h)e^{2i\pi\omega_0 h}$. La même démonstration montre que $\sigma(\omega-\omega_0)$ est continue pour $\omega-\omega_0=0$, c'est-à-dire pour toute valeur ω_0 de ω.

Dire que la fonction $\sigma(\omega)$ est continue, cela ne veut pas nécessairement dire qu'elle possède une dérivée. Il peut arriver que $\sigma(\omega)$ soit une *mesure singulière*. $\sigma(\omega)$ est alors une fonction continue, non décroissante, dont la dérivée est nulle pour presque toutes les valeurs de ω. On ne peut pas reconstituer $\sigma(\omega)$ par intégration de sa dérivée.

Lorsque $\sigma(\omega)$ est une mesure singulière, le comportement de l'intégrale

$$\gamma(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega h}\, d\sigma(\omega)$$

n'est soumis à aucune règle générale. Suivant les cas, $\gamma(h)$ tend vers zéro, ou subit des oscillations comprises entre des limites finies.

Pour construire des exemples de fonctions $\gamma(h)$ de cette sorte, on utilise un intermédiaire probabiliste [16] [18]. Lorsque la variation totale de $\sigma(\omega)$ est égale à 1, on peut interpréter $\gamma(h)$ comme la fonction caractéristique d'une variable aléatoire ω ayant $\sigma(\omega)$ pour fonction de répartition, c'est-à-dire comme la valeur moyenne, au sens stochastique, de $e^{2i\pi\omega h}$, où h est un paramètre réel. Supposons que ω soit la somme d'une infinité de variables aléatoires indépendantes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \ldots$, la variable ω_n prenant les deux valeurs $\frac{1}{\varrho^n}$ et $-\frac{1}{\varrho^n}$ avec les probabilités $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. ω_n a pour fonction caractéristique

$$\frac{1}{2}\left[e^{\frac{2i\pi h}{\varrho^n}} + e^{-\frac{2i\pi h}{\varrho^n}}\right] = \cos\frac{2\pi h}{\varrho^n}.$$

La fonction caractéristique de la somme $\Sigma\omega_n$ est donc représentée par le produit infini

$$\gamma(h) = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2\pi h}{\varrho^n}.$$

On démontre que la distribution ainsi construite est bien singulière, et que:

a. si ϱ est un entier supérieur à 2, $|\gamma(h)|$ a une limite supérieure positive;

b. si ϱ est un nombre rationnel non entier supérieur à 2, $\gamma(h)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{h}$.

On voit par ces exemples qu'il n'est pas absurde d'englober dans la définition des fonctions pseudo-aléatoires celles dont la fonction spectrale énergétique est singulière. Mais on ne connaît pas encore d'exemples de telles fonctions pseudo-aléatoires. Les cas où $\sigma(\omega)$ est absolument continue sont d'ailleurs probablement les plus importants pour les applications. Nous rencontrerons uniquement dans la suite des fonctions pseudo-aléatoires dont la fonction de corrélation est de la forme

$$\gamma(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega h}\,\sigma'(\omega)\,d\omega, \qquad \text{avec} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |\sigma'(\omega)|\,d\omega < \infty.$$

On sait que, dans ces conditions, $\gamma(h)$ tend vers zéro lorsque $h \to \infty$ (théorème de Riemann-Lebesgue).

Lorsque $\gamma(h)$ est la fonction de corrélation $\gamma_0(h)$ de la fonction fondamentale $e^{2i\pi\hat{\varphi}(t)}$, on vérifie facilement que

$$\gamma_0(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega h}\,\frac{\sin^2\pi\omega}{\pi^2\omega^2}\,d\omega,$$

d'où

$$\sigma'(\omega) = \frac{\sin^2\pi\omega}{\pi^2\omega^2}.$$

Il résulte immédiatement des lemmes du paragraphe 5 que. *la moyenne d'une fonction pseudo-aléatoire est nulle.*

Lorsque $t \to \infty$, une fonction pseudo-aléatoire $f(t)$ ne peut tendre vers aucune limite. Car, si une telle limite existait, elle serait nécessairement nulle. Donc $|f(t)|^2$ tendrait vers zéro et aurait une moyenne nulle, ce qui est contraire à la définition.

Une fonction pseudo-aléatoire réelle ne peut garder un signe constant. D'une façon précise, elle doit subir au moins un changement de signe (et par suite une infinité) dans tout intervalle $t > t_0$, si grand que soit t_0. En effet, supposons que $f(t)$ soit réelle et non négative pour $t > t_0$. Comme $f(t)$ est bornée, il existe un nombre M tel que

$$0 \leqslant f(t) \leqslant M.$$

Il en résulte que

$$0 \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt \leqslant M\,\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|\,dt,$$

$f(t)$ étant pseudo-aléatoire, sa moyenne est nulle. Donc, lorsque $T \to \infty$, $f(t)$ a une moyenne quadratique nulle, et n'est pas pseudo-aléatoire.

Comme les fonctions presque-périodiques, les fonctions pseudo-aléatoires présentent des oscillations non amorties, alternativement positives et négatives, puisque la moyenne est nulle.

Remarque — Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions pseudo-aléatoires.

La fonction $F(t)$ qui est égale à

$$f(t) \text{ si } t \geqslant 0,$$
$$g(-t) \text{ si } t < 0$$

est définie pour toute valeur de t, et non pas seulement pour $t > 0$. On peut considérer, par extension de la définition, que c'est une *fonction pseudo-aléatoire définie pour* $-\infty < t < \infty$ et *ne se réduisant pas* à zéro pour $t < 0$. Cela veut dire que la fonction de corrélation de $F(t)$ est continuée, positive à l'origine et nulle à l'infini. Calculons en effet cette fonction de corrélation. Nous la définissons par

$$\gamma_F(h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \bar{F}(t)F(t+h)\,dt.$$

Si par exemple $h > 0$, $\gamma_F(h)$ est la limite, lorsque $T \to \infty$, de

$$\frac{1}{2T}\int_0^T \bar{f}(t)f(t+h)\,dt + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{-h} \bar{g}(-t)g(-t-h)\,dt + \frac{1}{2T}\int_{-h}^{0} \bar{g}(-t)f(t+h)\,dt.$$

Au facteur $\frac{1}{2}$ près, les deux premiers termes tendent respectivement vers $\gamma_f(h)$ et $\gamma_g(-h)$, où γ_f et γ_g sont les fonctions de corrélation de f et g. Le troisième tend vers zéro. Donc

$$\gamma_F(h) = \frac{1}{2}\,[\gamma_f(h)+\gamma_g(-h)] = \frac{1}{2}\,[\gamma_f(h) + \bar{\gamma}_g(h)].$$

Si en particulier f et g ont même fonction de corrélation, F a pour fonction de corrélation la partie réelle de γ. Si γ est réelle, $\gamma_F = \gamma$.

En étendant la définition des fonctions pseudo-aléatoires à l'intervalle $-\infty < t < \infty$, on confirme le parallélisme de structure entre ces fonctions et les fonctions presque-périodiques.

7. **Transformations des fonctions pseudo-aléatoires. Propriétés d'orthogonalite** ([*3*], [*4*], [*5*], [*6*], [*7*]). — La théorie générale des fonctions pseudo-

aléatoires n'est pas encore achevée. On connaît cependant diverses transformations qui, à partir de fonctions pseudo-aléatoires particulières ou générales, permettent de construire de nouvelles fonctions pseudo-aléatoires. Nous allons les passer en revue.

Pour construire une fonction *presque-périodique*, on fait des combinaisons linéaires des fonctions exponentielles de base $e^{2i\pi\alpha t}$, pour diverses valeurs de $\alpha . \varphi(t)$ étant un *polynome donné*, de degré $\nu \geqslant 2$, et dont le coefficient du terme en t^{ν} est irrationnel, faisons de même une combinaison linéaire des fonctions $e^{2i\pi\widehat{\varphi(\alpha_k t)}}$ pour diverses valeurs non nulles de α_k. Nous obtenons la fonction

$$f(t) = \sum_{k} c_k \, e^{2i\pi\widehat{\varphi(\alpha_k t)}}$$

Si la série $\Sigma|c_k|$ est convergente, on démontre que $f(t)$ est pseudo-aléatoire. Elle a pour fonction de corrélation

$$\gamma(h) = \sum |c_k|^2 \gamma_0(\alpha_k h),$$

$$\begin{aligned} \gamma_0(\mathrm{h}) &= 1-|h| \qquad \text{si} \quad |h| \leqslant 1, \\ &= 0 \qquad\qquad \text{si} \quad h \geqslant 1, \end{aligned}$$

Cette formule est tout à fait comparable à celle qui donne la fonction de corrélation d'une fonction presque-périodique. $e^{2i\pi\widehat{\varphi(t)}}$ correspond à $e^{2i\pi\omega t}$, et $\gamma_0(h)$, fonction de corrélation de $e^{2i\pi\widehat{\varphi(t)}}$, à $e^{2i\pi h}$, fonction de corrélation de $e^{2i\pi t}$. Mais, pour les fonctions pseudo-aléatoires, la fonction de corrélation est très différente de la fonction initiale. L'opération de moyenne simplifie les fonctions. A une fonction oscillante et irrégulière, elle fait correspondre une fonction plus régulière et qui tend vers zéro à l'infini Au contraire, la fonction de corrélation d'une fonction presque-périodique est presque-périodique.

Les fonctions obtenues par ce procédé ont une *fonction de corrélation convexe*, car c'est une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions $\gamma_0(\alpha_k h)$ convexes.

Les relations entre la fonction $f(t)$ et les coefficients c_k sont les mêmes pour les fonctions pseudo-aléatoires et pour les fonctions presque-périodiques. On peut en effet démontrer que

$$\begin{aligned} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2i\pi[\widehat{\varphi(\alpha_k t)} - \widehat{\varphi(\alpha_l t)}]} \, dt &= 0 \qquad \text{si} \quad \alpha_l \neq \alpha_k, \\ &= 1 \qquad \text{si} \quad \alpha_l = \alpha_k. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$c_k = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-2i\pi\varphi(\widehat{a_k t})}\, dt\,.$$

On notera que, bien que $f(t)$ apparaisse comme une somme discrète de termes analogues à des harmoniques, le spectre *énergétique* de $f(t)$ est continu, conformément à une remarque générale déjà faite. On a

$$\gamma(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\pi\omega}{\pi^2\omega^2} \Big[\sum_k |c_k|^2 e^{2i\pi\omega a_k h} \Big] d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega h}\, \sigma'(\omega)\, d\omega$$

avec

$$\sigma'(\omega) = \frac{1}{\pi^2\omega^2} \sum_k |a_k| \cdot |c_k|^2 \sin^2 \frac{\pi\omega}{a_k}\,.$$

On peut naturellement définir des transformées de $e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$ analogues aux intégrales de Fourier-Stieltjes. Considérons la fonction

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\varphi(\widehat{at})}\, d\xi(a)\,.$$

ξ (a) est la somme d'une fonction continue et d'une fonction de sauts. Nous venons d'étudier le cas où la fonction continue est identiquement nulle. Dans le cas général, on peut démontrer un théorème analogue au théorème de décomposition des intégrales de Fourier-Stieltjes:

$f(t)$ est la somme d'une fonction nulle en moyenne quadratique (analogue à l'intégrale de Fourier ordinaire) et d'une fonction pseudo-aléatoire (correspondant à la fonction presque-périodique) attachée à la fonction de sauts de ξ (a).

8. **Combinaisons des fonctions pseudo-aléatoires et des fonctions presque-périodiques** — Commençons par étudier *le produit d'une fonction pseudo-aléatoire par une fonction presque-périodique.*

Considérons d'abord une fonction pseudo-aléatoire du type

$$e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$$

où φ (t) est un polynome de degré $\nu \geqslant 2$.

Soit $g(t)$ une fonction de carré sommable sur $(0,1)$, périodique de période 1. Le produit

$$f(t) = e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}\, g(t)$$

est pseudo-aléatoire et a pour fonction de corrélation

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \int_0^{1-h} \bar{g}(s)\, g(s+h)\, ds \qquad \text{si} \quad 0 \leqslant h \leqslant 1, \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si} \quad h \geqslant 1. \end{aligned}$$

En effet

$$\gamma(h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2i\pi[\varphi(\widehat{t+h})-\varphi(\hat{t})]}\, g(t+h)\, \bar{g}(t)\, dt.$$

On peut remplacer T par un entier N, et $\int_0^N$ par $\sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+1}$. En posant $t = s + n$, et en tenant compte de ce que $g(t)$ a pour période 1, on obtient

$$\gamma(h) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_0^1 \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi[\varphi(n+\widehat{s+h})-\varphi(n)]}\, g(s+h)\, \bar{g}(s)\, ds.$$

D'après un raisonnement déjà utilisé, on a

$$\begin{aligned} \gamma(h) = \int_0^{1-\check{h}} g(s+h)\, \bar{g}(s) \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi[\varphi(n+\hat{h})-\varphi(n)]} \\ + \int_{1-\check{h}}^1 g(s+h)\, \bar{g}(s) \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi[\varphi(n+\hat{h}+1)-\varphi(n)]}. \end{aligned}$$

Or la moyenne

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi[\varphi(n+\hat{h})-\varphi(n)]},$$

fonction de corrélation de $e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$, est nulle, sauf pour $\hat{h} = 0$, c'est-à-dire $0 \leqslant h < 1$. De même la moyenne

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi[\varphi(n+\hat{h}+1)-\varphi(n)]},$$

est nulle quel que soit h. Donc $\gamma\ (h)$ est nul pour $h \geqslant 1$, et égal à

$$\int_0^{1-h} g(s+h)\,\bar{g}(s)\,ds \qquad \text{si} \quad 0 \leqslant h \leqslant 1.$$

Exemple: $g(t) = e^{2i\pi t}$. On trouve, pour $0 \leqslant h \leqslant 1$,

$$\gamma(h) = \int_0^{1-h} e^{-2i\pi s}\, e^{2i\pi(s+h)} ds = e^{2i\pi h}(1-h).$$

Si $g(t)$ est une fonction périodique de période différente de l'unité, les résultats sont différents et moins généraux.

D'une façon générale, on démontre facilement que si $\varphi(t)$ est un polynôme de degré $\nu \geqslant 3$, *la fonction $f(t)$ produit de $e^{2i\pi\varphi(t)}$ par une fonction presque-périodique continue de la forme*

$$\sum_k c_k e^{2i\pi\omega_k t}$$

est pseudo-aléatoire. Si les différences $\omega_k - \omega_l$ ne sont jamais entières, la fonction de corrélation de $f(t)$ est égale à

$$\gamma(h) = \gamma_0(h) \cdot \sum |c_k|^2 e^{2i\pi\omega_k h},$$

produit des fonctions de corrélation des deux facteurs.

Si certaines différences $\omega_k - \omega_l$ sont entières, $\gamma(h)$ a une structure plus compliquée, qu'on déduit des résultats précédents par des combinaisons convenables.

On remarquera que ces théorèmes ne sont valables que pour des fonctions particulières de la forme $e^{2i\pi\varphi(t)}$, où φ est un polynome. On peut cependant énoncer un théorème bien simple et valable sans ces restrictions: *si $f(t)$ est pseudo-aléatoire et a pour fonction de corrélation $\gamma(h)$, $f(t)\, e^{2i\pi\omega t}$ est pseudo-aléatoire et a pour fonction de corrélation $\gamma(h)\, e^{2i\pi\omega h}$.*

Etudions maintenant *la somme d'une fonction pseudo-aléatoire quelconque $f(t)$ et d'une fonction presque périodique*

$$g(t) = \sum c_k e^{2i\pi\omega_k t}, \qquad \sum |c_k| < \infty.$$

Formons la fonction de corrélation de

$$f(t) + \sum c_k e^{2i\pi\omega_k t}.$$

C'est la moyenne de

$$\bar{f}(t) f(t+h) + \bar{g}(t)\, g(t+h) + \sum c_k e^{2i\omega_k h} \bar{f}(t)\, e^{2i\pi\omega_k t} + \sum \bar{c}_k f(t+h)\, e^{-2i\pi\omega_k t}.$$

Puisque la fonction $f(t)\ e^{-2i\pi\omega_k t}$ est pseudo-aléatoire, elle a une moyenne nulle. Il en est de même pour $f(t+h)\ e^{-2i\pi\omega_k(t+h)}$, car une translation n'affecte pas les moyennes. Donc la moyenne de $f(t+h)\ e^{-2i\pi\omega_k t}$ est nulle. Par suite.

THÉORÈME, — *La somme d'une fonction pseudo-aléatoire $f(t)$ et d'une fonction presque-périodique continue $g(t)$ n'est ni pseudo-aléatoire ni presque-périodique. Sa fonction de corrélation est la somme d'un terme à spectre continu, correspondant à $f(t)$, et d'un terme à spectre de raies, correspondant à $g(t)$. Le produit $\overline{f}(t)\ g(t+h)$ a une moyenne nulle.*

9. **Transformation par convolution des fonctions pseudo-aléatoires.** — La convolution permet de transformer une fonction pseudo-aléatoire *quelconque* en une fonction pseudo-aléatoire. A partir de fonctions connues, à corrélation convexe, elle permet donc de construire des fonctions nouvelles, dont la fonction de corrélation n'est pas nécessairement convexe.

THÉORÈME. — *Si $g(t)$ est une fonction pseudo-aléatoire, et si $\mu(a)$ est une fonction réelle, à variation totale bornée sur* $(0,+\infty)$ $\left[\int_0^\infty |d\mu(a)| < \infty\right]$, *alors*

$$f(t) = \int_0^t g(t-a)\, d\mu(a)$$

est une fonction pseudo-aléatoire.

Si en particulier $d\,\mu(a) = K(a)da$, où $K(a)$ est une fonction bornée et localement intégrable, $f(t)$ est continue.

Démonstration. — Par définition, $g(t)$ est nulle si $t < 0$, et $g(t-a)$ est nulle si $a > t$. On peut donc remplacer $\int_0^t$ par $\int_0^\infty$, et même par $\int_{-\infty}^\infty$, en convenant de prolonger $\mu(a)$ par 0 pour $a < 0$.

La fonction de corrélation de $f(t)$ est

$$(9.1) \qquad \gamma(h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \iint_P g(t-a)\, g(t+h-\beta)\, d\mu(a)\, d\mu(\beta)$$

$$= \iint_P d\mu(a)\, d\mu(\beta) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \overline{g}(t-a)\, g(t+h-\beta)\, dt,$$

l'intégrale double étant étendue à tout le plan P.

On voit apparaître la fonction de corrélation γ_g de g, et l'on a

$$(9.2) \qquad \gamma(h) = \iint_P \gamma_g(h+a-\beta)\, d\mu(a)\, d\mu(\beta).$$

γ_g tend vers zéro à l'infini. C'est d'ailleurs une fonction bornée. Soit B la borne supérieure de $|\gamma_g|$, M la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |d\mu(\alpha)|$.

D'après les hypothèses faites sur $\mu(\alpha)$, il existe un nombre A tel que

$$\int_{|\alpha|>A} |d\mu(\alpha)| < \varepsilon.$$

Si l'on intègre dans la partie du plan extérieure au carré $|\alpha| < A$, $|\beta| < A$, on a donc une contribution inférieure à B M ε.

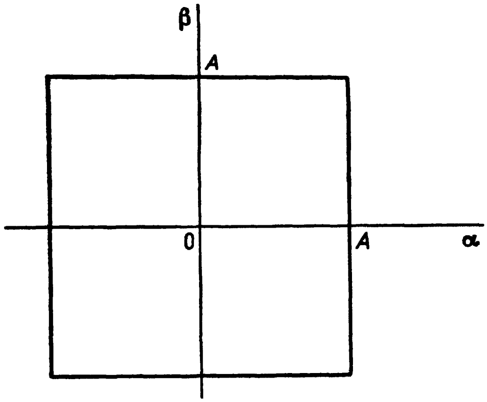


Fig. 7

A étant ainsi choisi, en fonction de ε, il faut majorer la portion de l'intégrale intérieure au carré. Dans ce carré, α et β sont bornés. On peut disposer de h de telle sorte que, quels que soient α et β dans le carré,

$$|\gamma_g(h+\alpha-\beta)| < \varepsilon,$$

car γ_g tend vers zéro à l'infini.

Finalement, on peut choisir h assez grand pour que

(9.3) $$|\gamma(h)| < \mathrm{BM}\varepsilon + \varepsilon.$$

Il en résulte bien que $\gamma(h)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{h}$.

La continuité de $\gamma(h)$ à l'origine se démontre d'une façon analogue.

Enfin $f(t)$ est bien nulle si $t < 0$. En effet, α étant positif, $t-\alpha$ est alors négatif et $g(t-\alpha)$ est nulle dans tout l'intervalle d'intégration.

f(t) est donc pseudo-aléatoire.

Supposons maintenant que $\mu(a)$ admette une dérivée $K(a)$, bornée, localement intégrable et absolument intégrable entre 0 et $+\infty$. On a d'abord

$$f(t) = \int_0^t g(a)\,K(t-a)\,da, \tag{9.4}$$

d'où

$$f(t+h) - f(t) =$$

$$\int_0^t g(a)\,[K(t+h-a) - K(t-a)]\,da + \int_t^{t+h} g(a)\,K(t+h-a)\,da.$$

$|g|$ étant bornée, on voit tout de suite qu'on peut choisir h assez petit pour que la seconde intégrale soit rendue aussi petite qu'on le désire.

Si G est une borne supérieure de $|g(a)|$, on a, pour une valeur fixée de t,

$$\left|\int_0^t |g(a)|\,[K(t+h-a) - K(t-a)]\,da\right| \leqslant G \int_0^t \Big|K(t+h-a) - \tag{9.5}$$
$$- K(t-a)\Big|\,da.$$

Divisons l'intervalle $(0, t)$ en $n+1$ intervalles partiels. On peut trouver une fonction $L(a)$, constante dans chacun de ces intervalles, telle que, pour des valeurs suffisamment grandes de n, on ait

$$\int_0^t \Big|K(t-a) - L(a)\Big|\,da < \varepsilon. \tag{9.6}$$

Le changement de a en $a-h$ montre que, si h est suffisamment petit,

$$\int_0^t \Big|K(t+h-a) - L(a-h)\Big|\,da < Ah + \varepsilon, \tag{9.7}$$

où A est un nombre qui ne dépend ni de h ni de ε.

D'autre part, $L(a)-L(a-h)$ est nul sauf au voisinage des n points de discontinuité de $L(a)$. Il existe donc un nombre B tel que

$$\int_0^t \Big|L(a-h) - L(a)\Big|\,da < Bnh. \tag{9.8}$$

Finalement,

$$\int_0^t \Big|K(t+h-a) - K(a-h)\Big|\,da < 2\varepsilon + Ah + Bnh. \tag{9.9}$$

Le choix de n dépend de ε. n étant choisi, on détermine h de façon que $nh < \varepsilon$, et par suite $h < \varepsilon$. L'intégrale (9.9) est alors inférieure à $(2+A+B)\,\varepsilon$. Elle est arbitrairement petite, ce qui démontre le théorème: lorsque la fonction $\mu(a)$ admet une dérivée $K(a)$, localement intégrable et absolument intégrable sur $(0, \infty)$, la fonction

$$f(t) = \int_0^t g(t-a)\,K(a)\,da, \tag{9.10}$$

où $g(t)$ est une fonction pseudo-aléatoire quelconque, est une *fonction pseudo-aléatoire continue.*

C'est ce qui se passe en particulier lorsque $g(t)$ est de la forme

$$g(t) = e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \gamma_g(h) &= 1 - |h| \qquad \text{si} \quad h \leqslant 1, \\ &= 0 \qquad\qquad\ \ \text{si} \quad h \geqslant 1. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\gamma(h) = \iint_D [1 - |h + a - \beta|]\,K(a)\,K(\beta)\,da\,d\beta,$$

D étant le domaine défini par (fig. 8):

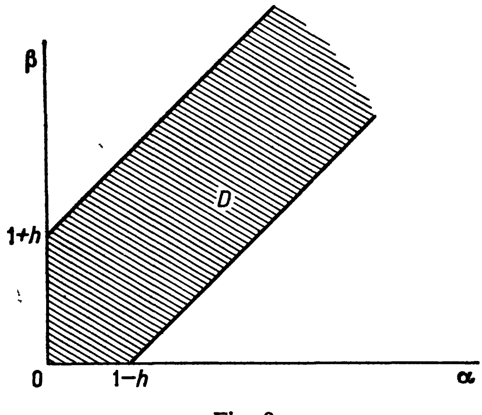


Fig. 8

$$|h + a - \beta| < 1, \qquad a > 0, \qquad \beta > 0$$

Fonction spectrale de $f(t)$

$$\text{Si } f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\alpha)\,d\mu(\alpha),$$

on voit d'abord que

$$\gamma(h) = \int\int \gamma_g(h + \alpha - \beta)\, d\mu(\alpha)\, d\mu(\beta),$$

l'intégrale étant étendue au plan des α, β, et γ_g désignant la fonction de corrélation de $g(t)$. Cette fonction de corrélation se met sous la forme

$$\gamma_g(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega h}\, d\delta_g(\omega).$$

si l'on pose

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\omega\alpha}\, d\mu(\alpha),$$

on obient

$$\gamma(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega h} |R(\omega)|^2 d\delta_g(\omega).$$

La fonction spectrale de $f(t)$ est donc définie par:

$$\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} |R(\omega')|^2 d\delta_g(\omega'),$$

ou, plus simplement par

$$d\delta(\omega) = |R(\omega)|^2 d\delta_g(\omega).$$

10. **Relations entre les fonctions pseudo-aléatoires, le calcul des probabilités et l'arithmétique.** — Considérons la fonction pseudo-aléatoire fondamentale

$$f(t) = e^{2i\pi\varphi(\hat{t})},$$

où $\varphi(t)$ est un polynome de degré $\nu \geqslant 2$ ayant au moins un coefficient irrationnel à partir du terme en t^2.

La moyenne temporelle de $f(t)$ s'exprime sous les deux formes suivantes:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}\, dt \quad \text{et} \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} e^{2i\pi\varphi(n)}.$$

De même la fonction de corrélation de $f(t)$ a, pour les valeurs entières p de l'accroissement h, l'expression suivante:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} e^{2i\pi[\varphi(n+p)-\varphi(n)]}.$$

Les deux moyennes apparaissent comme des moyennes d'exponentielles complexes. Elles sont d'ailleurs nulles (sauf pour $p = 0$). Et ces résultats sont des cas particuliers d'un théorème général de H. Weyl, qui concerne les suites équiréparties.

Nous avons donné au paragraphe 5 l'énoncé du théorème de H. Weyl. Rappelons que, *pour qu'une suite x_n comprise entre* 0 *et* 1 *soit équirépartie, il faut et il suffit que, quel que soit l'entier l, on ait*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} e^{2i\pi l x_n} = 0 .$$

Ce théorème est entièrement équivalent au théorème suivant [19]:

Pour qu'une suite x_n comprise entre 0 *et* 1 *soit équirépartie, il faut et il suffit que, quelle que soit la fonction $f(x)$, intégrable entre* 0 *et* 1, *on ait*

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} f(x_n) .$$

Le premier théorème exprime que, si l'on associe à x_n une fonction égale à $e^{2i\pi l x_n}$ lorsque $n < t < n+1$, cette fonction a une moyenne nulle. Il permet de démontrer que la partie décimale du polynome $\varphi(n)$ est équirépartie, et d'en déduire les propriétés des fonctions pseudo-aléatoires.

Le second théorème est un théorème ergodique, qu'on peut énoncer de la façon suivante:

La moyenne arithmétique d'une fonction $f(x_n)$, où x_n est équirépartie au sens arithmétique, est égale à la moyenne stochastique de la variable aléatoire $f(x)$, où x est une variable aléatoire uniformément distribuée entre 0 *et* 1.

La suite des valeurs x_n joue donc, du point de vue des moyennes, le même rôle qu'une succession de valeurs tirées au sort entre 0 et 1. Il faut cependant noter que, par tirage au sort, on peut trouver n'importe quelle valeur, alors que l'ensemble des valeurs de x_n, *dense* sur (0, 1), est cependant bien défini à l'avance et *dénombrable*. En outre, l'*ordre* de succession de ces valeurs, malgré son irrégularité d'aspect statistique, est imposé et prévisible. Mais par ailleurs, il existe de nombreuses manières de construire des suites équiréparties arithmétiques, toutes équivalentes à une variable aléatoire équirépartie.

A ces quelques réserves près, la "variable pseudo-aléatoire" $f(x_n)$ joue bien le rôle d'une variable aléatoire. En particulier, la fonction

$$\int_0^1 e^{2i\pi\lambda f(x)}\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} e^{2i\pi\lambda f(x_n)}$$

est bien la fonction caractéristique de la variable aléatoire $f(x)$, fonction d'une variable aléatoire à distribution uniforme.

A la notion d'indépendance stochastique entre deux variables aléatoires correspond la notion de distribution uniforme dans un carré, et cette notion s'étend sans difficulté à plus de deux dimensions. Les suites x_n et y_n, individuellement équiréparties, seront considérées comme indépendantes si la suite à deux dimensions (x_n, y_n) est équirépartie dans le carré $0<x<1$, $0<y<1$, la définition du mot "équirépartie" étant la même que pour une dimension, à condition de remplacer "intervalle arbitraire (α, β)" par "domaine quarrable arbitraire intérieur au carré".

Pour définir une suite équirépartie sur (0, 1), on a généralement intérêt à partir d'une suite $\varphi(n)$, où φ est une fonction donnée, et à définir x_0 comme la partie décimale de la fonction $\varphi(n)$ [différence entre $\varphi(n)$ et sa partie entière], c'est-à-dire à poser

$$x_n = \varphi(n) \pmod 1, \qquad \text{ou} \qquad x_n = \underset{\smile}{\varphi(n)}.$$

Pour caractériser une suite à deux dimensions équirépartie dans le carré, on utilise le théorème suivant, dû à H. Weyl:

Pour que la suite de fonctions $\varphi(n)$, $\psi(n)$ soit équirépartie modulo 1 *dans le carré, il faut et il suffit que la suite $l_1\varphi(n)+l_2\psi(n)$ soit équirépartie modulo* 1, *quels que soient les entiers l_1 et l_2 non simultanément nuls.*

Ce théorème n'a pas d'équivalent immédiat en langage probabiliste. Voici comment on peut l'interpréter.

Posons

$$x_n = \varphi(n) \pmod 1, \qquad y_n = \psi(n) \pmod 1, \qquad z_n = \varphi(n) + \psi(n) \pmod 1.$$

La suite x_n+y_n n'est pas équirépartie, pas plus que ne l'est la somme de deux variables aléatoires indépendantes équiréparties. Mais z_n est une suite équirépartie. Un calcul élémentaire montre que la différence

$$u = x_n + y_n - z_n$$

est égale à 0 si

$$0 < x_n + y_n < 1$$

et à 1 si

$$1 < x_n + y_n < 2,$$

ces deux valeurs ayant des probabilités, ou fréquences arithmétiques, égales.

Cette remarque précise la nature de la dépendance stochastique entre le couple (x_n, y_n) et la variable z_n. Du point de vue arithmétique, z_n est une fonction $g(x_n, y_n)$,
égale (fig. 9) à:

$x_n + y_n$ si $0 < x_n + y_n < 1$,
à:
$x_n + y_n - 1$ si $1 < x_n + y_n < 2$.

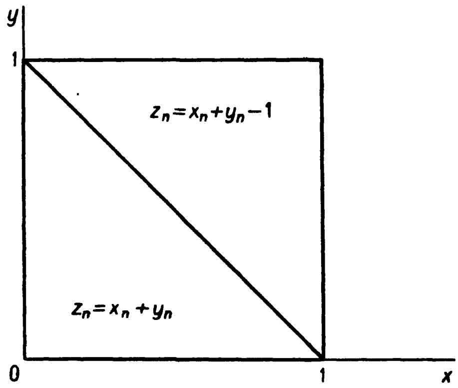


Fig. 9

Si l'on pose $s_n = x_n + y_n$, et si l'on associe à s_n, z_n des variables aléatoires s et z, on voit que:

a. s est la somme de deux variables aléatoires équiréparties;

b. z est une variable aléatoire équirépartie non indépendante de s;

c. la différence $s - z$ prend, avec des probabilités égales, les valeurs 0 et 1.

La méthode arithmétique donne un moyen de construire effectivement la loi de probabilité du couple (s, z). Elle a pour fonction caractéristique:

$$\Theta(\lambda, \mu) = \mathrm{E}e^{i(\lambda s + \mu z)} \quad \text{(moyenne stochastique)},$$

égale à la quantité

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} e^{i[\lambda(x_n+y_n)+\mu z_n]} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} e^{i[\lambda(x_n+y_n)+\mu g(x_n, y_n)]}.$$

Le théorème de H. Weyl, qui s'adapte immédiatement au cas de deux dimensions, exprime cette moyenne par l'intégrale

$$\Theta(\lambda, \mu) = \iint e^{i[\lambda(x+y)+\mu g(x, y)]}\, dxdy,$$

étendue au carré $0<x<1$, $0<y<1$.

Cette intégrale s'écrit,

$$\iint_{D_1} e^{i(\lambda+\mu)(x+y)}\,dx\,dy + e^{-i\mu} \iint_{D_2} e^{i(\lambda+\mu)(x+y)}\,dx\,dy,$$

où D_1 et D_2 sont les triangles indiqués sur la figure 10. On trouve

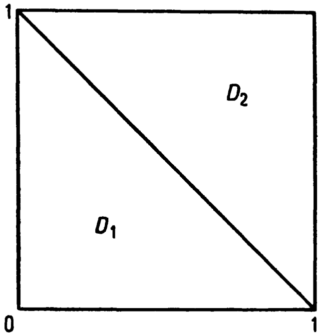


Fig. 10

$$\Theta(\lambda,\mu) = \frac{e^{i\lambda}(e^{i\mu}-1)}{i(\lambda+\mu)} - \frac{(e^{i\lambda}-1)(e^{i(\lambda+\mu)}-1)}{(\lambda+\mu)^2}.$$

Plus généralement, le recours à une représentation arithmétique permet de résoudre le problème suivant:

On donne $p+1$ variables aléatoires $x_1, \ldots, x_p, z$ ayant même loi de probabilité. $x_1, \ldots, x_p$ sont indépendantes. On demande de définir entre $(x_1, \ldots, x_p)$ et z une dépendance stochastique telle que $x_1+\ldots+x_p-z$ ne prenne que des valeurs entières. On notera que, lorsque $p\to\infty$, la variable $\dfrac{x_1+\ldots+x_p-mp}{\sqrt{p}}$, où m est la valeur moyenne commune des x_i, tend vers une variable normale.

Remarque. — L'analogie entre les variables aléatoires équiréparties et les suites arithmétiques équiréparties peut avoir une utilisation pratique. Le théorème de H. Weyl, appliqué par exemple aux intégrales doubles, s'énonce de la façon suivante:

Pour que la suite (x_n, y_n) soit équirépartie dans le carré C $(0<x<1, 0<y<1)$, il faut et il suffit que, pour toute fonction $f(x, y)$, définie dans C et intégrable au sens de Riemann, on ait

$$\iint_C f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n,y_n).$$

Or ce théorème fournit une méthode de *calcul numérique* des intégrales doubles, applicable si l'on connaît des suites équiréparties, ce qui est le cas. On peut par exemple prendre pour x_n et y_n deux polynomes $\varphi(n)$, $\psi(n)$, définis modulo 1 et indépendants. Le choix le plus simple est celui de polynomes du premier degré,

$$\varphi(n) = An, \qquad \psi(n) = Bn \qquad (\text{mod } 1),$$

A et B étant deux nombres irrationnels entre lesquels il n'existe aucune relation linéaire à coefficients entiers.

On a là une transcription arithmétique de ce qu'on appelle en calcul des probabilités la *méthode de Monte-Carlo* (dans le cas très simple du calcul des intégrales multiples). Elle est habituellement présentée sous la forme suivante:

Soit x et y deux variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées entre 0 et 1. L'intégrale

$$I = \iint\limits_{C} f(x,y)\, dxdy$$

est la moyenne stochastique de la fonction $f(x, y)$ de ces deux variables aléatoires. Si l'on considère maintenant une suite de variables aléatoires x_k, y_k, indépendantes et uniformément réparties entre 0 et 1 (résultat d'une série d'épreuves successives sur x et y), la moyenne arithmétique des N variables aléatoires $f(x_0, y_0)$, $f(x_1, y_1)$, ..., $f(x_{N-1}, y_{N-1})$ tend en probabilité (et aussi presque sûrement), vers la moyenne stochastique de $f(x, y)$, c'est-à-dire vers l'intégrale I. Si l'on connaît une succession de valeurs numériques qui puissent être considérées comme résultats d'épreuves sur une variable aléatoire uniformément distribuée sur (0,1), c'est-à-dire une "table de nombres aléatoires", on peut calculer l'intégrale I avec une bonne précision.

Malheureusement, les tables habituelles de nombres aléatoires ne présentent pas toujours toutes les garanties désirables, et les tests statistiques employés pour vérifier leur valeur ne sont pas irréprochables. La transcription arithmétique de la méthode de Monte-Carlo semble échapper à de telles objections. Son défaut actuel est que, du point de vue théorique, on ne connaît qu'un petit nombre de théorèmes sur les suites arithmétiques équiréparties. On se heurte assez vite à des difficultés non résolues dès qu'on se propose en particulier d'évaluer la précision de la méthode. Quelques indications sont données à ce sujet dans [7, 12].

11. **Fonctions pseudo-aléatoires et fonctions aléatoires.** — Lorsqu'on rencontre en physique une fonction du temps, définie pour tout $t>0$, et ayant l'aspect des fonctions que nous appelons „pseudo-aléatoires", on la traite souvent comme une fonction aléatoire. Nous allons sommairement analyser les rapports entre ces deux notions.

Une fonction aléatoire est un ensemble de fonctions, comme une variable (ou nombre) aléatoire est un ensemble de valeurs. Ce que fournit l'expérience, c'est le résultat d'une épreuve, plus ou moins prolongée, sur la fonction aléatoire, c'est-à-dire l'une des fonctions de cet ensemble. On peut donc considérer une fonction pseudo-aléatoire comme le résultat d'une épreuve faite sur une fonction aléatoire. Une telle conception ne sera d'ailleurs utile que s'il s'agit bien de fonctions d'apparence très irrégulière, dont la forme suggère l'idée de statistique. Cette idée statistique est alors traduite en langage arithmétique, grâce aux propriétés plus ou moins fines des nombres irrationnels.

Lorsqu'il s'agit de *fonctions aléatoires stationnaires*, on sait que, moyennant quelques hypothèses générales, on peut faire état du principe ergodique: toute moyenne stochastique sur la fonction (c'est-à-dire sur un ensemble convenablement pondéré de fonctions) est égale à la moyenne temporelle équivalente prise sur un échantillon quelconque de la fonction, résultant d'une épreuve.

Comme ce résultat est essentiel dans les applications, nous allons donner à son sujet quelques précisions.

Soit $X(t)$ une fonction aléatoire. On dit que c'est une fonction aléatoire stationnaire (du second ordre) si : 1° les moyennes stochastiques de $X(t)$ et de $[X(t)]^2$ existent et sont indépendantes de t; 2° la covariance

$$\gamma(h) = E\,\overline{X(t)}\,X(t+h)$$

est une fonction de h, et non de t.

La moyenne temporelle

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)\,dt$$

prise sur une épreuve est en général une variable aléatoire. Si le principe ergodique est satisfait, cette moyenne temporelle est en réalité une constante non-aléatoire, qui, sur n'importe quelle épreuve, est égale à la moyenne stochastique $EX(t)$, indépendante de t par hypothèse.

On démontre que la condition de validité du principe ergodique est la suivante:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \gamma(h)\,dh = 0.$$

Elle exprime que, si $X(t)$ a une moyenne stochastique nulle, la moyenne quadratique (ou l'écart-type) de la variable aléatoire $\frac{1}{T}\int_0^T X(t)\, dt$ tend vers zéro avec $\frac{1}{T}$.

Cette condition n'est pas vérifiée dans le cas où $X(t)$ est une constante aléatoire, car la moyenne de la constante sur une épreuve est égale à cette constante elle même. Elle est aléatoire.

Elle est vérifiée par la covariance des fonctions presque-périodiques, lorsque ces fonctions sont nulles en moyenne.

Elle est aussi vérifiée lorsque $\lim_{h\to\infty} \gamma(h) = 0$. Les fonctions aléatoires dont la covariance est identique à celle d'une fonction pseudo-aléatoire satisfont donc au principe ergodique. Sur chaque épreuve, ces fonctions sont pseudo-aléatoires.

On sait définir, par des procédés stochastiques, bien des fonctions aléatoires ayant une covariance donnée de type pseudo-aléatoire. Ces procédés ne permettent malheureusement pas de donner en général une définition mathématique précise de la fonction ordinaire qui est le résultat d'une épreuve sur la fonction aléatoire.

Voici un exemple (5) de fonction aléatoire ayant pour covariance

$$\begin{array}{ccc} 1-|h| & \text{si} & 0 \leqslant h \leqslant 1\,. \\ 0 & \text{si} & h \geqslant 1\,, \end{array}$$

Partons d'un *processus de Poisson* X(t). X(t) est une fonction aléatoire, nulle pour $t<0$, qui prend les valeurs successives 1, 2, ..., n, ... Elle passe d'une valeur à la suivante en subissant un saut d'une unité, l'instant de ce saut étant aléatoire. Les probabilités d'accroissements sur des intervalles de temps disjoints sont indépendantes. Enfin la probabilité pour que $X(t+h)-X(t)$ soit égal à un entier n ($h \geqslant 0$, $n \geqslant 0$) est indépendante de t et égale à

$$\frac{(\lambda h)^n}{n!} e^{-\lambda h},$$

où λ est un paramètre positif que, par un changement d'unité de temps, nous prendrons égal à 1.

(5) Cet exemple m'a été suggéré par M. P. Lévy. On en trouvera d'autres, un peu moins simples, dans [15].

On vérifie que $X(t)$ a pour moyenne (stochastique) t, et que $X^2(t)$ a pour moyenne t^2+t.

Posons

$$X'(t) = X(t)-t\,,$$
$$Y(t) = X'(t+1)-X'(t) = X(t+1)-X(t)-1\,.$$

$X'(t)$ et $Y(t)$ ont une moyenne nulle. Formons la covariance de $Y(t)$

On a

$$\begin{aligned} Y(t)\,Y(t+h) = {} & X'(t+1)\,X'(t+1+h)+X'(t)\,X'(t+h) \\ & -X'(t)\,X'(t+1+h)-X'(t+1)\,X'(t+h)\,. \end{aligned}$$

Tout se ramène à la covariance de $X'(t)$. Or, si $l>0$,

$$X'(t)\,X'(t+l) = X(t)\,X(t+l)-(t+l)X(t)-t\,X(t+l)+t\,(t+l)$$

Pour calculer la moyenne de $X(t)\,X(t+l)$, on remarque que

$$\begin{aligned} E\,X(t)[X(t+l)-X(t)] &= E\,X(t)E[X(t+l)-X(t)] \\ &= E\,X(t)\,X(t+l)-E[X(t)]^2, \end{aligned}$$

soit

$$E\,X(t)\,X(t+l) = tl+t+t^2 \qquad (l>0)\,.$$

Donc

$$\begin{aligned} E\,X'(t)\,X'(t+l) &= tl+t+t^2-(t+l)\,t-t\,(t+l)+t(t+l) \\ &= t\,. \end{aligned}$$

Pour finir le calcul, on doit distinguer deux cas:

1° $0\leqslant h\leqslant 1$: Alors $t+h\leqslant t+1$ et

$$E\,Y(t)\,Y(t+h) = t+1+t-t-(t+h) = 1-h\,;$$

2° $h\geqslant 1$: Alors $t+1\leqslant t+h$, et

$$E\,Y(t)\,Y(t+h) = t+1+t-t-(t+1) = 0\,.$$

La covariance obtenue est bien identique à la fonction de corrélation fondamentale des fonctions pseudo-aléatoires $e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$.

On remarquera que $Y(t)$ prend des valeurs entières, qui changent à des instants aléatoires. Les exemples fondamentaux de fonctions pseudo-aléatoires discontinues sont d'une structure un peu différente: les instants des sauts sont donnés à l'avance, et régulièrement répartis. Ce sont les valeurs de la fonction qui sont, non pas aléatoires, mais distribuées suivant une loi arithmétique d'apparence irrégulière. On sait construire des fonctions pseudo-aléatoires d'une structure différente. La plus simple est la fonction

$$f(t) = e^{i\pi\widehat{\varphi(\hat{t})}}.$$

On démontre [3] que cette fonction est pseudo-aléatoire. Elle reste constante dans chaque intervalle $n<t<n+1$, et prend comme valeur 1 ou —1 suivant que la partie entière de $\varphi(n)$ est paire ou impaire, c'est-à-dire que $\varphi(n)$ est égal à 0 ou à 1 modulo 2. La distribution des valeurs de $\varphi(n)$ modulo 2 est d'ailleurs elle même trés irrégulière, quoique bien déterminée. La fonction $f(t)$ reste donc égale à 1 pendant un certain nombres d'unités de temps, puis à —1 pendant une nouvelle durée, et ainsi de suite. Les instants de ces changements de valeur, tout en appartenant à la suite des entiers, sont répartis d'une façon très irrégulière qui, vue à une échelle suffisante pour que l'unité de temps puisse être considérée comme petite, donne une impression qualitative comparable à celle d'une distribution aléatoire d'instants.

Plus généralement, la fonction

$$e^{\frac{2i\pi}{m}\widehat{\varphi(\hat{t})}}$$

où m est un entier $\geqslant 2$, prend, suivant les valeurs de $\varphi(n)$ modulo m, un nombre fini de valeurs complexes équiréparties aux sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle unité.

12. **Analyse harmonique des fonctions pseudo-aléatoires.** — Il existe une théorie générale de l'analyse harmonique des fonctions aléatoires stationnaires, suivant laquelle toute fonction aléatoire stationnaire $X(t)$ de second ordre se met sous la forme

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega t} d\xi(\omega) \tag{12.1}$$

où $\zeta(\omega)$, *fonction spectrale aléatoire*, a les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} &E\, \overline{d\xi(\omega)}\, d\xi(\omega') = 0 \qquad \text{si } \omega' \neq \omega \\ &E\, |d\xi(\omega)|^2 = d\sigma(\omega), \end{aligned} \tag{12.2}$$

$\sigma(\omega)$ étant une fonction non décroissante à variation totale bornée. L'intégrale (*12*.1) doit être considérée comme limite en moyenne quadratique de sommes de Riemann.

On peut inverser la formule (12-1), c'est-à-dire exprimer $\xi(\omega)$ en fonction de $X(t)$ par le procédé suivant:

Soit $K_\Delta(\alpha)$ la transformée de Fourier de la fonction égale à 1 sur l'intervalle Δ, à 0 en dehors de Δ:

$$K_\Delta(\alpha) = \int_\Delta e^{-2i\pi\alpha s}\, ds. \tag{12.3}$$

On pose

$$\xi_\lambda(\Delta) = \int_{-\lambda}^{\lambda} K_\Delta(\alpha) f(\alpha) d\alpha. \tag{12.4}$$

Lorsque $\lambda \to \infty$, la variable aléatoire $\xi_\lambda(\Delta)$ tend en moyenne quadratique vers une limite $\zeta(\Delta)$, fonction de l'intervalle Δ.

On démontre que, si Δ et Δ' sont deux intervalles disjoints, les variables aléatoires $\xi(\Delta)$ et $\xi(\Delta')$ sont orthogonales, et que

$$E|\xi(\Delta)|^2 = \int_\Delta d\sigma(\omega), \tag{12.5}$$

où $\sigma(\omega)$ est la fonction spectrale énergétique correspondant à $f(t)$.

On retrouve alors la formule (12-1) en posant formellement

$$d\xi(\omega) = \xi(d\omega).$$

Cette théorie repose essentiellement sur les considérations suivantes: Une fonction aléatoire stationnaire de second ordre est définie sur le produit de deux espaces indépendants:

l'espace à une dimension que décrit la variable t;

l'espace de probabilité.

$X(t)$ est donc fonction de deux variables, mais en général on n'écrit pas la seconde, dont la présence se manifeste par la possibilité de prendre des moyennes stochastiques. Si $X(t)$ est de second ordre, cela veut dire que, pour chaque t, $X(t)$ est, relativement à une variable parcourant l'espace de probabilité, une fonction de carré sommable. Il en résulte que les fonctions aléatoires de second ordre constituent un espace vectoriel et que, si $E|X_1(t)|^2$ et $E|X_2(t)|^2$ existent, $E\overline{X_1}(t)X_2(t)$ existe sûrement, sans hypothèse nouvelle.

Si l'on cherche à transposer ces propriétés à des fonctions non aléatoires, on rencontre quelques difficultés dues à ce que ces fonctions ne dépendent effectivement que d'une variable t, qui sert à la fois pour repérer le temps et pour prendre les moyennes.

Désignons par M l'opérateur de moyenne temporelle, défini par

$$M(\ \ ) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\ \ ) dt. \tag{12.6}$$

Considérons l'ensemble P des fonctions bornées $f(t)$ telles que $M|f|^2$ existe. Ce n'est pas un espace vectoriel. Il est en effet facile de trouver deux fonctions appartenant à P, et dont la somme n'admette pas de carré moyen. En voici un exemple.

Considérons la fonction

$$f(t) = e^{i\log t}.$$

On voit, à l'aide d'un changement de variable, que

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{i\log t}dt = \frac{e^{i\log T}}{1+i} = \frac{\cos\log T + i\sin\log T}{1+i}.$$

Lorsque $T \to \infty$, cette expression ne tend vers aucune limite. Dons Mf n'existe pas.

D'autre part $|f|^2 = 1$. Donc $M|f|^2$ existe et a pour valeur 1.

Considérons alors les deux fonctions 1 et $f(t)$. Elles ont toutes les deux un carré moyen. Mais

$$M|1+f(t)|^2 = 2+Mf(t)+M\bar{f}(t)$$

n'existe pas. On voit que deux fonctions peuvent appartenir à l'espace P, sans qu'il en soit de même de leur somme.

Cela n'empêche pas P de contenir des sous-espaces vectoriels, par exemple l'espace des fonctions presque-périodiques. Si f appartient à P, on définit la norme de f par

$$\|f\|^2 = M|f|^2$$

Si f et g appartiennent à un même sous-espace vectoriel E de P, c'est-à-dire si $M(\bar{f}g)$ existe, on pose

$$\|f-g\|^2 = M|f-g|^2.$$

Soit alors $f_1, f_2, \ldots, f_n \ldots$ une suite de fonctions de P appartenant à un même espace vectoriel E. On démontre le théorème suivant [9]:

Si la suite f_n est une suite de Cauchy, c'est-à-dire si, à chaque ε, on peut associer un nombre $n_0(\varepsilon)$ tel que, pour tout couple n, k d'entiers satisfaisant aux inégalités

$$n > n_0(\varepsilon),\ k > n_0(\varepsilon),$$

on ait

$$\|f_n - f_k\| < \varepsilon,$$

alors il existe une fonction de P qui, au sens de la norme choisie, est limite de la suite f_n:

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\| = 0$$

Cette fonction n'est pas nécessairement contenue dans l'espace E choisi, mais, si g est une autre fonction de E, c'est-à-dire si les moyennes $M(\bar{f}_n g)$ existent pour toutes les valeurs de n, la moyenne $M(\bar{f}g)$ existe aussi. On peut ainsi prolonger l'espace E en lui incorporant la fonction f.

La structure des prolongements possibles de l'espace E est d'ailleurs plus précise que ne laisse prévoir cet énoncé. On démontre en effet le théorème suivant :

Si f_1 et f_2 sont les limites de deux suites de Cauchy distinctes formées par des éléments de E, la moyenne du produit $\overline{f_1} f_2$ existe.

Les différents prolongements possibles de E obtenus par ce procédé sont donc compatibles. Un même espace vectoriel contient E, f_1 et f_2. Mais on peut naturellement prolonger E par d'autres procédés, qui ne sont pas nécessairement compatibles entre eux. Ajoutons à E une fonction g_1 qui admette avec les éléments de E des produits moyens. Nous obtenons un espace vectoriel E_1. Faisons de même avec une seconde fonction g_2. Nous obtenons un second espace vectoriel E_2. Il est possible de choisir g_2 de telle sorte que $M\bar{g}_1 g_2$ n'existe pas. Alors E_1 et E_2 n'appartiennent pas à un même espace vectoriel. Voici un exemple de cette circonstance. Supposons que E contienne l'unique fonction $\cos t$. Posons $g_1 = 1$ et prenons pour g_2 la fonction $e^{i \log t}$. On voit facilement que

$$M(g_1 \cos t) = 0, \quad M(g_2 \cos t) = 0$$

et g_2 a été choisie pour que $M\bar{g}_1 g_2$ n'existe pas.

Considérons maintenant une fonction f appartenant à P, et supposons que $f(t)$ admette une fonction de corrélation

$$(12.7) \qquad \gamma(h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f}(t) f(t+h)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega h}\, d\sigma(\omega)$$

L'ensemble des translatées $f(t+h)$ de f constitue donc un sous-espace vectoriel de P. Formons la combinaison linéaire

$$(12.8) \qquad Y_\lambda(t, \Delta) = \int_{-\lambda}^{\lambda} K_\Delta(\alpha) f(\alpha+t)\, d\alpha$$

C'est la convolution de f par une fonction nulle en dehors d'un intervalle. $Y_\lambda(t, \Delta)$ est donc

presque-périodique si f est presque-périodique;
pseudo-aléatoire si f est pseudo-aléatoire.

Posons alors

$$(12.9) \qquad J_\Delta(\omega,\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{2i\pi\alpha\omega} K_\Delta(\alpha)\, d\alpha = \int_\Delta \frac{\sin 2\pi(s-\omega)\lambda}{\pi(s-\omega)}\, ds.$$

On vérifie facilement que, si λ et λ' sont deux nombres positifs,

$$(12.10)\qquad \|Y_\lambda(t,\Delta)-Y_{\lambda'}(t,\Delta)\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|J_\Delta(\omega,\lambda)-J_\Delta(\omega,\lambda')|^2 d\sigma(\omega),$$

et qu'on peut choisir λ et λ' assez grands pour que cette quantité soit inférieure à tout ε donné. La suite $Y_\lambda(t,\Delta)$ vérifie donc la condition de Cauchy. On en déduit qu'*il existe une fonction* $Y(t,\Delta)$ *telle que, lorsque* $\lambda\to\infty$, $Y_\lambda(t,\Delta)$ *tende vers* $Y(t,\Delta)$, *en ce sens que*

$$\lim\|Y(t,\Delta)-Y_\lambda(t,\Delta)\|^2=\lim_{\lambda\to\infty}\overline{|Y(t,\Delta)-Y_\lambda(t,\Delta)|^2}=0$$

et que les moyennes $M|Y(t,\Delta)|^2$, $M\overline{Y}(t,\Delta)Y_\lambda(t+h,\Delta)$ existent.

On connait un procédé pour construire effectivement cette limite $Y(t,\Delta)$. Elle n'est d'ailleurs pas unique. En effet, toutes les propriétés invoquées font intervenir seulement des moyennes. Deux fonctions f et f_1 telles que $M|f-f_1|^2=0$ ne peuvent donc être considérées comme distinctes, et en particulier, on peut modifier arbitrairement toute fonction appartenant à P sur n'importe quel ensemble borné de points. Les fonctions de P sont définies à l'addition près d'une fonction nulle en moyenne quadratique.

On démontre facilement que, si g appartient à l'espace vectoriel E, c'est-à-dire si $M\overline{f_n(t)}g(t+h)$ existe pour tout n et tout h, la fonction limite $Y(t,\Delta)$ admet avec g un produit moyen. On vérifie enfin les formules suivantes:

$$(12.11)\qquad \begin{cases} M\overline{Y}(t,\Delta)Y(t+h,\Delta')=\displaystyle\int_{\Delta\cap\Delta'} e^{2i\pi\omega h}d\sigma(\omega)\\ M\overline{Y}(t,\Delta)f(t+h)=\displaystyle\int_{\Delta} e^{2i\pi\omega h}d\sigma(\omega).\end{cases}$$

On en déduit que, si $f(t)$ est presque-périodique, c'est-à-dire si $\sigma(\omega)$ est une fonction de sauts, $Y(t,\Delta)$ est en général presque-périodique. Si $f(t)$ est pseudo-aléatoire, $Y(t,\Delta)$ est en général pseudo-aléatoire. La fonction spectrale énergétique correspondante est égale à $\sigma(\omega)$ sur Δ, et est nulle en dehors de Δ.

Le seul cas d'exception est celui où, sur l'intervalle Δ, $\sigma(\omega)$ garde une valeur constante. On a alors $M|Y(t,\Delta)|^2=0$, de sorte que $Y(t,\Delta)$ peut être considérée comme nulle, au sens de l'espace P.

Si Δ et Δ' sont deux intervalles disjoints, on voit en particulier que

$$(12.12)\qquad M\overline{Y}(t,\Delta)Y(t,\Delta')=0$$

De cette propriété d'orthogonalité découle la représentation spectrale de $f(t)$.

Plaçons sur l'axe des ω une suite de n intervalles $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ consécutifs. Supposons que, lorsque $n \to \infty$:

a) la longueur du plus grand des Δ_k tende vers 0.

b) l'ensemble des Δ_k recouvre à la limite l'axe des ω (Exemple: Δ_k est défini par $\left.\frac{k-n/2-1}{\sqrt{n}} < \omega < \frac{k-n/2}{\sqrt{n}}\right)$.

Formons la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi\omega_k h}\, Y(t, \Delta_k), \tag{12.13}$$

oū ω_k est un point de Δ_k. On démontre que, lorsque n $\to \infty$, cette somme a une limite, égale à $f(t+h)$, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} |f(t+h)-S_n|^2 = 0 \tag{12.14}$$

Pour représenter la forme limite de S_n, il est naturel d'employer le symbolisme de l'intégrale de Stieltjes, et d'écrire

$$f(t+h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega h}\, Y(t, d\omega). \tag{12.15}$$

La signification de cette intégrale est bien précisée par le contexte. Elle est tout à fait analogue à celle de l'intégrale (*12*.1) qui définit la représentation spectrale des fonctions aléatoires stationnaires. Elle réalise donc l'analyse harmonique (en moyenne quadratique) des fonctions de l'espace P. Formellement, $Y(t, d\omega)$ vérifie les relations suivantes:

$$M\overline{Y}(t, d\omega)Y(t, d\omega') = 0 \qquad \text{si } \omega' \neq \omega$$
$$M|Y(t, d\omega)|^2 = d\sigma(\omega)$$

Lorsque $\sigma(\omega)$ admet une dérivée non singulière $\sigma'(\omega)$, la formule (*12*.15) définit une fonction pseudo-aléatoire.

On voit ainsi que les fonctions pseudo-aléatoires constituent un sous-ensemble de l'espace P. Ce n'est d'ailleurs pas un sous-espace vectoriel, car la somme de deux fonctions pseudo-aléatoires n'est pas nécessairement pseudo-aléatoire. Les fonctions presque-périodiques constituent un autre sous-ensemble de l'espace P, qui, lui, est un espace vectoriel. Lorsque σ est absolument continue, $f(t)$ est pseudo-aléatoire. Lorsque σ est une fonction de sauts, $f(t)$ est presque-périodique. Lorsque σ est singulière, ou ne peut rien dire de général.

13. **Problèmes spatio-temporels.** — Il n'est pas difficile de définir des fonctions pseudo-aléatoires de plusieurs variables. Mais ces fonctions ne sont pas celles qui risquent de rendre les plus grands services dans les applications. Il s'agit en effet le plus souvent de phénomènes permanents dans le temps. Mais, comme ces phénomènes sont localisés dans l'espace, ils ne peuvent être homogènes dans une étendue spatiale illimitée. Il n'y a donc pas de raison *a priori* de les représenter par des fonctions pseudo-aléatoires de l'espace. Si l'on considère par exemple la turbulence dans une soufflerie, on s'efforce d'obtenir un régime macroscopiquement permanent dans le temps. Mais la structure de la turbulence évolue beaucoup dans la direction longitudinale et au voisinage des parois. Il n'y a pas homogénéité spatiale.

La mesure des corrélations spatiales est cependant une opération courante. Voici en quoi elle consiste: imaginons pour simplifier qu'il n'y ait qu'une dimension d'espace. Il semble très probable que, pour une valeur fixée du temps t, la fonction $f(x, t)$ ait, par rapport à x, un aspect local analogue à celui qu'elle a comme fonction de t pour une valeur fixée de x. Mais il ne peut s'agir que de propriétés locales, puisque en principe x reste borné. Par rapport à t, la fonction $f(x, t)$ est définie pour $0<t<\infty$, et nous la supposons pseudo-aléatoire.

Par contre, il n'est pas possible de prendre des moyennes spatiales sur un intervalle d'espace augmentant indéfiniment. Ce n'est d'ailleurs pas ce qu'on fait pour mesurer des corrélations d'espace. Ce qu'on appelle *fonction de corrélation d'espace*, en deux points, c'est encore une moyenne temporelle, de la forme

$$(13.1) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(x,t)}\, f(x',t)\, dt.$$

Plus généralement

$$(13.2) \qquad \gamma(x,x',h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(x,t)}\, f(x',t+h)\, dt$$

est la *fonction de corrélation spatio-temporelle* de $f(x, t)$. Il est très remarquable que, dans les cas usuels connus (turbulence), cette fonction de corrélation, malgré sa formation dissymétrique, ait une structure spatiale comparable à sa structure temporelle. En particulier, ses valeurs diminuent très vite lorsque $x'—x$ augmente.

La théorie des fonctions pseudo-aléatoires permet-elle de construire des fonctions, pseudo-aléatoires en t, d'aspect irrégulier en x, dont la fonction de corrélation spatio- temporelle ait la forme voulue?

Pour donner une réponse à cette question, nous allons utiliser les diverses sortes de transformations que nous savons appliquer aux fonctions pseudo-aléatoires de t.

Considérons la fonction

$$e^{2i\pi\varphi\widehat{(\alpha t+\beta x)}},$$

pseudo-aléatoire en t pour tout x, en x pour tout t.

Formons ensuite la somme

$$f(x,t) = \sum c_{kl}\, e^{2i\pi\widehat{\varphi(\alpha_k t+\beta_l x)}}, \tag{13.3}$$

où les c_{kl} sont des nombres complexes. S'il s'agit d'une série, la série double

$$\sum |c_{kl}|$$

doit être convergente. Formons la fonction de corrélation spatio-temporelle de $f(x, t)$:

$$\gamma(x,x',h) = \sum \bar{c}_{kl}\, c_{k'l'} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2i\pi\{\varphi[\widehat{\alpha_{k'}(t+h)+\beta_{l'}x'}]-\varphi[\widehat{\alpha_k t+\beta_l x}]\}}\, dt. \tag{13.4}$$

On sait [8] que la moyenne qui figure au second membre est nulle, sauf si $\alpha_{k'} = \alpha_k$. Elle est alors égale à

$$\gamma_0(\alpha_k h+\beta_{l'} x'-\beta_l x),$$

où $\gamma_0(h)$ est égal à $1-|h|$ si $|h|<1$, à 0 si $|h|>1$.
Finalement,

$$\gamma(x,x',h) = \sum \bar{c}_{kl} c_{kl'}\, \gamma_0(\alpha_k h+\beta_{l'} x'-\beta_l x). \tag{13.5}$$

La forme de la fonction de corrélation $\gamma(x, x', h)$ répond assez bien aux nécessités pratiques. C'est, par rapport au temps, une fonction de corrélation de type stationnaire (fonction de l'intervalle de temps h). Par rapport à l'espace, il n'y a pas homogénéité. Les deux points x et x' interviennent séparément.

Chaque terme $\gamma_0(\alpha_k h+\beta_{l'} x' - \beta_l x)$ tend vers 0 lorsque, h et x étant fixés, x' augmente indéfiniment. Il en est donc de même de $\gamma(x, x', h)$. En effet, à cause de la convergence absolue de la série c_{kl}, on peut trouver un nombre $N(\varepsilon)$, indépendant de x, x', t, tel que, si l'un des indices k, l, l' est supérieur à $N(\varepsilon)$, la somme des termes correspondants de la série (13.5) soit inférieure à ε. On peut d'autre part choisir x' assez grand pour que la somme des termes subsistants, qui sont en nombre fini, devienne inférieure à ε. Au total, $|\gamma(x, x', h)|$ est alors inférieur à 2ε, c'est-à-dire arbitrairement petit.

FACULTÉ DES SCIENCES DOMAINE UNIVERSITAIRE 38 - SAINT-MARTIN-D'HÈRES
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES

Il est très remarquable que la fonction de corrélation spatio-temporelle de $f(x, t)$, moyenne purement temporelle dans laquelle x et x' jouent le rôle de paramètres, ait cependant par rapport à l'espace des propriétés analogues à ses propriétés fondamentales par rapport au temps.

On peut généraliser la formule (*13*.3) en introduisant, au moins par rapport à β, un symbole d'intégıale de Stieltjes contenant une composante continue.

Toutes ces fonctions semblent donner une image intéressante des phénomènes naturels. Il est cependant à craindre qu'elles ne soient trop symétriques en x, t, quel que soit le traitement dissymétrique qu'on leur fait subir.

Nous verrons à propos de problèmes d'équations aux dérivées partielles que la physique mathématique conduit à introduire des fonctions pseudo-aléatoires par rapport au temps, mais amorties dans l'espace, ce qui n'est pas le cas pour la fonction (*13*.3).

14. **Application aux équations aux dérivées partielles.** — Quand on se trouve en présence d'une équation aux dérivées partielles, on peut se poser diverses questions et essayer de résoudre des problèmes de nature très variée:

a. On peut se donner certaines conditions aux limites et chercher à démontrer qu'elles entraînent, globalement, l'existence et l'unicité de la solution.

b. On peut se poser le même problème (*a*) et en outre chercher à obtenir une expression de la solution. La question ainsi posée est d'ailleurs mal précisée. Ce qu'on cherche, c'est un ensemble de renseignements mathématiques sur la solution, plus valables et plus sûrs que ce que fournirait une simple résolution numérique, supposée possible.

c. On peut chercher à tout hasard des solutions, de quelque nature qu'elles soient, et sans idée préconçue.

d. On peut chercher des solutions appartenant à une classe donnée de fonctions (ou de distributions), sans cependant leur imposer d'avance des conditions aux limites.

On est naturellement loin de savoir résoudre de tels problèmes pour n'impoıte quelle équation. Le théorème de Cauchy-Kovalewska fournit une solution locale du problème (*a*), dont la solution globale est en général difficile, même pour des équations linéaires. Sa solution pour des équations non linéaires a été rarement abordée.

Le problème (*c*) est plus facile à attaquer, sans que sa solution soit assurée d'avance. Le problème (*d*), qui en est un cas particulier soumis à des restrictions sévères, est naturellement beaucoup plus difficile.

Nous allons dans ce qui suit examiner le problème (*d*) dans le cas d'équations simples, linéaires ou non linéaires, mais pour lesquelles les problèmes (*a*) et (*b*) sont bien connus. Nous choisirons comme énoncé (*d*) *la recherche de solutions presque-périodiques ou pseudo-aléatoires*, et nous nous intéresserons aux deux équations

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{14.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{14.2}$$

La première est l'équation classique de propagation de la chaleur, qu'on rencontre aussi dans diverses questions de mécanique des fluides. La seconde a été étudiée par M. Burgers comme modèle maniable, en vue de défricher des problèmes non résolus de mécanique des fluides visqueux et turbulents. Son avantage est que sa solution générale se ramène à celle de la première équation. Si en effet on passe de u à v par la transformation *non linéaire*

$$u = -\frac{1}{2}\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{14.3}$$

v est solution de l'équation de la chaleur. Au lieu de v, il sera parfois commode dans la suite d'introduire un paramètre a et d'écrire

$$u = \frac{a}{1-av}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Si v est bornée, on peut choisir a de telle sorte que $1-a\,v$ reste positif et ne s'annule pas. u est alors définie pour tout x.

15. **Solutions presque-périodiques et pseudo-aléatoires de l'équation de la chaleur.** — L'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{15.1}$$

admet la solution particulière

$$u = e^{-(1+i)\lambda x + i\lambda^2 t}, \tag{15.2}$$

où λ est un paramètre réel. Comme elle est linéaire, elle admet aussi pour solution

$$u = A_0 + \sum_{=1}^{\infty} A_n e^{-(1+i)\lambda_n x + i\lambda_n^2 t}, \tag{15.3}$$

où les λ_n constituent une suite quelconque de nombres réels, et les A_n une suite de nombres complexes choisis de telle sorte que la série, et éventuellement les séries dérivées, convergent absolument dans un intervalle convenable de variation de x, et pour tout $t > 0$ (les valeurs négatives de t n'ont rien de particulier, mais il est souvent commode de limiter la discussion aux valeurs positives). u est, en chaque point x, une *fonction presque-périodique de t.*

Par rapport à x, sa structure est plus compliquée et dépend de celle de la suite λ_n. Si λ_n est une suite de nombres positifs et augmentant indéfiniment, il y a dans l'espace, pour tout $x > 0$, des oscillations amorties.

Pour former des *solutions pseudo-aléatoires* de l'équation de la chaleur, on peut procéder par convolution. Considérons la fonction

$$u(x,t) = \int_0^t g(t-\alpha)\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\alpha^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}d\alpha. \tag{15.4}$$

Si $g(t)$ est une fonction bornée et localement intégrable pour $t \geqslant 0$, on sait que $u(x, t)$ est une solution de l'équation de la chaleur définie pour $t > 0$, $x > 0$. Lorsque, pour une valeur donnée de t, x tend vers zéro, $u\,(x, t)$ a une limite égale à $g(t)$ en tout point où $g(t)$ est continue. Lorsque, pour une valeur donnée de x, t tend vers zéro, $u\,(x, t)$ a pour limite 0.

Le noyau $K(\alpha) = \dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}\alpha^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}$ est non négatif, et intégrable entre 0 et l'infini. En effet, le changement de variable $\dfrac{x^2}{\alpha} = s^2$ montre que

$$\int_0^\infty K(\alpha)\,d\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}}ds = 1. \tag{15.5}$$

Le théorème du paragraphe 9 est donc applicable. Si $g(t)$ est pseudo-aléatoire, $u(x, t)$ est aussi pseudo-aléatoire, en tant que fonction de t, et pour tout $x \geqslant 0$.

L'équation de la chaleur a par conséquent des solutions pseudo-aléatoires. Nous venons d'en construire une qui, pour $t = 0$, se réduit à 0, et pour $x = 0$, a une fonction pseudo-aléatoire donnée.

Ces conditions aux limites ne jouent pas ici un rôle essentiel. Elles ont été choisies sans nécessité absolue. Elles correspondent à une phénomène mécanique qui partirait du repos pour $t = 0$, et serait entretenu en un point $x = 0$ par des oscillations irrégulières de type pseudo-aléatoire.

Ce phénomène est entretenu dans le temps en tout point x, et possède une structure pseudo-aléatoire plus régulière pour $x > 0$ que pour $x = 0$. Dans l'espace, il s'amortit après quelques oscillations.

Le résultat obtenu est valable quelle que soit la fonction $g(t)$. Choisissons plus particulièrement

(*15*.6) $$g(t) = e^{2i\pi\varphi(\hat{t})},$$

où φ est un polynome du type déjà considéré à diverses reprises. On a alors

(*15*.7) $$u(x,t) = \int_0^t e^{2i\pi\varphi(\widehat{t-\alpha})} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \alpha^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} d\alpha,$$

$u(0, t)$ est une fonction en escalier, alors que, pour $x > 0$, $u(x, t)$ est continue et dérivable. Si l'on pose $\alpha = x^2\beta$, on a

(*15*.8) $$u(x,t) = \int_0^{\frac{t}{x^2}} e^{2i\pi\varphi(\widehat{t-\beta x^2})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \beta^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2\beta}} d\beta.$$

$u(x, t)$ est transformée par convolution de la fonction

$$e^{2i\pi\varphi(\widehat{t-\beta x^2})}.$$

Cette fonction est pseudo-aléatoire par rapport à t pour tout x, et par rapport à x^2 pour tout t. t étant fixé, elle reste constante dans tout intervalle

$$n - 1 < t - \beta x^2 < n, \qquad x^2 < \frac{t}{\beta}$$

ou

$$\sqrt{\frac{t-n}{\beta}} < x < \sqrt{\frac{t+1-n}{\beta}}.$$

16. Solutions presque-périodiques de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

La fonction

(*16*.1) $$v = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(1+i)\lambda_n x + i\lambda_n^2 t}$$

est une solution complexe de l'équation de la chaleur. Sa partie réelle

$$(16.2) \qquad 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \cos(\lambda_n x - \lambda_n^2 t + \psi_n),$$

où

$$a_n = A_n e^{i\psi_n}$$

en est aussi solution, puisqu'il s'agit d'une équation linéaire.

Il serait possible, par le procédé qui va être indiqué, de construire des solutions réelles de l'équation proposée. Mais leur structure est compliquée, et il sera suffisamment instructif d'examiner seulement les solutions complexes, dont le calcul est plus rapide.

La série (*16*.1) converge absolument et uniformément dans tout domaine $x > 0$ si la série $|A_n|$ est convergente, et si $\lambda_n \geqslant 0$.

La fonction

$$(16.3) \qquad u = -\frac{1}{2}\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

est solution de l'équation

$$(16.4) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Cette solution n'est bien définie que si v ne s'annule jamais. C'est ce qui arrive lorsque

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < 1.$$

Dans ces conditions, on peut développer $\frac{1}{v} = \frac{1}{1-\Sigma}$ suivant le schéma

$$\frac{1}{1-\Sigma} = 1 + \Sigma + \dots + \Sigma^k + \dots.$$

D'autre part

$$(16.5) \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = (1+i)\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n e^{-(1+i)\lambda_n x + i\lambda_n^2 t}$$

$$= \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n e^{-(1+i)\lambda_n x + i\lambda_n^2 t + i\frac{\pi}{4}},$$

et ce développement est valable si $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \lambda_n < \infty$.

On trouve ainsi.

$$(16.6) \qquad u = -\frac{1+i}{2}\frac{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n e^{-(1+i)\lambda_n x + i\lambda_n^2 t}}{1-\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(1+i)\lambda_n x + i\lambda_n^2 t}}$$

Pour continuer, nous allons supposer que la somme qui représente u n'a qu'un nombre fini de termes, et nous allons examiner plus particulièrement le cas de un et de deux termes.

Dans le premier cas, on a, sous la seule condition $|A| < 1$, $\lambda > 0$,

$$(16.7) \qquad u = -\frac{1+i}{2}\frac{A\lambda e^{-(1+i)\lambda x + i\lambda^2 t}}{1-A e^{-(1+i)\lambda x + i\lambda^2 t}}$$

$$= -\frac{1+i}{2} A\lambda e^{-(1+i)\lambda x + i\lambda^2 t}[1+\ldots+A^{k-1} e^{-k(1+i)\lambda x + ik\lambda^2 t}+\ldots],$$

soit

$$(16.8) \qquad u = -\frac{1+i}{2} A\lambda [e^{-(1+i)\lambda x + i\lambda^2 t}+\ldots+A^{k-1} e^{-k(1+i)\lambda x + ik\lambda^2 t}+\ldots]$$

Pour chaque x fixé, u est *une fonction périodique du temps t*, de période $\frac{2\pi}{\lambda^2}$.

Pour chaque t fixé, c'est une fonction périodique amortie de l'espace, de période $\frac{2\pi}{\lambda}$.

Dans le second cas, on a, sous la condition $|A_1|+|A_2| < 1$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$:

$$u = -\frac{1+i}{2}\frac{A_1\lambda_1 e^{-(1+i)\lambda_1 x + i\lambda_1^2 t} + A_2\lambda_2 e^{-(1+i)\lambda_2 x + i\lambda_2^2 t}}{1-A_1 e^{-(1+i)\lambda_1 x + i\lambda_1^2 t} - A_2 e^{-(1+i)\lambda_2 x + i\lambda_2^2 t}}$$

Si l'on pose

$$A_1 e^{-(1+i)\lambda_1 x + i\lambda_1^2 t} = \alpha_1, \qquad A_2 e^{-(1+i)\lambda_2 x + i\lambda_2^2 t} = \alpha_2,$$

on a

$$u = -\frac{1+i}{2}\frac{\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2}{1-(\alpha_1+\alpha_2)} =$$

$$= -\frac{1+i}{2}(\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2)\left[1+\ldots+\frac{(k+l)!}{k!\,l!}\alpha_1^k\alpha_2^l+\ldots\right]$$

$$= -\frac{1+i}{2}\left[a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+\ldots+\frac{(k+l-1)!\,(\lambda_1 k+\lambda_2 l)}{k!\,l!}a_1^k a_2^l+\ldots\right].$$

u est la somme d'une série double relativement aux variables $e^{-(1+i)(k\lambda_1+l\lambda_2)x+i(k\lambda_1^2+l\lambda_2^2)t}$.

Pour chaque valeur fixée de x, *u est une fonction presque-périodique du temps t.* C'est en effet la somme d'une série de la forme

$$\sum c_k\, e^{i(k\lambda_1^2+l\lambda_2^2)t} \qquad (k, l \geqslant 0).$$

L'ensemble des nombres réels $k\lambda_1^2+l\lambda_2^2$ est dénombrable. Il constitue un module algébrique. Si $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2$ est irrationnel, la suite $k\lambda_1^2+l\lambda_2^2$ est d'ailleurs dense sur le demi-axe réel positif.

On voit sur cet exemple par quelle technique une équation aux dérivées partielles non linéaire peut avoir des solutions appartenant à un espace vectoriel de fonctions. Cela résulte au fond de ce que ces fonctions constituent aussi un anneau de fonctions, c'est-à-dire une algèbre. L'opération non linéaire du produit de deux fonctions presque-périodiques fournit une fonction presque-périodique.

Mais, en vue des applications, les fonctions presque-périodiques sont relativement peu intéressantes, car elles ont une trop forte corrélation interne. Les fonctions pseudo-aléatoires offrent probablement des ressources plus étendues. Nous allons voir que l'équation (*14*.2) admet aussi des solutions pseudo-aléatoires, bien que la structure algébrique de ces fonctions soit un peu moins simple que celle des fonctions presque-périodiques.

17. **Solutions pseudo-aléatoires de l'équation** $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. — Si v est une solution de l'équation de la chaleur,

(*17*.1) $$u=\frac{a}{1-av}\frac{\partial v}{\partial x}$$

est solution de l'équation

(*17*.2) $$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Si l'on pose

(*17*.3) $$\mathrm{K}(a,x)=\frac{x}{\sqrt{2\pi}}a^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{2a}},$$

la fonction

$$v(x,t) = \int_0^t g(t-\alpha)\,\mathrm{K}(\alpha,x)\,d\alpha \tag{17.4}$$

est solution de l'équation de la chaleur.

Si $g(t)$ est pseudo-aléatoire, $v(x, t)$ est, pour chaque x, une fonction pseudo-aléatoire de t.

Nous allons montrer que, *si $g(t)$ est de la forme particulière*

$$g(t) = e^{2i\pi\varphi(\hat{t})},$$

où $\varphi(t)$ est un polynome de degré $\nu \geqslant 2$, dont le terme en t^ν a un coefficient irrationnel, la formule (17.1), où v est définie par (17.3) et (17.4), est une solution pseudo-aléatoire de l'équation (17.1).

Pour démontrer ce résultat, on remarque d'abord que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int_0^t g(t-\alpha)\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x}\,d\alpha \tag{17.5}$$

est une fonction du même type que v. En effet, pour tout $x > 0$,

$$\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\alpha^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{x^2}{\alpha}\right)e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} \tag{17.6}$$

est une fonction absolument sommable par rapport à α de 0 à l'infini. On a

$$\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x}\,d\alpha = \frac{2}{x\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty (1-s^2)\,e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds = 0,$$

$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x}\right| d\alpha = \frac{2}{x\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty |1-s^2|\,e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds < \infty.$$

Ces résultats ne sont naturellement valables que si x reste supérieur à un nombre *positif* fixé.

D'autre part, la fonction $g(t)$ ayant un module égal à 1, $|v(x, t)|$ est inférieur à 1. Si donc on choisit pour a un nombre réel compris entre —1 et 1, on peut développer $\frac{a}{1-av}$ suivant la formule

$$\frac{a}{1-av} = a + a^2 v + \dots + a^k v^{k-1} + \dots. \tag{17.7}$$

On en déduit que

$$(17.8) \qquad u = a\frac{\partial v}{\partial x} + a^2 v\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots + a^{k+1}v^k\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots.$$

Nous allons montrer que u est une fonction pseudo-aléatoire du temps. Pour cela, on forme sa fonction de corrélation. C'est la moyenne du produit.

$$(17.9) \qquad \bar{u}(x,t)\,u(x,t+h) =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{\infty} a^{k+l+2}\,[\bar{v}(x,t)]^k\,[v(x,t+h)]^l\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}(x,t)\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,t+h).$$

Il suffit alors d'étudier la moyenne de chaque terme de cette série. On peut poser

$$(17.10) \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \int_0^t g(t-\alpha)\,K_1(\alpha,x)\,d\alpha.$$

On est ramené à démontrer la propriété suivante:

Considérons les deux fonctions pseudo-aléatoires

$$(17.11) \qquad v(t) = \int_0^t g(t-\alpha)\,K(\alpha)\,d\alpha, \qquad v_1(t) = \int_0^t g(t-\alpha)\,K_1(\alpha)\,d\alpha,$$

où K *et* K_1 *sont des fonctions absolument intégrables de* 0 *à l'infini, et où* $g(t) = e^{2i\pi\varphi(t)}$. *Quels que soient les entiers* k, l *non négatifs, la moyenne*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \bar{v}^k(t)\,v^l(t+h)\,\bar{v}_1(t)\,v_1(t+h)\,dt$$

tend vers zéro lorsque $h\to\infty$.

Si l'on fait le produit des $k+2$ facteurs figurant sous le signe $\int_0^T$, on obtient en effet une intégrale de la forme:

$$(17.12)$$

$$\int K(\alpha_1)\ldots K(\alpha_k)\,K_1(\alpha_{k+1})\,K(\beta_1)\ldots K(\beta_l)\,K_1(\beta_{l+1})\,Z\,d\alpha_1\ldots d\alpha_{k+1}\,d\beta_1\ldots d\beta_{l+1},$$

étendue aux valeurs des α_i, β_i comprises entre 0 et t, et où:

$$(17.13) \qquad Z = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \bar{g}(t-\alpha_1)\ldots\bar{g}(t-\alpha_{k+1})\,g(t+h-\beta_1)\ldots g(t+h-\beta_{l+1})\,dt.$$

L'intégrale (*17*.12) peut être considérée comme étendue au domaine $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, car, $g(t-\alpha)$ étant nulle pour $\alpha > t$, on peut, dans les intégrales (*17*.11), remplacer $\int_0^t$ par $\int_0^\infty$.

Tout revient donc à prouver que Z tend vers zéro lorsque $h \to \infty$.

Or

$$(17.14) \qquad Z = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2i\pi[-\varphi\widehat{(t-\alpha_1)}+\ldots-\varphi\widehat{(t-\alpha_{k+1})}+\varphi\widehat{(t+h-\beta_1)}+\ldots+\varphi\widehat{(t+h-\beta_{l+1})}}\,dt.$$

On peut faire varier T de α_1 *à* α_1+N, où N est entier, et écrire

$$(17.15) \qquad \int_{\alpha_1}^{\alpha_1+N} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_1+1} + \ldots + \int_{\alpha_1+n}^{\alpha_1+n+1} + \ldots + \int_{\alpha_1+N-1}^{\alpha_1+N}.$$

On pose ensuite

$$t-\alpha_1 = n+s,$$

$$\int_{\alpha_1+n}^{\alpha_1+n+1} (\quad)\,dt = \int_0^1 (\quad)\,ds.$$

On a alors

$$(17.16) \qquad Z = \int_0^1 \left\{ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi[-\varphi(n)-\ldots-\varphi\widehat{(s+\alpha_1-\alpha_{k+1}+n)}+\varphi\widehat{(s+h+\alpha_1-\beta_1+n)}+\ldots+\varphi\widehat{(s+h+\alpha_1-\beta_{l+1}+n)}]} \right\} ds.$$

La propriété à démontrer se ramène à une nouvelle propriété plus simple: si h est suffisamment grand,

$$(17.17) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi[-\varphi(n)+\ldots-\varphi\widehat{(s+\alpha_1-\alpha_{k+1}+n)}+\varphi\widehat{(s+h+\alpha_1-\beta_{1+n})}+\ldots+\varphi\widehat{(s+h+\alpha_1-\beta_{l+1}+n)}]} = 0.$$

Or l'exposant est le produit par $2i\pi$ d'une somme de polynomes de degré ν en n. Le terme de degré ν de cette somme a pour coefficient

$$A(l-k),$$

où A est un nombre irrationnel. Si $l \neq k$, ce coefficient est irrationnel, et, d'après les théorèmes de H. Weyl, la moyenne (*17*.17) est nulle. Si

$l = k$, l'exposant est un polynome de degré ν—1 au plus. Le terme en $n^{\nu-1}$ a pour coefficient le produit par ν A de l'entier

$$\widehat{s+h+\alpha_1-\beta_1}+\dots+\widehat{s+h+\alpha_1-\beta_{l+1}}-\widehat{s+\alpha_1-\alpha_2}-\dots-\widehat{s+\alpha_1-\alpha_{k+1}}.$$

Si h est suffisamment grand, les premiers termes sont positifs, et suffisamment grands pour l'emporter sur les termes négatifs. La moyenne est alors nulle, ce qui démontre la propriété annoncée.

En conclusion:

THÉORÈME. — *Soit* $e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$ *une fonction pseudo-aléatoire définie par un polynome* φ.

A cette fonction, on associe la fonction

$$v(x,t) = \int_0^T e^{2i\pi\varphi(\widehat{t-\alpha})}\,K(\alpha,x)\,d\alpha,$$

solution de l'équation de la chaleur, avec

$$K(x,\alpha) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\,\alpha^{-\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}.$$

Si alors a est un nombre compris entre -1 *et* 1, *la fonction*

$$u = \frac{a}{1-av}\frac{\partial v}{\partial x} = \sum_{k=0}^{\infty} a^{k+1}v^k\frac{\partial v}{\partial x}$$

est une solution de l'équation non linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

pseudo-aléatoire par rapport à t pour tout $x > 0$ *fixé.*

Le caractère pseudo-aléatoire de la fonction $u(x, t)$ et le fait qu'elle soit solution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire se dissocient partiellement. Le premier résulte d'une propriété algébrique des fonctions pseudo-aléatoires de la classe choisie: le produit de translatées de ces fonctions est pseudo-aléatoire.

Le caractère non linéaire de l'équation se retrouve dans la formule de passage de u à v, qui peut être mise sous la forme suivante:

Introduisons les opérateurs **A** et **B** tels que

$$(17.18)\qquad \mathbf{A}v = \frac{\partial v}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\qquad \mathbf{B}u=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Si alors on passe de v à u par la formule

$$u = -\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{17.19}$$

on passe de $\mathbf{A}v$ à $\mathbf{B}u$ par la formule

$$\mathbf{B}u = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathbf{A}v}{v}. \tag{17.20}$$

En d'autres termes, il existe entre les opérateurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ la relation identique

$$\mathbf{B}\left(-\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{v}\mathbf{A}v\right) \tag{17.21}$$

Le succès de la démonstration repose sur l'existence de la transformation (*17*.21), qui "linéarise" d'une façon rigoureuse l'équation $Bu = 0$. Les classes de solutions pseudo-aléatoires trouvées, tout en restant très générales, sont cependant plus limitées que celles de l'équation de la chaleur. Dans ce dernier cas, on a pu les construire par convolution à partir de données aux limites qui sont des fonctions pseudo-aléatoires quelconques. Au contraire, dans le cas non linéaire, la démonstration fait intervenir des propriétés plus fines des fonctions pseudo-aléatoires. Ces propriétés sont vérifiées par les fonctions $e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$, où φ est un polynome de Weyl. Mais on ignore si elles le sont dans des cas plus généraux.

18. **Quelques résultats numériques.** — La figure 11 représente la fonction $f(t) = \sin(\hat{t})^2$, égale à $\sin n^2$ si $n < t < n+1$. C'est la partie imaginaire de $e^{2i\pi A\hat{t}^2}$, pour $A = \frac{1}{2\pi}$.

La figure 12 représente, un point $x = 1$, la solution de l'équation de la chaleur correspondant aux conditions aux limites du paragraphe *15*, avec $f(t) = \sin(\hat{t})^2$. La figure 13 donne la solution de la même équation, avec les mêmes conditions aux limites, mais pour la valeur $x = 2$ de la coordonnée d'espace.

La figure 14 représente, avec les même conditions aux limites et pour $x = 1$, la solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Enfin la figure 15 est un exemple de fonction de corrélation temporelle, calculée en un point donné. Elle illustre les considérations du paragraphe 9.

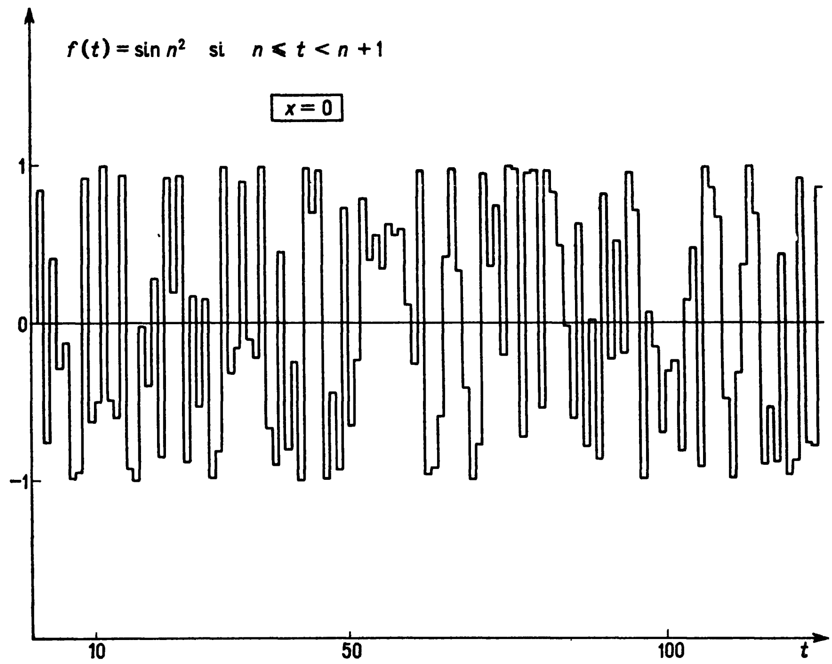

$f(t) = \sin n^2$ si $n \leq t < n+1$
$x = 0$
1
0
−1
10
50
100
t

Fig. 11

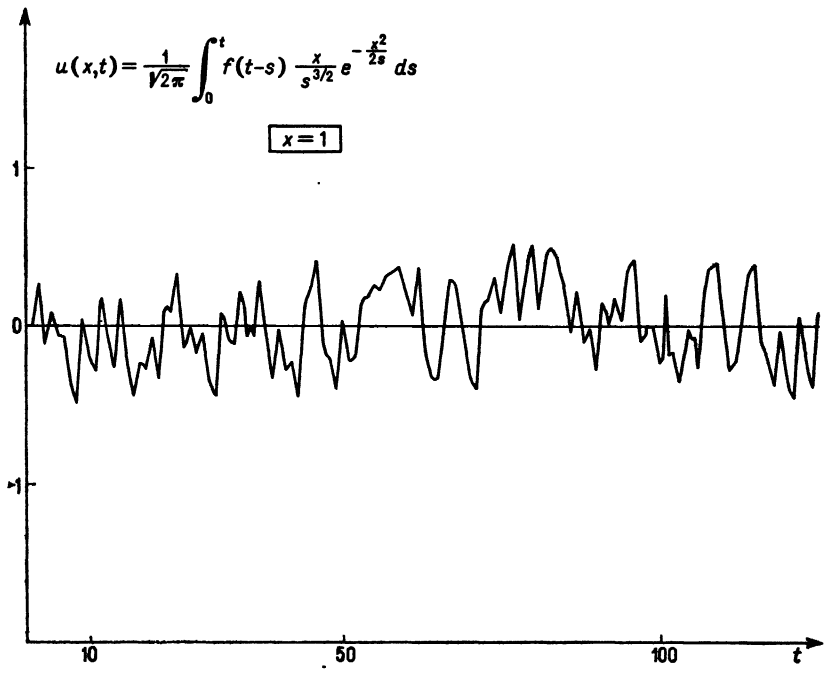
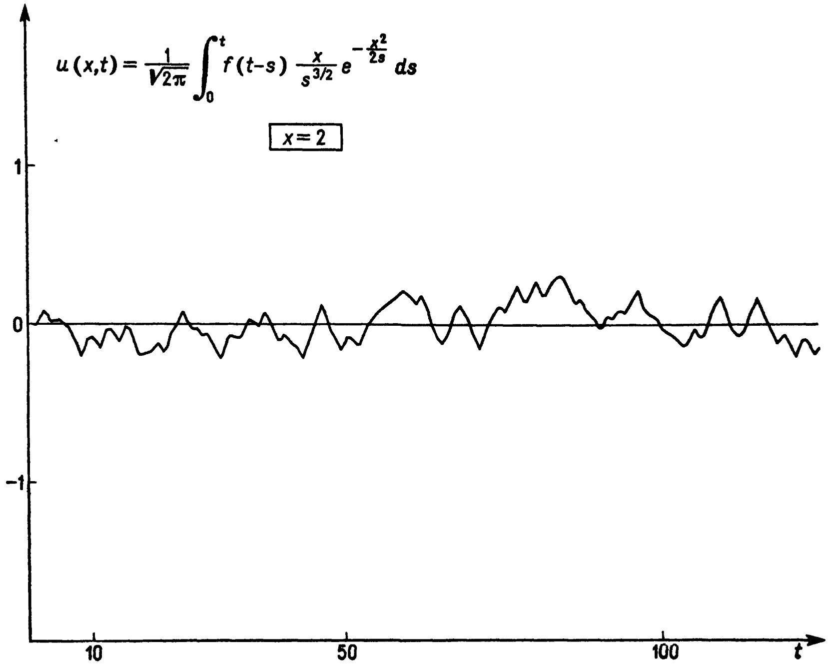
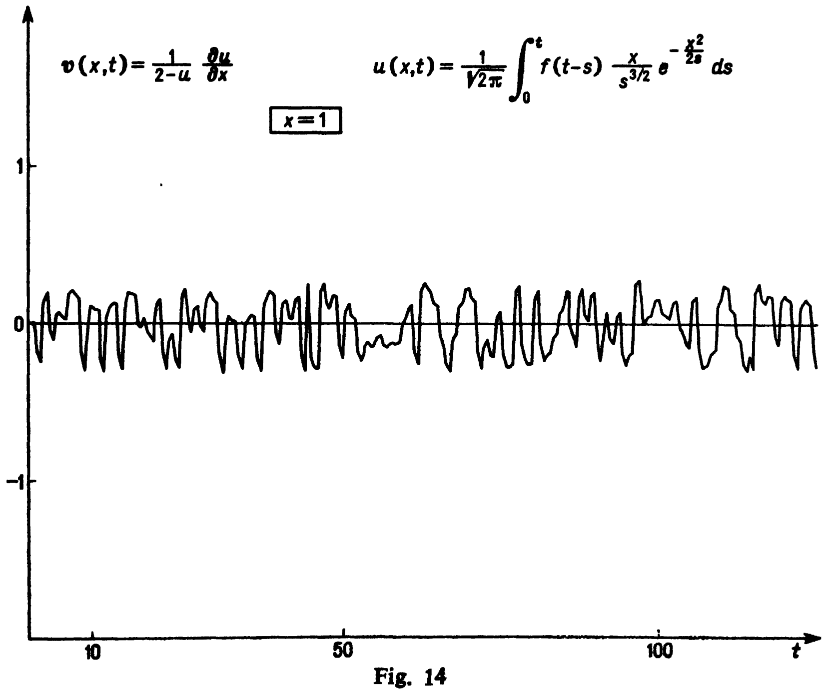

$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t f(t-s) \frac{x}{s^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{2s}} ds$
$x = 1$
1
0
−1
10
50
100
t

Fig. 12



$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t f(t-s) \frac{x}{s^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{2s}} ds$
$x = 2$
1
0
-1
10
50
100
t

Fig. 13



$v(x,t) = \frac{1}{2-u} \frac{\partial u}{\partial x}$
$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t f(t-s) \frac{x}{s^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{2s}} ds$
$x = 1$
1
0
-1
10
50
100
t

Fig. 14

Toutes ces courbes ont été calculées par M. Guilloud sur machine I.B.M. 704 et construites point par point. Je remercie M. Guilloud d'avoir bien voulu s'en charger.

La courbe de corrélation (fig. 15) a été calculée à partir des valeurs de $u(1, t)$ dans le cas de l'équation de la chaleur. On a utilisé 12 000 valeurs de t, allant de 0 à 750. Mais, dans ces conditions, qui correspondent à

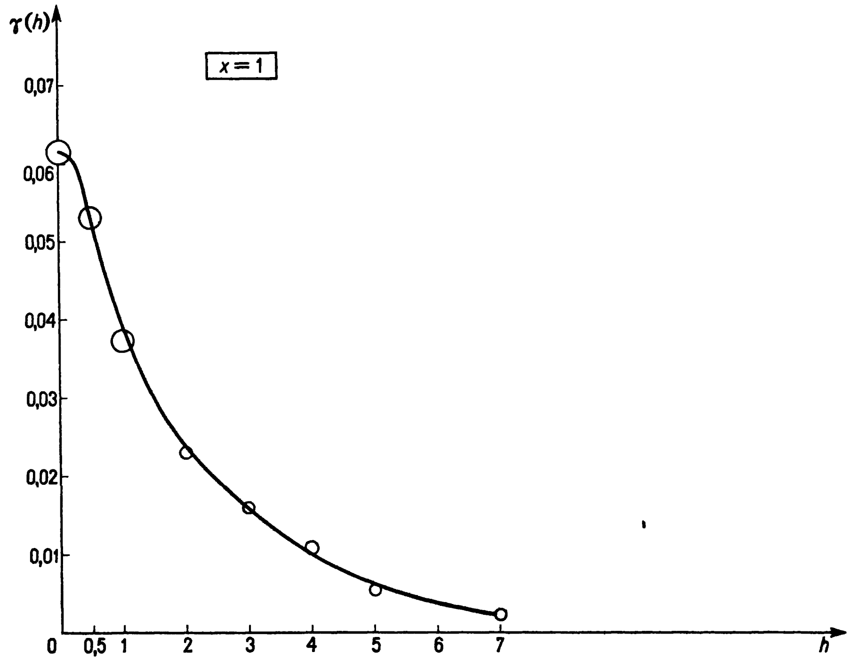


Fig. 15

une bonne utilisation de la machine, les moyennes ne sont pas encore parfaitement stabilisées. Il subsiste une certaine incertitude, qui a été matérialisée sur la figure par des petits cercles, et l'on a dû se limiter à des valeurs de h relativement petites. Lorsque h continue à croître, la fonction $\gamma(h)$, tout en restant petite, devient nettement négative.

19. **Quelques remarques sur les solutions pseudo-aléatoires des équations de l'hydrodynamique.** — Nous nous limiterons au cas d'un fluide incompressible. Désignons par p le rapport de la pression à la densité, par μ le coefficient de viscosité, par u_1, u_2, u_3 les composantes de la vitesse au point x_1, x_2, x_3 et à l'instant t. Les équations des fluides visqueux, ou équations de Navier-Stokes, s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k u_k \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = \mu \Delta u_i \qquad (i = 1,2,3). \\ \sum_k \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \end{cases}$$

La recherche de solution de ces équations qui, en un point donné, soient des fonctions pseudo-aléatoires du temps, constitue un procédé pour attaquer directement, c'est-à-dire sans faire appel aux méthodes probabilistes, le problème de la turbulence. Mais ce problème est difficile, et n'a pas encore reçu de solution satisfaisante. Il semble d'ailleurs que la structure des équations de Navier-Stokes, à cause du terme grad p, soit tout à fait différente de celle de l'équation de M. Burgers, et que les résultats obtenus dans les paragraphes précédents ne puissent être extrapolés.

On peut cependant énoncer quelques résultats dans un cas où les équations de l'hydrodynamique deviennent partiellement linéaires. C'est celui où il existe un potentiel des vitesses g.

On a alors

$$u_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}, \qquad \Delta g = 0.$$

Comme $\Delta u_i = 0$, le terme en μ disparaît et le fluide devient un fluide parfait. Les trois équations du mouvement se réduisent à l'équation

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial x_k} \right)^2 + p = 0,$$

qui sert à calculer la pression lorsque la vitesse est connue. Quant à l'équation de continuité, elle exprime que g est une fonction harmonique de l'espace, dont la structure temporelle n'est pas précisée *a priori*. On introduit alors une fonction pseudo-aléatoire $f(t, x)$ de la forme

$$f(t,x) = \sum_k c_k(x) e^{2i\pi\varphi(\widehat{\alpha_k t})},$$

où x désigne le point (x_1, x_2, x_3) et où les $c_k(x)$ sont des fonctions harmoniques.

f est harmonique dans l'espace et pseudo-aléatoire dans le temps. Il en est de même de sa convolution avec une fonction $K(t)$ suffisamment régulière. Cette convolution est une fonction g possible.

La structure spatiale de g est très arbitraire. On peut naturellement choisir les $c_k(x)$ de telle sorte que les corrélations d'espace de la vitesse, c'est-à-dire les moyennes temporelles

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_i(x,t)\, u_j(x+\xi, t)\, dt$$

aient une forme qui puisse se comparer avec les résultats expérimentaux. Mais cela n'a rien d'obligatoire. Les solutions qu'on trouve ainsi ne sont donc

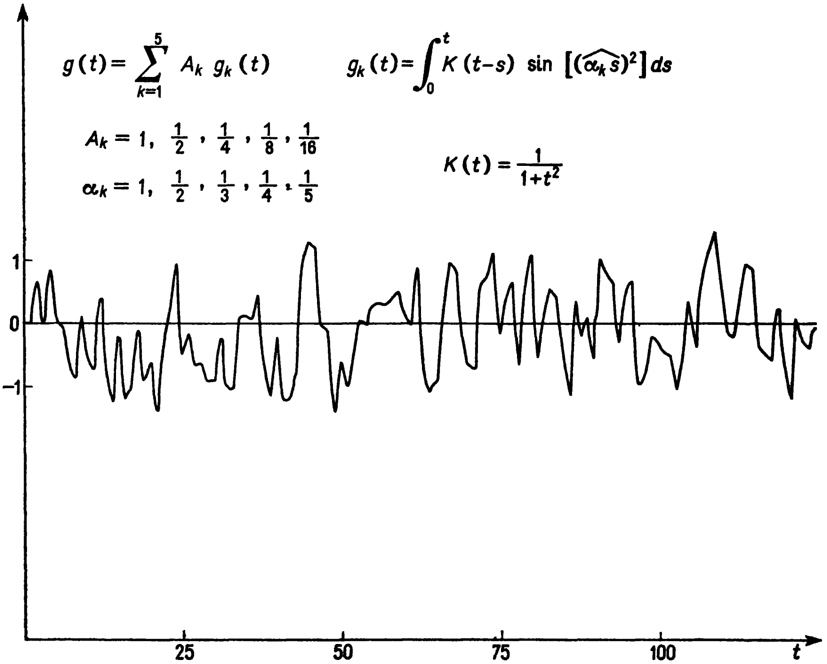


Fig. 16

pas forcément "turbulentes", ce qui serait d'ailleurs inattendu, car le mécanisme de la turbulence implique l'existence d'un rotationnel. Il semble cependant qu'elles puissent décrire certains écoulements qui, sans être turbulents, présentent une agitation d'aspect analogue à la turbulence. Ce serait le cas de l'écoulement potentiel dans l'axe d'un tuyau, lorsque la couche limite turbulente est établie.

La figure 16 donne un exemple de fonction $g(t)$ de ce type. On a choisi pour fonction $K(t)$ la fonction $\frac{1}{1+t^2}$, pour fonction $\varphi(t)$ le polynome $\frac{1}{2\pi}t^2$. On a superposé 5 solutions particulières correspondant à 5 valeurs différentes de a_k. On s'est placé en un point donné, où l'on a choisi arbitrairement les valeurs numériques A_k des fonctions $c_k(x)$. La courbe obtenue a été calculée point par point par M. Guilloud. C'est une courbe continue et dont la dérivée est continue. Les pointes de la courbe ne sont pas des points anguleux. La dérivée y varie seulement d'une façon trop rapide pour qu'on puisse en dessiner le détail.

BIBLIOGRAPHIE

Bass (J.):

[1] *On the mathematical structure of turbulence* (*Rev. Mod. Phys.* vol. 30, 1958, p. 1084).

[2] *Contribution à l'étude de certaines fonctions susceptibles de représenter la vitesse d'un fluide turbulent* (*J. Math. pures et appl.* t. 37, 1958, p. 1217).

[3] *Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 78, 1959, p. 1 à 64).

[4] *Solutions turbulentes de certaines équations aux dérivées partielles* (*C.R. Acad. Sc.*, t. 249, 1959, p. 1456).

[5] *Quelques propriétés linéaires des fonctions pseudo-aléatoires* (*C.R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960, p. 266).

[6] *Fonctions presque-périodiques, fonctions pseudo-aléatoires, moyennes de fonctions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960, p. 2501).

[7] *Nombres aléatoires. Suites arithmétiques. Méthode de Monte-Carlo* (*Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris* IX, 1960, p. 289).

[8] *Sur l'existence des solutions turbulentes des équations de l'hydrodynamique* (*C.R. Acad. Sc.*, t. 252, 1961, p. 3392).

[9] *Transformées de Fourier des fonctions pseudo-aléatoires* (*C. R. Acad. Sc.* t. 254, 1962, p. 3072).

Bertrandias (J. P.):

[10] *Sur le produit de deux fonctions pseudo-aléatoires* (*C.R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960, p. 263).

[11] *Sur le produit de plusieurs fonctions pseudo-aléatoires. Applications à la répartition modulo* 1 (*C.R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960, p. 2498).

[12] *Calcul d'une intégrale au moyen de la suite* $X_n = \underset{\smile}{A_n}$. *Evaluation de l'erreur* (*Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, IX, 1960, p. 335).

[13] *Sur l'analyse harmonique généralisée des fonctions pseudo-aléatoires* (*C. R. Acad. Sc.*, 253, 1961. p. 2829).

Blanc-Lapierre (A) et Fortet (R)

[14] *Théorie des fonctions aléatoires* (Masson, 1953).

Kampé de Fériet (J.):

[15] *Les fonctions aléatoires stationnaires et la théorie statistique de la turbulence homogène* (*Ann. Soc. scient. de Bruxelles*, t. 59, 1936, p. 145).

GIRAULT (M.):

[16] *Les fonctions caractéristiques et leurs transformations* (*thèse*, 1954).

MARCINKIEWICZ (J.)

[17] *Une remarque sur les espaces de M. Besikowitch* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 1939, p. 157).

SCHWARTZ (L.):

[18] *Sur le module de la fonction caractéristique du calcul des probabilités* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 212, 1941, p. 418).

WEYL (H.):

[19] *Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins* (*Math. Ann.*, t. 77, 1916, p. 313 à 352).

WIENER (N.):

[20] *Generalized harmonic analysis* (*Acta Math.*, t. 55, 1930, p. 117).

[21] *The Fourier integral and certain of its applications*, Cambridge, 1933.

Table des matières

Dépôt légal No. 1086 No. de Code: 518. 38