MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

RENÉ SAINT-GUILHEM

Les principes de l'analyse dimensionnelle, invariance des relations vectorielles dans certains groupes d'affinités

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 152 (1962)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1962__152__3_0>

René SAINT-GUILHEM

LES PRINCIPES DE L'ANALYSE DIMENSIONNELLE

INVARIANCE DES RELATIONS VECTORIELLES DANS CERTAINS GROUPES D'AFFINITÉS

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CLII

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, Quai des Grands-Augustins

1962

PRÉFACE.

La portée de la présente synthèse ne peut échapper au candidat à une licence d'enseignement, dans l'ordre des mathématiques. En effet, le remarquable exposé que son Auteur, M. René Saint-Guilhem, en donne ici fait découvrir des relations imprévues entre deux champs de pensée, bien différents par leurs méthodes :

1° La Physique, en bloc; en effet, l'expression mathématique des lois naturelles doit rester invariante dans certains changements des unités. D'où caractère homogène des formules, lesquelles comportent même une invariance plus large, de nature affine.

2° Les fondements topologiques sur lesquels repose la théorie des groupes d'affinités. De fait, dans le cas très général, où s'inscrit notamment l'électro-magnétisme, il faut écrire l'invariance d'une relation vectorielle en faisant intervenir le groupe additif d'un espace vectoriel avec ses sous-groupes laissant fixe une variété linéaire du dit espace; étant bien entendu qu'il s'agit de sous-groupes *fermés*.

Voilà une modalité topologique fidèle, en définitive, aux principes que les physiciens avaient *entrevus*. Ils ne pouvaient faire mieux, devant une précaution subtile, qu'il faut d'ailleurs compléter par la notion, topologique elle aussi, de sous-groupe *connexe par arcs* et par un théorème d'après lequel, dans l'espace euclidien R^n à n dimensions, toute surface σ homéomorphe au lieu λ des points dont la distance à un point fixe est constante, sépare R^n en deux régions ou mieux, en deux connexes dont la partie commune se réduit à σ (propriété de Jordan-Brouwer).

Comme en toute recherche vraiment objective, des rencontres ont marqué cette étude ardue. Dès 1945, le problème préalable dont l'énoncé requiert les éléments topologiques cités aux fins du théorème de Vaschy, but ultime, avait déjà suscité une Note de M. Jean Dieudonné aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [4], donnant un contre-exemple remarquable; puis en 1948-1949 un ensemble de travaux japonais aboutissant à un important Mémoire de M. Yamabé [18]. Indépendamment, ces temps derniers, M. Saint-Guilhem a repris [14], [15] le thème dans toute son ampleur, pour aboutir à la forme synthétique atteinte ici même.

A la suite de ce rapprochement Physique-Topologie, on verra bientôt paraître des développements déstinés aux physiciens rendant les relations de situation plus accessibles : comme il paraît des exposés sur la logique, groupant calcul des propositions, réseaux électriques et machines à calculer. Pareilles rencontres témoignent au mieux de l'actuelle vitalité scientifique.

G. BOULIGAND.

RÉSUMÉ.

Toute loi physique s'exprime par une relation mathématique entre un nombre fini p de variables x_i dont chacune est un élément d'un certain espace vectoriel E_i (qui peut être de dimension infinie). Les propriétés de « similitude physique » consistent en l'invariance d'une telle relation dans un groupe de transformations définies par l'application à chaque vecteur x_i d'un multiplicateur positif λ_i.

On est ainsi conduit à étudier les sous-groupes du groupe additif R^p et notamment à établir les trois théorèmes suivants :

1. *Tout sous groupe connexe par arcs de* R^p *est isomorphe à* R^n $(n \leqq p)$.

2. *Lorsque les* E_i *sont normés, toute relation entre les* x_i *définie par un sous ensemble fermé (ou bien ouvert) de l'espace vectoriel* E *produit des* E_i *définit par son invariance un sous groupe fermé de* R^p. *Ce sous groupe est discret, ou bien contient un sous groupe isomorphe à* R^n $(n \leqq p)$.

3. *Si une relation entre p variables réelles* x_i *est invariante dans un groupe isomorphe à* R^n $(n \leqq p)$, *elle est équivalente à une relation entre un nombre fini* $\leqq p - n$ *de formes linéaires des* x_i.

Ces trois théorèmes permettent de résoudre toutes les questions que pose la notion de systèmes ou phénomènes semblables, celle de changement d'unités, etc. En effet, l'hypothèse « connexe par arcs » du théorème 1 est la traduction mathématique précise de l'idée « une unité au moins est susceptible de variations continues ». L'hypothèse « fermé ou ouvert » du théorème 2 est satisfaite par toutes les relations usuelles en physique (y compris les relations de quanta). Le théorème 3 est une extension aux relations quelconques du théorème donné par Vaschy pour les équations; il rectifie certains énoncés usuels de ce dernier.

L'analyse dimensionnelle consiste essentiellement en l'application du théorème 3 à une équation inconnue dont on sait qu'elle se déduit d'un système de conditions entre vecteurs, invariant dans un groupe d'affinités connu.

LES PRINCIPES

DE

L'ANALYSE DIMENSIONNELLE

INVARIANCE DES RELATIONS VECTORIELLES DANS CERTAINS GROUPES D'AFFINITÉS

Par M. René SAINT-GUILHEM.

INTRODUCTION.

1. Dans les sciences physiques et les techniques qui en font application, on utilise fréquemment, surtout depuis une quarantaine d'années, les propriétés d'homogénéité des relations mathématiques représentant les lois naturelles. Dans la littérature ces considérations figurent le plus souvent sous deux formes distinctes :

— Similitude des systèmes et des phénomènes, c'est-à-dire passage des observations faites sur un système aux lois régissant un autre système dit « semblable » ;
— Analyse dimensionnelle, c'est-à-dire prévision de la forme des lois grâce à des changements systématiques d'unités (cette dénomination paraît due à Bridgman).

Dans le premier cas, l'unité de mesure U de chaque espèce de grandeurs étant inchangée, on remplace la grandeur A par λA,

λ étant un nombre positif; la mesure a de A est alors remplacée par λa. Dans le deuxième cas, A n'est pas changé, mais U est remplacé par $\frac{U}{\lambda}$ de sorte que la mesure a devient λa comme dans le cas précédent.

Du point de vue mathématique, on applique donc, dans les deux cas, un facteur positif aux mesures des grandeurs de chaque espèce.

Nous désignerons par « analyse dimensionnelle » la recherche de la forme d'une relation inconnue au moyen de considérations d'homogénéité.

2. Les raisonnements de cet ordre peuvent être en apparence très variés, et plus ou moins systématisés en méthodes générales. Ceux qu'on rencontre en fait dans de nombreuses publications sont souvent peu satisfaisants. Nous avons présenté autrefois [12] une critique détaillée de certains d'entre eux; ici nous nous contenterons de remarquer que les exemples les plus simples donnent lieu à des observations qui font apparaître l'insuffisance des exposés usuels.

A. Tous les Cours de mécanique donnent un exemple élémentaire d'analyse dimensionnelle : celui du pendule simple, constitué par un point matériel de masse μ suspendu à une distance l du point fixe; soit g l'accélération de la pesanteur, α l'élongation initiale (c'est un angle), θ la durée des oscillations (c'est l'inconnue du problème).

Si l'on adopte le type le plus usuel de changements d'unités, celui qui a pour fondamentales la longueur, la masse et le temps, les cinq grandeurs énumérées ont les dimensions respectives M, L, LT^{-2}, 1, T. On admet que ce sont les seules grandeurs qui interviennent dans le phénomène et l'on en déduit que la loi de celui-ci est constituée par une relation entre deux monomes de dimensions nulles, pour lesquels on peut prendre α et $\frac{g\theta^2}{l}$; elle est donc de la forme

$$\theta = \sqrt{\frac{l}{g}}\, f(\alpha),$$

où f désigne une fonction inconnue d'une variable.

On remarque que la masse μ ne figure pas dans cette équation; de nombreux auteurs en concluent que l'analyse dimensionnelle permet d'établir la loi « la période des oscillations est indépendante de la masse ».

Cette affirmation appelle quelques commentaires :

a. Si nous regardons de plus près comment la loi énoncée a été obtenue, nous voyons immédiatement qu'elle résulte de ce que la masse μ est la seule grandeur du problème qui contienne dans ses dimensions la grandeur fondamentale M; μ ne peut donc figurer dans aucun monome de dimensions nulles. Si, au contraire, dans l'énumération initiale, on avait retenu, en plus de μ, une autre grandeur ayant une dimension non nulle en M, la proposition n'aurait pas été obtenue.

b. On a évidemment posé *a priori* que le mouvement était périodique.

c. Si l'on adopte le type de changements d'unités à quatre fondamentales : longueur, temps, masse, angle (convention aussi légitime que la précédente, nous y reviendrons) on trouve par le même raisonnement que ci-dessus la loi

$$\theta = c\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(c étant une constante indépendante de α), qui est fausse.

Pour ces motifs, le raisonnement classique ici rappelé, quelle que soit la forme exacte qu'on lui donne, ne constitue pas une démonstration valable : il lui manque une justification substantielle.

B. Proposons-nous, en électrostatique, de déterminer la capacité C d'un condensateur constitué par deux armatures sphériques concentriques de rayons r_1 et r_2, plongées dans le vide. Dans la loi du phénomène, il n'intervient pas d'autre grandeur que ces trois-là.

Adoptons en premier lieu le type de changements d'unités le plus naturel pour ce problème : il comporte deux fondamentales, la longueur L et la capacité C; r_1 et r_2 sont de l'espèce L. En raisonnant comme pour le pendule, on trouve que la loi cherchée s'exprime au moyen de $3 - 2 = 1$ monome de dimensions nulles.

Celui-ci est nécessairement $\frac{r_2}{r_1}$; la relation cherchée est donc

$$\frac{r_2}{r_1} = \text{Cte},$$

résultat dont l'absurdité rend tout commentaire inutile quant à la valeur de la démonstration.

Si l'on utilise le type « électromagnétique », dans lequel on a $C = L^{-1} T^2$, on trouve la même relation.

Mais si l'on utilise le type défini par la formule de dimensions $C = L^\alpha$, α étant un nombre quelconque, on trouve

$$C = r_1^\alpha f\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

En particulier, le type « électrostatique » $C = L$ conduit au résultat correct

$$C = r_1 f\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Pourquoi donne-t-il et donne-t-il seul la loi exacte?

C. Il se présente des difficultés analogues dans les problèmes plus compliqués qu'on rencontre effectivement en pratique (alors que les deux précédents n'ont évidemment qu'un intérêt théorique). Nous en donnons ici un exemple célèbre et très instructif, sur lequel ont écrit de nombreux physiciens (1) et que nous avons traité ailleurs de façon complète (2).

Il s'agit de convection forcée : soit un solide défini par une longueur caractéristique l dans une famille de corps semblables géométriquement : il est supposé maintenu à une température constante θ_1 et plongé dans un fluide animé d'une vitesse uniforme w à grande distance du solide, et de température $\theta_2 = \theta_1 - \theta$. Soit χ le coefficient de conductibilité du fluide, C sa chaleur spécifique. On admet que le débit D de chaleur entre solide et fluide est une fonction de ces cinq grandeurs

$$D = f(l, w, \chi, C, \theta)$$

et l'on applique l'analyse dimensionnelle à la manière usuelle.

a. En adoptant trois fondamentales longueur, temps, masse, en donnant à la température les dimensions du carré d'une vitesse (ce qui est assez naturel quand on connaît la théorie cinétique des gaz,

(1) Entre autres : Lord Rayleigh, Boussinesq, Riabouchinsky, Bridgman.

(2) *Voir* les références [11] et [12] de la bibliographie.
Voir également chap. II ci dessous, § 43.

et en tout cas légitime), on peut former trois monomes indépendants de dimensions nulles, d'où la loi

$$D = \chi l \theta f\left(\frac{\theta}{w^2}, \frac{C l w}{\chi}\right).$$

b. En adoptant, au contraire, quatre fondamentales, longueur, temps, quantité de chaleur, température (convention aussi naturelle et aussi légitime que la précédente), on obtient de même la loi

$$d = \chi l \theta f\left(\frac{C l w}{\chi}\right).$$

Ces deux résultats ne sont pas contradictoires, mais le second est infiniment plus précis que le premier (il est d'ailleurs confirmé par la théorie de Boussinesq).

Cette différence entre les résultats fournis par deux raisonnements différents est paradoxale d'autant plus que la première convention touchant les changements d'unités semble tenir compte de la « réalité des choses » en se rattachant à la théorie moléculaire, si bien qu'on peut dire qu'en feignant d'ignorer ce que nous savons de la nature de la chaleur et de la température, nous avons fait un grand pas dans la connaissance du phénomène.

3. Un grand nombre de problèmes conduisent à des difficultés analogues, se rattachant à la question de principe : comment peut-on donner *a priori*, même partiellement, la forme de la loi d'un phénomène, sans en faire au préalable une étude expérimentale?.

A cette question, qui concerne les fondements de l'analyse dimensionnelle, s'en rattachent un grand nombre d'autres d'une portée très générale, concernant les systèmes d'unités, l'homogénéité des équations et la similitude physique.

On peut retenir, par exemple, les suivantes :

— Pourquoi utilise-t-on, parmi les changements d'unités possibles, exclusivement ceux qui sont définis par des lois dimensionnelles?.

— Existe-t-il des changements d'une autre forme mathématique qui « conservent » les équations?

— Quelle est la signification des formules de dimensions?

— Quel est le sens de l'invariance dont jouissent les grandeurs sans dimensions?

— Quelle est la nature des « constantes dimensionnées » qui figurent dans l'expression de certaines lois physiques?

— Dans une telle expression, quel rôle peuvent avoir les fonctions transcendantes telles que sinus, logarithmes, etc.?

On ne peut répondre correctement aux questions de ce genre que dans le cadre d'une théorie générale de l'invariance des relations exprimant une loi physique, qui fait l'objet du chapitre I ci-après.

4. Les tentatives faites pour l'application de considérations d'homogénéité sont fort anciennes; mais c'est seulement depuis le début du siècle qu'on a essayé de les constituer en une doctrine. Les publications sur ce sujet ont été d'une abondance excessive, sans doute en raison du très vaste domaine qui s'offre aux applications, mais aussi parce que les problèmes qui se posent n'ont pas été jusqu'ici tous résolus, ce qui a incité de nombreux auteurs à les reprendre. Bien des obscurités et des erreurs ont été ainsi accumulées. A ce qui a été dit plus haut à ce sujet (§ 2) nous n'ajoutons ici que le rappel des discussions prolongées concernant les « systèmes cohérents d'unités », les développements injustifiés sur les « équations universelles », etc. L'erreur de principe la plus caractéristique consiste à attribuer un « sens profond » aux formules de dimensions, alors que celles-ci changent bien évidemment avec les conventions qu'on adopte pour les changements d'unités.

La question qui se pose est de délimiter exactement les possibilités de l'analyse dimensionnelle et donc d'examiner sur quelles bases on peut la fonder rigoureusement. En examinant ce problème on constate aisément qu'il porte exclusivement sur *la forme* des relations exprimant les lois de la physique. L'analyse dimensionnelle verra ses possibilités réelles déterminées par une étude purement mathématique.

5. La plupart des auteurs qui ont cherché à édifier une théorie systématique ont vu seulement le théorème en vertu duquel une équation entre p variables réelles, si elle satisfait à certaines conditions d'homogénéité « physique » peut s'écrire au moyen d'un nombre moindre de variables réduites, qui sont des produits de puissances des précédentes. Ce théorème est dû à Vaschy (1890).

Il est d'un usage constant : c'est lui qu'on applique directement, consciemment ou non, quand on traite un problème particulier par l'analyse dimensionnelle.

Mais le théorème de Vaschy n'a d'intérêt, c'est-à-dire que ses fréquentes applications ne sont justifiées, que grâce à un théorème préalable, d'une portée très générale, dont nous avons donné un énoncé en 1959 [13], [14]; nous en donnerons ci-après la démonstration dans un cas particulier et nous en préciserons la portée.

Ce théorème, pressenti antérieurement par plusieurs auteurs, n'a pas été énoncé avant 1959 sous sa forme générale; nous donnons en Annexe (Note II) quelques indications historiques à ce sujet. Ici nous nous contentons de signaler une raison profonde des échecs de nombreux auteurs, parce qu'elle importe à la compréhension de ce qui suit.

Une équation entre p variables réelles peut être transformée par les méthodes habituelles du calcul; par exemple, on peut la résoudre (sous certaines conditions) par rapport à l'une des variables réduites conformément au théorème de Vaschy. Mais faire cette transformation ne constitue pas un problème d'analyse dimensionnelle. Le théorème de Vaschy n'apporte quelque chose d'intéressant que si on l'applique à une relation inconnue, en fait celle qui est conséquence d'une équation connue ou d'un système connu d'équations plus compliqué, constituant une relation fonctionnelle (c'est-à-dire contenant des fonctions inconnues); il s'agit le plus souvent d'équations aux dérivées partielles.

C'est dans ce passage de relations fonctionnelles données à des relations inconnues entre variables réelles qu'est la *raison d'être* de l'analyse dimensionnelle.

6. L'objet du présent Ouvrage est de donner une théorie de l'invariance des relations entre éléments d'espaces vectoriels dans certains groupes d'affinités (chap. I) et d'en déduire une méthode générale d'analyse dimensionnelle, fondée rigoureusement et fournissant le maximum de résultats qu'on puisse tirer de considérations d'homogénéité (chap. II).

Ainsi se trouveront définies les possibilités de l'analyse dimensionnelle, qui apparaîtra comme constituant une technique de calcul faisant partie des « mathématiques appliquées ».

Nous souhaitons que cet exposé permette une révision de leur position aux mathématiciens qui ont à l'égard de l'analyse dimensionnelle une méfiance justifiée par l'exemple de démonstrations fantaisistes et d'erreurs graves, et que d'autre part il inspire aux physiciens et aux ingénieurs toute la prudence nécessaire dans l'emploi de méthodes dont la simplicité apparente est évidemment séduisante.

Remarque. — Nous avons exposé la méthode générale d'analyse dimensionnelle, ainsi que divers exemples et compléments, dans des publications antérieures [14], [15]. Mais celles-ci ne contiennent pas les développements mathématiques qui justifient la méthode, en particulier la démonstration des théorèmes fondamentaux, que nous publions ici pour la première fois (chap. I).

Les éléments de topologie et d'algèbre auxquels cette théorie fait appel sont aujourd'hui enseignés dans les Universités au niveau de la licence (Certificat de Mathématiques I).

CHAPITRE I.

Théorie de l'invariance des relations vectorielles dans certains groupes d'affinités.

A. — Énoncé du problème.

7. Nous considérons, dans ce qui suit, les relations mathématiques propres à traduire les lois de la physique ou de toute autre science.

Dans ces relations figurent les *mesures* de certaines grandeurs : il n'y a de science que du mesurable. La distinction faite souvent [1] entre grandeurs mesurables et grandeurs seulement repérables doit être abandonnée. Nous donnerons le nom « *espèce de grandeurs mesurables ordinaires* » *à tout ensemble de grandeurs qui peut être mis en correspondance biunivoque avec l'ensemble des nombres réels*. Chaque grandeur de cet ensemble est alors mesurée par un nombre réel.

---

(1) Entre autres par l'auteur lui même autrefois [12].

En vue de fonder correctement l'analyse dimensionnelle, et pour une raison succinctement indiquée au paragraphe 5, il est indispensable d'introduire une notion beaucoup plus large : nous appellerons « *espèce de grandeurs mesurables au sens général* » *tout ensemble de grandeurs qui peut être mis en correspondance biunivoque avec un espace vectoriel* ([1]). Ceci revient à dire qu'on peut définir la somme de deux grandeurs de même espèce et le produit de l'une d'elles par un nombre réel. Chaque grandeur de cet ensemble est alors mesurée par un « vecteur » ([2]). En général, l'espace vectoriel en cause est de dimension infinie (dans le cas particulier où il est de dimension finie, on se ramène immédiatement au cas des grandeurs ordinaires par la considération des composantes).

En pratique, ces vecteurs sont le plus souvent les éléments d'un certain ensemble de fonctions d'un certain nombre de variables réelles. On considère, par exemple, la fonction de trois variables réelles représentant la distribution d'une grandeur « ordinaire » dans l'espace usuel à trois dimensions.

Cette notion étendue de grandeur couvre tous les besoins de la physique et des autres sciences dans leur état actuel. Malgré sa très grande généralité, elle permet, nous allons le voir, de fonder l'analyse dimensionnelle; celle-ci pourra donc s'appliquer à un champ très vaste.

8. Nous considérons maintenant une *relation quelconque* entre un nombre fini p de vecteurs x_i, c'est-à-dire d'éléments appartenant respectivement à p espaces vectoriels E_i. On peut considérer qu'une telle relation contient un seul vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ appartenant à l'espace vectoriel E produit des E_i

$$E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p,$$

([1]) Nous utilisons la dénomination d'espace vectoriel dans son sens aujourd'hui classique, concernant une certaine structure algébrique. Il vaudrait mieux la remplacer par celle d'ensemble vectoriel, le mot espace étant alors réservé aux ensembles munis d'une structure topologique.

Dans tout ce qui suit, il s'agit d'espaces vectoriels construits sur le corps des nombres réels.

([2]) Dans la suite nous désignerons donc par le mot vecteur tout élément d'un espace vectoriel quelconque.

La relation la plus générale est définie alors par

$$x \in F,$$

F étant un sous-ensemble quelconque de E.

9. A chaque variable x_i nous appliquons alors une homothétie de coefficient positif λ_i, c'est-à-dire qu'à chaque x_i nous faisons correspondre dans E_i le vecteur $\lambda_i x_i = x'_i$. La variable x subit alors dans E une affinité d'un type particulier L; l'ensemble $\mathcal{L}$ des L correspond biunivoquement au sous-ensemble R^p_+ de R^p défini [1] par les p conditions $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, ..., $\lambda_p > 0$. C'est un ensemble ouvert dans R^p.

Chaque opération L admet évidemment un inverse L^{-1} défini par les multiplicateurs $\frac{1}{\lambda_i}$. Il en résulte immédiatement que *$\mathcal{L}$ est un groupe*.

Nous nous proposons d'étudier le sous-ensemble de $\mathcal{L}$ constitué par les L qui conservent une relation F, c'est-à-dire qui transforment l'ensemble F de E en lui-même. *D'après le paragraphe 7 c'est le problème de l'invariance des relations physiques dans une similitude ou dans un changement d'unités, posé dans toute sa généralité.* Cette extrême généralité ne nous empêchera pas d'obtenir des conclusions très précises.

Remarque. — Si l'on admettait dans l'ensemble $\mathcal{L}$ les transformations dont l'un des λ_i est nul, cet ensemble ne serait plus un groupe. Cette remarque évidente ne doit pas être perdue de vue pour la suite (théorèmes II et III).

B. — Théorème préliminaire.

10. Les affinités L conservant une relation F forment un groupe. — Cet énoncé constitue un cas particulier d'un théorème classique presque évident.

Démonstration. — Soit L une affinité du type précédent transformant F en lui-même : tout élément x de F est transformé en $z = Lx \in F$ et tout élément x de F est le transformé d'un autre élément $y \in F$, c'est-à-dire que $x = Ly$.

[1] Conformément à la notation aujourd'hui classique, R^p désigne dans tout ce qui suit l'espace numérique à p dimensions réelles ou le groupe additif correspondant et R désigne l'ensemble des nombres réels, ou le groupe additif correspondant.

a. L'affinité inverse L^{-1} transforme donc tout élément $x \in F$ en $L^{-1}Ly = y$ qui appartient à F; et tout élément $x \in F$ est de la forme $L^{-1}z$, avec $z \in F$. Donc L^{-1} transforme F en lui-même.

b. On voit de même que le produit de deux affinités conservant F conserve lui même F.

Le groupe G ainsi défini est un sous-groupe de $\mathcal{L}$. La correspondance $\log \lambda_i = \mu_i$ montre immédiatement que *$\mathcal{L}$ est isomorphe au groupe additif* R^p *et que* G *est donc isomorphe à un sous-groupe de* R^p.

Naturellement, suivant la nature de l'ensemble F, G peut avoir différentes propriétés : il peut lui-même admettre des sous groupes; il peut se réduire à la transformation identique; il peut être discret, etc.

Quelques exemples montreront utilement les circonstances variées qui peuvent se présenter, même pour des relations F très simples :

Exemple 1. — L'équation $x_1 + x_2 = a$, où x_1, x_2 et la constante a appartiennent à un même espace vectoriel E_1, admet la seule affinité $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Démonstration. — L'équivalence de

$$x_1 + x_2 = a \qquad \text{et de} \qquad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = a$$

entraîne l'identité en x_1.

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, x_1 + (\lambda_2 - 1)\, a = 0.$$

Exemple 2. — L'invariance de l'équation

$$\sin(\log |x_1|) - x_2 = 0 \qquad (x_1 \in R,\ x_2 \in R)$$

définit le groupe discret

$$\lambda_1 = (e^{2\pi})^n, \qquad \lambda_2 = 1,$$

n étant un entier quelconque.

Ce groupe admet une infinité de sous-groupes discrets

$$\lambda_1 = (e^{2\pi m})^n, \qquad \lambda_2 = 1,$$

m étant un entier fixe quelconque.

Démonstration. — L'équivalence de la relation considérée avec

$$\sin(\log |\lambda_1 x_1|) - \lambda_2 x_2 = 0$$

qui s'écrit

$$\sin(\log\lambda_1 + \log|x_1|) - \lambda_2 x_2 = 0$$

ou $\sin(\log\lambda_1)\cos(\log|x_1|) + \cos(\log\lambda_1)\sin(\log|x_1|) - \lambda_2 x_2 = 0$

entraîne, pour tout x_1

$$\sin(\log\lambda_1)\cos(\log|x_1|) + \cos(\log\lambda_1)\sin(\log|x_1|) - \lambda_2\sin(\log|x_1|) = 0$$

d'où

$$\sin(\log\lambda_1) = 0, \qquad \cos(\log\lambda_1) = \lambda_2,$$

et, par suite,

$$\log\lambda_1 = 2\pi n, \qquad \lambda_2 = 1$$

(car $\lambda_2 = -1$ est exclu).

Exemple 3. — L'invariance de l'équation $ax_1 + bx_2 = 0$, a et b constants non nuls $\in \mathrm{R}$,

$$x_1 \in \mathrm{E}_1, \qquad x_2 \in \mathrm{E}_1$$

définit le groupe $\lambda_1 = \lambda_2$ à un paramètre (représenté dans R_+^2 par la bissectrice).

Exemple 4. — L'équation différentielle $a\,dx_1 + b\,dx_2 = 0$ définit le même groupe.

Exemple 5. — L'équation algébrique entre variables réelles $x_2 - x_1 x_3 = 0$ et l'équation différentielle

$$dx_2 - x_3\,dx_1 = 0$$

définissent le même groupe $\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 = 0$.

Celui-ci admet le sous-groupe $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3$.

Exemple 6. — L'inéquation $x_1 > a$, où x_1 est une variable réelle, a une constante réelle n'admet que l'affinité identique.

De même,

$$x_1^2 + x_2^2 > a^2 \qquad (x_1 \in \mathrm{R},\ x_2 \in \mathrm{R},\ a \in \mathrm{R}).$$

Au contraire, $x_1^2 + x_2^2 > 0$ admet le groupe (λ_1 et λ_2 quelconques) R^2 tout entier

Démonstration directe du premier résultat. — Supposons pour fixer les idées $a > 0$.

L'inéquation $x_1 - a > 0$ entraîne

$$\lambda_1 x_1 - a > 0$$

ou encore

$$(\lambda_1 - 1) x_1 + x_1 - a > 0$$

et, par conséquent, on a

$$(\lambda_1 - 1) x_1 \geqq 0 \quad \text{quel que soit } x_1 > a,$$

d'où

$$\lambda_1 - 1 \geqq 0.$$

De même, si l'inéquation $\lambda_1 x_1 - a > 0$ entraîne

$$x_1 - a > 0,$$

elle entraîne

$$\lambda_1 (x_1 - a) > 0$$

ou encore

$$\lambda_1 x_1 - a + a(1 - \lambda_1) > 0$$

et, par conséquent,

$$a(1 - \lambda_1) \geqq 0, \qquad \text{d'où} \qquad 1 - \lambda_1 \geqq 0.$$

On traite de même les autres exemples. On peut simplifier beaucoup l'étude des inéquations en remarquant que si F est invariant, son complémentaire l'est aussi, et donc sa frontière. Les résultats ci-dessus sont alors immédiats

Exemple 7. — La relation « x_1 et x_2 sont commensurables » définit le groupe « λ_1 et λ_2 sont commensurables ».

Démonstration. — « $\frac{x_2}{x_1}$ rationnel » et « $\frac{\lambda_2 x_2}{\lambda_1 x_1}$ rationnel » doivent être deux relations équivalentes. On voit immédiatement que ceci exige « $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ rationnel » et cette condition est évidemment suffisante. Ici le groupe G est partout dense dans R_+^2. Il est constitué par la réunion des droites de pente rationnelle issues de l'origine, ce point étant exclu.

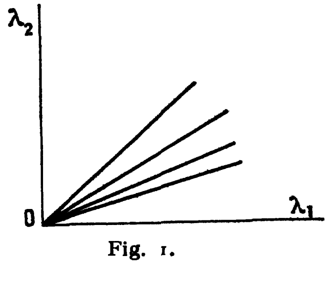

Fig. 1.

Exemple 8. — La relation « $\frac{x_2}{x_1}$ entier positif » définit le groupe $\lambda_1 = \lambda_2$.

Démonstration. — La relation « $\frac{x_2}{x_1}$ entier » doit être équivalente à « $\frac{\lambda_2 x_2}{\lambda_1 x_1}$ entier ».

Comme $\frac{\lambda_2 x_2}{\lambda_1 x_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{x_2}{x_1}$ le fait que la première relation implique la deuxième entraîne que $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ doit être entier $\left(\text{considérer le cas } \frac{x_2}{x_1} = 1\right)$. L'implication réciproque entraîne, puisque

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\lambda_2 x_2}{\lambda_1 x_1},$$

que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est entier.

La seule solution est donc $\lambda_1 = \lambda_2$.

Ici l'ensemble F n'est ni fermé ni ouvert dans R^2 : c'est l'ensemble des droites $x_2 = n x_1$, avec n entier $\geqq 1$. Sa frontière contient

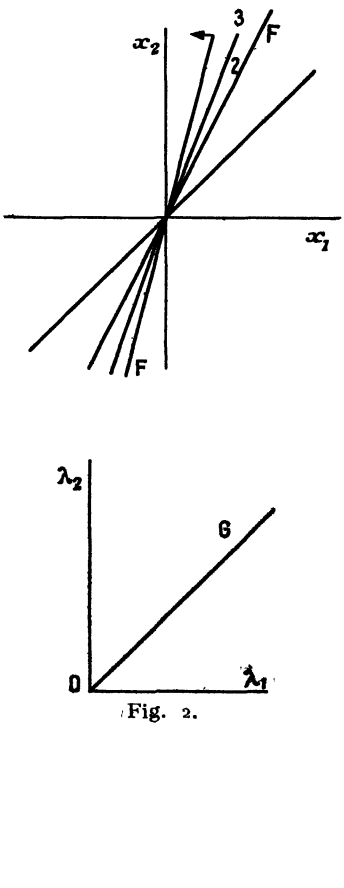

Fig. 2.

l'axe Ox_2; il est évident que cette frontière est invariante, comme il se doit, dans le groupe G.

Les mêmes conclusions subsistent pour la relation « $\frac{x_2}{x_1}$ est entier positif ou négatif » et même pour la relation « $\frac{x_2}{x_1}$ est entier positif, négatif ou nul ».

Cet exemple est remarquable, car il correspond à la loi physique de quanta la plus simple possible, par exemple celle qui exprime que toutes les charges électriques sont multiples d'une charge élémentaire. Cette loi n'interdit aucunement un choix arbitraire de l'unité de charge.

C. — Étude des sous groupes du groupe additif R^p.

11. La recherche des affinités conservant une relation vectorielle est ramenée par ce qui précède à celle des sous-groupes du groupe additif R^p.

L'étude de ces sous-groupes a été faite en partie; seuls les sous-groupes fermés sont connus [2].

Voici les principales propriétés qu'on peut établir par des moyens simples (souvent plus simples que ceux utilisés dans [2]).

1° Lemme de prolongement. — *Si* H *est une partie d'un sous-groupe* G *de* R^p *tout ensemble* H' *déduit de* H *par une translation quelconque de* R^p *et rencontrant* G *est contenu dans* G.

Ce lemme vaut pour un groupe quelconque et pas seulement pour R^p. Sa démonstration est immédiate : H' rencontre G en un point au moins b qui coïncide avec le transformé d'un élément $a \in H$ par une translation $c \in R^p$; on a donc

$$b = a + c \in G,$$

d'où

$$c = b - a \in G \qquad \text{et} \qquad H' = H + c \subset G.$$

C'est la seule propriété que nous utiliserons dans la démonstration qui suit (§ 13) du théorème fondamental. A titre indicatif, nous donnons cependant les suivantes :

2° Le seul sous-groupe ouvert dans R^p est R^p lui-même.

3° Le complémentaire de G dans R^p est ou vide ou partout dense.

4° Tout sous-groupe fermé contenant une suite convergente de points de R^p contient une variété linéaire.

5° L'ensemble dérivé de G est un sous-groupe de R^p ; son adhérence également.

6° Tout sous-groupe de R^p est discret ou dense en soi (contenu dans son dérivé).

7° Tout sous-groupe fermé est, soit discret, soit constitué par un sous-espace vectoriel de R^p, soit constitué par un ensemble de variétés linéaires parallèles.

8° L'intersection d'un sous-groupe G avec une variété linéaire est, soit vide, soit déduite par une translation de son intersection avec le sous-espace vectoriel de R^p qui se déduit par translation de cette variété.

9° Tout sous-groupe connexe par arcs est partout dense dans le sous-espace R^r qu'il détermine. Son complémentaire dans R^r est ou vide ou connexe (et alors partout dense).

Ce dernier théorème, qui paraît restreindre beaucoup la généralité de l'ensemble G, ne suffit cependant pas à établir le résultat que nous avons en vue pour de tels sous-groupes, savoir que le complémentaire est vide. On peut, en effet, donner aisément dans R^3 un exemple de deux ensembles complémentaires non vides, partout denses et connexes par arcs.

D. — Sous groupes connexes par arcs.

Théorème I.

12. Les exemples du paragraphe 7 montrent que les sous-groupes de R^p définis par l'invariance d'une relation vectorielle, même très simple, peuvent être de types variés, et notamment non fermés dans R^p. En vue des applications à l'analyse dimensionnelle, on est amené à se demander quelles hypothèses supplémentaires permettront de restreindre cette généralité, et notamment d'établir que le sous-groupe est fermé.

Dans les sciences physiques et les techniques on exige généralement que les unités puissent être choisies arbitrairement; ou bien on exige que « deux systèmes semblables soient régis par les mêmes lois », phrase qui par elle-même a un sens évidemment assez vague. D'une façon plus précise, on désire pouvoir faire varier « de façon continue » les multiplicateurs λ_i introduits au paragraphe 6 sans modifier la relation F. La traduction mathématique de ce postulat est que tout élément de G doit appartenir à un arc continu contenu dans G; plus simplement le sous-groupe G doit contenir un arc continu.

L'expression classique de « groupe continu » n'a par elle-même aucun sens précis; il faut lui en donner un. Celui que nous adoptons ici est le moins restrictif; en outre, il nous paraît traduire au mieux le point de vue que les physiciens expriment plus ou moins nettement.

Quels sont les sous-groupes de R^p satisfaisant à cette condition ?

Il est évident que tout groupe fermé non discret (*cf.* § 11, 7ᵉ alinéa) y satisfait. Nous allons montrer que réciproquement tout sous-groupe satisfaisant à cette condition contient un sous-groupe fermé non discret et, par conséquent, contient un sous-groupe isomorphe à R^r ($1 \leqq r \leqq p$). C'est l'objet du théorème fondamental que nous appelons dans la présente étude Théorème I (le seul groupe ouvert, qui est R^p lui-même, est aussi fermé).

On peut chercher à le démontrer par des voies diverses, de caractère élémentaire; mais ces méthodes échouent; en effet, malgré la simplicité apparente de l'énoncé, un appel à la topologie est nécessaire. Voici la démonstration que nous avons donnée pour $p = 2$.

13. Soit G un sous-groupe de R^2 contenant un arc Γ non rectiligne (c'est-à-dire que Γ contient trois points non alignés); on peut toujours supposer que Γ contient l'origine O.

Si Γ contient au moins un segment de droite, G contient la droite support D et un arc γ joignant un point a de D à un point b extérieur; il contient donc toute droite parallèle à D rencontrant γ, et par conséquent tout le plan.

Dans le cas général, Γ ne contient aucun segment de droite; il contient O et deux points α et β non alignés avec O; il contient un arc A_0 joignant O à α et un arc B_0 joignant O à β. G contient les sommets du réseau engendré par ces trois points et l'ensemble connexe C constitué par la réunion des arcs déduits de A_0 et de B_0 par la répétition des translations α et β.

Soit p un point quelconque du plan. Il appartient à une maille-parallélogramme du réseau, soit $abcd$ (avec $b = a + \alpha$, $d = a + \beta$). Soit A l'arc de C joignant a à b, B joignant a à d (*fig.* 3).

La droite menée par p parallèlement à β coupe A en un point au moins, soit q. Elle coupe les arcs $A + n\beta$ translatés de A aux points $q + n\beta$ (n entier positif, nul ou négatif); soit q_r celui de ces

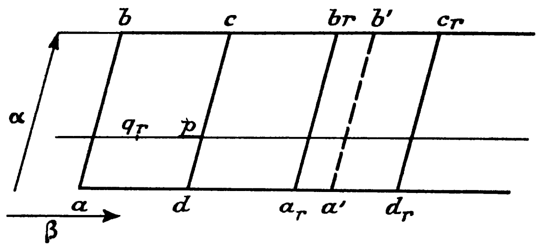

Fig. 3.

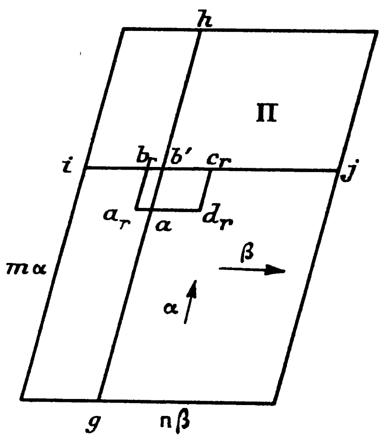

Fig. 4.

points tel que p soit compris entre q_r et $q_r + \beta$ et A_r l'arc passant par q_r translaté de A. La translation $p - q_r$ transforme A_r en un arc A' passant par p, qui joint un point a' du côté $a_r d_r$ du réseau à un point b' du côté $b_r c_r$, avec $b' = a' + \alpha$. Soit B_r l'arc translaté de B joignant a_r à d_r.

Les arcs A_0 et B_0 étant bornés, il en est de même de A' et de B_r. Il existe dont (*fig.* 4) un parallélogramme Π de côtés $m\alpha$ et $n\beta$, réunion de mailles du réseau, qui contient A' et B_r *dans son intérieur*. Les translations α, 2α, ... et $-\alpha$, -2α, ... transforment A' en $m-1$ arcs égaux dont la réunion avec A' constitue un arc A'' joignant les points g et $h = g + m\alpha$ situés sur deux côtés opposés de Π égaux à $n\beta$ *et ne rencontrant pas* les deux côtés égaux à $m\alpha$. De même, par des translations β appliquées à B_r on forme un arc B'', joignant les points i et $j = i + n\beta$ appartenant aux deux côtés opposés de Π égaux à $m\alpha$, et ne rencontrant pas les deux autres côtés. B'' est contenu dans G.

Le théorème de Jordan (une courbe fermée simple coupe le plan en deux domaines) montre alors que les arcs A'' et B'' se rencontrent (en un point intérieur à Π). Il en résulte (lemme de prolongement du paragraphe 11) que A'' est contenu dans G, donc aussi le point p :

Tout sous-groupe de R^2 *contenant un arc non rectiligne est identique à* R^2. Comme il est, par ailleurs, évident que tout sous-groupe de R^2 contenant un segment de droite contient la droite support, c'est-à-dire un sous-groupe isomorphe à R, *les seuls sous-groupes de* R^2 *connexes par arcs sont le groupe* R^2 *lui-même et les sous-groupes isomorphes à* R.

14. Autre forme de la démonstration. — Partant des arcs A_0 et B_0 d'origine O, d'extrémités α et β, qui sont bornés, on construit le parallélogramme Π de centre O, de côtés $2m\alpha$ et $2n\beta$ qui contient ces arcs dans son intérieur (*fig.* 5). Donnant à A_0 les translations $-m\alpha, \ldots, -\alpha, \alpha, 2\alpha, \ldots (m-1)\alpha$, on construit un arc A^1 contenu dans G, joignant les points $-m\alpha$ et $+m\alpha$, ne rencontrant pas les droites supports des côtés de Π égaux à $2m\alpha$. On construit de même un arc B^1 contenu dans G et joignant $-n\beta$ et $+n\beta$.

Donnant à Π les translations $2pm\alpha$ et $2qn\beta$, p et q entiers $\left(\text{ou entiers plus } \frac{1}{2}\right)$ variant de $-N$ à $+N$, on constitue deux « bandes » S et T, réunions de parallélogrammes, dont les milieux des côtés parallèles à β et α respectivement sont joints par deux arcs A^2 et B^2 contenus dans G.

Soit alors x, un point du parallélogramme Π'_N de centre O et de côtés $4Nm\alpha$ et $4Nn\beta$. La translation x amène la bande T en T', dont l'intersection avec S est un parallélogramme Π_ξ translaté de Π

et l'arc B^2 en B' contenant x. Par application du théorème de Jordan (comme plus haut) l'arc B' rencontre l'arc A^2 (en au moins un point intérieur à Π_ξ), d'où la conclusion.

Cette méthode montre, en outre, que tout point de Π'_N peut être atteint à partir de O par des translations successives, appartenant à Γ ou à son symétrique, en nombre inférieur ou égal à $(2N+1)(m+n)+1$. Pour le parallélogramme Π lui-même $\left(N = \frac{1}{2}\right)$ cette borne supérieure

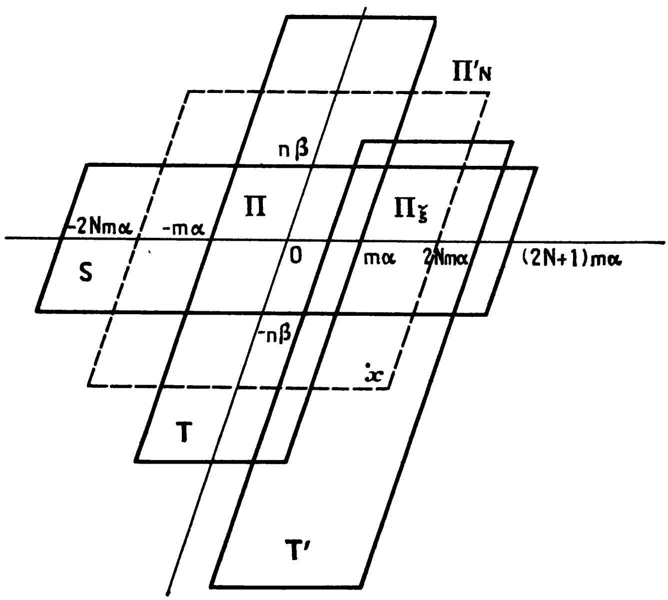

Fig. 5.

est $2(m+n)+1$. Ainsi *tout voisinage borné de l'origine est couvert au moyen d'un nombre borné de translations de l'arc donné ou de son symétrique.*

Pour certains arcs Γ on peut choisir α et β de manière qu'on ait $m = n = 1$. Alors Π est couvert par cinq translations au plus.

15. M. Jean Dieudonné a étendu la démonstration précédente au cas général $p > 2$. Il a bien voulu nous signaler par la suite que ce théorème avait été établi vers 1949 par plusieurs auteurs japonais et même étendu par l'un d'eux ultérieurement, sous une forme peu différente, à tous les groupes de Lie [18].

Tout sous-groupe de R^p contenant un arc contient donc un sous-groupe fermé constitué par un sous-espace vectoriel de R^p, c'est-à-dire un sous-groupe isomorphe à $R^r (1 \leqq r \leqq p)$. Sous une autre forme, *tout sous-groupe de* R^p *connexe par arcs est isomorphe à* R^r; en langage « classique » c'est un groupe à r paramètres intervenant linéairement dans les équations de la transformation.

Il est à noter que la conclusion de ce théorème fondamental n'est pas valable pour un groupe seulement connexe au sens ordinaire en topologie générale (un espace est connexe s'il n'est pas la réunion de deux ensembles fermés disjoints) [4], [7].

16. Passons alors du groupe additif R^p au groupe multiplicatif R_+^p qui lui est isomorphe. On obtient le théorème suivant, extrêmement général, qui résout le problème posé au début du présent travail (§ 6) et qui présente un caractère fondamental pour toute l'analyse dimensionnelle :

Si une relation vectorielle quelconque est invariante dans un groupe connexe par arcs d'affinités du type L, *alors ce groupe est défini dans* R_+^p *par* $n < p$ *relations de forme monome,*

$$\lambda_1^{a_1^h} \lambda_2^{a_2^h} \dots \lambda_p^{a_p^h} = 1, \tag{1}$$

où les a_i^h *sont des constantes réelles* (¹).

Plusieurs auteurs ont donné des énoncés analogues, mais beaucoup moins généraux, appuyés de démonstrations utilisant les mathématiques « classiques » qui exigent en réalité des hypothèses complémentaires très restrictives; elles sont assez souvent erronées; quelquefois les énoncés le sont aussi (*voir* Note II à la fin du présent exposé).

Cette insuffisance tient essentiellement à ce que ces auteurs considèrent toujours des équations entre variables réelles; ce n'est qu'un cas très particulier de relation mathématique, qui repose sur la notion de fonction; au contraire, nous partons de la notion beaucoup plus générale de relation au sens « moderne » du mot, c'est-à-dire « ensembliste ».

(¹) Nous écrivons $n < p$ et non $n \leqq p$ parce que nous supposons qu'il s'agit d'un groupe ne se réduisant pas à la transformation identique.

E. — Cas des relations fermées.

Théorème II.

17. La question se pose tout naturellement de savoir si certaines propriétés de la relation F entraînent certaines propriétés du groupe d'affinités G défini par son invariance.

En recherchant des démonstrations élémentaires du théorème « des produits de puissances » qui précède, certains auteurs ont cru pouvoir énoncer des relations entre la continuité du premier membre d'une équation et celle du groupe G défini par son invariance.

Les exemples ci-dessus (§ 10) suffisent à montrer que tout énoncé de ce type est faux : l'exemple 2 porte sur une équation à premier membre continu dont le groupe d'invariance est discret; l'exemple 8 porte sur une relation discontinue dont le groupe est « continu » à un paramètre.

Toutefois, on peut donner le théorème suivant, qui permet dans certains cas de montrer que G est fermé.

18. *Si les* E_i *sont des espaces vectoriels normés et si l'ensemble* F *est fermé dans* E (*au sens de la topologie produit de celles des* E_i) *le groupe* G *d'affinités* L *défini par l'invariance de* F *est lui-même fermé dans* R_+^p (au sens de la topologie de R^p, c'est-à-dire au sens de la topologie induite sur R_+^p par la topologie habituelle de R^p).

Démonstration. — *a.* Nous avons déjà remarqué que toute affinité L étant définie par des multiplicateurs λ_i positifs, établit entre les points de E une correspondance biunivoque. Nous allons montrer ici qu'elle est continue et que son inverse est continue, c'est-à-dire qu'elle constitue une homéomorphie. En effet, chaque E_i étant par hypothèse muni d'une norme, la topologie produit sur E est définie par la norme

$$\|x\|_E = \sum_i \|x_i\|_{E_i}. \tag{2}$$

Si l'on désigne alors par λ un nombre supérieur ou égal aux p nombres positifs λ_i, on a

$$\|Lx\|_E = \sum_i \|\lambda_i x_i\|_{E_i} = \sum_i \lambda_i \|x_i\|_{E_i} \leq \lambda \sum_i \|x_i\|_E = \lambda \|x\|_E.$$

L'opération linéaire L est donc bornée et, par suite, continue. Il en est donc de même de son inverse (puisque celle-ci est aussi une opération L).

On peut remarquer au surplus que si l'on considère un point du sous-espace E_k, c'est-à-dire un point x dont toutes les composantes sont nulles, sauf x_k, on a

$$\| Lx \|_E = \| \lambda_k x_k \|_{E_k} = \lambda_k \| x_k \|_{E_k} = \lambda_k \| x \|_E.$$

On en conclut que la norme de l'opération L est égale au plus grand des multiplicateurs λ_i.

On remarque qu'une affinité de même définition que L, mais pour laquelle un ou plusieurs λ_i sont nuls, est encore continue. C'est en particulier le cas de la projection de E sur l'un des sous-espaces E_i.

b. Considérons les points d'accumulation de G, au sens de la topologie de R^p; puisque $G \subset R_+^p$ il peut en exister qui appartiennent à R_+^p et d'autres à la frontière de R_+^p (ces derniers ont au moins une coordonnée λ_i nulle). Soit α un de ces points d'accumulation qui appartiennent à R_+^p. Il définit, comme tout point de R_+^p, une affinité L.

Soit alors $\{ L_k \}$ une suite de points L_k appartenant à G convergeant vers α (au sens de la topologie de R^p). x étant un point quelconque de F, fixe pour le moment, les points $L_k x \in F$ convergent dans E vers le point αx. En effet, puisque les opérations L sont continues, on a

$$(3) \qquad \| L_k x - \alpha x \|_E = \| (L_k - \alpha) x \|_E \leq \| L_k - \alpha \| . \| x \|_E,$$

$\| L_k - \alpha \|$ désignant la norme de l'opération $L_k - \alpha$ (c'est-à-dire de l'affinité L définie par le point $L_k - \alpha \in R^p$).

Or, d'après ce qui précède (*a*), cette norme est la plus grande des p coordonnées de $L_k - \alpha$. Donc lorsque k augmente indéfiniment, puisque le point L_k tend vers α dans R^p, la norme de l'opération $L_k - \alpha$ tend vers zéro. La relation plus haut (3) entraîne que $L_k x$ tend vers αx. Comme $L_k x \in F$ et que F est fermé par hypothèse, αx appartient à F quel que soit x.

c. Pour pouvoir conclure que α appartient à G, il faut encore démontrer que réciproquement tout point de F provient par l'opération α d'un autre point de F. Comme α est inversible (puisque $\alpha \in R_+^p$) il suffit de montrer que $\alpha^{-1} \cdot x \in F$ quel que soit $x \in F$. Or si α est point d'accumulation de G dans R_+^p il en est de même de α^{-1}; en effet, s'il existe dans G une suite de points L_k (de coordonnées λ_i) convergeant vers α, la suite des points L_k^{-1} (de coordonnées λ_i^{-1}) converge vers α^{-1}. Donc le raisonnement précédent prouve que pour tout x, $\alpha^{-1} x \in F$.

En conclusion on a bien $\alpha \in G$, ce qui montre que le groupe G est fermé dans R_+^p.

Il est a remarquer que G n'est pas forcément fermé dans R^p. Les exemples du paragraphe 10 suffisent à le montrer (notamment n^{os} 2 et 3).

19. Corollaire. — *Si l'ensemble* F *est ouvert dans* E, *le groupe* G *est fermé dans* R_+^p.

En effet, le complémentaire de F est invariant en même temps que F.

20. L'application du présent théorème aux relations les plus courantes est très utile, car le fait que le groupe G est fermé conduit en général aisément à la solution du problème posé. Mais pour pouvoir l'appliquer il faut d'abord pouvoir normer les espaces vectoriels en cause de telle sorte que la relation considérée soit fermée (ou ouverte).

Exemples. — Si f est une fonction continue de x dans E à valeurs réelles l'équation $f(x) = 0$ définit un ensemble fermé; par conséquent, son groupe d'invariance est fermé.

De même, si f est continu à valeurs réelles, l'inéquation $f(x) \geqq 0$ définit un groupe fermé, et par conséquent $f(x) < 0$ ou $f(x) > 0$ également.

Les exemples 1, 2, 3, 6 du paragraphe 10 rentrent dans ces cas particuliers.

Le présent théorème n'admet pas de réciproque : l'exemple 8 du paragraphe 10 montre que le groupe fermé dans R_+^2, $\lambda_1 = \lambda_2$ est défini par l'invariance d'un ensemble R qui n'est ni ouvert ni fermé dans E (ici R^2).

F. — Cas des relations entre variables réelles.

Théorème III (Généralisation du théorème de Vaschy).

21. Nous nous posons maintenant la question inverse de la précédente : du fait qu'une relation admet un groupe d'affinités (ne se réduisant pas à l'identité) peut-on déduire quelque chose quant à sa forme? Autrement dit, peut-on caractériser les relations invariantes?

La réponse est affirmative quand la relation intéresse un nombre fini de variables réelles c'est-à-dire quand l'espace vectoriel E est de dimension finie et quand en outre le groupe est connexe par arcs, c'est-à-dire (théorème I) « continu à r paramètres » au sens classique.

Lemme. — Considérons en effet d'une façon générale l'ensemble des transformations biunivoques appliquant un ensemble quelconque E sur lui-même, c'est-à-dire faisant correspondre à tout élément de l'ensemble E un autre élément de cet ensemble, et telle que tout élément de E provienne par cette transformation d'un élément de E.

On les appelle quelquefois permutations de E ou depuis quelque temps bijections de E sur E.

Cet ensemble de transformations constitue évidemment un groupe $\mathcal{L}$.

Considérons alors un sous-ensemble F de E. Les transformations $\mathcal{L}$ conservant F constituent un sous-groupe G de $\mathcal{L}$ (démonstration du paragraphe 10). L'ensemble F contient, en même temps qu'un élément x de E, les transformés de x par toutes les opérations de G, c'est-à-dire la trajectoire de x dans G; donc F est une réunion de trajectoires (celles-ci sont des ensembles disjoints, appelés aussi classes d'intransitivité). Réciproquement, il est évident qu'un ensemble de trajectoires dans un sous-groupe G est invariant dans les opérations de ce sous-groupe.

En conclusion, les sous-ensembles de E invariants dans G sont les réunions de trajectoires dans G. Autrement dit, une relation entre éléments de E invariante dans G est définie par un sous-ensemble de l'ensemble des trajectoires de G.

Remarque. — On pourrait penser que ce lemme fournit immédiatement le théorème II, en faisant passer de l'hypothèse « F est fermé » à la conclusion « G est fermé » par le fait que F est une réunion de trajectoires.

Mais il n'en est rien : il est trivial qu'un ensemble fermé peut être la réunion d'ensembles disjoints non fermés (en nombre fini ou infini); en fait il ne suffit pas que F soit fermé pour que les trajectoires dont il est la réunion soient fermées.

Il est aisé de le montrer par un exemple : soit dans R^2 le groupe des translations définies par $x'_1 = x_1 + \rho$, $x'_2 = x_2$, où ρ est un nombre rationnel quelconque. Toute droite $x_2 = $ Cte est fermée dans R^2 et invariante dans le groupe G. Cependant, une telle droite est la réunion d'un ensemble infini (ayant la puissance du continu) de trajectoires, dont chacune est un ensemble non fermé de points (dénombrable et partout dense sur la droite).

Pour la démonstration du théorème II il faut utiliser, comme on l'a fait au paragraphe 18, l'hypothèse que G est le groupe *maximal* conservant F (et pas seulement *un* groupe conservant F).

22. Application au problème actuel. — *a*. Considérons le cas où E est l'espace R^p des points $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ et où $\mathcal{L}$ est le groupe des translations dans R^p. Soit G un sous-groupe de $\mathcal{L}$, connexe par arcs; d'après le théorème fondamental I, les trajectoires de G sont les variétés linéaires parallèles à un certain sous-espace vectoriel: elles sont donc définies par n équations linéaires de la forme

$$Y_h = b_h,$$

avec

$$Y_h = a_1^h y_1 + a_2^h y_2 + \ldots + a_p^h y_p \qquad (h \text{ de } 1 \text{ à } n),$$

où les a_i^h sont des constantes réelles définissant le sous-groupe, et les b_h sont n constantes réelles définissant une trajectoire, une fois que le sous-groupe est déterminé.

Toute relation invariante dans le sous-groupe G est donc définie par une relation entre $n < p$ formes linéaires Y_h.

b. Considérons maintenant le cas où E est l'espace R^p des points $x(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et où $\mathcal{L}$ est le groupe des affinités L définies par $x'_i = \lambda_i x_i$, avec $\lambda_i > 0$. Si G est un sous groupe connexe par arcs de $\mathcal{L}$, les trajectoires correspondantes sont définies par $n < p$ relations de la forme

$$X_h^* = C_h,$$

avec

(4) $$X_h^* = |x_1|^{a_1^h} |x_2|^{a_2^h} \ldots |x_p|^{a_p^h} \qquad (h \text{ de } 1 \text{ à } n)$$

chaque x_i gardant en outre un signe constant. En effet, le groupe G est défini par $n < p$ relations de la forme (*cf.* § 16)

(1) $$\lambda_1^{a_1^h} \lambda_2^{a_2^h} \ldots \lambda_p^{a_p^h} = 1$$

et en y subtituant $\lambda_1 = \frac{x'_1}{x_1}$ on obtient pour une trajectoire les équations

(5) $$\left(\frac{x'_1}{x_1}\right)^{a_1^h} \left(\frac{x'_2}{x_2}\right)^{a_2^h} \ldots \left(\frac{x'_p}{x_p}\right)^{a_p^h} = 1 \qquad (h \text{ de } 1 \text{ à } n).$$

En prenant la valeur absolue du premier membre, on voit qu'une telle équation entraîne

(6) $$X_h^* = \text{Cte} \qquad \text{et} \qquad \text{signe } x_i \text{ constant} \qquad (i \text{ de } 1 \text{ à } p)$$

Réciproquement, cette dernière condition (6) entraîne (5) puisqu'elle entraîne, x et x' étant deux points qui la satisfont

$$\left|\frac{x'_1}{x_1}\right|^{a_1^h} \ldots \left|\frac{x'_p}{x_p}\right|^{a_p^h} = 1$$

et, d'autre part,

$$\frac{x'_i}{x_i} \text{ positif}, \qquad \text{donc} \quad = \left|\frac{x'_i}{x_i}\right|.$$

On voit en outre qu'on peut écrire cette condition sous la forme plus simple

(7) $$X_h = \text{Cte} \qquad (\text{signe } x_i \text{ constant}),$$

avec

(8) $$X_h = x_1^{a_1^h} x_2^{a_2^h} \ldots x_p^{a_p^h}$$

lorsque cette expression monome a une valeur définie réelle (ce qui a toujours lieu quand les x_i sont positifs, mais a lieu aussi dans d'autres cas, par exemple pour des exposants entiers positifs ou négatifs). En effet, puisque les signes des x_i sont constants, on a soit $X_h = X_h^*$, soit $X_h = -X_h^*$ de sorte que les conditions $X_h^* = \text{Cte}$ et $X_h = \text{Cte}$ sont équivalentes.

Cela posé, *toute relation invariante dans* G étant définie par un ensemble de trajectoires, *peut donc être représentée par une* ***relation entre les n monomes*** X_h ***et les signes des p variables*** x_i. **Cet énoncé constitue notre théorème III.**

En général, on ne peut pas simplifier; par exemple, on ne peut pas écrire cette relation comme l'ensemble d'une relation entre les X_h d'une part et d'une relation entre les signes des x_i d'autre part. L'exemple 1 du paragraphe 23 ci-après suffit à le montrer.

Dans le cas particulier où les x_i sont par nature positifs, la relation invariante est définie simplement par une relation entre les monomes

$$X_h = x_1^{a_1^h} x_2^{a_2^h} \dots x_p^{a_p^h}. \tag{8}$$

Nous obtenons ainsi très simplement, en le rendant presque évident, un théorème qui étend à une relation tout à fait quelconque entre variables réelles celui que Vaschy a donné en 1890 pour une équation et qui a été si souvent repris depuis par différents auteurs, sur la base de démonstrations plus ou moins satisfaisantes.

On voit que les hypothèses de continuité, de dérivabilité, etc. pour les premiers membres des équations en cause, souvent introduites afin de rendre possibles des démonstrations « élémentaires », ont pour effet de restreindre le résultat et de masquer la raison d'être de celui-ci.

23. Il est à remarquer que l'énoncé donné couramment du théorème de Vaschy est défectueux, parce qu'il néglige la condition concernant le signe des variables x_i que nous avons énoncée ci-dessus, et dont notre démonstration fait apparaître la nécessité. L'énoncé usuel dit en effet que la relation s'écrit au moyen des monomes X_h exclusivement.

Or, en général, ceci est faux car les ensembles définis par n équations $X_h^* = \text{Cte}$ ou éventuellement $X_h = \text{Cte}$ ne sont pas les trajectoires : un tel ensemble, qui est toujours invariant, contient en général plusieurs trajectoires distinctes.

Exemple 1. — L'inégalité $x_2 - x_1 > 0$ définit par son invariance le groupe $\lambda_1 = \lambda_2$ (ceci est évident en considérant la frontière dans R^2 de l'ensemble F suivant une remarque faite au paragraphe 10). Le théorème précédent est donc applicable. Mais l'énoncé usuel du théorème de Vaschy est erroné; en effet, il consiste à dire que la relation donnée doit s'exprimer au moyen de la variable réduite $X = \frac{x_2}{x_1}$.

Or à une valeur X *arbitraire* $\neq 1$ on peut toujours faire correspondre une infinité de couples (x_1, x_2) satisfaisant à l'inégalité donnée et une infinité de couples la mettant en défaut. Cela résulte de ce que l'inégalité s'écrit $x_1(X-1)>0$; on voit que pour X donné quelconque $\neq 1$, x_1 peut être choisi arbitrairement sous réserve de son signe et x_2 sera ensuite déterminé univoquement. Cela se voit très simplement sur la figure 6 :

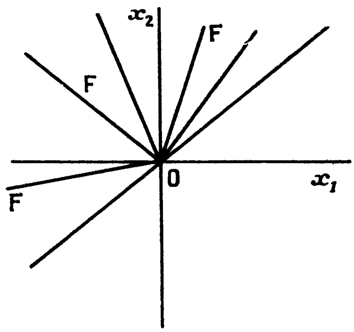

Fig. 6.

Le demi-plan $x_2-x_1>0$ est coupé par une droite de pente $X\neq 1$ suivant une demi-droite et le demi-plan $x_2-x_1\leq 0$ également. Dans le plan (x_1, X) l'ensemble F est constitué par l'intérieur de deux angles droits opposés (*fig.* 7).

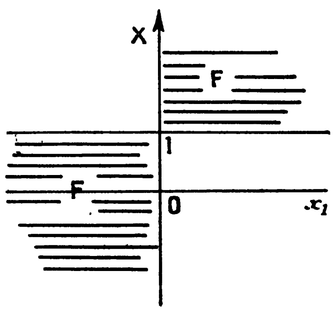

Fig. 7.

Toute difficulté disparaît si l'on remarque que les trajectoires du groupe $\lambda_1=\lambda_2$ sont les demi-droites issues de l'origine dans le plan (x_1, x_2) et des demi-droites parallèles à Ox_1 dans le plan (x_1, X). L'ensemble F (ouvert) est une réunion de telles demi-droites; son complémentaire (fermé) également. Une droite $X=$ Cte contient deux trajectoires; l'ensemble $X^* = \mathrm{Cte}$, réunion de deux droites symétriques, en contient quatre [1].

Notre théorème général III ci-dessus s'applique : la relation donnée $x_2 - x_1 > 0$ s'écrit

$$\text{« } X > 1, \quad x_1 > 0 \quad \text{ou} \quad X < 1, \quad x_1 < 0 \text{ ».}$$

Elle s'écrit également

$$\text{« } X^* > 1, \quad x_1 > 0 \quad \text{ou} \quad X^* < 1, \quad x_1 < 0 \text{ ».}$$

Exemple 2. — L'équation $\sqrt{x_1} - x_2 = 0$ (qui suppose nécessairement $x_1 \geqq 0$), où $\sqrt{}$ représente la détermination positive de la racine carrée, définit par son invariance le groupe $\lambda_1 = \lambda_2^2$. D'après le théorème de Vaschy usuellement énoncé, on pourrait l'écrire au moyen du monome invariant

$$X = \frac{x_1}{x_2^2}.$$

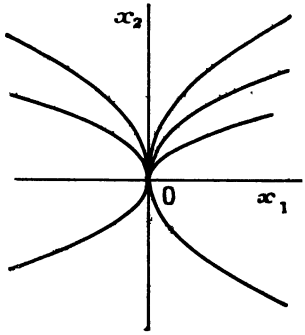

Fig. 8.

En fait, l'équation proposée implique $X = 1$, mais n'est pas équivalente à celle-ci : X étant pris égal à 1, et x_1 choisi positif arbitraire, on en tire deux valeurs de x_2 dont une seule satisfait à l'équation proposée. Celle-ci ne peut donc s'écrire au moyen de X; l'énoncé usuel du théorème de Vaschy est erroné.

(1) Au lieu de deux et quatre, on pourrait dire trois et cinq puisque le point O constitue à lui seul une trajectoire dans le plan (x_1, x_2). Mais elle est singulière en ce sens que l'invariance de l'ensemble qu'elle constitue n'exige aucune relation entre λ_1 et λ_2.

Le groupe $\lambda_1 = \lambda_2$ est déterminé par l'invariance d'un ensemble quelconque de demi-droites issues de O, constituant un ensemble fermé ou non de points.

Les trajectoires du groupe G sont ici des demi-paraboles dans le plan (x_1, x_2). L'ensemble F définissant la relation donnée est constitué par l'une de ces demi-paraboles, dans le quadrant $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. L'ensemble défini par $X = 1$ (parabole entière) contient cette trajectoire, mais également une autre (il représente la relation plus large que la proposée $x_1 - x_2^2 = 0$).

On peut écrire la proposée sous la forme

$$x_2 = \sqrt{x_2^2 X}$$

ou « $X = 1$, $x_2 > 0$ » ou « $\operatorname{sgn} x_2 = \sqrt{X}$ » ou encore « $\sqrt{X}\operatorname{sgn} x_2 = 1$ » et l'on retrouve le fait qu'elle ne peut pas s'écrire au moyen de X seulement. Ici, d'ailleurs, $X = X^*$.

Si l'on suppose que x_1 et x_2 sont par nature positifs, alors la relation s'écrit simplemen $X = 1$ et le théorème de Vaschy est valable.

24. La difficulté précédente est liée au fait que dans toute cette théorie les λ_i sont essentiellement positifs. Cette restriction assure l'isomorphisme au groupe additif R^p.

On peut remarquer à ce propos que le groupe plus large de toutes les affinités $\mathcal{A}$, à coefficients positifs ou négatifs (la valeur 0 est exclue, car, si on l'admettait, on n'aurait pas un groupe) *n'est pas connexe* (au sens naturellement de la topologie usuelle de R^p). Par exemple, pour $p = 2$, ce groupe est constitué par le plan duquel on a retiré les deux axes $O\lambda_1$ et $O\lambda_2$; ce groupe est ouvert, non connexe.

Le groupe R_+^2 considéré dans la présente étude est un sous-groupe ouvert du précédent. Le demi-plan, $\lambda_1 > 0$, duquel on a retiré le demi-axe positif $O\lambda_1$ constitue un sous-groupe ouvert non connexe. On voit que les circonstances qui se présentent sont très différentes de celles offertes par le groupe additif R^2 (qui ne possède aucun sous-groupe ouvert différent de lui-même, etc.).

Les sous-groupes de R_+^2 connexes par arcs sont, d'après le théorème fondamental, tous définis par

$$\lambda_1^{a_1}\lambda_2^{a_2} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \lambda_2 = \lambda_1^{\alpha}$$

si l'on excepte le cas $a_2 = 0$.

Ils sont donc représentés par des courbes d'allure parabolique (*fig.* 9) parmi lesquelles la bissectrice déjà signalée $\lambda_2 = \lambda_1$; ils sont fermés dans R_+^2 mais non dans R^2 (car ils ne contiennent pas l'origine).

De ces sous-groupes on peut déduire par extension des sous-groupes de $\mathcal{A}$ non connexes et non fermés dans R^2 qu'on pourrait appeler encore « à un paramètre » et qui sont constitués par plusieurs arcs.

Exemples. — La bissectrice $\lambda_2 = \lambda_1$ des deux angles opposés (point O exclu) qui constitue le groupe des homothéties à coefficient positif ou négatif :

— l'ensemble des deux arcs

$$\lambda_2 = \lambda_1^\alpha \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\lambda_1^\alpha \quad (\lambda_1 > 0),$$

— l'ensemble des quatres arcs tels que

$$|\lambda_2| = |\lambda_1|^\alpha;$$

....

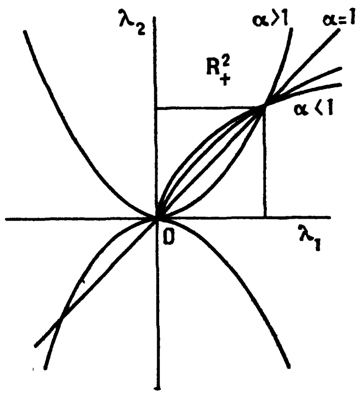

Fig. 9.

25. On peut remarquer enfin, en sens inverse, que la conclusion du théorème classique de Vaschy « la relation entre les variables réelles x_i peut s'exprimer au moyen de monomes en nombre moindre que les x_i » est exacte dans certains cas où les hypothèses du paragraphe 21 ne sont pas satisfaites.

Tel est le cas traité au paragraphe 10, exemple 7 : là relation « x_1 et x_2 commensurables » s'écrit évidemment « X rationnel » en posant $X = \frac{x_2}{x_1}$. Cependant, le groupe d'invariance n'est pas connexe.

Au contraire, l'exemple 8 du paragraphe 10 satisfait aux hypothèses du paragraphe 21 puisque le groupe est connexe (c'est $\lambda_1 = \lambda_2$). Le théorème de Vaschy s'applique, ce qu'on vérifie évidemment puisque la relation s'écrit « X entier positif ».

CHAPITRE II.

Application aux changements d'unités à la similitude et à l'analyse dimensionnelle.

Nous allons indiquer succinctement dans le présent chapitre comment la théorie mathématique qui précède permet de résoudre tous les problèmes qui se posent à propos de changements d'unités ou de similitude et de fonder rigousement l'analyse dimensionnelle.

A. — Choix arbitraire des unités.

26. Il convient d'abord de faire une constatation fondamentale dans le développement des sciences et des techniques : la nature ne nous impose aucune unité particulière pour aucune espèce de grandeurs, même lorsqu'il semble exister une unité naturelle, par exemple lorsque la grandeur en cause varie par quanta.

Exemple : La charge électrique.

En conséquence, pour des grandeurs de natures différentes, ou même pour des grandeurs de même nature qu'on a décidé de répartir en plusieurs espèces différentes, il est loisible de choisir les unités indépendamment les unes des autres.

Exemple : On peut choisir une unité de longueur pour les distances horizontales et une autre différente pour les altitudes.

Nous posons donc le principe général : *le choix des unités est complètement arbitraire*. Nous allons voir que ce seul principe permet de constituer correctement la théorie des changements d'unités.

L'ensemble des unités adoptées pour certaines espèces de grandeurs constitue un *système d'unités*.

Exemple : Le kilomètre pour les longueurs et l'hectare pour les surfaces constituent un système d'unités.

L'ampère pour l'intensité de courant et l'unité électrostatique C. G. S. pour la charge électrique constituent un système d'unités.

27. **Famille de systèmes d'unités.** — Nous appellerons ainsi l'ensemble des systèmes d'unités qui satisfont à certaines relations imposées entre ces unités

Exemple : L'ensemble des systèmes d'unités de force, de masse et d'accélération qui assurent la validité de l'équation fondamentale de la dynamique $f = m\gamma$.

Si l'on choisit alors comme référence un système d'unités particulier pour les q espèces de grandeurs en cause, la famille est représentée par un ensemble de points dans l'espace R^q (espace ordinaire à q dimensions réelles) : chaque coordonnée de l'un de ces points est le rapport de l'unité particulière U choisie à l'unité de référence U_1 de la même espèce.

28. Ce que nous venons de dire (§ 26 et 27) s'applique exclusivement aux « grandeurs mesurables ordinaires » définies au paragraphe 7 et non, évidemment, aux « grandeurs générales » qui sont mesurées par un vecteur (et non par un nombre réel). Pour celles-ci, il n'existe pas d'unité. Mais on peut appliquer, comme dans le cas particulier classique, un multiplicateur scalaire aux vecteurs représentant, c'est-à-dire « mesurant » les différentes grandeurs d'une même nature : ainsi la notion de « changement d'unité » subsiste, sous la forme d'une « homothétie » appliquée aux éléments d'un espace vectoriel :

$$x'_i = \lambda_i x_i.$$

Cette opération peut être liée à un changement d'unité, au sens ordinaire, effectué sur une grandeur ordinaire (conformément à la définition particulière de la grandeur générale en cause, dans le cas usuel où celle-ci est une fonction au sens habituel du mot, définition qui fait intervenir une grandeur ordinaire).

Exemple : L'équation aux dérivées partielles de la chaleur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

fait intervenir une fonction u définie dans l'espace $R^4(x, y, z, t)$ et à valeurs dans R (température) à laquelle sont appliquées les opérations linéaires (de dérivation partielle)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial}{\partial t}.$$

Cette fonction u définit une grandeur physique au sens général (distribution de température) mesurée par un « vecteur » au sens général (à une infinité de dimensions).

Si l'on change l'unité de température (celle-ci est une grandeur mesurable ordinaire) en passant de U à λU, le « vecteur » mesurant la grandeur générale u est multiplié par $\frac{1}{\lambda}$ en raison de la définition de l'espace vectoriel utilisé pour représenter u.

D'une façon tout à fait générale, nous dirons que deux grandeurs sont *de même espèce* si un changement d'unités a pour effet de leur appliquer un même multiplicateur. Cette définition s'applique donc aux grandeurs générales aussi bien qu'aux grandeurs ordinaires.

La notion d'espèce a donc un caractère conventionnel; elle ne fait pas intervenir la nature physique des grandeurs mesurées.

29. Structure de changements d'unités. — Nous désignerons ainsi un ensemble de relations entre les multiplicateurs λ_i de q espèces physiques.

L'application à un système d'unités des multiplicateurs satisfaisant à une structure engendre une famille de systèmes d'unités. En général, une structure donnée détermine ainsi une infinité de familles.

Réciproquement, une famille de systèmes d'unités, si l'on fait choix d'un système d'unités de référence, par exemple appartenant lui-même à cette famille, détermine une structure. Celle-ci dépend en général du choix de ce système de référence.

Nous étudierons ci-après (§ 31) les familles telles que la structure soit indépendante du système de référence. Elles ont une importance particulière.

Si la structure est définie par n équations indépendantes entre les multiplicateurs, et si l'on peut résoudre ces équations par rapport à n multiplicateurs en fonction des $q-n=k$ autres, les espèces correspondant à ces derniers sont dites *fondamentales*, les n autres sont dites *dérivées*. On dit aussi *primaires* et *secondaires*.

30. Type de changements d'unités. — Nous appelons ainsi l'ensemble d'une structure et d'un choix des espèces fondamentales.

Un type est donc défini par n fonctions de k variables positives. Ces fonctions peuvent être *a priori* d'une forme quelconque.

On peut aisément définir des types comportant des structures beaucoup plus compliquées que celles qui sont usuelles [12]. Ces dernières sont toujours dimensionnelles au sens ci-après de ce mot.

31. **Famille, structure, types dimensionnels.** — Si une structure est définie par n équations indépendantes de forme monome

$$(1) \qquad \lambda_1^{a_1^h}\lambda_2^{a_2^h}\cdots\lambda_q^{a_q^h}=1 \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

les équations d'un type de cette structure ont la forme dite dimensionnelle

$$(9) \qquad \lambda_{k+j}=\lambda_1^{b_1^j}\lambda_2^{b_2^j}\cdots\lambda_k^{b_k^j} \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

L'exposant b_i^j est la *dimension* de l'espèce dérivée $k+j$ en l'espèce fondamentale i (définition classique).

On voit que les structures dimensionnelles ont justement la forme obtenue au chapitre I pour les sous-groupes connexes par arcs du groupe multiplicatif R_+^p. En appliquant les résultats de ce chapitre I, nous pouvons donc énoncer immédiatement les propriétés de ces structures particulières :

Une structure dimensionnelle définit un groupe de changements d'unités

Si l'on applique à un système d'unités quelconque les multiplicateurs d'une structure dimensionnelle, on obtient une famille dite dimensionnelle. Si l'on rapporte celle-ci à un autre système de la famille, on retrouve la même structure : la vérification est immédiate, elle résulte de ce qu'on a affaire à un groupe.

Les formules (9) sont dites *formules de dimensions*. Elle sont par nature conventionnelles ($0 \leq k \leq q$). Ce fait a été souvent oublié par de nombreux auteurs, qui prétendent tirer des formules de dimension des indications sur la nature même des grandeurs en cause.

Le choix d'un système d'unités n'entraîne évidemment par lui-même l'existence d'aucune formule de dimension.

Exemple. — Dans le type classique de changements d'unités mécaniques ayant pour fondamentales la longueur L, le temps T et la masse M, le moment d'un couple et le travail d'une force ont les mêmes dimensions $L^2T^{-2}M$.

Il serait absurde d'en déduire que ces deux grandeurs sont d'une même nature physique. Elles sont seulement, dans ce type, d'une même espèce.

Dans un autre type, ces deux grandeurs peuvent avoir des dimensions différentes. Par exemple, si l'on introduit l'angle A comme fondamentale, le couple aura les dimensions $A^{-1}L^2T^{-2}M$ et le travail $A^0 L^2 T^{-2} M$.

Autre exemple. — On peut considérer la température comme une grandeur fondamentale, ou au contraire comme une grandeur dérivée, dans le cadre de différents types. Suivant le cas, la température peut avoir ainsi les dimensions d'un potentiel électrique, de l'inverse d'une longueur, du carré d'une vitesse, d'une énergie cinétique, etc. [12].

On ne doit jamais oublier que les formules de dimensions sont entièrement conventionnelles. En particulier, le nombre des grandeurs fondamentales est arbitraire.

B. — Invariance des équations physiques dans un changement d'unités.

32. Les relations physiques. — Rien n'impose *a priori* une forme mathématique particulière aux équations qui représentent les lois physiques.

Par contre, une fois que les unités sont choisies, les équations représentant un phénomène donné se trouvent complètement déterminées.

Tout cela vaut également pour les inéquations qui s'introduisent dans certains cas, et d'une façon générale pour toutes les relations mathématiques utilisées pour représenter les lois physiques, que nous appellerons *relations physiques*.

33. En raison du caractère « objectif » des lois de la physique, on impose souvent à leur expression mathématique d'être invariante dans un changement d'unités.

Les relations exprimant la loi d'un phénomène font en général intervenir des variables réelles et des variables vectorielles (§ 7) ou « vecteurs » au sens général.

Exemple : Une équation aux dérivées partielles.

Nous désignerons dans la suite par la notation condensée $F(x)$, où x est un vecteur, l'ensemble des relations représentant la loi d'un phénomène. Dire que la relation $F(x)$ est invariante dans un « changement d'unités » signifie qu'elle est équivalente à la relation transformée $F(Lx)$, où L est le symbole d'une « transformation linéaire » dans l'espace E des vecteurs x, définie comme le produit des homothéties $x'_i = \lambda_i x_i$ effectuées sur les composantes x_i de x (*cf.* chap. I).

L'invariance de $F(x)$ définit évidemment une famille de systèmes d'unités.

34. Les résultats du chapitre I entraînent :

La famille des systèmes d'unités assurant la validité d'une relation physique $F(x)$ *définit un groupe de changements d'unités. Cette famille détermine une structure unique.*

Les exemples donnés au chapitre I (§ 10) montrent que ce groupe de transformations affines dans l'espace R^q peut se reduire à la transformation identique, ou bien être discontinu, ou enfin être continu.

Nous avons vu qu'en précisant le sens du mot continu, exactement en lui donnant le sens de connexe par arcs, on obtenait un résultat très précis sous la forme de théorème I. Nous dirons donc qu'une famille de systèmes d'unités est continue si l'on peut passer de l'un S_1 à l'autre S_2 par une suite de systèmes d'unités S définis par les multiplicateurs $\lambda_i = \frac{U_i}{U_i^1}$ qui varient continûment de la valeur 1 à la valeur $\frac{U_i^2}{U_i^1}$.

Cette définition étant posée, le théorème I du chapitre I entraîne :

L'invariance d'une relation physique dans une famille continue de systèmes d'unités définit une structure dimensionnelle.

Le champ d'application de cet énoncé couvre toute la physique.

Ce théorème justifie l'usage établi suivant lequel on utilise seulement, en pratique, des types dimensionnels : il en donne la raison profonde.

Ses conséquences permettent de résoudre tous les problèmes qui se posent au sujet des changements d'unités et de l'analyse dimensionnelle.

A chaque relation physique correspond donc un groupe de changements d'unités qui la conserve : ce groupe est, soit réduit à la transformation identique, soit discontinu, soit de la forme dimensionnelle à k paramètres arbitraires ($1 \leqq k \leqq q$). Dans ce dernier cas, la relation est dite *homogène*. Nous dirons que k est *l'ordre* de la relation $F(x)$ et $n = q - k$ son *rang*.

35. Le théorème II du chapitre I conduit à l'énoncé suivant pour les relations physiques :

Si une relation physique $F(x)$ *est « fermée », c'est-à-dire si elle est définie dans l'espace du vecteur* x *par un ensemble fermé au sens de la topologie déterminée par l'ensemble des normes adoptées pour les vecteurs* x_i *composants de* x, *alors le groupe des changements d'unités conservant la relation* $F(x)$ *est lui-même fermé dans* R_+^p. *La conclusion est la même si la relation est « ouverte ».*

Dans chaque cas particulier, une fois établi ainsi que le groupe est fermé, il sera aisé de voir s'il est discret ou constitué par des variétés linéaires (les autres éventualités étant maintenant exclues); dans ce deuxième cas il contient un sous-espace vectoriel.

En pratique, $F(x)$ est constitué généralement par un système d'équations et d'inéquations dont les premiers membres sont fonctions continues de x.

36. Le théorème III du chapitre I fournit immédiatement l'énoncé suivant :

Toute relation physique admettant une famille continue de systèmes d'unités et contenant seulement un nombre fini p *de variables réelles positives* x_i *peut s'écrire au moyen de* $m < p$ *monômes formés avec les* p *mesures* x_i.

Il n'existe pas d'énoncé analogue pour les relations générales, c'est-à-dire celles qui contiennent, parmi les variables, des vecteurs à une infinité de dimensions.

Remarque. — Nous énonçons le résultat seulement pour le cas des variables positives, auquel on peut en pratique ramener le cas général des variables réelles de signe quelconque. Ce dernier a été étudié aux paragraphes 22 et 23.

Exemple. — La relation considérée au paragraphe 10 (exemple 5)

$$x_3 = \frac{dx_2}{dx_1}$$

ne peut s'exprimer au moyen d'un monome en x_1, x_2, x_3.

Certains des m monomes peuvent être des rapports de deux grandeurs de même espèce ou *facteurs de forme.*

Les monomes invariants sont appelés *variables réduites.* Si la relation est exprimée au moyen de monomes invariants en nombre inférieur à celui des variables, on dit qu'elle est mise *sous forme réduite.*

Le nombre de ces monomes peut être toujours ramené à $p - k$ au maximum.

Exemple. — La capacité d'un condensateur sphérique de rayons r_1 et r_2 s'exprime, en unités quelconques, par la formule

$$C = K\frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}, \qquad p = 3.$$

Si l'on n'impose *a priori* aucune condition aux unités servant à mesurer ces trois grandeurs r_1, r_2, C de multiplicateurs respectifs λ_1, λ_2, λ_3, l'invariance de l'équation se traduit par son équivalence à l'équation

$$\frac{C}{\lambda_3} = K\frac{\dfrac{r_1}{\lambda_1}\dfrac{r_2}{\lambda_2}}{\dfrac{r_2}{\lambda_2} - \dfrac{r_1}{\lambda_1}},$$

d'où l'identité en r_1 et r_2

$$\lambda_3(r_2 - r_1) = \lambda_1 r_2 - \lambda_2 r_1$$

qui entraîne

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

Telle est la structure dimensionnelle de la relation physique d'où nous sommes partis : c'est celle d'un groupe à un paramètre. L'ordre de la relation est $k = 1$, song rang est $n = 2$.

Si, au contraire, on impose *a priori* que r_1 et r_2 sont mesurés avec la même unité, c'est-à-dire si l'on introduit une espèce longueur de multiplicateur λ_1, le multiplicateur de C étant toujours désigné par λ_3, l'invariance de l'équation exige la seule relation dimensionnelle $\lambda_1 = \lambda_3$. L'ordre k est encore égal à 1 (groupe à un paramètre), mais on a $q = 2$ et le rang de la relation est $n = q - k = 1$ au lieu de 2 ci-dessus.

De toute manière, le nombre m des monomes nécessaires pour écrire l'équation en variables réduites est 2. Avec le deuxième point de vue (espèce longueur) on introduit obligatoirement le facteur de forme $\frac{r_2}{r_1}$ comme l'un des deux monomes.

En divisant par r_1 les deux membres de l'équation, on la met sous la forme réduite suivante :

$$X_1 = k \frac{X_2}{X_2 - 1},$$

où figurent les deux monomes

$$X_1 = \frac{C}{r_1}, \qquad X_2 = \frac{r_2}{r_1}.$$

Il est aisé de vérifier que l'équation ne peut s'écrire avec moins de deux monomes : elle s'écrit, en effet,

$$X_1 X_2 - X_1 - K X_2 = 0$$

ou encore, en posant $X_1 = X_2 X'_2$ et éliminant X_2

$$X_1 - X'_2 - K = 0.$$

On voit comme plus haut (§ 10, exemple 1) que l'invariance de cette équation exige celle des deux monômes X_1 et X'_2 séparément.

37. Dans toutes les applications de la théorie que nous venons de résumer se pose un problème purement mathématique : déterminer l'ordre et le rang d'une relation donnée. La solution de ce problème ne peut être fournie par une règle générale. On peut néanmoins donner des théorèmes utiles :

— l'invariance de l'equation $g(f) = 0$, où g est une fonction inversible d'une variable et f une fonction d'un vecteur x, exige celle de la fonction f;

— l'invariance de l'équation entre m monomes indépendants où figurent $p \geqq m$ variables réelles

$$C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_m X_m + C = 0 \tag{10}$$

exige celle de chacun des m monomes;

— l'invariance de l'équation $f(X_1, X_2) = 0$, où figurent deux monomes exige que chacun des deux monomes soit invariant (rang 2), sauf si l'équation proposée équivaut à une relation monome de la forme

$$X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} = C$$

(dans ce cas l'invariance exige celle d'un seul monome; le rang est 1).

Exemple. — La formule de Planck exprime la puissance rayonnée par l'unité de surface entre les longueurs d'onde λ et $\lambda + d\lambda$ à la température absolue θ (corps noir).

Avec le centimètre comme unité de longueur, le degré centésimal comme unité de température, le watt comme unité de puissance (et le centimètre carré comme unité de surface), cette formule s'écrit

$$\rho_\lambda = \frac{3,7 \cdot 10^{-5} \lambda^{-5}}{e^{\frac{1,43}{\lambda \theta}} - 1}.$$

Elle peut se mettre immédiatement sous forme réduite au moyen de deux monômes, $X_1 = \rho_\lambda \cdot \lambda^5$, $X_2 = \lambda^{-1} \cdot \theta^{-1}$

$$C_1 X_1 (e^{C_2 X_2} - 1) = 1.$$

Le rang de cette relation est 2.

38. Rôle des fonctions transcendantes. — On affirme souvent que l'argument d'une fonction transcendante dans une équation physique est nécessairement invariant. Cette proposition est fausse; des exemples simples suffisent à le montrer :

L'invariance de $x_2 = x_1^\alpha$ n'exige pas celle de x_1; le rang est 1, et non 2.

De même pour l'équation $\log x_1 + \log x_2 + C = 0$.

L'argument d'une fonction transcendante est naturellement invariant si cette fonction figure dans une équation réduite, mais il en est de même pour une fonction algébrique.

Exemple :

$$x_1 + (x_2 + x_3)^2 + C = 0 \quad \text{(le rang est 3)}$$

et même, plus simplement,

$$x_1 + x_2 + C = 0 \quad \text{(le rang est 2)}.$$

Les fonctions transcendantes ne jouissent d'aucun privilège en matière d'homogénéité.

39. **Les constantes dimensionnées.** — Soit une relation écrite au moyen de n monomes indépendants $X_1, X_2, \ldots, X_n$ constitués avec les p variables réelles x_i. A certains d'entre eux, en nombre c, on peut substituer c monomes $X'_i = X_i z_i$ où figurent $c \leq n$ variables auxiliaires z_i. Si l'on convient d'appliquer à z_i, dans tout changement d'unités, un multiplicateur μ_i convenable, les c monomes X'_i seront invariants.

L'invariance de la relation donnée est alors assurée par celle des X_i conservés et par celle des X'_i, donc par n équations de dimensions : c d'entre elles déterminent les multiplicateurs μ_i en fonction des autres, et les n-c autres équations s'appliquent à n-c espèces initiales, qui sont donc dérivées; les autres, en nombre c, sont fondamentales.

Si l'on prend $c = n$, ce qui est toujours possible, la relation proposée est invariante dans n'importe quel changement d'unités.

Exemple. — La force de gravitation universelle s'exerçant entre deux masses μ_1 et μ_2 a pour valeur

$$f = \frac{\mu_1 \mu_2}{l^2},$$

avec des unités convenables de force, de masse et de longueur.

Avec les unités dyne, gramme, centimètre, elle s'écrit

$$f = 6{,}673 \,.\, 10^{-8} \frac{\mu_1 \mu_2}{l^2}.$$

C'est une équation monome, donc homogène : son ordre est 2, son rang 1. L'équation de dimensions définissant son groupe d'homogénéité est

$$L^2 F M^{-2} = 1.$$

Si l'on introduit une constante dimensionnée, z, ayant les dimensions $Z = L^2 F M^{-2}$, l'équation précédente s'écrit

$$f = z\frac{\mu_1\mu_2}{l^2}.$$

Celle-ci est valable avec des unités quelconques de longueur, force et masse (si l'on change ces unités, la valeur de z change en conséquence).

D'une façon très générale, les constantes dimensionnées sont des variables réelles qui, dans un changement d'unités, sont transformées comme la mesure d'une grandeur physique; mais ce ne sont pas des grandeurs physiques (elles ne sont pas susceptibles de variations intrinsèques).

C. — L'analyse dimensionnelle.

10. Par définition (§ 1), l'analyse dimensionnelle est pour nous « la prévision de la forme d'une loi physique à l'aide de considérations d'homogénéité ». Cette prévision peut se faire par des procédés divers, plus ou moins rigoureux et plus ou moins efficaces.

Il est bien évident qu'en l'absence d'une étude expérimentale du phénomène en cause, on ne peut prévoir quelque chose à son sujet qu'à partir de lois physiques plus générales, établies antérieurement, qui lui sont applicables.

Ces lois s'expriment par des relations mathématiques dont l'ensemble constitue ce que nous appellerons la « relation de départ » E. Il s'agit d'en déduire la relation répondant à la question posée ou « relation finale » F [1].

Si E est une relation ordinaire (*cf.* § 8), c'est-à-dire contenant seulement des variables réelles (à l'exclusion de fonctions variables, opérateurs fonctionnels, etc.) on peut passer de E à F par un calcul qui ne présente pas de difficulté de principe (si E est homogène, il est avantageux de passer par les formes réduites; *cf.* § 36).

Si E contient, au contraire, des variables générales, c'est-à-dire des vecteurs de dimension infinie, et si elle possède une certaine homogénéité (§ 34), si d'autre part F est une relation ordinaire, alors l'analyse dimensionnelle est applicable (*cf.* § 36).

---

[1] Cette notation (E et F) est différente de celle adoptée dans les paragraphes précédents.

41. Méthode générale d'analyse dimensionnelle. — Elle découle logiquement des considérations exposées dans les paragraphes précédents, et consiste dans les opérations suivantes :

1° Ecrire les équations et éventuellement inéquations constituant la relation de départ E. Il y figure p grandeurs générales ou ordinaires. Si ce système contient des équations différentielles, par exemple aux dérivées partielles, il faut évidemment ne pas oublier les conditions initiales, conditions aux limites, etc. qui déterminent la solution.

2° Écrire que E est invariante dans un changement d'unités *arbitraire*, ce qui détermine une structure dimensionnelle Σ, constituée par n relations dimensionnelles indépendantes entre p multiplicateurs :

Si $n = p$, E n'est pas homogène et l'analyse dimensionnelle est impuissante à donner quoi que soit;

Si $n < p$, la relation E possède une certaine homogénéité et l'analyse dimensionnelle est applicable.

3° Énumérer les $p' \leqq p$ grandeurs ordinaires qui peuvent figurer dans la solution, c'est-à-dire dans la relation finale F. Former avec ces p' grandeurs le nombre maximal possible n' de monomes indépendants et invariants dans la structure Σ.

A cet effet :

Si $p' = p$ on a $n' = n$ et l'on forme directement un système de monomes répondant aux conditions.

Si $p' < p$, on élimine entre les n équations de Σ les $p - p'$ multiplicateurs ne portant pas sur les variables figurant dans F; il reste un système de $n' = n - p + p'$ relations dimensionnelles entre les p' grandeurs du système F, constituant une structure Σ'. On forme alors aisément un système de n' monomes indépendants et invariants dans Σ'.

4° Les équations de F s'écrivent à l'aide de ces n' monomes.

Ceci constitue le résultat maximal que puissent donner toutes les méthodes possibles d'analyse dimensionnelle.

42. *Exemple* : — 1° Soit à étudier la diffusion d'un gaz G_1 dans un autre gaz G_2, dans le cas simple où à l'instant $t = 0$, la concentration du gaz G_1 est égale à une constante u_1 à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon R, et égale à 0 à l'extérieur de cette sphère.

En raison de la symétrie sphérique de ce problème, les équations E sont évidemment les suivantes :

Équation indéfinie de la diffusion (qui a la forme de celle dite de la chaleur),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\,\Delta u \tag{11}$$

dans laquelle d est le coefficient de diffusion, et Δu le laplacien de u, c'est-à-dire

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Condition initiale : pour $t = 0$, on a $u = u_0$, u_0 étant la fonction de r prenant la valeur u_1 pour $r \leq R$ et la valeur nulle pour $r > R$.

Avec les notations précédentes, nous avons donc $p = 7$ variables, savoir trois vecteurs u, u^α, u_0 et quatre variables réelles t, d, r, R; u_0, d, R sont des constantes. u^α et u_0 appartiennent à l'espace vectoriel des fonctions d'une variable r, u à celui des fonctions de deux variables t et r.

2° Nous effectuons un changement d'unités, dans lequel r et R sont d'une même espèce L (longueur), t d'une espèce T (temps), d d'une espèce D (coefficient de diffusion), u, u^α et u_0 d'une espèce U (concentration). Le nombre des unités fondamentales d'un type compatible avec ce choix des espèces est donc quatre.

En écrivant l'invariance de la relation E, on obtient une seule relation dimensionnelle, savoir $L^{-2}TD = 1$. On a donc $n = 3$ et l'on peut considérer des types dimensionnels compatibles avec la structure Σ, ayant trois unités fondamentales, par exemple celles de temps, longueur, concentration [1].

3° La relation finale F se réduit à une équation qui doit donner la valeur de la concentration u en fonction des variables réelles u_1, t, r, R, d; nous avons donc $p' = 6$ et $n' = n = 3$. Les nombres réels u et u_1 sont affectés du même multiplicateur que les vecteurs u, u^α et u_0.

On écrit immédiatement les trois monomes

$$\frac{u}{u_1}, \quad \frac{r}{R}, \quad \frac{dt}{R^2}.$$

---

[1] On obtient le même résultat si l'on n'impose pas *a priori* que r et R soient de même espèce, et de même u, u^α et u_0. Ces deux conditions se retrouvent, en effet, lorsqu'on écrit l'invariance de E dans un changement d'unités quelconque.

La solution F est donc de la forme

$$u = u_1 f\left(\frac{r}{R}, \frac{dt}{R^2}\right), \tag{12}$$

où f désigne une fonction inconnue de deux variables réelles.

Nous avons obtenu ainsi le maximum d'informations que l'analyse dimensionnelle puisse donner sur ce problème.

De la forme de cette équation, on déduit des « lois de similitude ». Par exemple, si l'on considère des sphères de rayons différents R, le temps au bout duquel $\frac{u}{u_1}$ prend, en un point défini par une valeur du rapport $\frac{r}{R}$, une valeur donnée, est proportionnel au carré du rayon R

Remarques sur cet exemple. — 1° Dans l'énumération des variables au paragraphe I ci-dessus, nous en avons compté sept et non six, comme on le ferait en retenant à la façon usuelle deux scalaires u et u_0 au lieu de trois vecteurs u, u^α et u_0. On pourrait penser que nous avons fait là des distinctions d'une subtilité bien inutile.

En réalité, ces distinctions sont nécessaires pour que le raisonnement soit correct. Ceci apparaît beaucoup mieux si l'on remplace la condition initiale ci-dessus par la suivante, d'un type également fréquent dans les applications

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, r) = u_0(r),$$

où $u_0(r)$ est la même fonction donnée de r. Il faut introduire comme ci-dessus le vecteur u (espace des fonctions dérivables de deux variables t et r), le vecteur u^α (espace des fonctions d'une variable r) et le vecteur u_0 (même espace que le précédent); mais ici u^α et u_0 sont d'une même espèce, u d'une autre (puisque u^α représente la fonction $\frac{\partial u}{\partial t}(0, r)$.

Ce nouveau problème se traite comme le précédent; on obtient la solution

$$u = u_1 t f\left(\frac{r}{R}, \frac{dt}{R^2}\right)$$

ou encore

$$u = \frac{R^2 u_1}{d} g\left(\frac{r}{R}, \frac{dt}{R^2}\right).$$

2° Si au lieu de la fonction très simple (discontinue) introduite ci-dessus on prend pour $u_0(r)$ une fonction quelconque, c'est-à-dire non définissable par un nombre fini de nombres réels, la solution du problème posé ne s'exprime plus au moyen d'un nombre fini de variables réelles : en langage courant, elle dépend en effet *a priori* de la forme de la fonction $u_0(r)$; avec notre terminologie la relation finale F contient une variable vectorielle.

En conséquence, le théorème III du chapitre I ne s'applique pas; l'analyse dimensionnelle ne peut rien prévoir quant à la forme de la relation finale.

Naturellement, si $u_0(r)$, tout en étant une fonction « compliquée », est définie dans un certain ensemble donné de fonctions de r par la valeur d'un paramètre réel u_1, alors l'analyse dimensionnelle s'applique comme plus haut. Par exemple, si $u_0(r) = u_1 h(r)$, $h(r)$ étant une fonction fixée de r, la relation finale est comme plus haut de la forme

$$u = u_1 f\left(\frac{r}{R}, \frac{dt}{R^2}\right),$$

mais la fonction f dépend naturellement ici de la forme de la fonction h.

De cette correspondance entre h et f on sait seulement qu'elle est linéaire : si à h_1 correspond la solution f_1 et à h_2 la solution f_2, alors à $h = C_1 h_1 + C_2 h_2$ correspond $f = C_1 f_1 + C_2 f_2$.

3° Ce qui précède s'applique sans aucun changement au problème de la conduction de la chaleur : il suffit de considérer u comme la température (*cf.* exemple du paragraphe 28).

43. Théorème de Vaschy. — Nous allons maintenant comparer la méthode qui précède avec celles qui ont été préconisées jusqu'ici.

Celles-ci reposent toutes sur le théorème bien connu de Vaschy. Ce théorème est d'ailleurs, à tort, souvent attribué à d'autres auteurs, surtout à l'étranger. La priorité de Vaschy est incontestable [16].

On peut l'énoncer ainsi :

Si une équation physique entre les mesures supposées positives $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de p variables est invariante dans un type dimensionnel $\mathcal{T}$ et sicelui-ci permet de choisir arbitrairement au maximum k unités parmi celles des p grandeurs en cause, alors *l'équation peut être mise sous la forme d'une relation entre p-k monomes de dimensions nulles dans le type $\mathcal{C}$ constitués avec les $x_1, x_2, \ldots, x_p$.*

Ce théorème est un corollaire immédiat de notre théorème III (§ 22) qui est beaucoup plus général; il donne seulement un sous-groupe de notre groupe maximal.

Le théorème de Vaschy peut d'ailleurs se démontrer directement, sans difficultés et de façon rigoureuse, en suivant par exemple la méthode indiquée par Vaschy lui-même [16], [17].

Tous les auteurs qui ont écrit sur l'analyse dimensionnelle appliquent ce théorème; mais ils le font d'une façon plus ou moins correcte, en général comme suit :

On énumère les p grandeurs intervenant dans le problème; on fait choix d'un type de changements d'unités comportant $q \leqq p$ espèces dont k fondamentales; on forme $m = p - k$ monomes de dimensions nulles Y_j et l'on écrit l'équation cherchée sous la forme

$$f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m) = 0.$$

Ce procédé, quelle que soit la forme particulière qu'on lui donne, est extrêmement dangereux; il est aisé de le voir en examinant les exemples les plus classiques.

44. A cet égard on peut citer le problème du pendule et celui du condensateur sphérique (*cf.* Introduction). Le point défectueux du raisonnement usuel est pour nous évident . on suppose que l'équation cherchée est invariante dans un certain groupe dimensionnel : or rien ne permet d'affirmer *a priori* une telle homogénéité.

Le célèbre paradoxe de Rayleigh (*cf.* Introduction, § 2) peut de même être parfaitement éclairci sur la base de la théorie précédente.

Nous allons le faire succinctement; les équations E « de départ », où figurent les variables sont : la définition de la vitesse; les équations générales du mouvement des fluides incompressibles; la définition de la capacité calorifique volumique; la loi élémentaire de la conduction calorifique.

Chacune de ces équations est invariante dans les deux types suivants de changements d'unités :

a. A trois fondamentales L, T, M la température ayant par convention les dimensions L^2T^{-2}. Le tableau des dimensions des six grandeurs figurant dans la relation finale est le suivant (facile à établir; la quantité de chaleur a, comme le travail mécanique, les dimensions $L^2T^{-2}M$) :

	l	w.	θ.	C	χ	D.
L............	1	1	2	—3	—1	2
T............	0	—1	—2	0	—1	—3
M............	0	0	0	1	1	1

b. A quatre fondamentales L, T, Q (quantité de chaleur), θ (température). Le tableau des dimensions est ici :

	l.	w	θ	C	χ	D
L............	1	1	0	—3	—1	0
T............	0	—1	0	0	—1	—1
Q............	0	0	0	1	1	1
θ............	0	0	1	—1	—1	0

Le théorème de Vaschy est applicable avec chacun des deux types précédents, et donne les deux résultats indiqués dans l'Introduction :

— avec le premier type,

$$D = \chi l \theta f\left(\frac{\theta}{w^2}, \frac{C l w}{\chi}\right);$$

— avec le second,

$$D = \chi l \theta f\left(\frac{C l w}{\chi}\right).$$

Appliquons maintenant notre méthode générale : en désignant par L, T, V, M, F, Q, θ, X, C, D les multiplicateurs des dix espèces longueur, temps, vitesse, masse, force, quantité de chaleur, température, coefficient de conductivité, capacité calorifique volumique, débit de chaleur; la relation de départ E exige pour son invariance les cinq relations dimensionnelles :

$$(\Sigma) \qquad \left\{ \begin{array}{l} V = LT^{-1}, \qquad F = MLT^{-2}, \qquad Q = XLT\theta, \\ \qquad\qquad Q = CL^3\theta, \qquad D = QT. \end{array} \right.$$

La relation finale contient six grandeurs ordinaires d'espèces D, L, V, X, C, θ. Comme elles sont toutes d'espèces différentes, il n'y aura pas de facteur de forme.

Dans E figurent dix espèces; la structure (Σ) comporte cinq équations indépendantes; on a donc

$$10 - 5 = 5 \text{ fondamentales.}$$

Il s'agit d'éliminer les quatre espèces ne figurant pas dans la relation finale. Pour M et F c'est immédiat : la deuxième équation (Σ) disparaît. Ensuite on tire $T = LV^{-1}$ de la première et l'on porte dans les suivantes, ce qui donne :

$$Q = \lambda L^2 V^{-1}\theta, \qquad Q = CL^3\theta, \qquad Q = DLV^{-1}.$$

Il reste à éliminer Q, ce qui donne les deux conditions :

$$CL^3\theta = \lambda L^2 V^{-1}\theta, \qquad DLV^{-1} = \lambda L^2 V^{-1}\theta,$$

ou

$$(\Sigma') \qquad CLV\lambda^{-1} = 1, \qquad DL^{-1}\lambda^{-1}\theta^{-1} = 1.$$

La relation finale a donc la forme d'une relation entre les deux monomes

$$\frac{Cl w}{\lambda}, \quad \frac{D}{\lambda l\theta}.$$

On retombe sur la solution obtenue plus haut par le type *b*. Cette solution est donc confirmée; en outre, il est établi qu'elle est maximale, c'est-à-dire que la relation cherchée ne peut pas s'écrire avec un seul monome.

Le paradoxe est donc complètement élucidé : les types *a* et *b* sont tous deux légitimes; mais le type *a* n'utilise pas toutes les possibilités offertes à une analyse dimensionnelle par le schéma mathématique adopté initialement pour représenter le phénomène en cause. Ce schéma admet un certain groupe de transformations affines : le type *a* n'utilise qu'un sous-groupe de ce groupe.

Nous donnons ici cet exemple dans un but méthodologique, et non comme une étude complète du phénomène auquel il se rapporte. Il est, à notre avis, d'un grand intérêt, car il met en évidence les avantages qu'offre une méthode rationnelle d'analyse dimensionnelle.

On peut naturellement critiquer le résultat obtenu comme étant trop simpliste en comparaison du phénomène réel, et chercher à l'améliorer, en introduisant d'autres grandeurs dans le problème, telles que la viscosité du fluide, sa compressibilité, etc.

Nous n'avons pu traiter ici ce genre de questions, qui appartient au domaine des applications particulières de la théorie que nous avons exposée. De toute manière, quels que soient les perfectionnements ainsi introduits dans l'étude du phénomène, *le paradoxe mis en évidence par Rayleigh et résolu ci-dessus subsiste intégralement.*

En effet, ces perfectionnements se traduisent par autant de complications du schéma mathématique, savoir par des grandeurs et des équations supplémentaires dans la relation de départ E.

L'invariance de celle-ci exige des relations dimensionnelles en plus et il figure des monomes en plus dans l'équation finale. Mais le nombre de ces monomes sera toujours plus grand d'une unité dans la solution a que dans la solution b.

Exemple. — On introduit la viscosité du fluide, c'est-à-dire le coefficient η défini par la loi élémentaire donnant la force de viscosité

$$f = \eta s \frac{dv}{dx}.$$

Dans le type a on a donc comme dimensions de η

$$H = L^{-1} T^{-1} M,$$

d'où le monome supplémentaire $\frac{\eta}{Cwl}$ et la loi

$$D = \chi l \theta f\left(\frac{\theta}{w^2}, \frac{Clw}{\eta}, \frac{Clw}{\chi}\right).$$

Dans le type b complété en donnant au travail mécanique FL les dimensions de la quantité de chaleur, d'où $F = L^{-1} Q$, les dimensions de η sont $H = L^{-3} TQ$, d'où le monome supplémentaire $\frac{\eta w^2}{\chi\theta}$ et la loi (¹)

$$D = \chi l \theta f\left(\frac{Clw}{\chi}, \frac{\eta w^2}{\chi\theta}\right).$$

La méthode générale conduit, de son côté, à ce dernier résultat.

Le paradoxe se présente donc et se résout de même que lorsqu'on ne tient pas compte de la viscosité.

(¹) Dans celle-ci le dernier monome est une combinaison monome évidente des trois monomes figurant sous le signe f de la loi précédente.

45. Un autre exemple historique est instructif : celui de la propagation d'un signal sur une ligne télégraphique.

Joseph Bertrand l'a traité en 1878 (*C. R. Acad. Sc.*, t. **86**, p. 916-920) : il cherche le temps T au bout duquel le potentiel en un point donné de la ligne atteint une valeur donnée V lorsqu'on applique, à l'instant initial, une force électromotrice V_0 à l'origine de la ligne.

Pour ce faire, il utilise un type à trois fondamentales: longueur, temps, force; par des raisonnements d'homogénéité, il parvient à l'équation

$$T = \frac{l}{E} f\left(\frac{V_0}{V}, lR, C\right),$$

où E est une constante, f une fonction inconnue de trois variables réelles, l la distance du point considéré à l'origine, R et C la résistance et la capacité de la ligne par unité de longueur.

Par un raisonnement complémentaire; il élimine ensuite une variable et obtient l'expression

$$T = \frac{Rl^2}{E} f\left(\frac{V_0}{V}, C\right).$$

L'application du théorème de Vaschy permet de retrouver l'un ou l'autre de ces deux résultats, pourvu qu'on utilise un type convenable.

Mais notre méthode générale donne d'emblée le résultat plus poussé (encore une variable de moins)

$$T = RCl^2 f\left(\frac{V_0}{V}\right).$$

On voit le grand avantage pratique de la méthode correcte sur les façons de faire usuelles.

D. — Similitude et emploi de modèles.

46. Définition. — Nous adoptons ici la définition usuelle, en nous efforçant de la préciser. Nous dirons que deux systèmes S et S' sont *homologues* s'ils sont définis respectivement par deux ensembles de grandeurs entre lesquels on peut établir une correspondance biunivoque telle que deux grandeurs homologues sont de même nature.

De même, deux phénomènes sont homologues s'ils sont constitués par l'évolution dans le temps de deux systèmes homologues à chaque instant, chacun d'eux pouvant être rapporté à un temps différent de l'autre.

Les grandeurs dont il s'agit sont de natures quelconques; nous supposons naturellement qu'elles sont mesurables, au sens ordinaire ou au sens général (§ 7).

Exemple. — 1° Deux pendules simples, définis par leur longueur et leur masse, constituent deux systèmes homologues. Il en est de même pour les deux systèmes constitués par deux tels pendules, chacun se trouvant dans une position déterminée, définie par une élongation déterminée par rapport à la verticale; ici la définition du système comporte une grandeur de plus, l'élongation.

Les mouvements de deux tels pendules constituent deux phénomènes homologues.

2° Deux corps solides géométriquement semblables, conducteurs de la chaleur, thermiquement isolés de l'extérieur, dont on considère la température en chaque point, constituent deux systèmes homologues. Il intervient ici une grandeur vectorielle, savoir la distribution de la température.

Les variations de la température à l'intérieur de ces deux corps, en fonction du temps, constituent deux phénomènes homologues.

3° Deux lignes télégraphiques définies par leur longueur, leur résistance et leur capacité par unité de longueur, et la force électromotrice d'une source placée à l'une des extrémités, constituent deux systèmes homologues.

On peut considérer en plus l'intensité du courant circulant dans chaque ligne (supposée la même à un instant donné en tout point du circuit). Les variations des deux courants en fonction du temps constituent deux phénomènes homologues.

Il est bon de remarquer que la définition qui précède, bien qu'elle fasse intervenir la nature physique des grandeurs, s'applique en réalité non aux deux systèmes physiques eux-mêmes, mais aux schémas construits par le physicien en vue d'interpréter ses observations expérimentales et d'énoncer des lois, c'est-à-dire en vue d'édifier une « théorie physique ». Ce caractère apparaît encore davantage dans la définition ci-dessous de la similitude.

Nous dirons que deux systèmes sont *semblables* s'ils sont homologues et si les grandeurs homologues des deux systèmes sont dans un rapport (nombre réel) qui dépend seulement de leur nature.

On remarque immédiatement que, aux termes de cette définition, si un système est défini par des grandeurs ordinaires seulement, et *de natures toutes différentes*, alors tout système qui lui est homologue lui est aussi semblable. C'est le cas du pendule et celui de la ligne télégraphique des exemples 1 et 3 ci-dessus.

Il n'en est plus ainsi si une ou plusieurs des grandeurs définissant le système sont des grandeurs vectorielles, puisque le rapport de deux telles grandeurs d'une même nature ne peut être en général défini. C'est le cas de l'exemple 2, lorsqu'on considère un solide défini par une longueur caractéristique dans une famille de solides géométriquement semblables : les deux systèmes sont physiquement semblables seulement si la température en un point de l'un est dans un rapport constant avec la température au point homologue de l'autre

$$u'(x', y', z') = \lambda u(x, y, z).$$

Plus généralement ([1]), soient deux systèmes homologues S et S′ dont les grandeurs de chaque nature physique x_i peuvent être réparties en plusieurs groupes appelés *espèces* x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, ... tels que pour chacun d'eux ont ait proportionnalité avec des rapports qui peuvent être différents

$$\frac{x'_{i1}}{x_{i1}} = \lambda_{i1}, \qquad \frac{x'_{i2}}{x_{i2}} = \lambda_{i2}, \qquad \dots$$

(dans le cas extrême, il peut y avoir une seule grandeur par espèce). On dit alors que S et S′ sont *semblables avec distorsion*.

Dans le cas où la définition de S et S′ ne comporte qu'un nombre fini de variables réelles, S et S′ sont toujours semblables avec distorsion.

Exemple. — Deux parallélépipèdes quelconques, de côtés respectifs a, b, c et a', b', c', avec proportionnalité des températures aux

([1]) Cette extension est nécessaire en pratique pour des raisons qu'on trouvera rassemblées aux paragraphes 46-47 ci après (nécessité de pouvoir donner des conditions suffisantes de similitude).

points se déduisant l'un de l'autre par l'affinité définie par les rapports de trois côtés, constituent deux systèmes semblables avec distorsion des longueurs.

De façon plus précise, la température au point de S'

$$x' = \frac{a'}{a} x, \qquad y' = \frac{b'}{b} y, \qquad z' = \frac{c'}{c} z$$

est définie par

$$u'(x', y', z') = \lambda u(x, y, z), \quad \text{avec } \lambda \text{ constant,}$$

chaque parallélépipède étant rapporté à des axes parallèles à ses arêtes, l'origine des coordonnées étant en son centre.

Deux phénomènes seront dits semblables (avec ou sans distorsion) si l'on peut établir entre les temps t et t' de chacun d'eux une relation de proportionnalité $t' = \tau t$ telle qu'à deux instants homologues t et t' les deux systèmes S et S' soient semblables (avec ou sans distorsion), les rapports de similitude pour chaque espèce de grandeurs étant indépendants du temps.

Dans cette définition, le temps joue finalement le même rôle que chacune des variables introduites dans la définition des systèmes eux-mêmes.

En vertu de la dernière partie de cette définition, les « vitesses » correspondant à une grandeur quelconque du phénomène peuvent être considérées elles-mêmes comme des grandeurs, c'est-à-dire peuvent être adjointes à la définition du phénomène. En effet, quelle que soit la grandeur x_i, on a

$$x'_i = \lambda_i x_i, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dx'_i}{dt'} = \frac{\lambda_i}{\tau} \frac{dx_i}{dt}.$$

La vitesse est donc d'une espèce nouvelle définie par le facteur $\frac{\lambda_i}{\tau}$.

Exemples. — Les états d'équilibre d'un système et les états de régime permanent constituent deux catégories particulières de phénomènes. Si la loi de l'un d'eux s'exprime par une relation entre des grandeurs ordinaires de natures toutes différentes, deux états homologues quelconques sont semblables; en effet, le rapport de deux grandeurs homologues est indépendant du temps (puisque ces grandeurs sont constantes par définition de l'équilibre et du régime permanent; dans ce dernier cas, certaines des grandeurs définissant le phénomène sont des dérivées par rapport au temps de grandeurs qu'on ne retient pas dans cette définition; tel est le cas du « débit » en mécanique des fluides, de « l'intensité de courant » en électricité, etc.).

47. Conditions de similitude. — Deux phénomènes homologues sont régis par les mêmes lois naturelles (par définition). Celles-ci peuvent s'exprimer mathématiquement ainsi qu'on l'a vu dans ce qui précède (notamment § 8) par une relation vectorielle $x \in F$. Pour deux phénomènes homologues, définis par les grandeurs dont les mesures sont respectivement x et x' on a donc simultanément $x \in F$ et $x' \in F$: les deux vecteurs x et x' appartiennent au sous-ensemble F de l'espace vectoriel E.

Si les deux phénomènes sont semblables, on passe de x à x' par une affinité du type L défini au paragraphe 9, puisqu'on a $x'_i = \lambda_i x_i$, le coefficient positif λ_i dépendant seulement de l'espèce de la grandeur x_i. On a donc simultanément $x \in F$ et $Lx \in F$.

Étant donné un phénomène de la classe considérée, c'est-à-dire un élément $x \in F$, la question se pose de rechercher les phénomènes semblables, c'est-à-dire les éléments x' de la forme Lx tels que $x' \in F$. Si l'on impose que la similitude L fait passer d'un élément quelconque x de F à un autre élément de F, on retrouve le problème de l'invariance des relations vectorielles traité au chapitre I; les résultats de cette théorie s'appliquent ici : les similitudes L conservant F forment un groupe G, qui est un sous-groupe de celui de toutes les affinités L.

Si les phénomènes semblables à un phénomène quelconque de la classe considérée forment un ensemble continu, c'est-à-dire que l'une au moins des grandeurs le definissant est susceptible de variations continues, alors G contient un arc et coutient donc un sous-groupe défini par n relations de la forme monome entre les rapports de similitude des différentes espèces de grandeurs

$$\lambda_1^{a_1^h} \lambda_2^{a_2^h} \dots \lambda_p^{a_p^h} = 1.$$

Les relations F admettant un tel groupe sont celles que nous avons appelées *homogènes* (§ 34).

Réciproquement, il est évident que si une loi naturelle s'exprime mathématiquement par une relation (vectorielle) homogène, tout phénomène régi par cette loi admet une famille continue de phénomènes semblables (éventuellement avec distorsion).

48. En particulier, si une loi naturelle s'exprime par une relation entre un nombre fini p de variables réelles x_i et si tout phénomène régi par cette loi admet une famille continue de phénomènes semblables, alors en vertu du théorème III (§ 22) cette loi peut s'exprimer par une relation entre les signes des x_i et un nombre $n < p$ de monomes X_h constitués avec ces variables x_i.

Pour deux phénomènes semblables ces signes et ces monomes ont la même valeur.

Réciproquement, si une loi naturelle s'exprime au moyen de n monomes indépendants X_h constitués avec les $p > n$ variables réelles x_i dont on suppose qu'elles définissent le phénomène, et au moyen des signes des x_i, alors un phénomène régi par cette loi admet comme semblables tous ceux qui sont définis par les mêmes signes des x_i et par des valeurs égales des mêmes monomes X_h; ces derniers phénomènes forment au surplus un ensemble continu. En effet, si l'on a $X'_h = X_h$ on peut exprimer n rapports $\frac{x'_i}{x_i}$ en fonctions monomes des $p - n = k$ autres; les x_i satisfaisant à la relation F par hypothèse, il en sera de même des x'_i; ceux-ci définissent donc un phénomène semblable, qui dépend continûment de k paramètres réels.

Il est essentiel de noter qu'il s'agit en général d'une similitude *avec distorsion*. Le résultat précédent est en effet seulement formel, car la nature physique des grandeurs x_i n'entre pas en ligne de compte : rien ne prouve que les rapports $\frac{x'_i}{x_i}$ de deux grandeurs d'une même nature physique, qui dépendent de $k \geqq 1$ paramètres variables, seront tous égaux.

Ce point est capital en ce qui concerne la relation entre la similitude définise usuellement (notion d'où nous sommes partis au paragraphe 46) et la similitude définie par l'égalité des variables réduites, à la façon de certains auteurs. Dans la littérature les deux notions sont généralement présentées comme équivalentes sans le moindre essai de justification, et bien à tort ainsi qu'il résulte de tout ce qui précède.

Si naturellement la distorsion est complète, c'est-à-dire s'il y a autant de rapports de similitude différents que de grandeurs, il n'y a plus similitude que de nom, c'est-à-dire que les deux phénomènes sont simplement homologues. Ceci se présente notamment pour le type le plus simple de lois, celles qui s'expriment au moyen d'un seul monome sous la forme

$$X_1 = \mathrm{Cte}$$

lorsque le monome unique contient au moins deux grandeurs d'une même nature, avec des exposants non opposés; c'est le cas d'une relation de la forme

$$x_2 = C x_1^{a_1} \qquad (a_1 \neq 1),$$

x_1 et x_2 étant de même nature. Deux phénomènes quelconques régis par cette relation correspondent à des valeurs égales de la variable réduites X_1, mais ils ne sont semblables qu'avec distorsion; par exemple, si x_1 et x_2 sont des longueurs, ils ne sont pas semblables géométriquement.

Exemple. — La loi donnant la distauce D de l'horizon, pour un observateur situé au voisinage de la Terre à l'altitude H, s'exprime au moyen d'un seul monome, sous la forme

$$\frac{D}{\sqrt{H}} = \mathrm{Cte}.$$

Deux systèmes observateur-Terre correspondant à la même valeur de la variable réduite ne sont pas semblables géométriquement.

Dans le cas le plus fréquent où le monome unique contient d'autres grandeurs que les deux grandeurs particulières considérées, il peut exister des systèmes semblables : on les obtient en imposant l'égalité des rapports correspondant aux grandeurs de même nature physique; mais tous les phénomènes donnant la même valeur au monome ne sont pas semblables.

Exemple. — La loi de la gravitation universelle s'exprime par

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{l^2 f} = \mathrm{Cte},$$

μ_1 et μ_2 étant deux masses ponctuelles, l leur distance, f la force de gravitation qui s'exerce entre elles. L'égalité des monomes pour deux systèmes

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{l^2 f} = \frac{\mu'_1 \mu'_2}{l'^2 f'}$$

n'entraîne évidémment pas

$$\frac{\mu'_1}{\mu_1} = \frac{\mu'_2}{\mu_2}.$$

Des circonstances analogues se présentent pour les lois s'exprimant au moyen de plusieurs monomes, quand il intervient plusieurs grandeurs d'une même nature physique.

Tout cela ne doit pas surprendre : les relations $X'_h = X_h$ entre les deux phénomènes entraînent que les rapports $\frac{x'_i}{x_i}$ entre grandeurs homologues sont liés par certaines relations de forme monome. Lorsque les x_i sont fixés, les x'_i définissent donc un certain ensemble de phénomènes. Ceux-ci ne sont pas forcément semblables entre eux au sens strict du paragraphe **46**, puisque ces relations monomes n'entraînent pas nécessairement l'égalité entre eux des rapports $\frac{x'_i}{x_i}$ correspondant aux grandeurs d'une même nature physique.

49. Emploi de modèles. — D'une façon très générale, il peut arriver que deux phénomènes de natures différentes soient régis par des lois qui s'expriment par des relations mathématiques identiques : les variables figurant dans la relation représentent des grandeurs de nature physique différente suivant qu'il s'agit de l'un ou de l'autre phénomène.

L'étude expérimentale de l'un, si elle est possible, fournit alors des résultats valables pour l'autre. Le premier constitue alors un « modèle » pour le second; on l'utilise en somme comme une « machine à calculer »; c'est la méthode appelée aujourd'hui « calcul analogique ».

Nous ne donnerons qu'un exemple, portant sur les deux problèmes suivants :

a. Les n conducteurs $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont plongés dans un milieu isolant illimité défini par son pouvoir inducteur spécifique ε en chaque point, et sont maintenus respectivement aux potentiels fixes $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Quelle est la charge électrique de chaque conducteur?

b. Les n électrodes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont plongées dans un milieu conducteur, défini par sa conductivité γ en chaque point, et sont maintenues aux potentiels fixes $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Quel est le courant débité par chaque électrode?

Les équations de ces deux problèmes qui portent respectivement sur un équilibre et sur un régime permanent sont les mêmes, à condition de faire correspondre ε à γ et les charges de (a) aux intensités de courant de (b). En particulier, les équations aux dérivées partielles pour le potentiel V dans le milieu sont

$$(a) \qquad \varepsilon\, \Delta V + \operatorname{grad} \varepsilon \operatorname{grad} V = 0,$$

$$(b) \qquad \gamma\, \Delta V + \operatorname{grad} \gamma \operatorname{grad} V = 0.$$

Si donc les corps C_i ont la même configuration dans les deux problèmes, et si les fonctions ε et γ de (x, y, z) sont proportionnelles, le système (b) constitue un modèle pour l'étude du système (a).

Revenons maintenant aux conclusions du paragraphe 41. Supposons que la loi d'un phénomène défini par p variables réelles x_i puisse être mise sous la forme d'une relation entre $n < p$ monomes X_h formés avec les x_i. Pour déterminer la forme de cette relation on peut expérimenter sur un phénomène particulier qui constitue donc un « modèle ». L'avantage procuré par l'analyse dimensionnelle est qu'on a réduit de p à n le nombre des variables figurant dans la relation et, par conséquent, facilité la détermination expérimentale de celle-ci.

$n = 1$: Loi de la forme $X_1 = \text{Cte}$. Une seule « expérience » suffit pour determiner la valeur de la constante et donc la relation.

$n = 2$: Loi de la forme $X_1 = f(X_2)$. On est ramené à la détermination expérimentale par points d'une seule courbe. Pour faire cette détermination, il faut naturellement choisir un modèle tel qu'on puisse faire varier X_2. C'est toujours possible avec un système unique dont on suit l'évolution dans le temps, sauf s'il s'agit d'un équilibre ou d'un régime permanent, puisqu'il suffit de prendre pour X_2 un monome contenant le temps.

Exemple. — La loi d'établissement du courant dans une ligne douée de résistance et de capacité, quand on y applique une force électromotrice constante (§ 45) peut être déterminée sur une ligne particulière prise comme modèle, en observant simplement les variations du courant à l'extrémité de la ligne en fonction du temps. En effet, l'analyse dimensionnelle montre que la relation est de la forme

$$i = \frac{E}{Rl} f\left(\frac{t}{CRl^2}\right).$$

Si l'on prenait le problème brut, c'est-à-dire sous la forme $i = f(l, C, R, E, t)$, il faudrait faire varier cinq paramètres !

50. **Remarque sur la similitude physique.** — C'est seulement dans la deuxième partie de notre exposé d'ensemble que nous nous sommes placés au point de vue « similitude » alors que nous avons commencé par le point de vue « changements d'unités ». Ces deux points de vue sont en principe équivalents, puisqu'ils aboutissent à un même problème mathématique. On pourrait donc procéder dans l'ordre inverse; en fait, ce serait moins clair : les principes de la similitude physique sont plus délicats à exposer dès l'abord, pour deux raisons qui sont liées. L'une touche à la nature des choses : il est aisé d'accepter le postulat que le choix des unités est arbitraire, car la mesure est une opération propre aux physiciens; il est aisé d'accepter également que les relations physiques doivent être invariantes dans certains changements d'unités; il serait plus difficile d'admettre comme postulat que tout phénomène possède une infinité continue de phénomènes semblables à une autre échelle! L'autre raison est que, dans la notion usuelle de similitude, d'où nous sommes partis, la nature physique des grandeurs intervient essentiellement: c'est seulement par l'introduction systématique de la distorsion et en faisant ainsi perdre au mot similitude son sens usuel, qu'on arrive à éliminer cette nature physique et à se ramener à un problème mathématique, identique à celui que posent les changements d'unités.

CONCLUSION.

a. Dans le présent fascicule, nous avons pu développer seulement (et encore de façon incomplète) la théorie mathématique de l'invariance d'une relation vectorielle dans une famille d'affinités. Nous n'avons pu indiquer que très sommairement les applications de cette théorie aux systèmes d'unités, à l'analyse dimensionnelle, à la similitude physique et à l'emploi des modèles. Nous avons traité ailleurs certains de ces sujets d'une façon plus détaillée [14], [15].

Quant aux applications plus directes à la vérification d'un calcul par homogénéité, à l'emploi de variables réduites, etc., elles sont en principe fort simples et nous n'en avons rien dit ici; la théorie générale permet de résoudre aisément les paradoxes et les difficultés de tout genre, difficultés qui ont conduit en pratique à certaines erreurs [14].

b. L'analyse dimensionnelle est largement utilisée dans la recherche technique, surtout en mécanique des fluides, et surtout depuis une trentaine d'années.

Ce succès s'est traduit par une multitude de publications, contenant de très nombreux exemples; mais ces derniers sont souvent les mêmes d'un Ouvrage à l'autre, et les calculs élémentaires, portant sur des systèmes classiques d'équations linéaires, y tiennent une place excessive.

Par contre, les auteurs négligent les fondements théoriques de leurs développements, ce qui les amène à commettre de temps à autre des erreurs plus ou moins graves, et souvent à présenter des vérifications d'homogénéité comme des découvertes de lois physiques.

Ces déficiences constatées en analyse dimensionnelle sont liées à celles qui concernent la question des systèmes cohérents d'unités, fort importante en elle-même par son champ d'application.

En réalité l'analyse dimensionnelle est une *méthode simple de calcul partiel* et rien d'autre ([1]). Elle n'est applicable qu'aux problèmes susceptibles d'être mis effectivement en équations. Sous cette réserve, elle peut être très utile, en conduisant à utiliser les essais sur modèle avec le maximum d'efficacité.

Il existe d'ailleurs d'autres méthodes classiques de calcul partiel dont on parle beaucoup moins, parce que leurs possibilités sont plus faciles à déterminer et d'ailleurs plus restreintes : utilisation de considérations de symétrie ou de linéarité.

c. Quant à la similitude physique, sa théorie est peu différente de celle de l'analyse dimensionnelle : ce n'est pas une propriété des systèmes physiques eux-mêmes, mais une propriété des relations mathématiques qui représentent les phénomènes, c'est-à-dire une propriété des schémas mathématiques qui constituent une théorie physique.

d. En pratique, l'analyse dimensionnelle consiste en l'application du théorème de Vaschy : celui-ci suppose essentiellement que la

([1]) Pour certains auteurs (dont quelques uns contemporains) l'analyse dimensionnelle a prise sur *la réalité des choses*; autrement dit, elle aurait un pouvoir mystérieux dans le domaine de la métaphysique...

« relation finale », inconnue qui exprime la solution du problème, est invariante dans un groupe « continu » d'affinités. Pour établir ceci dans chaque cas, on doit établir que la « relation de départ » qui traduit le problème posé (elle résulte de la « mise en équations ») admet elle-même un tel groupe. Nous avons montré comment on pouvait déterminer le groupe maximal admis par cette relation, qui le plus souvent est constituée par un système d'équations aux dérivées partielles (ou différentielles ordinaires) et de conditions aux limites.

Nous nous contentons de rappeler ici que la méthode générale d'analyse dimensionnelle constituée sur cette base donne le maximum possible de précisions sur la relation inconnue, contrairement aux procédés usuels, qui peuvent donner un résultat moindre. Le principe s'en réduit au fond à ceci : dans un problème quelconque, on est toujours libre du choix des unités; c'est en usant convenablement de cette liberté, c'est en adaptant le système d'unités au problème en cause, qu'on obtient la méthode la plus puissante d'analyse dimensionnelle.

e. On ne doit jamais oublier que l'analyse dimensionnelle est un art plein de dangers : dans le domaine de la similitude des systèmes et de l'homogénéité des équations, il est fréquent qu'une proposition apparaisse comme évidente alors qu'elle est en réalité fausse. Pour éviter toute erreur, il convient de bien se pénétrer qu'il s'agit de questions purement mathématiques, liées au problème de l'invariance d'une relation dans une affinité, qui se résolvent par l'étude des sous-groupes de R^n.

f. Nous espérons que la diffusion d'une théorie correcte de l'analyse dimensionnelle fera disparaître les idées fausses encore très répandues; en donnant à l'enseignement une base saine, elle permettra d'éviter dans l'avenir la gêne actuellement ressentie par la plupart des étudiants.

Paris, octobre 1960.

NOTE I.

Remarque sur le théorème II (relation invariante fermée).

L'extension du thèorème II à des cas plus généraux de groupes de transformations paraît difficile (elle serait d'ailleurs sans utilité pour l'objet du présent fascicule). Par contre, on peut donner le théorème suivant, analogue au théorème II dont il ne constitue pas une extension à proprement parler.

Soient E un espace de Banach, $\mathcal{E}$ l'algèbre des endomorphismes sur E, $\mathcal{G}$ le groupe maximal de $\mathcal{E}$, F un sous-ensemble de E; l'invariance de F dans un endomorphisme inversible définit un sous-groupe $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$, *Si* F *est fermé dans* E, $\mathcal{F}$ *est fermé dans* $\mathcal{G}$.

La démonstration est la même que celle du paragrrphe 18 : soit α un point d'accumulation de $\mathcal{F}$ appartenant à $\mathcal{G}$ et L_k une suite d'endomorphismes appartenant à $\mathcal{F}$ et convergeant vers α (au sens de la topologie de $\mathcal{E}$). Pour tout $x \in F$ on a $L_k x \in F$,

$$\| L_k x - \alpha x \|_E = \| (L_k - \alpha) x \|_E \leqq \| L_k - \alpha \|_{\mathcal{E}} \| x \|_E.$$

Lorsque k augmente indéfiniment, $\| L_k - \alpha \|$ tend vers zéro et, par conséquent, $L_k x$ tend vers αx (au sens de la topologie de E) qui appartient donc à F, d'après l'hypothèse que F est fermé.

Inversement, α^{-1}, qui existe puisque $\alpha \in \mathcal{G}$, est point d'accumulation de $\mathcal{F}$, car si la suite des éléments L_k converge vers α, la suite des éléments L_k^{-1} converge vers α^{-1}. Ceci résulte de la continuité de l'opération « inverse » ou « symétrie » des endomorphismes.

Le raisonnement ci-dessus s'applique alors sans changement à α^{-1} et montre que $\alpha^{-1} x \in F$ quel que soit x. On en conclut finalement $\alpha \in \mathcal{F}$ et, par suite, $\mathcal{F}$ est fermé dans $\mathcal{G}$.

NOTE II.

Sur les théorèmes dits de produits de puissances.

Un historique complet de ces théorèmes serait long ; nous indiquons ici seulement les quelques étapes qui nous paraissent les plus caractéristiques.

Dans son Ouvrage bien connu, *Dimensional Analysis*, le physicien P. W Bridgman a donné pour la première fois, croyons-nous, un théorème de « produits de puissances ». Son but était de montrer que les changements d'unités se font nécessairement suivant des formules de forme monome.

Il commence par distinguer, d'une part les quantités primaires (ou fondamentales), d'autre part les quantités secondaires ; puis il considère l'expression d'une quantité secondaire au moyen de quantités primaires $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$. Il suppose, sans le dire, que α, β, γ sont d'espèces distinctes, c'est-à-dire que les unités de ces grandeurs peuvent être choisies indépendamment l'une de l'autre. Il pose ensuite le postulat d'invariance

$$\frac{f(\alpha_1, \beta_1, \ldots)}{f(\alpha_2, \beta_2, \ldots)} = \frac{f(x\alpha_1, y\beta_1, \ldots)}{f(x\alpha_2, y\beta_2, \ldots)}$$

quels que soient les nombres positifs $x, y, \ldots$. En supposant ensuite les fonctions partout dérivables, il arrive à la conclusion

$$f = C\alpha^a\beta^b\gamma^c\ldots$$

dont la validité est limitée au cas particulier considéré. Si cette validité était générale, elle montrerait que toutes les lois de la physique sont de forme monome [1].

D'ailleurs, ce résultat ne correspond pas à ce que l'auteur annonce au début de son exposé : il recherchait (à juste titre) une relation entre les $x, y, z, \ldots$.

---

[1] On peut citer au moins un auteur qui est allé jusque là, en suivant la voie ouverte par Bridgman : Robert ESNAULT PELTERIE, *L'analyse dimensionnelle*, Lausanne, 1948, chap. I, § 7.5 et 7.6.

Les insuffisances de Bridgman à ce propos s'expliquent parce qu'il n'a pas suffisamment marqué la distinction essentielle entre les grandeurs et les multiplicateurs scalaires qui leur sont appliqués. Cependant, il est très abondant et très clair sur d'autres points moins importants.

En 1946, la démonstration de Bridgman a été considérablement améliorée par M. André Martinot-Lagarde, qui l'a étendue au cas où les α, β, γ, ... ne sont pas nécessairement de même espèce; cet auteur ne suppose plus la dérivabilité de f, mais seulement la continuité. Sa méthode repose sur les propriétés des fonctions additives d'une variable réelle. L'énoncé ainsi obtenu est donc beaucoup plus extensif que celui de Bridgman.

Par la suite nous avons formulé une objection quant à la valeur de cette démonstration; M. Martinot-Lagarde l'a levée en ajoutant l'hypothèse que la relation entre les multiplicateurs peut être résolue de façon univoque par rapport à l'un deux. Ceci limite naturellement la portée des conclusions.

Sans avoir connaissance du précédent travail de M. Martinot-Lagarde, nous avons donné en 1948 [12] un théorème plus général : l'invariance d'une équation quelconque dans une famille de changements d'unités exige que cette famille satisfasse un système de relations monomes entre les multiplicateurs appliqués aux unités.

La démonstration donnée par nous dans la même publication contient une erreur, que M. Martinot-Lagarde nous a signalée à l'époque. Cette erreur est facile à rectifier; mais, même après cette rectification, la démonstration est trop restrictive, car elle repose sur l'hypothèse de la dérivabilité du premier membre de l'équation considérée.

En 1959 nous avons donné le théorème I du présent fascicule sous le nom « théorème fondamental »; il étend le précédent à une *relation quelconque* (au sens de la théorie des ensembles) entre variables « vectorielles », grâce à l'emploi systématique des notions d'espace vectoriel et de groupe. Il comporte une extension très large de la notion de grandeur mesurable, puisque celle-ci est identifiée à celle d'espace vectoriel, et une extension également très large du champ des relations considérées (la notion de fonction n'intervient plus).

En particulier, il s'applique à une équation aux dérivées partielles, à un système différentiel, à un système d'équations et d'inéquations, à des conditions « de quanta », etc.

Notre théorème II, qui en fait s'applique à toutes les relations usuelles en physique, est publié pour la première fois dans le présent fascicule. Il en est de même pour le théorème III qui constitue une extension du théorème de Vaschy et une rectification des énoncés donnés couramment par celui-ci.

BIBLIOGRAPHIE.

On ne saurait donner ici une bibliographie couvrant l'ensemble du domaine connu sous la dénomination d'analyse dimentionnelle, similitude physique, etc... En effet ce domaine est très étendu en raison du grand nombre des problèmes particuliers qu'il couvre, et la littérature qui lui est consacrée est d'une abondance exeptionnelle.

Nous citons ci-dessous seulement les publications qui nous paraissent contenir les apports les plus importants à la théorie générale faisant l'objet du présent ouvrage; nous citons aussi les travaux purement mathématiques dont nous avons utilisé ou mentionné les résultats dans notre texte et qui n'avaient en vue aucune application à l'analyse dimensionnelle [2], [4], [5], [6], [7], [18].

C'est Bridgman [3] qui a le premier envisagé dans leur ensemble les problèmes étudiés dans le présent fascicule; mais la méthode à suivre en pratique dans les cas usuels avait été indiquée longtemps avant lui par Vaschy [16], [17].

On ne trouvera pas dans la liste ci dessous les ouvrages intéressants à divers titres (par exemple par l'importance des applications qu'ils développent), dont certains sont très connus, mais qui n'ont rien apporté de notable à l'étude des principes.

[1] G. Birkhoff, *Hydrodynamics*, Princeton University, 1950.
[2] Bourbaki, *Topologie générale*, Hermann, Paris, 1947, chap. V, VI, VII.
[3] Bridgman, *Dimensional Analysis*, Yale University Press, 1922, 1931, etc.
[4] J. Dieudonné, *Sur les corps topologiques connexes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 221, 1945, p. 396-398).
[5] Hayashida, *Kodai Mathematical Seminar Reports*, n° 1, mars 1949, p. 16-17.
[6] Homma et Minagawa, id. p. 19-20,
[7] Livenson, *Ann. Math.* t. 38, 1937, p. 920.
[8] A. Martinot-Lagarde, *Analyse dimensionnelle. Applications à la Mécanique des fluides*, O. N. E. R. A., Paris, 1948.

[9] A. MARTINOT LAGARDE, *Similitude physique* (*Mém. Sc. Phys*, fasc. 66, Gauthier Villars, Paris, 1960).

[10] F. RUSSO, *Systèmes d'unités et dimensions des grandeurs physiques* (*Rev. Questions scientifiques*, 1951, p. 33-56; Appendice par R. SAINT-GUILHEM).

[11] R. SAINT-GUILHEM, *Sur un paradoxe dans l'application du théorème de Vaschy* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 394 395).

[12] R. SAINT-GUILHEM, *Systèmes d'unités et analyse dimensionnelle.* (*Annales des Mines*, 1948, p. 9 41).

[13] R. SAINT GUILHEM, *Surla forme mathématique des lois physiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959, p. 3124-3126).

[14] R. SAINT-GUILHEM, *Sur la forme mathématique des lois physiques* (*Rev. gén. Électr.* septembre 1959, p. 533-554).

[15] R. SAINT-GUILHEM, *Sur les principes de l'analyse dimensionnelle et ses possibilités d'utilisation en mécanique* (*Bull. Soc. franç. Méc.*, 1960).

[16] VASCHY, *Annales Télégraphiques*, 1892, p. 25-28 et 189-211.

[17] VASCHY, *Théorie de l'électricité*, Baudry, 1896, p. 11-15.

[18] YAMABE, *Osaka Mathematical Journal*, vol. 2, 1950, p. 13-14.

TABLE DES MATIÈRES.