Félix Pollaczek

Théorie analytique des problèmes stochastiques relatifs à un groupe de lignes téléphoniques avec dispositif d'attente

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 150 (1961)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1961__150__3_0>

Félix POLLACZEK

THÉORIE ANALYTIQUE DES PROBLÈMES STOCHASTIQUES RELATIFS A UN GROUPE DE LIGNES TÉLÉPHONIQUES AVEC DISPOSITIF D'ATTENTE

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CL

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & C^ie^, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, Quai des Grands-Augustins

1961

THÉORIE ANALYTIQUE DES PROBLÈMES STOCHASTIQUES RELATIFS A UN GROUPE DE LIGNES TÉLÉPHONIQUES AVEC DISPOSITIF D'ATTENTE

Par M. Félix POLLACZEK.

LISTE DES ABRÉVIATIONS UTILISÉES.

d. a.,	délai d'attente.
d. c.,	durée de communication.
e. m., E,	espérance mathématique.
$\mathcal{E}$,	événement.
f. c.,	fonction caractéristique.
f. g.,	fonction génératrice.
f. r.,	fonction de répartition.
R,	partie réelle.
t. L.,	transformée de Laplace Stieltjes.
v. a.,	variable aléatoire.
v. a. i.,	variables aléatoires indépendantes.

INTRODUCTION.

Ci-après nous traitons les problèmes stochastiques qui se posent pour un système (« groupe ») de $s \geqq 1$ lignes téléphoniques interchangeables dans les hypothèses les plus larges admissibles pour les deux fonctions de répartition (f. r.) qui figurent dans les données de ces problèmes. Nous employons ici le langage de la téléphonie, bien que les mêmes problèmes soient soulevés dans d'autres domaines des applications; d'ailleurs l'usage de termes tels que « appel téléphonique », « durée de communication », « délai d'attente », etc. ne doit pas faire oublier que nous traitons des problèmes mathématiques, en utilisant au fond bien plus l'Analyse mathématique que le Calcul des Probabilités.

C'est d'abord dans un travail publié en 1934 [5] [1] et où la répartition des instants de production des appels était supposée bernoullienne ou, à la limite, poissonnienne, tandis que la f. r. $f_1(t)$ des durées de communication était largement arbitraire, que nous avons ramené la construction des f. r. des délais d'attente à la résolution de deux systèmes d'équations intégrales linéaires (qui ne diffèrent que de manière purement formelle du système unique figurant dans nos travaux postérieurs). Afin de simplifier la méthode assez compliquée de ce travail, nous avons établi en 1949 la théorie de certains opérateurs dits « intégro-combinatoires » [7]. Cette théorie nous a permis de traiter dans les hypothèses de [5], mais d'une façon plus succincte, toute une classe de problèmes stochastiques [8]; toutefois la lecture préalable du travail [7], où la notion de probabilité n'est d'ailleurs employée nulle part, était nécessaire pour pouvoir suivre les raisonnements de [8].

Dans le présent travail dont certains résultats ont été publiés sans démonstration dans deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [9], [11], nos méthodes ont à nouveau été simplifiées en observant qu'on peut faire correspondre à chaque appel s nombres réels $t_{n1}, \ldots, t_{ns}$ (paramètres markoviens par rapport à l'instant de production du $n^{\text{ième}}$ appel) qui résument tout ce que le passé du système peut nous apprendre pour la prédiction de son avenir. Nous ne supposons pas la connaissance du travail [7], sauf pour un seul problème, et les trois opérateurs C_ν, K_ν et $U_{\lambda s}$ que nous employons ont surtout le rôle de signes typographiques, abrégeant considérablement l'écriture de nos formules.

D'une manière générale, tous les problèmes traités dans ce travail sont ramenés à la résolution d'un système de s équations intégrales linéaires simultanées, d'un type particulier et dont les premiers membres ne varient pas avec la nature du problème étudié. Ces équa-

---

(1) Les chiffres contenus entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.

tions sont valables dans la seule hypothèse que le moment $\int_0^\infty t\,df_1(t)$ soit fini; la f. r. $f_2(t)$ des intervalles entre des appels consécutifs est tout arbitraire, sauf au chapitre II où elle est supposée continue. Toutes les f. r. et probabilités que nous étudions, sont considérées en fonction des paramètres markoviens $t_{01}, \ldots, t_{0s}$ relatifs à l'état initial du système de lignes. Par exemple, la fonction génératrice (f. g.)

$$\Phi(q, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \,\mathrm{E}(e^{-q\tau_n} \mid t_{0\nu}) \quad [\text{équ. } (1.46)]$$

des transformées de Laplace-Stieltjes (t. L.) des f. r. des délais d'attente τ_n de tous les appels est exprimée, au moyen des s solutions du système d'équations intégrales correspondant à ce problème, par une somme d'intégrales de Fourier par rapport aux $t_{0\nu}$.

Notre théorie ne permet pas, du moins dans sa forme actuelle, de conclure, dans les hypothèses générales mentionnées plus haut, à l'existence de grandeurs d'équilibre statistique telles que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(e^{-q\tau_n} \mid t_{0\nu})$ (démontrée pour cette limite en toute généralité par MM. J. Kiefer et J. Wolfowitz [3] par une méthode probabiliste). Mais quand on possède le $\Phi(q, z)$ correspondant, on peut en tirer cette limite ou, plus généralement, le développement asymptotique de la $n^{\text{ième}}$ f. r. de délai d'attente pour les grandes valeurs de n. Pour cette raison il est important de savoir que dans certaines hypothèses exposées plus loin nos équations intégrales peuvent être résolues, offrant ainsi les seules possibilités de calcul effectif de grandeurs, stationnaires ou non, de la théorie des attentes.

Nous traitons dans le chapitre I la construction des t. L., des f. r. des délais d'attente successifs et passons ensuite aux t. L. des f. r. de paires, de triplets, etc. de tels délais. Les raisonnements de ce chapitre sont facilités par un théorème sur la convergence absolue de certaines intégrales n-uples, démontré dans le supplément S 1. Dans le chapitre II nous construisons les f. g. de différentes probabilités, par exemple celle des probabilités pour que le $n^{\text{ième}}$ appel trouve exactement λ lignes occupées. Les intégrales multiples utilisées dans ce chapitre ne convergent pas absolument, ce qui nécessite différentes modifications des raisonnements. Dans le chapitre III nous étudions la répartition des paramètres markoviens $t_{n1}, \ldots, t_{ns}$. En outre, nous traitons les problèmes du chapitre I dans l'hypothèse additionnelle du blocage temporaire qui implique une forme plus générale du système d'équations intégrales. Dans le chapitre IV les équations intégrales sont résolues partiellement pour tout entier s dans l'hypothèse où $f_1(t) = 1 - e^{-t}$, la f. r. $f_2(t)$ étant arbitraire; on en tire des formules pour les f. r. et probabilités étudiées aux chapitres I et II. Ensuite, on montre dans le chapitre V sur l'exemple $s = 2$ que dans chacune des deux hypothèses suivantes le système d'équations intégrales peut être résolu par des formules où figurent une partie des solutions de certaines équations transcendantes, mais ni des séries ni d'autres processus infinis : 1° Lorsque la t. L. $\int_0^\infty e^{zt}\, df_1(t)$ est rationnelle, $f_2(t)$ étant arbitraire; 2° lorsque $\int_0^\infty e^{zt}\, df_2(t)$ est rationnelle et que $f_1(t)$ est une fonction en escalier, à « gradins » de même largeur. Les méthodes exposées ici permettent donc de résoudre, au moyen d'un nombre fini d'opérations, tout problème dont les données sont conformes à une de ces deux hypothèses. En outre, nous indiquons dans ce chapitre de quelle manière nos équations intégrales, ainsi que la méthode de leur résolution, se modifient dans l'hypothèse d'un encombrement total des s lignes.

Pour ne pas interrompre trop souvent l'exposé de la théorie, différentes démonstrations et transformations analytiques ont été renvoyées dans des suppléments. Remarquons enfin que la méthode utilisée ici permet aussi d'établir la théorie des problèmes stochastiques du groupe de lignes sans possibilité d'attente [10].

Qu'il me soit permis de remercier ici M. Emile Vaulot, qui a revu le texte et lu les épreuves de ce Mémoire, ainsi que de celui [12] qui l'a précédé dans ce Mémorial.

CHAPITRE I.

Construction des transformées de Laplace Stieljes de différentes fonctions de répartition de délais d'attente.

Dans ce qui suit, nous appelons « groupe » un ensemble de plusieurs lignes téléphoniques interchangeables reliant, chacune, les deux mêmes points terminaux. En supposant que les appels qui, faute de lignes libres, ne peuvent être acheminés immédiatement, attendent leur tour (sans renoncer à leur communication), nous allons transformer les problèmes stochastiques qu'on étudie habituellement dans ce domaine, en des problèmes d'Analyse mathématique, nécessitant dans chaque cas la résolution d'un certain système d'équations intégrales linéaires simultanées à variables complexes. Dans différentes hypothèses sur les f. r. qui figurent dans les données de nos problèmes, nous traiterons ensuite de la résolution de ces équations intégrales. Comme hypothèse essentielle nous supposons que les appels produits sur ce « groupe » sont traités *suivant leur ordre de production*; c'est cette hypothèse, imposée par les besoins de la pratique, qui rend difficile la théorie des problèmes en question.

Désignons par $s(\geqq 1)$ le nombre de lignes du groupe, par

$$(1.1) \qquad X_n \quad (X_n \leqq X_{n+1};\ n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$$

l'instant de production et par $T_n(\geqq 0)$ la durée de communication (d. c.) du $n^{\text{ième}}$ appel. Nous considérerons les T_n comme des variables aléatoires indépendantes (v. a. i.) ayant toutes la même f. r.

$$(1.2) \qquad \operatorname{Prob}(T < t) = f_1(t) \qquad [f_1(0) = 0,\ f_1(+0) \geqq 0].$$

De même, les intervalles de temps

$$(1.3) \qquad Y_n = X_{n+1} - X_n \qquad (\geqq 0)$$

entre les instants de production d'appels consécutifs seront considérés comme des variables aléatoires (v. a.), stochastiquement indépendantes aussi bien entre elles que des T_n, et ayant toutes la même f. r.

$$(1.4) \qquad \operatorname{Prob}(Y < y) = f_2(y) \qquad [f_2(0) = 0,\ f_2(+0) \geqq 0].$$

Nos développements, à l'exclusion de ceux du chapitre II où $f_2(y)$ est supposée continue, restent valables pour la f. r. impropre $f_2(0) = 0$, $f_2(y) = 1$ $(y > 0)$, qui rend Y identiquement égal à zéro.

Les s dernières fins de communications provenant d'appels antérieurs au $n^{\text{ième}}$ appel (donc d'indices $< n$), prises dans un ordre quelconque, seront désignées par

$$(1.5) \qquad X_n + t_{n1},\ \ldots,\ X_n + t_{ns}.$$

En vertu de notre règle de priorité, les $t_{n\nu}$ résument de manière exhaustive ce que les événements relatifs à des appels d'indices $< n$

peuvent nous enseigner sur ce qui se passera à partir du $n^{\text{ième}}$ appel. Pour cette raison, les $t_{n\nu}$ peuvent être considérés comme des paramètres « markoviens » par rapport à l'instant X_n.

Nous désignerons par

$$\min{}^{(i)}(a_1, \ldots, a_n) \quad (i = 1, 2, \ldots; \min{}^{(1)} \equiv \min) \tag{1.6}$$

le $i^{\text{ième}}$ des nombres réels $a_1, \ldots, a_n$, rangés par ordre de croissance. En outre, nous utiliserons la notation

$$a^+ = \max(a, 0) \tag{1.7}$$

et écrirons respectivement $\min^{(i)+}$ et $\min^+$ au lieu de $[\min^{(i)}]^+$ et $[\min]^+$. De même seront employées, le cas échéant, les notations analogues $\max^{(i)}$, $\max^{(i)+}$, $\max \equiv \max^{(1)}$ et $\max^+ \equiv \max^{(1)+}$.

En vertu de notre hypothèse principale, le délai d'attente (d. a.) τ_n du $n^{\text{ième}}$ appel s'exprime comme suit par les grandeurs $t_{n\nu}$ [équ. (1.5)] : τ_n est égal à $\min(t_{n1}, \ldots, t_{ns})$ lorsque ce nombre est positif, et à zéro dans le cas contraire. Au moyen de (1.7) nous obtenons donc la formule

$$\tau_n = \min{}^+(t_{n1}, \ldots, t_{ns}) \tag{1.8}$$

qui montre que τ_n est une fonction *symétrique* des $t_{n\nu}$.

En vue d'établir une relation entre les $t_{n\nu}$ et les grandeurs analogues $t_{n-1,\nu}$, observons qu'avec nos notations, la $(n-1)^{\text{ième}}$ communication prend fin à l'instant $X_{n-1} + \tau_{n-1} + T_{n-1}$. En vertu de (1.8) et (1.5) les s dernières fins de communications provenant d'appels d'indices $< n$ sont donc, à l'ordre près,

$$\left\{\begin{array}{l} X_{n-1} + \min{}^+(t_{n-1,1}, \ldots, t_{n-1,s}) + T_{n-1}, \\ X_{n-1} + \min{}^{(2)}(t_{n-1,1}, \ldots, t_{n-1,s}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_{n-1} + \min{}^{(s)}(t_{n-1,1}, \ldots, t_{n-1,s}). \end{array}\right. \tag{1.9}$$

D'autre part, ces grandeurs peuvent être écrites sous la forme (1.5), et comme nous ne rencontrerons, dans ce qui suit, que des fonctions *symétriques* des $t_{n\nu}$, nous pouvons poser par exemple, en utilisant la notation (1.3),

$$\left\{\begin{array}{l} t_{n1} = \min\limits_{\nu=1,\ldots,s}{}^+ t_{n-1,\nu} + T_{n-1} - Y_{n-1}, \qquad t_{n2} = \min\limits_{\nu=1,\ldots,s}{}^{(2)} t_{n-1,\nu} - Y_{n-1}, \qquad \ldots, \\ \qquad t_{ns} = \min\limits_{\nu=1,\ldots,s}{}^{(s)} t_{n-1,\nu} - Y_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{array}\right. \tag{1.10}$$

Ces formules de récurrence nous permettent d'exprimer les $t_{n\nu}$ et, par conséquent, le d. a. τ_n [équ. (1.8)], par les $2n$ v. a. i.

$$\mathrm{T}_0,\quad \mathrm{Y}_0,\quad \ldots,\quad \mathrm{T}_{n-1},\quad \mathrm{Y}_{n-1} \tag{1.11}$$

et les s fins de communications (par rapport à l'instant X_0)

$$t_{01},\quad \ldots,\quad t_{0s}. \tag{1.12}$$

Nous considérerons les s nombres $t_{0\nu}$ comme *donnés* et utiliserons les formules (1.10) en premier lieu pour déterminer les f. r. conditionnelles

$$\rho_n(t \mid t_{0\nu}) = \mathrm{Prob}(\tau_n < t \mid t_{01}, \ldots, t_{0s}) \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1.13}$$

des d. a. des appels successifs.

En vertu d'un théorème de M. P. Lévy ([4], p. 38), la f. r. $f(x)$ d'une v. a. X peut être exprimée au moyen de sa fonction caractéristique (f. c.) $\mathrm{E}\, e^{it\mathrm{X}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, df(x)$ [E désignant l'espérance mathématique (e. m.) d'une grandeur aléatoire]; pour obtenir la f. r. (1.13), il suffirait donc de construire l'e. m. conditionnelle $\mathrm{E}(e^{it\tau_n} \mid t_{0\nu})$. Mais comme la v. a. τ_n est $\geqq 0$, l'e. m. $\mathrm{E}(e^{-q\tau_n} \mid t_{0\nu})$ existe et est continue pour $\mathrm{R}(q) \geqq 0$. Pour $\mathrm{R}(q) > 0$, cette e. m. est une fonction holomorphe de q dont l'utilisation présente des avantages, tandis qu'en renonçant à n'employer que des valeurs purement imaginaires de q, on parvient à une simplification notable d'une partie des formules de cette théorie. Nous allons donc construire $\mathrm{E}(e^{-q\tau_n} \mid t_{0\nu})$ en supposant en général $\mathrm{R}(q) > 0$, ce qui suffit pour le calcul de la f. r. (1.13).

En considérant les paramètres $t_{0\nu}$ [équ. (1.12)] comme donnés, τ_n est une fonction des v. a. (1.11), respectivement de f. r. (1.2) et (1.4); il vient donc, en désignant toujours la variable d'intégration correspondant à une v. a. donnée par la minuscule correspondante,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(e^{-q\tau_n} \mid t_{0\nu}) = \int_0^\infty df_1(t_0) \int_0^\infty df_2(y_0) \ldots \int_0^\infty df_1(t_{n-1}) \int_0^\infty df_2(y_{n-1}) \\ \times \exp[-q\tau_n(t_0, y_0, \ldots, t_{n-1}, y_{n-1}; t_{01}, \ldots, t_{0s})].\end{aligned} \tag{1.14}$$

En vue de calculer pas à pas cette intégrale de Stieltjes, posons

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{J}_{n0} = e^{-q\tau_n}; \qquad \mathrm{J}_{n,j+1} = \int_0^\infty df_1(t_{n-j-1}) \int_0^\infty df_2(y_{n-j-1}) \mathrm{J}_{nj} \\ &\qquad\qquad (j = 0, \ldots, n-1), \end{aligned}\right. \tag{1.15}$$

d'où

$$J_{nn} = E(e^{-q\tau_n} \mid t_{0\nu}); \tag{1.16}$$

nous verrons que J_{nj} ($j = 0, \ldots, n$) peut être représenté sous forme d'une somme d'intégrales de Fourier par rapport aux s paramètres réels $t_{n-j,1}, \ldots, t_{n-j,s}$ relatifs [*voir* équ. (1.5)] aux appels d'indices $< n-j$. En vertu de (1.7) et (1.8) nous avons d'abord

$$e^{-q\tau_n} = \exp[-q \min{}^{+}(t_{n1}, \ldots, t_{ns})]. \tag{1.17}$$

Appliquons ici la formule

$$\left\{\begin{aligned} &\exp[-q\min{}^{+}(a_1, \ldots, a_s)] \\ &\quad = 1 - \frac{1}{(2\pi i)^s}\int_{C_1}\cdots\int_{C_s} e^{\sum_1^s a_\nu z_\nu} \frac{q}{q + \sum_1^s z_\nu} \frac{dz_1 \ldots dz_s}{z_1 \ldots z_s} \\ &\qquad\qquad \left[R\left(q + \sum_1^s z_\nu\right) > 0\right], \end{aligned}\right. \tag{1.18}$$

où l'intégrale s-uple sera étendue au produit de s courbes $C_1, \ldots, C_s$ suivant la *figure* 1, ou à des parallèles à l'axe imaginaire, situées à droite de cet axe. Pour $s = 1$, cette formule prend la forme

$$e^{-qa^{+}} = 1 - \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{az} \frac{q\,dz}{z(q+z)} \qquad [R(q+z) > 0] \tag{1.19}$$

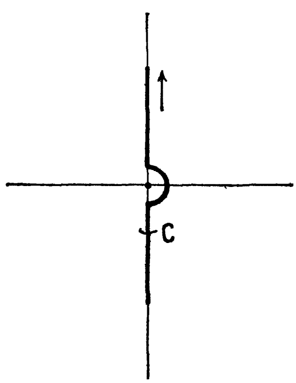

Fig. 1.

et se démontre en amenant la courbe C vers l'infini des demi-plans droit ou gauche, selon que $a \leqq 0$ ou $a > 0$; $\frac{1}{2\pi i}\int_C$ s'avère nulle dans le premier cas, et égale, dans le deuxième cas, à la somme des résidus aux pôles $z = 0$ et $z = q$. Pour $s > 1$, on démontre (1.18) d'une manière aussi simple par induction complète [1].

En portant les expressions (1.17) et (1.18) dans la première équation (1.15), nous obtenons la formule

$$(1.20)\quad J_{n0} = e^{-q\tau_n} = 1 - \frac{1}{(2\pi i)^s}\int_{C_1}\cdots\int_{C_s} e^{\sum_1^s t_{n\nu} z_\nu} \frac{q}{q + \sum_1^s z_\nu} \frac{dz_1 \ldots dz_s}{z_1 \ldots z_s}$$

qui met en évidence que J_{n0} est une fonction symétrique des $t_{n\nu}$.

Substituons dans (1.20) les expressions (1.10) et supposons pour le moment, afin de simplifier l'écriture, que

$$(1.21)\qquad t_{n-1,1} \leqq t_{n-1,2} \leqq \ldots \leqq t_{n-1,s};$$

il vient ainsi

$$(1.22)\quad \sum_{\nu=1}^{s} t_{n\nu} z_\nu = (t^+_{n-1,1} + t_{n-1} - y_{n-1}) z_1 + \sum_{\nu=2}^{s} (t_{n-1,\nu} - y_{n-1}) z_\nu$$

$$= t_{n-1} z_1 - y_{n-1} \sum_1^s z_\nu + t^+_{n-1,1} z_1 + \sum_2^s t_{n-1,\nu} z_\nu.$$

On reconnaît alors que l'intégrale s-uple (1.20) qui est absolument convergente (*voir* le supplément S 1), converge uniformément par rapport au paramètre $y_{n-1} \geqq 0$. Pour calculer l'intégrale

$$J_{n1} = \int_0^\infty df_1(t_{n-1}) \int_0^\infty df_2(y_{n-1}) J_{n0},$$

---

[1] Au lieu de $\int_C$ nous utiliserons parfois la notation $\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0}$; de même, nous écrirons $\int_{-iN+0}^{iN+0}$, lorsqu'un chemin d'intégration peut se confondre, sauf dans un voisinage de l'origine, avec le segment $(-iN, iN)$ de l'axe imaginaire.

nous sommes donc en droit d'intégrer par rapport à $d f_2(y_{n-1})$ *sous* les signes d'intégration de (1.20), ce qui transforme le facteur $e^{-y_{n-1}\sum_1^s z_\nu}$ de la fonction à intégrer en $\int_0^\infty d f_2(y)\, e^{-y\sum_1^s z_\nu}$. De même, après avoir modifié l'écriture de (1.20), pouvons-nous intervertir les opérations

$$\int_0^\infty \cdots d f_1(t_{n-1}) \quad \text{et} \quad \int_{C_1}\cdots\int_{C_s}.$$

L'expression obtenue ainsi pour J_{n1} peut être transformée en une somme d'intégrales de Fourier relatives aux paramètres $t_{n-1,i}$, et dont la forme met en évidence que J_{n1} est une fonction symétrique des $t_{n-1,i}$; ensuite le procédé que nous venons d'indiquer peut être répété pour construire successivement tous les J_{nj} [équ. (1.15)]. Pour aboutir d'une manière générale à la construction de ces intégrales, nous admettrons maintenant que pour un certain $j \geqq 0$, J_{nj} peut être représenté par l'expression

$$(1.23)\qquad J_{nj} = \sum_{\lambda=0}^{s} \frac{1}{(2\pi i)^\lambda}\int_{C_1}\cdots\int_{C_\lambda} v_{j\lambda}\left(z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_\nu\right) \times \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{s} e^{\sum_{\nu=1}^{\lambda} z_\nu t_{n-j,\nu'}} \frac{dz_1\ldots dz_\lambda}{z_1\ldots z_\lambda},$$

où, pour $\lambda \geqq 1$, la somme $\sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{s}$ sera étendue à toutes les C_s^λ combinaisons λ à λ des indices $1, \ldots, s$; pour $\lambda = 0$, nous posons

$$\sum_{1',\ldots,\lambda'} \equiv 1, \qquad \sum_{\nu=1}^{\lambda} \equiv 0,$$

le terme initial de la somme $\sum_{\lambda=0}^{s}$ étant ainsi égal à $v_{j0}(0)$. Les fonctions auxiliaires $v_{j\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$ [qui n'interviennent dans (1.23) que pour $y = \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_\nu$] sont symétriques en $z_1, \ldots, z_\lambda$, holomorphes dans le domaine

$$(1.24) \qquad R(z_1) > 0, \quad \ldots, \quad R(z_\lambda) > 0; \quad R(y) > 0,$$

et continues [pour $R(q) > 0$] dans le domaine

$$(1.25) \qquad R(z_1) \geqq 0, \quad \ldots, \quad R(z_\lambda) \geqq 0; \quad R(y) \geqq 0,$$

où elles vérifient des inégalités de la forme

$$(1.26) \qquad |v_{j\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y)| < \frac{c_1 c_2^j}{|q+y|} \qquad (\lambda = 0, \ldots, s).$$

Enfin la fonction v_{js} s'exprime comme suit par $v_{j0}, \ldots, v_{j,s-1}$:

$$(1.27) \qquad v_{js}(z_1, \ldots, z_s; y) = -\sum_{\lambda=0}^{s-1} \sum_{1', \ldots, \lambda'=1} v_{j\lambda}(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; y).$$

Nous démontrerons qu'alors l'e. m.

$$J_{n,j+1} = E(e^{-q\tau_n} \mid t_{n-j-1,\nu}) \quad [\text{équ. } (1.15)]$$

s'exprime elle aussi par une expression de la forme (1.23), avec des fonctions auxiliaires $v_{j+1,\lambda}$ ayant toutes les propriétés admises pour les $v_{j\lambda}$. Comme les relations (1.23) à (1.27) sont satisfaites, en vertu de (1.20), pour $j = 0$ avec les fonctions auxiliaires

$$(1.28) \qquad \begin{cases} v_{00}(y) = \dfrac{q}{q+y}, \qquad v_{01} = \ldots = v_{0,s-1} = 0, \\ v_{0s}(z_1, \ldots, z_s; y) = -\dfrac{q}{q+y}, \end{cases}$$

nous aurons ainsi démontré la formule (1.23) pour tout $j \geqq 0$; en particulier, cela nous permettra d'exprimer J_{nn} [équ. (1.16)] en fonction des grandeurs $t_{0\nu}$.

Pour simplifier l'écriture de nos formules, nous utiliserons des opérateurs C_ν, K_ν, $U_{\lambda s}$ définis comme suit :

$$(1.29) \qquad C_\nu f(z_\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\nu} f(z_\nu) \frac{dz_\nu}{z_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

$$(1.30) \qquad K_\nu f(z_\nu) = f(0) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

$$
(1.31)\quad \left\{
\begin{aligned}
&U_{0s}=\prod_{\nu=1}^{s}K_\nu-\prod_{\nu=1}^{s}C_\nu;\\
&U_{\lambda s}=\sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{s} C_{1'},\ldots,C_{\lambda'}\left[\prod^{(\lambda)}K_\nu-\prod^{(\lambda)}C_\nu\right]\\
&\left[\prod^{(\lambda)}=\prod_{\nu=1}^{s}(\nu\neq 1',\ldots,\lambda');\ \lambda=1,\ldots,s-1;\ s=1,2,\ldots\right];
\end{aligned}
\right.
$$

nous écrirons parfois $U_{\lambda s}(1,\ldots,s)$ pour indiquer que $U_{\lambda s}$ se rapporte aux variables d'intégration $z_1,\ldots,z_s$.

En substituant à v_{js}, dans (1.23), le deuxième membre de l'équation (1.27) et utilisant les opérateurs $U_{\lambda s}$, nous obtenons pour J_{nj} la formule

$$
(1.32)\qquad J_{nj}=\sum_{\lambda=0}^{s-1}U_{\lambda s}\, e^{\sum_{\nu=1}^{s}t_{n-j,\nu}z_\nu}\, v_{j\lambda}\left(z_{1'},\ldots,z_{\lambda'};\sum_{\nu=1}^{s}z_\nu\right),
$$

et en particulier, la formule (1.20) se transforme, en vertu de (1.28), en

$$
(1.33)\qquad J_{n0}=\sum_{\lambda=0}^{s-1}U_{\lambda s}\, e^{\sum_{1}^{s}t_{n\nu}z_\nu}\, v_{0\lambda}\left(z_{1'},\ldots,z_{\lambda'};\sum_{1}^{s}z_\nu\right).
$$

Dans la formule (1.32) dont la symétrie, en tant que fonction des $t_{n-j,\nu}$, résulte de la propriété des $v_{j\lambda}$, d'être symétriques en $z_1,\ldots,z_\lambda$, nous allons poser, de manière analogue à (1.21) et (1.22),

$$
(1.34)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{s}t_{n-j,\nu}z_\nu=t_{n-j-1}z_1-y_{n-j-1}\sum_{\nu=1}^{s}z_\nu+t^{+}_{n-j-1,1}z_1+\sum_{\nu=2}^{s}t_{n-j-1,\nu}z_\nu\\
&\qquad\qquad (t_{n-j-1,1}\leqq t_{n-j-1,2}\leqq\cdots\leqq t_{n-j-1,s}).
\end{aligned}
\right.
$$

En effectuant les intégrations indiquées dans (1.15), nous rencontrons les t. L. des f. r. $f_1(t)$ et $f_2(t)$ qui seront désignées respectivement par

$$
(1.35)\quad \varepsilon_1(z)=\int_0^\infty e^{zt}\,df_1(t),\qquad \varepsilon_2(z)=\int_0^\infty e^{-t}\,df_2(t)\not\equiv 1\qquad [R(z)\leqq 0];
$$

nous ne supposons rien, dans ce chapitre, sur la convergence de ces intégrales pour $R(z) > 0$, ce qui nous contraindra plus loin à modifier le chemin d'intégration C_1 dans une partie de nos formules.

En vertu de l'inégalité (1.26), les intégrales multiples qui figurent dans (1.32), c'est-à-dire dans (1.23), convergent absolument. Comme, en raison de l'inégalité $\left| e^{-y_{n-j-1}\sum\limits_1^s z_\nu} \right| < 1$, cette convergence est uniforme par rapport à y_{n-j-1}, nous pouvons intervertir l'intégration $\int_0^\infty \cdots df_2(y_{n-j-1})$ avec les intégrations dont les opérateurs $U_{\lambda s}$ se composent; il vient ainsi au moyen de (1.34) et (1.35)

$$
(1.36)\quad \int_0^\infty J_{nj}\, df_2(y_{n-j-1}) = \sum_{\lambda=0}^{s-1} U_{\lambda s} \exp\left(t^{+}_{n-j-1,1} z_1 + \sum_{\nu=2}^{s} t_{n-j-1,\nu} z_\nu \right) \\
\times e^{t_{n-j-1} z_1} \varepsilon_0 \left(-\sum_1^s z_\nu \right) \varphi_{j\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'} ; \sum_1^s z_\nu \right).
$$

Avant d'effectuer l'opération $\int_0^\infty \cdots df_1(t_{n-j-1})$ indiquée dans (1.15), décomposons comme suit le seul facteur des fonctions à intégrer qui contient t_{n-j-1} :

$$
(1.37)\qquad e^{t_{n-j-1} z_1} = 1 + \left(e^{t_{n-j-1} z_1} - 1 \right).
$$

Dans la partie du deuxième membre de (1.36) qui correspond au deuxième terme de cette décomposition, le chemin d'intégration de

$$
C_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \cdots \frac{dz_1}{z_1}
$$

peut être amené dans l'axe imaginaire, puisque la fonction

$$
\frac{1}{z_1} \left(e^{t_{n-j-1} z_1} - 1 \right)
$$

est holomorphe en $z_1 = 0$; les opérateurs $U_{\lambda s}$ modifiés ainsi seront désignés par $\tilde{U}_{\lambda s}$. En excluant un voisinage du point $z_1 = 0$, les intégrales multiples contenues dans $\tilde{U}_{\lambda s}$ convergent uniformément par rapport à t_{n-j-1}. Mais la dernière fonction est égale à t_{n-j-1} pour $z_1 = 0$; en général elle n'est donc pas bornée au voisinage de $z_1 = 0$ et pour être en droit d'intégrer par rapport à $df_1(t_{n-j-1})$ *sous* le signe $U_{\lambda s}$, nous supposerons que

$$(1.38) \qquad E(T) = \int_0^\infty t\, df_1(t) < \infty,$$

c'est-à-dire que l'e. m. des d. c. T_ν est finie [1].

Dans cette hypothèse, l'opération $\int_0^\infty \cdots df_1(t_{n-j-1})$ transforme (1.36), en vertu des formules (1.15) et 1.35), en

$$(1.39)\quad \left\{\begin{aligned} J_{n,j+1} = & \sum_{\lambda=0}^{s-1} U_{\lambda s} \exp\left(t^+_{n-j-1,1} z_1 + \sum_{\nu}^{s} t_{n-j-1,\nu} z_\nu\right) \\ & \times \varepsilon_2\left(-\sum_1^s z_\nu\right) v_{j\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right) \\ & + \sum_{\lambda=0}^{s-1} \tilde{U}_{\lambda s} \exp\left(t^+_{n-j-1,1} z_1 + \sum_2^s t_{n-j-1,\nu} z_\nu\right) [\varepsilon_1(z_1) - 1] \\ & \times \varepsilon_2\left(-\sum_1^s z_\nu\right) v_{j\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right) \\ & (t_{n-j-1,1} \leqq t_{n-j-1,\nu},\ \nu = 2, \ldots, s). \end{aligned}\right.$$

Au moyen de différentes opérations le deuxième membre de cette formule peut être transformé en une somme d'intégrales de la forme (1.32), ce qui démontre la formule (1.32) pour tout $j \geqq 0$. Afin de ne pas interrompre l'exposé de notre théorie, nous admettrons ici le résultat de cette transformation dont la démonstration se trouve dans le supplément S 3. Conformément à (S 3.31) et (S 3.32), il vient donc

$$(1.40) \qquad J_{n,j+1} = \sum_{\lambda=0}^{s-1} U_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s t_{n-j-1,\nu} z_\nu}\, v_{j+1,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right),$$

---

[1] Notons toutefois qu'en remplaçant les intégrales $\int_{-i\infty}^{i\infty} \cdots \frac{dz_1}{z_1}$ contenues dans les $\tilde{U}_{\lambda s}$ par $\lim_{\delta \to +0}\left[\int_{i\delta}^{i\infty} + \int_{-i\infty}^{-i\delta}\right] \cdots \frac{dz_1}{z_1}$, nous pourrions renoncer à l'hypothèse (1.38).

où nous avons posé

$$(1.41)\quad \left\{\begin{aligned} & v_{j+1,\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) \\ & \quad = \varepsilon_2(-y) v_{j\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\varepsilon_1(\zeta)-1}{\zeta}\left(y - \sum_1^\lambda z_\nu - \zeta\right)^{-1} \\ & \quad \times \left[\left(y - \sum_1^\lambda z_\nu\right)\varepsilon_2(-y) v_{j,\lambda+1}(\zeta, z_1, \ldots, z_\lambda; y)\right. \\ & \qquad \left. - \zeta\,\varepsilon_2\left(-\sum_1^\lambda z_\nu - \zeta\right) v_{j,\lambda+1}\left(\zeta, z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu + \zeta\right)\right] d\zeta \\ & \qquad\qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1;\ j = 0, 1, \ldots), \end{aligned}\right.$$

la fonction v_{js} qui figure dans la dernière de ces formules étant donnée par (1.27). On voit immédiatement que, de même que les $v_{j\lambda}$, les fonctions $v_{j+1,\lambda}$ sont symétriques en $z_1, \ldots, z_\lambda$; dans le supplément S 4 nous démontrerons que ces fonctions possèdent aussi les autres propriétés admises pour les $v_{j\lambda}$ et, en particulier, qu'elles aussi vérifient l'inégalité (1.26) (avec des constantes appropriées c_1 et c_2).

De (1.32) nous tirons, en vertu de (1.16), la formule

$$(1.42)\quad \left\{\begin{aligned} & E(e^{-q\tau_n} \mid t_{0\nu}) = \sum_{\lambda=0}^{s-1} U_{s\lambda}\, e^{\sum_1^s t_{0\nu}\omega_\nu} v_{n\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\lambda\right) \\ & \qquad\qquad (n = 0, 1, \ldots) \end{aligned}\right.$$

qui exprime notre e. m. conditionnelle en fonction symétrique des données $t_{01}, \ldots, t_{0s}$.

Notre problème revient ainsi à celui de la construction des fonctions $v_{n\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$; pour y parvenir, nous introduisons les fonctions génératrices de ces fonctions, les séries

$$(1.43)\quad V_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n v_{n\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) \qquad (\lambda = 0, \ldots, s)$$

qui, en raison des inégalités (1.26), convergent dans le domaine (1.25) pour $|z|$ assez petit.

En ajoutant, pour chaque λ, toutes les équations (1.41), multipliées respectivement par z^{j+1}, et tenant compte de (1.28), on obtient

$$(1.44)\quad \left\{\begin{aligned} &[1-z\varepsilon_0(-y)]\,V_\lambda(z_1,\ldots,z_\lambda;y)-\frac{z}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\varepsilon_1(\zeta)-1}{\zeta}\left(y-\sum_1^\lambda z_\nu-\zeta\right)^{-1}\\ &\quad\times\left[\left(y-\sum_1^\lambda z_\nu\right)\varepsilon_0(-y)V_{\lambda+1}(\zeta,z_1,\ldots,z_\lambda;y)\right.\\ &\qquad\left.-\zeta\,\varepsilon_0\left(-\sum_1^\lambda z_\nu-\zeta\right)V_{\lambda+1}\left(\zeta,\,z_1,\,\ldots,\,z_\lambda;\,\sum_1^\lambda z_\nu+\zeta\right)\right]d\zeta\\ &=\delta_{\lambda 0}\,\frac{q}{q+y}\qquad(\lambda=0,\ldots,s-1),\end{aligned}\right.$$

et de la même façon on tire de (1.27) la formule

$$(1.45)\qquad \sum_{\lambda=0}^{s}\ \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{s} V_\lambda(z_{1'},\ldots,z_{\lambda'};y)=0.$$

En ajoutant ensuite toutes les équations (1.42), multipliées respectivement par z^n, nous obtenons

$$(1.46)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^n\,E(e^{-q\tau_n}\mid t_{0\nu})=\sum_{\lambda=0}^{s-1}U_{\lambda s}\,e^{\sum_1^s t_{0\nu}z_\nu}\,V_\lambda\left(z_{1'},\ldots,z_{\lambda'};\sum_1^s z_\nu\right).$$

Cette formule ramène la construction de la f. g. des e. m. $E(e^{-q\tau_n}\mid t_{0\nu})$ à celle des fonctions V_λ, lesquelles sont déterminées de manière univoque par les équations (1.44) et (1.45).

Avant de nous occuper de la résolution de ces équations, nous allons employer notre méthode pour représenter, de manière analogue à (1.46), les f. g. de différentes autres e. m., relatives à des probabilités composées. D'abord, les probabilités (f. r. à deux variables)

$$(1.47)\qquad \left\{\begin{aligned} &\rho_{n,n'}(t,\,t'\mid t_{0\nu})=\mathrm{Prob}(\tau_n<t,\ \tau_{n+n'}<t'\mid t_{0\nu})\\ &\qquad(t>0,\ t'>0;\ n,\ n'=0,\,1,\,\ldots)\end{aligned}\right.$$

peuvent être exprimées au moyen de leurs t. L.

$$(1.48)\qquad E(e^{-q\tau_n-q'\tau_{n+n'}}\mid t_{0\nu})\qquad [R(q)\geqq 0,\ R(q')\geqq 0],$$

e théorème de P. Lévy s'appliquant ensuite tout comme dans le cas l'une seule v. a. (*voir*, par exemple, [1], p. 101).

Ces e. m. vérifient l'identité évidente

$$(1.49)\qquad E(e^{-q\tau_n-q'\tau_{n+n'}}\mid t_{0\nu}) = E\,[e^{-q\tau_n}\,E(e^{-q'\tau_{n+n'}}\mid t_{n\nu})\mid t_{0\nu}].$$

En remplaçant dans la formule (1.42) q, $t_{0\nu}$ et n respectivement par q', $t_{n\nu}$ et n', il vient

$$(1.50)\qquad E(e^{-q'\tau_{n+n'}}\mid t_{n\nu}) = \sum_{\lambda=0}^{s-1} U_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s t_{n\nu}z_\nu}\, v_{n'\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\, \sum_1^s z_\nu\right)$$

et en multipliant par $e^{-q\tau_n}z'^{n'}$ et sommant de $n'=0$ jusqu'à $n'=\infty$, on a

$$(1.51)\qquad e^{-q\tau_{n'}}\sum_{n'=0}^{\infty} z'^{n'}\,E(e^{-q'\tau_{n+n'}}\mid t_{n\nu})$$
$$= e^{-q\tau_n}\sum_{\lambda=0}^{s-1} U_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s t_{n\nu}z_\nu}\, V_\lambda\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\, \sum_1^s z_\nu;\, z',\, q'\right);$$

nous avons désigné ici par $V_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda;\, z',\, q')$ les solutions des équations (1.44) et (1.45), formées (au lieu de z et q) avec z' et q'.

Pour transformer le deuxième membre de (1.51) où, en vertu de (1.8),

$$\tau_n = \min_{\nu=1,\ldots,s}{}^{+}\, t_{n\nu},$$

en une expression de la forme (1.32) (pour $j=0$), nous utiliserons l'identité (S3.25) du supplément S3 qui permet d'exprimer des produits de la forme $e^{\zeta\min^+(c_1,\ \ldots,c_s)}\,U_{\lambda s}\,e^{\sum_1^s c_\nu z_\nu} f\left(z_1, \ldots, z_\lambda;\, \sum_1^s z_\nu\right)$ sous forme d'une somme d'intégrales de Fourier par rapport aux c_ν. Au moyen de cette identité on obtient la formule

$$(1.52)\qquad e^{-q\tau_n}\sum_{n'=0}^{\infty} z'^{n'}\,E(e^{-q'\tau_{n+n'}}\mid t_{n\nu})$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{s-1} U_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s t_{n\nu}z_\nu}\, v_{0\lambda}^{(2)}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\, \sum_1^s z_\nu\right)$$

on a posé ici

$$(1.53)\quad \begin{cases} v_{0\lambda}^{(2)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = [V_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y; z', q')]^{[-q]} \\ [R(z_1) \geqq 0, \ldots, R(z_\lambda) \geqq 0,\ R(y) \geqq 0;\ \lambda = 0, \ldots, s-1], \end{cases}$$

en utilisant la notation

$$(1.54)\quad [f(z_1, \ldots, z_\lambda; y)]^{[\zeta]} = \left(y - \sum_1^\lambda z_\nu - \zeta\right)^{-1}$$

$$\times \left[\left(y - \sum_1^\lambda z_\nu\right) f(z_1, \ldots, z_\lambda; y-\zeta) - \zeta f\left(z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu\right)\right].$$

L'opération $E(\ldots \mid t_{0\nu})$, indiquée dans (1.49), peut être effectuée dans le deuxième membre de (1.52) de la même façon que précédemment dans (1.33) et l'on obtient ainsi la formule

$$(1.55)\quad \sum_{n'=0}^{\infty} z'^{n'} E(e^{-q\tau_n - q'\tau_{n+n'}} \mid t_{0\nu}) = \sum_{\lambda=0}^{s-1} U_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s t_{0\nu} z_\nu}\, v_{n\lambda}^{(2)}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right),$$

les fonctions $v_{0s}^{(2)}$ et $v_{n\lambda}^{(2)}$ $(n = 1, 2, \ldots;\ \lambda = 0, \ldots, s)$ se déduisant des s fonctions $v_{0\lambda}^{(2)}$ [équ. (1.53)] au moyen de (1.27) et de la formule de récurrence (1.41). Dans le supplément S 5 nous avons démontré que les $v_{j\lambda}^{(2)}$ ont les propriétés de symétrie, continuité et analyticité des $v_{j\lambda}$, et qu'elles vérifient dans le domaine (1.25) une inégalité de la forme

$$(1.56)\quad |v_{j\lambda}^{(2)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y)| < \frac{c_1 c_2^j}{|y + q + q'|} \qquad (j = 0, 1, \ldots;\ \lambda = 0, \ldots, s).$$

Par conséquent, les séries

$$(1.57)\quad \begin{cases} V_\lambda^{(2)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y; z, q, z', q') = \sum_{n=0}^{\infty} z^n v_{n\lambda}^{(2)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y; q, z', q') \\ \qquad (\lambda = 0, \ldots, s) \end{cases}$$

convergent dans le domaine (1.25) pour $|z|$ assez petit. Pour les $V_\lambda^{(2)}$ on tire des formules (1.41) et (1.27) (appliquées aux $v_{n\lambda}^{(2)}$) et (1.53) des équations intégrales qui ont la même structure que les équaions (1.44) et (1.45); au moyen de la notation (1.54) ces équations prennent la forme

$$(1.58)\quad (1 - z\,\varepsilon_2(-y))\,V_\lambda^{(2)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) - \frac{z}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\varepsilon_1(\zeta)-1}{\zeta}\left[\varepsilon_2(-y-\zeta)\,V_{\lambda+1}^{(2)}(\zeta, z_1, \ldots, z_\lambda; y+\zeta)\right]^{[\zeta]} d\zeta$$
$$= [V_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y; z', q')]^{[-q]} \qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1),$$

$$(1.59)\qquad \sum_{\lambda=0}^{s} \sum_{1', \ldots, \lambda'=1}^{s} V_\lambda^{(2)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = 0.$$

En effectuant dans les deux membres de (1.55) l'opération $\sum_{n=0}^{\infty} \cdots z^n$ qui, en vertu des inégalités (1.56), peut être permutée avec les $U_{\lambda s}$, nous obtenons la formule

$$(1.60)\qquad \sum_{n, n'=0}^{\infty} z^n z'^{n}\, \mathrm{E}(e^{-q\tau_n - q'\tau_{n+n'}} \mid t_{0\nu}) = \sum_{\lambda=0}^{s-1} U_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s t_{0\nu} z_\nu}\, V_\lambda^{(2)}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right),$$

qui ramène la construction de la f. g. des e. m. (1.48), donc celle des f. r. $\rho_{n,n'}(t, t' \mid t_{0\nu})$ [équ. (1.47)] à la construction des fonctions $V_\lambda^{(2)}$.

De la même façon on reconnaît que

$$(1.61)\qquad \sum_{n, n', n''=0}^{\infty} z^n z'^{n'} z''^{n''}\, \mathrm{E}(e^{-q\tau_n - q'\tau_{n+n'} - q''\tau_{n+n'+n''}} \mid t_{0\nu}) = \sum_{\lambda=0}^{s-1} U_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s t_{0\nu} z_\nu}\, V_\lambda^{(3)}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right),$$

les fonctions $V_\lambda^{(3)} = V_\lambda^{(3)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y; z, q, z', q', z'', q'')$ satisfaisant aux équations (1.58) avec $[V_\lambda^{(2)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y; z', q', z'', q'')]^{[-q]}$ pour deuxième membre, et à (1.59); on peut continuer ainsi en vue de construire les f. r. analogues à plus de trois variables.

Des équations (1.46), (1.60), (1.61) résultent différentes propriétés des fonctions V_λ, $V_\lambda^{(2)}$, $V_\lambda^{(3)}$ que nous nous bornons ici à établir pour les seules V_λ, solutions des équations (1.44) et (1.45).

Au moyen des formules (1.29) à (1.31) (où les variables d'intégration seront désignées par ζ_ν) et (1.45), l'équation (1.46) prend la forme

$$(1.62)\quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n \, \mathrm{E}(e^{-q\tau_n} \mid t_{0\nu}) = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{s} \frac{1}{(2\pi i)^\lambda} \int_{C_{1'}} \cdots \int_{C_{\lambda'}} \times e^{\sum_{\nu=1}^{\lambda} \zeta_{\nu'} t_{0\nu'}} \, \mathrm{V}_\lambda\left(\zeta_{1'}, \ldots, \zeta_{\lambda'}; \sum_{\nu=1}^{\lambda} \zeta_{\nu'}\right) \frac{d\zeta_{1'} \ldots d\zeta_{\lambda'}}{\zeta_{1'} \ldots \zeta_{\lambda'}}.$$

Effectuons dans les deux membres de cette formule les s opérations

$$(1.63)\quad \int_0^\infty e^{-z_\nu t_{0\nu}} \ldots z_\nu \, dt_{0\nu} \quad [\mathrm{R}(z_\nu) > 0;\ \nu = 1, \ldots, s];$$

dans le premier membre, nous pouvons intégrer terme à terme, et en plaçant dans le deuxième membre les C_ν de telle manière que les s inégalités $\mathrm{R}(z_\nu - \zeta_\nu) > \delta > 0$ soient vérifiées, il vient

$$(1.64)\quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\sum_1^s z_\nu t_{0\nu}} \, \mathrm{E}(e^{-q\tau_n} \mid t_{0\nu}) \, z_1 \, dt_{01} \ldots z_s \, dt_{0s}$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{s-1} \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{s} \frac{1}{(2\pi i)^\lambda} \int_{C_{1'}} \cdots \int_{C_{\lambda'}} \mathrm{V}_\lambda\left(\zeta_{1'}, \ldots, \zeta_{\lambda'}; \sum_{\nu=1}^{\lambda} \zeta_{\nu'}\right) \times \frac{z_{1'} \, d\zeta_{1'}}{\zeta_{1'}(z_{1'} - \zeta_{1'})} \cdots \frac{z_{\lambda'} \, d\zeta_{\lambda'}}{\zeta_{\lambda'}(z_{\lambda'} - \zeta_{\lambda'})}.$$

Comme les fonctions $\mathrm{V}_\lambda\left(\zeta_1, \ldots, \zeta_\lambda; \sum_1^\lambda \zeta_\nu\right)$ sont holomorphes et $\mathrm{O}\left(\left|\sum_1^\lambda \zeta_\nu\right|^{-1}\right)$ dans le domaine $\mathrm{R}(\zeta_1) > 0, \ldots, \mathrm{R}(\zeta_\lambda) > 0$, chaque intégrale $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\nu} \cdots \frac{z_\nu \, d\zeta_\nu}{\zeta_\nu(z_\nu - \zeta_\nu)}$ est égale au résidu de sa fonction à intégrer au point $\zeta_\nu = z_\nu$, de sorte que le deuxième membre de (1.64) s'avère égal à

$$\sum_{\lambda=0}^{s} \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{s} \mathrm{V}_\lambda\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'}\right) \qquad [\mathrm{R}(z_\nu) > 0,\ \nu = 1, \ldots, s].$$

Pour obtenir une relation plus générale, observons que chaque terme du deuxième membre de (1.62) où figure un $t_{0\nu} \leqq 0$, s'annule, r alors la fonction à intégrer de l'intégrale correspondante $\int_{C_\nu} \cdots d\zeta_\nu$ t holomorphe et $O(|\zeta_\nu|^{-3})$ dans le demi-plan droit. Pour

$$t_{01} = \ldots = t_{0i} = 0,$$

deuxième membre de (1.62) se réduit donc à $\sum_{\lambda=0}^{s-i} \sum_{1',\ldots,\lambda'=i+1}^{s} \cdots;$ ı effectuant ensuite dans cette formule les $s-i$ dernières des ɔérations (1.63), nous obtenons

$$(1.65)\quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\sum_{\nu=i+1}^{s} z_\nu t_{0\nu}}$$
$$\times \mathrm{E}(e^{-q\tau_n} \mid 0, \ldots, 0, t_{0,i+1}, \ldots, t_{0s}) z_{i+1}\, dt_{0,i+1} \ldots z_s\, dt_{0s}$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{s-i} \sum_{1',\ldots,\lambda'=i+1}^{s} \mathrm{V}_\lambda\Big(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'}\Big) \qquad (i = 0, \ldots, s).$$

Le module du $n^{\text{ième}}$ terme du premier membre est $\leqq |z|^n \prod_{\nu=i+1}^{s} \frac{|z_\nu|}{\mathrm{R}(z_\nu)}$, e sorte que le deuxième membre existe pour $|z| < 1$ dans le domaine

$$(1.66)\qquad \mathrm{R}(z_1) > 0, \quad \ldots, \quad \mathrm{R}(z_s) > 0.$$

En posant dans (1.65) successivement $i = s, s-1, \ldots, 0$, nous oyons que les fonctions

$$(1.67)\quad \begin{cases} \mathrm{V}_0(0), \quad \mathrm{V}_1(z_1; z_1), \\ \mathrm{V}_2(z_1, z_2; z_1 + z_2), \quad \ldots, \quad \mathrm{V}_s\Big(z_1, \ldots, z_s; \sum_1^s z_\nu\Big) \end{cases}$$

[ui sont les seules à figurer dans (1.46) et (1.62), existent ›our $|z| < 1$ dans le domaine (1.66); par contre, la convergence les séries $\mathrm{V}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$ [équ. (1.43)] dans le domaine (1.66) ı'a été démontrée dans le supplément S4 [*voir* équ. (S4.17)] que ›our $|z|$ assez petit. Notre raisonnement montre, en outre, que dans les formules dont le deuxième membre est de la forme (1.62), les onctions à intégrer (1.67) sont déterminées de manière univoque pourvu qu'elles aient les propriétés utilisées ici) par le premier nembre.

En désignant pour le moment les d. a. τ_n et les V_λ relatifs à un ;roupe de s lignes respectivement par τ_{ns} et par $\mathrm{V}_{\lambda s}$, nous montrerons maintenant que les fonctions $V_{\lambda,s-1}\left(z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu\right)$ relatives à un groupe de $s-1$ lignes s'expriment linéairement au moyen des $V_{\lambda s}$ qui figurent dans (1.67). Dans ce but faisons tendre t_{0s} vers $+\infty$ dans les deux membres de (1.62). Dans le deuxième membre, toute intégrale de la forme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_s} e^{\zeta_s t_{0s}} V_{\lambda s}\left(\zeta_s, \zeta_1, \ldots, \zeta_{\lambda-1}; \sum_1^{\lambda-1}\zeta_\nu + \zeta_s\right)\frac{d\zeta_s}{\zeta_s}$$

tend pour $t_{0s} \to \infty$ vers $V_{\lambda s}\left(0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{s-1}; \sum_1^{\lambda-1}\zeta_\nu\right)$, ce qu'on peut démontrer en utilisant la représentation (S 4.18) des $V_{\lambda s}$. Il vient ainsi

$$(1.68)\quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n \, \mathrm{E}(e^{-q\tau_n} \mid t_{01}, \ldots, t_{0,s-1}, \infty)$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{s-1} \sum_{1', \ldots, \lambda'=1}^{s} \frac{1}{(2\pi i)^\lambda} \int_C \cdots \int_C e^{\sum_{\nu=1}^{\lambda} \zeta_{\nu'} t_{0\nu'}} \left[V_{\lambda s}\left(\zeta_{1'}, \ldots, \zeta_{\lambda'}; \sum_{\nu=1}^{\lambda}\zeta_{\nu'}\right)\right.$$
$$\left. + V_{\lambda+1,s}\left(0, \zeta_{1'}, \ldots, \zeta_{\lambda'}; \sum_{\nu=1}^{\lambda}\zeta_{\nu'}\right)\right] \frac{d\zeta_{1'} \ldots d\zeta_{\lambda'}}{\zeta_{1'} \ldots \zeta_{\lambda'}}.$$

Mais comme $\tau_{ns}(T_0, Y_0, \ldots, T_{n-1}, Y_{n-1}; t_{01}, \ldots, t_{0,s-1}, \infty)$ se confond avec le d. a. $\tau_{n,s-1}(T_0, Y_0, \ldots, T_{n-1}, Y_{n-1}; t_{01}, \ldots, t_{0,s-1})$ pour un groupe de $s-1$ lignes, le premier membre de (1.68) peut aussi bien être exprimé au moyen de la formule (1.62) où s sera remplacé par $s-1$. En comparant cette formule avec (1.68), nous obtenons, en vue de l'unicité de la représentation d'une fonction sous la forme (1.62) (au moyen de fonctions V_λ ayant les propriétés mentionnées plus haut), les relations

$$(1.69)\quad \left\{\begin{aligned} V_{\lambda,s-1}\left(z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu\right) &= V_{\lambda s}\left(z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu\right) \\ &\quad + V_{\lambda+1,s}\left(0, z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu\right) \\ &(\lambda = 0, 1, \ldots, s-1;\ s = 2, 3, \ldots). \end{aligned}\right.$$

Donc, connaissant les $s+1$ fonctions (1.67) desquelles dépend, en vertu de (1.62), la répartition des d. a. pour un groupe de s lignes, on connaît aussi les s fonctions analogues relatives à un groupe de $s-1$ lignes, et ainsi de suite.

Au début de ce chapitre nous avons considéré le d. a. τ_n comme une fonction des $2n$ v. a. T_ν et Y_ν [équ. (1.11)] qui entrent en jeu à partir de l'instant X_0 de production de l'appel « o », ainsi que des s nombres $t_{0\nu}$ [équ. (1.12)] qui résument les effets des appels d'indices <0 et desquels τ_n dépend de manière symétrique. Mais, d'autre part, ce d. a. peut aussi être considéré comme une fonction des $2n-2$ v. a. intervenant à partir de l'instant $X_1 = X_0 + Y_0$, ainsi que des s nombres $t_{1\nu}$, relatifs aux appels d'indices <1. Nous avons donc

$$(1.70)\quad \begin{aligned}&\tau_n(T_0, Y_0, \ldots, T_{n-1}, Y_{n-1}; t_{01}, \ldots, t_{0s})\\ &\quad = \tau_{n-1}(T_1, Y_1, \ldots, T_{n-1}, Y_{n-1}; t_{11}, \ldots, t_{1s}) \qquad (n = 1, 2, \ldots);\end{aligned}$$

d'après (1.10), les $t_{1\nu}$ sont, à l'ordre près, respectivement égaux à

$$(1.71)\qquad t_{01}^{+} + T_0 - Y_0,\quad t_{02} - Y_0,\quad \ldots,\quad t_{0s} - Y_0,$$

pourvu que les $t_{0\nu}$ soient numérotés de telle manière que $t_{01} = \min\limits_{\nu=1,\ldots,s} t_{0\nu}$.

Pour l'e. m. conditionnelle d'une fonction quelconque $\varphi(\tau_n)$ de τ_n résulte de (1.70) et (1.71) la formule

$$(1.72)\qquad E[\varphi(\tau_n) \mid t_{0\nu}] = \int_0^\infty df_1(T_0) \int_0^\infty df_2(Y_0)\, E[\varphi(\tau_{n-1}) \mid t_{1\nu}].$$

Pour la série, supposée convergente pour $|z|$ assez petit,

$$(1.73)\qquad \Phi(t_{01}, \ldots, t_{0s}; z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, E[\varphi(\tau_n) \mid t_{01}, \ldots, t_{0s}]$$

qui, tout comme les τ_n, est une fonction symétrique des $t_{0\nu}$, on tire de (1.72) et de (1.8) (pour $n = 0$) l'équation fonctionnelle

$$(1.74)\quad \begin{aligned}&\Phi(t_{01}, \ldots, t_{0s}; z) - z\int_0^\infty df_1(t) \int_0^\infty df_2(y)\, \Phi(t'_{01}, \ldots, t'_{0s}; z)\\ &\quad = \varphi\,(\min_{\nu=1,\ldots,s}{}^{+} t_{0\nu}),\end{aligned}$$

les $t'_{0\nu}$ pouvant être définis comme suit :

$$(1.75)\qquad t'_{01} = \min_{\nu=1,\ldots,s}{}^{+} t_{0\nu} + t - y, \qquad t'_{0\nu} = t_{0\nu} - y \qquad (\nu = 2, \ldots, s).$$

En postulant pour Φ, dans le cas où $\varphi(\tau_n) = e^{-q\tau_n}$, une représentation de la forme et des propriétés de (1.62) et en utilisant pour $\varphi(\tau_0) = \exp(-q \min\limits_{\nu=1,\ldots,s}{}^{+} t_{0\nu})$ la formule (1.18), on retrouve grâce à l'équation fonctionnelle (1.74) les formules (1.44) et (1.45). —

Mentionnons ici que, grâce à un artifice d'analyse, exposé dans [12] (chap. III), notre théorie s'applique aussi dans un cas spécial où les v. a. Y_n [équ. (1.3)] ne sont plus indépendantes, mais liées.

C'est le cas où la répartition des instants de production des appels est bernoullienne (c'est-à-dire, où, pendant un intervalle de temps de longueur donnée $\mathfrak{T}$, un nombre donné N d'appels sont lancés, dont chacun peut se produire, indépendamment de tous les autres, avec la probabilité $\frac{t_2 - t_1}{\mathfrak{T}}$ pendant n'importe quel intervalle $t_2 - t_1$ tel que $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \mathfrak{T}$), tandis que les T_n sont des v. a. indépendantes, dont la f. r. commune $f_1(t)$ vérifie l'inégalité (1.38). En désignant par E_B l'e. m. d'une grandeur aléatoire calculée dans ces hypothèses, et par E_p l'e. m. de la même grandeur, calculée pour les f. r. $f_1(t)$ (arbitraire) et $f_2(t) = 1 - e^{-pt}$ ($\mathrm{R}(p) > 0$), on a

$$E_B = \frac{N!}{\mathfrak{T}^N} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} e^{p\mathfrak{T}} E_p \frac{dp}{p^{N+1}}. \tag{1.76}$$

Afin de déterminer, par exemple, $E_B(e^{-q\tau_n})$, il suffit donc de résoudre les équations (1.44), (1.45) dans l'hypothèse où $\varepsilon_2(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} df_2(t) = \frac{p}{p-z}$, p étant un paramètre complexe de partie réelle positive (*voir* aussi [8], § 1).

CHAPITRE II.

Construction des fonctions génératrices de différentes probabilités.

Dans ce chapitre, la f. r. $f_2(t)$ [équ. (1.4)] sera supposée *continue*, de sorte que la probabilité pour qu'un appel se produise à un instant donné sera nulle. En particulier, cette hypothèse rend nulle la probabilité pour qu'un appel se produise à un instant où une ou plusieurs communications provenant d'appels précédents prennent fin; aussi est-il sous-entendu dans les définitions données ci-après d'événements tels que $\mathcal{E}_{na}$ que nous faisons abstraction de pareils événements de probabilité nulle.

Désignons par p'_{na} $(n \geqq 0,\ a \geqq 0)$ la probabilité de l'événement $\mathcal{E}_{na}$ défini comme suit :

$(\mathcal{E}_{na})$ ... « A l'instant X_{n+a} de production du $(n+a)^{\text{ième}}$ appel, tout au plus a appels d'indices $\geqq 0$ sont en attente ». (On ne tient donc pas compte d'éventuels appels d'indices < 0.)

De p'_{na} la probabilité p_{na} de l'événement

$(\mathcal{E}_{na} - \mathcal{E}_{n+1,a-1})$ ... « A l'instant X_{n+a} exactement a appels (d'indices $\geqq 0$) sont en attente » se déduit par la formule

$$p_{na} = p'_{na} - p'_{n+1,\,a-1} \qquad (n \geqq 0,\ a \geqq 0;\ p'_{n,-1} \equiv 0). \tag{2.1}$$

Nous obtiendrons la f. g. des p_{na}, la fonction $\sum_{n,a=0}^{\infty} x^a z^n p_{na}$, en effectuant une certaine opération linéaire sur la f. g. des e. m. $E(e^{-q\tau_n} | t_{0v})$ [équ. (1.46)]. Observons d'abord que $\mathcal{E}_{na}$ ne se produit que lorsqu'à l'instant X_{n+a} l'attente du $(n-1)^{\text{ième}}$ appel est déjà terminée, donc lorsque la v. a.

$$X_{na} = X_{n+a} - X_{n-1} - \tau_{n-1} \qquad (n \geqq 1) \tag{2.2}$$

est $\geqq 0$. En désignant par

$$F_{na}(t) = \text{Prob}\,(X_{na} < t \mid t_{0v}) \qquad (n \geqq 1,\ a \geqq 0) \tag{2.3}$$

la f. r. de X_{na} qui, dans l'hypothèse présente sur $f_2(t)$, est continue, nous avons donc

$$p'_{na} = \text{Prob}(X_{na} \geqq 0) = 1 - F_{na}(0) \qquad (n \geqq 1,\ a \geqq 0); \tag{2.4}$$

de la définition de $\mathcal{E}_{na}$ résulte, en outre, la relation

$$p'_{0a} = 1 \qquad (a \geqq 0). \tag{2.5}$$

En portant (2.4) et (2.5) dans la formule (2.1), nous obtenons

$$\left\{ \begin{aligned} p_{na} &= F_{n+1,a-1}(0) - F_{na}(0) \qquad (n \geqq 0,\ a \geqq 1;\ F_{0a} \equiv 0), \\ p_{n0} &= 1 - F_{n0}(0) \qquad (n \geqq 0). \end{aligned} \right. \tag{2.6}$$

Au moyen des fonctions (complexes) à variation bornée

$$\mathcal{G}_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n F_{n+1,a}(t) \qquad (a \geqq 0,\ |z| < 1), \tag{2.7}$$

les équations (2.6) peuvent être résumées comme suit :

$$(2.8)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{na} = G_{a-1}(0) - z G_a(0) \qquad (a \geqq 1), \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{n0} = \frac{1}{1-z} - z\, G_0(0). \end{cases}$$

Il en résulte pour la f. g. de tous les p_{na} la formule

$$(2.9)\qquad \sum_{n,a=0}^{\infty} x^a z^n p_{na} = \frac{1}{1-z} + (x-z)\sum_{a=0}^{\infty} x^a\, G_a(0) \qquad (|x|<1, |z|<1)$$

dont le deuxième membre sera exprimé maintenant au moyen de la f. g. (1.46).

D'abord nous obtenons pour la f. c. de $G_a(t)$, au moyen de (2.7) et (2.3),

$$(2.10)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{qt}\, dG_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{qt}\, dF_{n+1,a}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, E(e^{qX_{n+1,a}} \mid t_{0\nu}) \\ \qquad [R(q)=0]. \end{cases}$$

Or, en vertu de (1.3) et (2.2), il vient

$$(2.11)\qquad X_{n+1,a} = \sum_{\nu=n}^{n+a} Y_\nu - \tau_n$$

et comme $\tau_n = \tau_n(T_0, Y_0, \ldots, T_{n-1}, Y_{n-1}; t_{0\nu})$ est stochastiquement indépendant des v. a. $Y_n, \ldots, Y_{n+a}$, nous obtenons pour la f. c. de $F_{n+1,a}(t)$, en utilisant (1.4) et (1.35),

$$(2.12)\qquad E(e^{qX_{n+1,a}} \mid t_{0\nu}) = \varepsilon_2^{a+1}(q)\, E(e^{-q\tau_n} \mid t_{0\nu}) \qquad [n \geqq 0, R(q)=0].$$

En portant cette expression dans le dernier membre de (2.10) et utilisant pour la f. g. (1.46) la notation

$$(2.13)\qquad \Phi(q, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, E(e^{-q\tau_n} \mid t_{0\nu}) \qquad [|z|<1, R(q) \geqq 0],$$

nous obtenons la formule

$$(2.14)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{qt}\, dG_a(t) = \varepsilon_2^{a+1}(q)\, \Phi(q, z) \qquad [a \geqq 0, R(q)=0];$$

nous en tirons pour la f. c. de la fonction à variation bornée $\sum_{a=0}^{\infty} x^a\, G_a(t)$ qui figure dans (2.9), l'expression

$$(2.15)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{qt}\, d_t \sum_{0}^{\infty} x^a\, G_a(t) = \frac{\varepsilon_0(q)}{1 - x\,\varepsilon_2(q)}\, \Phi(q, z).$$

Soit $f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ une fonction réelle ou complexe quelconque à variation bornée, qui sera supposée continue pour $t = 0$; en désignant par $\varphi(iy) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt}\, df(t)$ la f. c. de $f(t)$, on obtient par le même raisonnement qui conduit au théorème de P. Lévy ([4], p. 38 ou Cramér [1], p. 93), la formule

$$(2.16)\quad \frac{1}{2}[f(\infty) + f(-\infty)] - f(0) = \lim_{\delta \to +0,\, N \to \infty} \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\delta}^{N} + \int_{-N}^{-\delta}\right) \varphi(iy)\, \frac{dy}{y}$$

qui sera utilisée maintenant. Au moyen de la notation

$$(2.17)\qquad \hat{\int} = \lim_{\delta \to 0,\, N \to \infty} \left(\int_{i\delta}^{iN} + \int_{-iN}^{-i\delta}\right)$$

cette formule peut être écrite sous la forme

$$(2.18)\quad \frac{1}{2}[f(\infty) + f(-\infty)] - f(0) = \frac{1}{2\pi i} \hat{\int} [\varphi(q) - \varphi(0)]\, \frac{dq}{q},$$

où, pourvu que

$$(2.19)\qquad \lim_{y=0} \frac{\varphi(iy) - \varphi(0)}{iy} = \int_{-\infty}^{\infty} t\, df(t)$$

existe, $\hat{\int}$ se confond avec $\lim_{N \to \infty} \int_{-iN}^{iN}$.

En appliquant (2.18) à la fonction $f(t) = \sum_{a=0}^{\infty} x^a\, G_a(t)$ et à sa f. c. (2.15), nous obtenons, au moyen des relations

$$(2.20)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{a=0}^{\infty} x^a\, G_a(\infty) = \sum_{n, a=0}^{\infty} x^a z^n\, F_{n+1, a}(\infty) = \frac{1}{(1-x)(1-z)}, \\ \displaystyle\sum_{a=0}^{\infty} x^a\, G_a(-\infty) = 0 \end{cases}$$

qui résultent de (2.7) et (2.3),

$$(2.21)\quad \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)(1-z)}-\sum_{0}^{\infty}x^a G_a(0) = \frac{1}{2\pi i}\int^{\wedge}\left[\frac{\varepsilon_2(q)}{1-x\,\varepsilon_2(q)}\Phi(q,z)-\frac{1}{(1-x)(1-z)}\right]\frac{dq}{q}.$$

On en tire pour la f. g. (2.9) la formule

$$(2.22)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n,a=0}^{\infty} x^a z^n p_{na} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-z}\right) \\ \displaystyle\quad +(x-z)\frac{1}{2\pi i}\int^{\wedge}\left[\frac{1}{(1-x)(1-z)}-\frac{\varepsilon_2(q)}{1-x\,\varepsilon_2(q)}\Phi(q,z)\right]\frac{dq}{q} \\ \qquad (|x|<1,\ |z|<1) \end{cases}$$

qui permet de calculer tous les p_{na} au moyen des fonctions $\varepsilon_2(q)$ [équ. (1.35)] et $\Phi(q, z)$ [équ. (1.46) et (2.13)].

Mentionnons enfin que dans le cas où la f. r. $f_2(t)$ n'est pas continue, les coefficients du développement taylorien du deuxième membre de (2.22) ont la signification suivante :

$$(2.23)\quad \begin{aligned} p^{\star}_{na} &= \operatorname{Prob}(X_{n-1}+\tau_{n-1}<X_{n+a}<X_n+\tau_n \mid t_{0\nu}) \\ &\quad+\frac{1}{2}\operatorname{Prob}(X_{n+a}=X_{n-1}+\tau_{n-1}\mid t_{0\nu}) \\ &\quad+\frac{1}{2}\operatorname{Prob}(X_{n+a}=X_n+\tau_n\mid t_{0\nu}) \qquad (n,\ a=0,\ 1,\ \ldots;\ X_{-1}+\tau_{-1}\equiv 0). \end{aligned}$$

Nous passons maintenant au calcul des probabilités $p_n^{\lambda}=p_n^{\lambda}\mid t_{0\nu}$ pour qu'à l'instant X_n de production du $n^{\text{ième}}$ appel $\lambda=0, 1, \ldots, s$ lignes soient occupées; ces probabilités vérifient l'équation évidente

$$(2.24)\qquad \sum_{\lambda=0}^{s} p_n^{\lambda}=1.$$

En raison de la continuité de $f_2(t)$, la probabilité pour qu'à l'instant $X_n (n>0)$ une communication prenne fin (donc qu'un des nombres $t_{n\nu}$ soit nul) est nulle; en négligeant les événements correspondants, nous pouvons donc dire qu'à l'instant X_n exactement λ lignes seront occupées, lorsque exactement λ parmi les s nombres $t_{n\nu}$ seront positifs.

Ci-après, nous désignons par $s(x)$ la fonction de Heaviside, à savoir

$$(2.25)\qquad s(x) = 1 \quad (x > 0), \qquad = \frac{1}{2} \quad (x = 0), \qquad = 0 \quad (x < 0);$$

et posons

$$(2.26)\qquad s'(x) = 1 - s(x),$$

de sorte que

$$(2.27)\qquad s'(x) = 0 \quad (x > 0), \qquad = \frac{1}{2} \quad (x = 0), \qquad = 1 \quad (x < 0).$$

Nous utiliserons la représentation de $s(x)$ sous forme d'intégrale

$$(2.28)\qquad \begin{cases} s(x) = \lim\limits_{N \to \infty} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{-iN+\delta}^{iN+\delta} e^{xz} \frac{dz}{z} \\ \left(\delta > 0;\ s(x) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C e^{xz} \frac{dz}{z} \text{ pour } x \neq 0\right). \end{cases}$$

Au moyen de la notation (2.26), l'indicateur χ_n^0 de l'événement, de probabilité p_n^0, « *Tous les* $t_{n\nu}$ *sont négatifs* » peut s'écrire sous la forme $\chi_n^0 = \prod\limits_{\nu=1}^{s} s'(t_{n\nu})$, de sorte que nous obtenons la relation

$$(2.29)\qquad p_n^0 = E\chi_n^0 = E\prod_{\nu=1}^{s} s'(t_{n\nu}) \qquad (E = E \mid t_{0\nu}).$$

De même on reconnaît que l'indicateur χ_n^1 de l'événement « *Un seul parmi les s nombres* $t_{n\nu}$ *est positif* » est égal à $\sum\limits_{k=1}^{s} s(t_{nk}) \prod\limits_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq k}}^{s} s'(t_{n\nu})$ et d'une manière générale,

$$(2.30)\qquad \chi_n^\lambda = \sum_{1', \ldots, \lambda'=1}^{s} s(t_{n1'}) \ldots s(t_{n\lambda'}) \prod_{\nu=1}^{s}{}^{(\lambda)} s'(t_{n\nu}) \qquad (\lambda = 0, \ldots, s),$$

où $\prod\limits_{\nu=1}^{s}{}^{(\lambda)} = \prod\limits_{\nu=1}^{s}[\nu \neq 1', \ldots, \lambda']$, est l'indicateur de l'événement « *Exactement* λ *parmi les s nombres* $t_{n\nu}$ *sont positifs* ».

De la définition même de χ_n^λ résulte pour $t_{n1} \neq 0, \ldots, t_{ns} \neq 0$, au moyen de la notation (1.6), la formule

$$(2.31)\quad \left\{ \begin{array}{l} \chi_n^\lambda = \underset{\nu=1,\ldots,s}{\mathrm{s}\ \min^{(s-\lambda+1)}} t_{n\nu} - \underset{\nu=1,\ldots,s}{\mathrm{s}\ \min^{(s-\lambda)}} t_{n\nu} \\ (\lambda = 0, \ldots, s;\ \underset{\nu=1,\ldots,s}{\mathrm{s}\ \min^{(s+1)}} \equiv 1,\ \mathrm{s}\min^{(0)} \equiv 0), \end{array} \right.$$

qui est équivalente à (2.30).

On obtient les probabilités p_n^λ en introduisant l'expression (2.30) dans la formule

$$(2.32)\qquad p_n^\lambda = \mathrm{E}(\chi_n^\lambda \mid t_{0\nu}) \qquad (\lambda = 0, \ldots, s;\ n = 0, 1, \ldots);$$

mais avant d'effectuer ici l'opération $\mathrm{E} \mid t_{0\nu}$, nous allons représenter les fonctions χ_n^λ par des expressions de la forme (1.33), en modifiant toutefois la définition des opérateurs C_ν qui figurent dans les $\mathrm{U}_{\lambda s}$ [équ. (1.31)]. Dorénavant ces opérateurs seront définis par la formule

$$(2.33)\qquad \mathrm{C}_\nu = \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\mathrm{N}+0}^{i\mathrm{N}+0} \ldots \frac{dz_\nu}{z_\nu}$$

qui, pour les fonctions utilisées au chapitre I, est équivalente à (1.29); lorsqu'une des formules précédentes sera employée avec la signification (2.33) de C_ν, nous l'appellerons « modifiée ». Au moyen des formules (1.31), (2.28) et (2.33), il vient pour des nombres réels c_ν quelconques

$$(2.34)\quad \begin{aligned} \mathrm{U}_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s c_\nu z_\nu} &= \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{s} \left[\mathrm{C}_1 e^{c_{1'} z_1} \ldots \mathrm{C}_\lambda e^{c_{\lambda'} z_\lambda} - \prod_{\nu=1}^{s} \mathrm{C}_\nu e^{c_\nu z_\nu} \right] \\ &= \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{s} \left[\mathrm{s}(c_{1'}) \ldots \mathrm{s}(c_{\lambda'}) - \prod_{\nu=1}^{s} \mathrm{s}(c_\nu) \right], \end{aligned}$$

donc pour $c_\nu = t_{n\nu}$

$$(2.35)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{U}_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s t_{n\nu} z_\nu} = \displaystyle\sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{s} \mathrm{s}(t_{n1'}) \ldots \mathrm{s}(t_{n\lambda'}) - \mathrm{C}_s^\lambda \prod_{\nu=1}^{s} \mathrm{s}(t_{n\nu}) \\ \qquad\qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1). \end{array} \right.$$

En ajoutant ces s équations, mulipliées respectivement par $(1 - x^s)$ et par $(x-1)^\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, s-1)$, x désignant une indéterminée, nous obtenons

$$(2.36) \qquad x^s + (1 - x^s)\,\mathrm{U}_{0s}\,e^{\sum_1^s t_{n\nu} z_\nu} + \sum_{\lambda=1}^{s-1} (x-1)^\lambda\,\mathrm{U}_{\lambda s}\,e^{\sum_1^s t_{n\nu} z_\nu} = \prod_{\nu=1}^{s} [1 + (x-1)\,\mathrm{s}(t_{n\nu})].$$

D'autre part, la somme des $s+1$ équations (2.30), multipliées respectivement par x^λ, est égale, en vertu de (2.26), à

$$(2.37) \qquad \sum_{\lambda=0}^{s} x^\lambda \chi_n^\lambda = \prod_{\nu=1}^{s} [x\,\mathrm{s}(t_{n\nu}) + \mathrm{s}'(t_{n\nu})] = \prod_{\nu=1}^{s} [1 + (x-1)\,\mathrm{s}(t_{n\nu})].$$

Égalant les premiers membres des deux dernières formules et effectuant l'opération $\mathrm{E} = \mathrm{E} \mid t_{0\nu}$, nous obtenons, en vertu de (2.32), l'équation

$$(2.38) \qquad \sum_{\lambda=0}^{s} x^\lambda p_n^\lambda = x^s + (1 - x^s)\,\mathrm{EU}_{0s}\,e^{\sum_1^s t_{n\nu} z_\nu} + \sum_{\lambda=1}^{s-1} (x-1)^\lambda\,\mathrm{EU}_{\lambda s}\,e^{\sum_1^s t_{n\nu} z_\nu}$$

qui, au moyen de la notation

$$(2.39) \qquad v_{0\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = (x-1)^\lambda - \delta_{\lambda 0} x^s \qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1),$$

prend la forme

$$(2.40) \qquad \sum_{\lambda=0}^{s} x^\lambda p_n^\lambda = x^s + \mathrm{E} \sum_{\lambda=0}^{s-1} \mathrm{U}_{\lambda s}\,e^{\sum_1^s t_{n\nu} z_\nu}\, v_{0\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu \right)$$

Bien que dans le cas présent les $v_{0\lambda}$ soient seulement bornées dans le domaine (1.25), tandis que les valeurs initiales (1.28) étaient majorées dans ce domaine par $\dfrac{c}{|q+y|}$, l'opération $\mathrm{E} = \mathrm{E} \mid t_{0\nu}$ peut être effectuée dans (2.40) de la même manière qu'au chapitre I. Au cours de ce calcul on obtient les mêmes formules qu'au chapitre I, à une modification près de la formule de récurrence (1.41) des $v_{j\lambda}$ où l'opération $\int_{-i\infty}^{i\infty} \ldots d\zeta$ doit être remplacée par $\lim_{N\to\infty} \int_{-iN}^{iN} \ldots d\zeta$; nous démontrons cela dans S 6 et en admettons ici le résultat.

Donc, en posant

$$(2.41)\quad J_{n0} = \sum_{\lambda=0}^{s} x^\lambda \chi_n^\lambda - x^s = \sum_{\lambda=0}^{s-1} U_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s t_{n\nu} z_\nu}\, v_{0\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right),$$

nous obtenons à nouveau pour les intégrales J_{nj} définies par (1.15) la formule (1.32). Pour $j = n$, on en tire pour la grandeur

$$x^s + J_{nn} = x^s + E(J_{n0} \mid t_{0\nu}) = \sum_{\lambda=0}^{s} x^\lambda p_n^\lambda$$

la relation

$$(2.42)\quad \sum_{\lambda=0}^{s} x^\lambda p_n^\lambda = x^s + \sum_{\lambda=0}^{s-1} U_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s t_{0\nu} z_\nu}\, v_{n\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right)$$

qui ramène notre problème à la construction des fonctions $v_{n\lambda}$.

D'après S 6 *ces* $v_{n\lambda}$ vérifient dans le domaine (1.25) des inégalités de la forme

$$(2.43)\quad |v_{n\lambda}| < c_1 c_2^n \qquad (c_1 < \infty,\ c_2 < \infty;\ \lambda = 0, \ldots, s;\ n = 0, 1, \ldots),$$

de sorte que les séries correspondantes (1.43) convergent pour $|z|$ assez petit. Au moyen de (1.43) nous tirons de (2.42) pour la f. g. de tous les p_n^λ ($\lambda = 0, \ldots, s-1$) la formule

$$(2.44)\quad \sum_{\lambda=0}^{s} \sum_{n=0}^{\infty} x^\lambda z^n p_n^\lambda = \frac{x^s}{1-z} + \sum_{\lambda=0}^{s-1} U_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s t_{0\nu} z_\nu}\, V_\lambda\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right),$$

la permutation des opérations $\sum_{n=0}^{\infty} \ldots z_n$ et $U_{\lambda s}$ se justifiant du fait que, pour $n_0 \to \infty$ et $|z| < c_2^{-1}$, les expressions

$$\int_{-iN_1+0}^{iN_1+0} \cdots \int_{-iN_\lambda+0}^{iN_\lambda+0} e^{\sum_1^\lambda c_\nu z_\nu} \sum_{n=n_0}^{\infty} z^n v_{n\lambda}\left(z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu\right) \frac{dz_1 \ldots dz_\lambda}{z_1 \ldots z_\lambda}$$

tendent uniformément par rapport à $N_1, \ldots, N_\lambda$ vers zéro [1].

Dans le cas présent, les V_λ vérifient, en vertu des formules (1.41) (modifiée), (2.39) et (1.27), les équations

$$(2.45)\quad [1-z\,\varepsilon_1(-y)]\,V_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$$
$$-\lim_{N\to\infty}\frac{z}{2\pi i}\int_{-iN}^{iN}\frac{\varepsilon_1(\zeta)-1}{\zeta}\left(y-\sum_1^\lambda z_\nu-\zeta\right)^{-1}$$
$$\times\left[\left(y-\sum_1^\lambda z_\nu\right)\varepsilon_2(-y)\,V_{\lambda+1}(\zeta, z_1, \ldots, z_\lambda; y)\right.$$
$$\left.-\zeta\,\varepsilon_2\left(-\sum_1^\lambda z_\nu-\zeta\right)V_{\lambda+1}\left(\zeta, z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu+\zeta\right)\right]d\zeta$$
$$=(x-1)^\lambda-\delta_{\lambda 0}\,x^s \qquad (\lambda=0, \ldots, s-1)$$

ainsi que l'équation (1.45). Ces équations, associées à (2.44), constituent la solution formelle du problème traité dans cette section.

CHAPITRE III

PROBLÈMES CONCERNANT LA RÉPARTITION DES PARAMÈTRES MARKOVIENS $t_{n\nu}$. THÉORIE DU BLOCAGE TEMPORAIRE.

Nous étudierons maintenant d'autres problèmes que notre méthode permet de traiter. Il est clair que, lorsqu'une fonction des grandeurs $t_{n\nu}$ [équ. (1.5)] peut être écrite sous la forme

$$(3.1)\qquad \overset{s}{\mathrm{U}}_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s t_{n\nu} z_\nu}\, v_{0\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right)$$

au moyen de fonctions $v_{0\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$ vérifiant l'inégalité (S 2.2), son e. m. conditionnelle $\mathrm{E}\,|\,t_{0\nu}$ s'obtient par le procédé décrit au chapitre I.

---

[1] Les nombres sans explication probabiliste $p_0^\lambda=\chi_0^\lambda$ qui figurent dans les premiers membres de (2.38), (2.40), (2.42) et (2.44), sont donnés par (2.30) ($n=0$). Donc, si parmi les s paramètres t_{0_ν} il y a $a_1 \geqq 0$ nombres positifs, $a_2 \geqq 0$ zéros et $a_3 \geqq 0$ nombres négatifs, il vient

$$p_0^\lambda\begin{cases}=2^{-a_2}\,C_{a_2}^{i} & \text{pour } \lambda=a_1+i,\ i=0, \ldots, a_2,\\ =0 & \text{pour toutes les autres valeurs de } \lambda.\end{cases}$$

Répartition des paramètres $t_{n\nu}$. — Considérons d'abord les probabilités

$$\text{(3.2)} \qquad \text{Prob}[\min^{(\mu)+}(t_{n1}, \ldots, t_{ns}) < t \mid t_{0\nu}] \qquad (\mu = 1, \ldots, s)$$

qui, pour $\mu = 1$, se confondent avec les f. r. $\rho_n(t) = \text{Prob}(\tau_n < t \mid t_{0\nu})$ [équ. (1.8) et (1.13)], et dont le calcul nécessite la construction préalable des e. m. conditionnelles des grandeurs

$$\text{(3.3)} \qquad \exp(-q_\mu \min_{\nu=1,\ldots,s}{}^{(\mu)+} t_{n\nu}) \qquad [\mathrm{R}(q_\mu) \geqq 0;\ \mu = 1, \ldots, s].$$

Pour représenter ces grandeurs de manière convenable, nous utiliserons la formule

$$\text{(3.4)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\exp(-q \min_{\nu=1,\ldots,s}{}^{(\mu)+} a_\nu) \\ &= \left[\mathrm{U}_{0s} + \sum_{\lambda=s-\mu+1}^{s-1} (-1)^{s+\lambda-\mu} \mathrm{C}_{\lambda-1}^{s-\mu} \mathrm{U}_{\lambda s} \right] e^{\sum_1^s a_\nu z_\nu} \frac{q}{q + \sum_1^s z_\nu} \quad (^1) \\ &\qquad\qquad [\mathrm{R}(q) > 0,\ s \geqq \mu] \end{aligned} \right.$$

qui est une généralisation de (1.18).

---

(1) Cette formule où, en raison de sa symétrie, nous pouvons toujours supposer que $a_s \geqq a_{s-1} \geqq \cdots \geqq a_1$, prend pour $\mu = s$ la forme

$$\text{(1')} \qquad \exp(-q \max_{\nu=1,\ldots,s}{}^{+} a_\nu) = \sum_{\lambda=0}^{s-1} (-1)^\lambda \mathrm{U}_{\lambda s} e^{\sum_1^s a_\nu z_\nu} \frac{q}{q + \sum_1^s z_\nu}$$
$$= \prod_{\nu=1}^{s} (\mathrm{K}_\nu - \mathrm{C}_\nu) e^{\sum_1^s a_\nu z_\nu} \frac{q}{q + \sum_1^s z_\nu}$$

et se démontre en utilisant la relation

$$(\mathrm{K}_s - \mathrm{C}_s) e^{a_s z_s} \frac{q}{q + \sum_1^s z_\nu} = \frac{q}{q + \sum_1^{s-1} z_\nu} \qquad (a_s \leqq 0),$$
$$= e^{-a_s\left(q + \sum_1^{s-1} z_\nu\right)} \frac{q}{q + \sum_1^{s-1} z_\nu} \qquad (a_s > 0),$$

laquelle transforme le dernier membre de (1') respectivement en 1 ou en $e^{-a_s q}$.

Pour $\mu < s$, on démontre (3.4) par induction complète sur s, en introduisant

Il en résulte que les grandeurs (3.3) peuvent être écrites sous la forme (3.1), l'inégalité correspondant à (S 2.2) étant vérifiée; par conséquent, nous pouvons exprimer les f. g.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \, \mathrm{E}[e^{-q \min\limits_{\nu=1,\ldots,s}^{(\mu)+} t_{n\nu}} \mid t_{0\nu}] \qquad (\mu = 1, \ldots, s) \tag{3.5}$$

sous la forme (1.46) en résolvant les équations (1.44), (1.45) avec, pour deuxièmes membres,

$$\left\{\begin{aligned} & v_{00}(y) = \frac{q}{q+y}, \qquad v_{01} = \ldots = v_{0,s-\mu} = 0; \\ & v_{0\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = (-1)^{s+\lambda-\mu} C_{\lambda-1}^{s-\mu} \frac{q}{q+y} \\ & \qquad (\lambda = s-\mu+1, \ldots, s-1). \end{aligned}\right. \tag{3.6}$$

Esquissons maintenant le calcul des probabilités composées

$$\operatorname{Prob}[\min_{\nu=1,\ldots,s}{}^{+} t_{n\nu} < t_1, \ \min_{\nu=1,\ldots,s}{}^{(2)+} t_{n\nu} < t_2 \mid t_{0\nu}] \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.7}$$

Afin d'obtenir (3.7), il faut calculer l'e. m. conditionnelle de l'expression

$$\exp(-q_1 \min_{\nu=1,\ldots,s}{}^{+} t_{n\nu} - q_2 \min_{\nu=1,\ldots,s}{}^{(2)+} t_{n\nu}) \qquad [\mathrm{R}(q_1) \geqq 0, \ \mathrm{R}(q_2) \geqq 0] \tag{3.8}$$

qui sera d'abord transformée en la forme (3.1). En exprimant $e^{-q_2 \min\limits_{\nu=1,\ldots,s}^{(2)+} t_{n\nu}}$ au moyen de (3.4) ($q = q_2$, $a_\nu = t_{n\nu}$, $\mu = 2$) et en appliquant ensuite la formule (S 3.25) ($\zeta = -q_1$, $c_\nu = t_{n\nu}$),

---

dans le deuxième membre les expressions qui résultent pour $K_s e^{a_s z_s} \dfrac{q}{q + \sum_1^s z_\nu}$ et $C_s e^{a_s z_s} \dfrac{q}{q + \sum_1^s z_\nu}$ selon que $a_s \leqq 0$ ou > 0.

il vient ainsi

$$(3.9)\quad e^{-q_1 \min\limits_{\nu=1,\ldots,s}{}^{+} t_{n\nu} \; -q_2 \min\limits_{\nu=1,\ldots,s}{}^{(2)+} t_{n\nu}}$$

$$= e^{-q_1 \min\limits_{\nu=1,\ldots,s}{}^{+} t_{n\nu}} [\mathrm{U}_{0s} - \mathrm{U}_{s-1,s}]\, e^{\sum\limits_1^s t_{n\nu} z_\nu} \frac{q_2}{q_2 + \sum\limits_1^s z_\nu}$$

$$= \mathrm{U}_{0s}\, e^{\sum\limits_1^s t_{n\nu} z_\nu} \frac{q_1 + q_2}{q_1 + q_2 + \sum\limits_1^s z_\nu}$$

$$- \mathrm{U}_{s-1,s}\, e^{\sum\limits_1^s t_{n\nu} z_\nu} \frac{q_2}{q_1 + q_2 + \sum\limits_1^s z_\nu} \; \frac{q_1 + q_2 + \sum\limits_1^{s-1} z_{\nu'}}{q_2 + \sum\limits_1^{s-1} z_{\nu'}}.$$

Pour obtenir la f. g. des grandeurs (3.8) sous la forme (1.46), il faudrait, par conséquent, résoudre les équations (1.44), (1.45) avec les deuxièmes membres suivants :

$$(3.10)\quad \left\{ \begin{aligned} & v_{00}(y) = \frac{q_1 + q_2}{q_1 + q_2 + y}, \qquad v_{01} = \ldots = v_{0,s-2} = 0, \\ & v_{0,s-1}(z_1, \ldots, z_{s-1}; y) = - \frac{q_2}{q_1 + q_2 + y} \; \frac{q_1 + q_2 + \sum\limits_1^{s-1} z_\nu}{q_2 + \sum\limits_1^{s-1} z_\nu}. \end{aligned} \right.$$

En vue d'obtenir la répartition simultanée de toutes les s v. a. $\min\limits_{\nu=1,\ldots,s}{}^{(\mu)+} t_{n\nu}$ $(\mu = 1, \ldots, s)$, on a besoin de transformer le produit des s grandeurs correspondantes (3.3) en une expression de la forme (3.1), ce qui nécessite l'utilisation des opérateurs à trois indices $\mathrm{T}_n^{\lambda,\mu}$ que nous avons introduits dans le travail [7] et dont nous nous bornons à rappeler ici la définition, en renvoyant à [7] pour le développement systématique de leur théorie.

Cette définition sera donnée en trois étapes, en utilisant les symboles qui figurent dans les formules (1.29) à (1.31), 1° On pose $C'_\nu = K_\nu - C_\nu$; pour des fonctions $f(z_\nu)$ qui sont holomorphes et $O(|z_\nu|^{-1})$ dans une bande $|R(z_\nu)| < \delta$, il vient alors

$$C'_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{i\infty-0}^{-i\infty-0} \cdots \frac{dz_\nu}{z_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{3.11}$$

2° On définit les opérateurs

$$S_n^\mu = S_n^\mu[1, \ldots, n] \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n,\ n = 1, 2, \ldots)$$

par la formule

$$S_n^\mu = \sum_{\lambda=0}^{\mu} \sum_{1', \ldots, \lambda'=1}^{n} C'_{1'} \ldots C'_{\lambda'} \prod_{\nu=1}^{n}{}^{(\lambda)} C_\nu; \tag{3.12}$$

les S_n^μ opèrent sur des fonctions $f(z_1, \ldots, z_n)$ holomorphes pour $|R(z_\nu)| < \delta (\nu = 1, \ldots, n)$ et qui, dans nos applications, sont (uniformément par rapport au domaine mentionné) $O\left(\left|\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu\right|^{-1}\right)$ pour $\left|\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu\right| \to \infty$.

3° Pour des fonctions $f(z_1, \ldots, z_n; \xi_1, \ldots, \xi_\lambda)$ de deux systèmes de variables complexes on définit formellement

$$\left\{\begin{aligned} T_n^{\lambda,\mu} f &= \sum_{1', \ldots, \lambda'=1}^{n} C'_{1'} \ldots C'_{\lambda'} S_{n-\lambda}^{\mu-\lambda} f(z_1, \ldots, z_n; z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}) \\ &\qquad (S_{n-\lambda}^{\mu-\lambda} = S_{n-\lambda}^{\mu-\lambda}[\nu \neq 1', \ldots, \lambda']), \end{aligned}\right. \tag{3.13}$$

f étant supposée telle que toutes les intégrales n-uples contenues dans (3.13) existent.

Les opérateurs $U_{\lambda s}$ utilisés dans ce travail sont des $T_n^{\lambda,\mu}$ particuliers; on tire de (1.31) et (3.13) la relation

$$\begin{aligned} &U_{\lambda s} f(z_1, \ldots, z_s; z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}) \\ &\quad = T_s^{\lambda, s-1} f(-z_1, \ldots, -z_s; -z_{1'}, \ldots, -z_{\lambda'}), \end{aligned} \tag{3.14}$$

qui sera employée plus loin. D'après [7] [équ. (15), (23) et (24 a)], il vient

$$
(3.15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\exp(-q \max_{\nu=1,\ldots,s}{}^{(\mu+1)} + a_\nu) \\
&= S_s^\mu e^{-\sum_1^s a_\nu z_\nu} \frac{q}{q - \sum_1^s z_\nu} = T_s^{0,\mu} e^{-\sum_1^s a_\nu z_\nu} \frac{q}{q - \sum_1^s z_\nu} \\
&\left[R(q) > 0,\ R\left(q - \sum_1^s z_\nu \right) > 0;\ \mu = 0, \ldots, s-1 \right]
\end{aligned}
\right.
$$

Nous pouvons maintenant supposer que la formule plus générale

$$
(3.16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\exp\left[-\sum_{k=1}^m q_k \max_{\nu=1,\ldots,s}{}^{(k)} + a_\nu \right] \\
&= \sum_{\lambda=0}^{m-1} T_s^{\lambda, m-1} e^{-\sum_1^s a_\nu z_\nu} \frac{\sum_{k=1}^m q_k - \sum_{\nu=1}^\lambda z_{\nu'}}{\sum_1^m q_k - \sum_1^s z_\nu} f_\lambda(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}) \\
&\left[f_0 = 1;\ R\left(\sum_{k=1}^m q_k - \sum_{\nu=1}^s z_\nu \right) > 0 \right]
\end{aligned}
\right.
$$

est vérifiée pour un $m \geqq 1$, et dès que, dans cette hypothèse, nous l'aurons démontrée pour $m+1$, la validité de cette formule sera établie pour tout m ($1 \leqq m \leqq s$).

Au moyen de la formule

$$
(3.17)\quad \left\{
\begin{aligned}
T_s^{\lambda, m-1} f(z_1, \ldots, z_s; z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}) &= T_s^{\lambda, m} f(z_1, \ldots, z_s; z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}), \\
&- T_s^{m,m} \sum_{1'', \ldots, \lambda'' = 1'}^{m'} f(z_1, \ldots, z_n; z_{1''}, \ldots, z_{\lambda''}),
\end{aligned}
\right.
$$

où $\sum_{1'', \ldots, \lambda'' = 1'}^{m'}$ parcourt toutes les C_m^λ combinaisons λ à λ des m indices $1'$, ..., m' ([7], équ. (26 a)], le deuxième membre de (3.16) prend la forme

$$\sum_{\lambda=0}^{m-1} \mathrm{T}_s^{\lambda, m} e^{-\sum_1^s a_\nu z_\nu} \frac{\sum_{k=1}^m q_k - \sum_{\nu=1}^\lambda z_{\nu'}}{\sum_1^m q_k - \sum_1^s z_\nu} f_\lambda(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'})$$

$$- \mathrm{T}_s^{m, m} e^{-\sum_1^s a_\nu z_\nu} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \sum_{1'', \ldots, \lambda''=1'}^{m'} \left(\sum_1^m q_k - \sum_{\nu=1}^\lambda z_{\nu''} \right) \frac{f_\lambda(z_{1''}, \ldots, z_{\lambda''})}{\sum_1^m q_k - \sum_1^s z_\nu}.$$

En multipliant les $m+1$ termes $\mathrm{T}_s^{\lambda, m}$ de cette expression par $\exp[-q_{m+1} \max\limits_{\nu=1, \ldots, s} {}^{(m+1)+} a_\nu]$, on ne modifie, d'après [7] [équ. (39)], que le facteur $\dfrac{1}{\sum_1^m q_k - \sum_1^s z_\nu}$ des fonctions à intégrer, lequel se transforme en

$$\frac{1}{\sum_1^s z_\nu - \sum_{\nu=1}^\lambda z_{\nu'} - q_{m+1}} \left(\frac{\sum_1^s z_\nu - \sum_{\nu=1}^\lambda z_{\nu'}}{\sum_1^{m+1} q_k - \sum_1^s z_\nu} - \frac{q_{m+1}}{\sum_1^m q_k - \sum_{\nu=1}^\lambda z_{\nu'}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sum_1^{m+1} q_k - \sum_1^s z_\nu} \frac{\sum_1^{m+1} q_k - \sum_{\nu=1}^\lambda z_{\nu'}}{\sum_1^m q_k - \sum_{\nu=1}^\lambda z_{\nu'}}.$$

Ainsi nous obtenons la formule

$$(3.18) \qquad \exp\left[-\sum_1^{m+1} q_k \max_{\nu=1, \ldots, s} {}^{(k)+} a_\nu \right]$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{m} \mathrm{T}_s^{\lambda, m} e^{-\sum_1^s a_\nu z_\nu} \frac{\sum_1^{m+1} q_k - \sum_1^\lambda z_{\nu'}}{\sum_1^{m+1} q_k - \sum_1^s z_\nu} f_\lambda(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}),$$

où nous avons posé

$$(3.19)\quad f_m(z_1, \ldots, z_m) = -\frac{1}{\sum_1^m q_k - \sum_1^m z_\nu} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \sum_{1', \ldots, \lambda'=1}^{m} \left(\sum_1^m q_k - \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'} \right) f_\lambda(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}),$$

de sorte que la formule (3.16) qui, en raison de (3.15) ($\mu = 0$), est vraie pour $m = 1$, est établie pour tout m.

Appliquons maintenant l'identité (3.14) à la formule (3.16), où nous poserons respectivement $m = s$, $f_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda) = g_\lambda(-z_1, \ldots, -z_\lambda)$, $a_\nu = t_{n\nu}$; il vient alors

$$(3.20)\quad \exp\left[-\sum_{k=1}^{s} q_k \max_{\nu=1,\ldots,s}{}^{(k)+} t_{n\nu} \right] = \sum_{\lambda=0}^{s-1} U_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s t_{n\nu} z_\nu} \frac{\sum_1^s q_k + \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'}}{\sum_1^s q_k + \sum_1^s z_\nu} g_\lambda(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}),$$

les g_λ étant données, en vertu de (3.19), par les relations

$$(3.21)\quad \left\{ \begin{aligned} & g_0 = 1, \\ & g_m(z_1, \ldots, z_m) \\ & \quad = -\frac{1}{\sum_1^m (q_k + z_k)} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \sum_{1', \ldots, \lambda'=1}^{m} \left(\sum_1^m q_k + \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'} \right) g_\lambda(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}) \\ & \qquad\qquad (m' = 1, \ldots, s-1). \end{aligned} \right.$$

Comme le deuxième membre de (3.20) est de la forme (3.1), notre méthode s'applique au calcul de la f. g.

$$(3.22)\quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n \, E\left[\exp\left(-\sum_{k=1}^{s} q_k \max_{\nu=1,\ldots,s}{}^{(k)+} t_{n\nu} \right) \middle| t_{0\nu} \right],$$

les valeurs initiales des $v_{j\lambda}$ étant

$$(3.23)\quad v_{0\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = \frac{\sum_1^s q_k + \sum_1^\lambda z_\nu}{\sum_1^s q_k + y} g_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda) \qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1).$$

Il résulte des développements de la première partie du Chapitre IV que dans le cas où

$$(3.24)\qquad \begin{cases} f_1(t) = 1 - e^{-t}, & \text{donc } \varepsilon_1(z) = \dfrac{1}{1-z}, \\ \text{et, en outre,} & t_{01} = \ldots = t_{0s} = 0, \end{cases}$$

il suffit de connaître les valeurs des $v_{0\lambda}$ pour $z_1 = \ldots = z_{s-1} = 1$, pour calculer la f. g. (3.22) qui est alors égale [*voir* équ. (1.46) et (4.5)] à $V_0(0)$. Pour ces valeurs des z_ν, les équations (3.21), multipliées respectivement par $\sum_1^m q_k + m$, prennent la forme

$$(3.25)\qquad g_0 = 1, \qquad \sum_{\lambda=0}^{m} C_m^\lambda \left(\sum_1^m q_k + \lambda \right) g_\lambda(1, \ldots, 1) = 0 \qquad (m = 1, \ldots, s-1)$$

et ont pour solution

$$(3.26)\qquad \begin{cases} g_\lambda(1, \ldots, 1) = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-\nu} \nu!\, C_\lambda^\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \left(\sum_{k=1}^{\mu} q_k + \mu \right)^{-1} \\ (\lambda = 0, 1, \ldots, s-1), \end{cases}$$

les valeurs correspondantes des fonctions (3.23) étant

$$(3.27)\qquad \begin{cases} v_{0\lambda}(1, \ldots, 1; y) = \dfrac{\displaystyle\sum_1^s q_k + \lambda}{\displaystyle\sum_1^s q_k + y}\, g_\lambda(1, \ldots, 1) \\ [\lambda = 0, \ldots, s-1;\ f_1(t) = 1 - e^{-t}]. \end{cases}$$

Blocage temporaire. — Dans cette section nous allons généraliser les hypothèses admises au chapitre I, afin de tenir compte du phénomène dit de blocage temporaire. Ce phénomène (dû à des circonstances techniques) consiste en ce qu'à partir de l'instant où un appel est admis à une ligne libre, toutes les s lignes du groupe sont bloquées pendant un certain temps Θ contre l'accès de nouveaux appels. Nous considérerons les Θ_n causés par les différents appels comme des v. a. i. de même f. r., Θ_n étant en outre supposé stochastiquement indépendant de tous les Y_ν et de tous les T_ν sauf, en général, de T_n.

Par

$$\tau_n = \tau_n(T_0, Y_0, \Theta_0; \ldots; T_{n-1}, Y_{n-1}, \Theta_{n-1}; t_{01}, \ldots, t_{0s})$$

nous désignerons dorénavant le délai d'attente imposé au $n^{\text{ième}}$ appel par l'effet des appels d'indices $< n$; à ce délai s'ajoute le temps de blocage Θ_n consécutif à l'attribution d'une ligne libre au $n^{\text{ième}}$ appel, de sorte que la $n^{\text{ième}}$ communication commence à l'instant $X_n + \tau_n + \Theta_n$.

Soient, numérotés dans un ordre quelconque,

$$X_n + t_{n1}, \quad \ldots, \quad X_n + t_{ns}$$

les instants de libération des s lignes de toute action provenant d'appels d'indices $< n$; il vient alors, tout comme au chapitre I [équ. (1.8)],

$$\tau_n = \min_{\nu=1,\ldots,s}{}^{+} t_{n\nu}. \tag{3.28}$$

Comme la $n^{\text{ième}}$ communication prend fin à l'instant

$$X_n + \tau_n + \Theta_n + T_n = X_{n+1} + \tau_n + \Theta_n + T_n - Y_n,$$

tandis que le blocage causé par le $n^{\text{ième}}$ appel cesse à l'instant

$$X_n + \tau_n + \Theta_n = X_{n+1} + \tau_n + \Theta_n - Y_n,$$

on peut définir les nombres $t_{n+1,\nu}$, au lieu de (1.10), par les formules

$$\left\{\begin{array}{l} t_{n+1,1} = \tau_n + \Theta_n + T_n - Y_n = \max(\tau_n + \Theta_n - Y_n,\ \tau_n + \Theta_n + T_n - Y_n), \\ t_{n+1,i} = \max(\tau_n + \Theta_n - Y_n,\ \min\limits_{\nu=1,\ldots,s}{}^{(i)} t_{n\nu} - Y_n) \\ (i = 2, \ldots, s;\ n = 0, 1, \ldots), \end{array}\right. \tag{3.29}$$

où τ_n s'exprime par les $t_{n\nu}$ suivant (3.28).

Conservant l'hypothèse (1.4) sur la répartition des v. a. i. Y_ν, nous supposons que, pour tout n,

$$\operatorname{Prob}(T_n < t,\ \Theta_n < \theta) = f(t, \theta), \tag{3.30}$$

où $f(t, \theta)$ est une f. r. à deux variables qui s'annule pour $t \leqq 0$ et $\theta \leqq 0$; la t. L. de cette f. r. sera désignée par

$$\varepsilon(z_1, z_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{z_1 t + z_2 \theta}\, d^2_{t,\theta} f(t, \theta). \tag{3.31}$$

Pour l'e. m. conditionnelle de $e^{-q\tau_n}$, précédemment donnée par (1.14), nous obtiendrons dans les hypothèses présentes

$$(3.32)\quad \mathrm{E}(e^{-q\tau_n} \mid t_{0\nu}) = \int_0^\infty \int_0^\infty d^2 f(t_0, \theta_0) \int_0^\infty df_2(y_0) \ldots \times d^2 f(t_{n-1}, \theta_{n-1}) \int_0^\infty e^{-q\tau_n} df_2(y_{n-1})$$

et, au lieu de (1.15), nous poserons maintenant

$$(3.33)\quad \begin{cases} \mathrm{J}_{n0} = e^{-q\tau_n}; \\ \mathrm{J}_{n,j+1} = \displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty d^2 f(t_{n-j-1}, \theta_{n-j-1}) \int_0^\infty \mathrm{J}_{nj}\, df_2(y_{n-j-1}) \\ (j = 0, 1, \ldots, n-1). \end{cases}$$

En vertu de (3.28) et (1.18), J_{n0} s'exprime toujours au moyen de la formule (1.33); il nous suffira donc de démontrer, comme précédemment, par induction complète que J_{nj} peut être représenté sous la forme (1.32) au moyen de fonctions $v_{j\lambda}$ ayant les propriétés analytiques des $v_{j\lambda}$ utilisées au chapitre I. Dans ce but nous utiliserons l'identité

$$(3.34)\quad \begin{cases} \mathrm{U}_{\lambda s} \exp\left[\displaystyle\sum_{\nu=1}^{s} z_\nu \max(a_\nu, a_0)\right] f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \displaystyle\sum_{\nu=1}^{s} z_\nu\right) \\ \quad = (\mathrm{K}_0 - \mathrm{C}_0)\, \mathrm{U}_{\lambda s}\, e^{\sum_0^s a_\nu z_\nu} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \displaystyle\sum_{\nu=0}^{s} z_\nu\right) \\ (\mathrm{U}_{\lambda s} = \mathrm{U}_{\lambda s}[1, \ldots, s],\ \lambda = 0, 1, \ldots, s-1) \end{cases}$$

qui est démontrée dans le supplément S 7.

Remplaçons n, dans (3.29), par $n - j - 1$ et numérotons les $t_{n-j-1,\nu}$ de telle manière que

$$(3.35)\quad t_{n-j-1,1} = \min_{\nu=1,\ldots,s} t_{n-j-1,\nu}.$$

En vertu de (3.28), il vient alors $\tau_{n-j-1} = t^{+}_{n-j-1,1}$, et en raison de (3.29) les $t_{n-j,\nu}$ qui figurent dans (1.32) sont de la forme $\max(a_\nu, a_0)$ avec

$$(3.36)\quad \begin{cases} a_0 = t^{+}_{n-j-1,1} + \theta_{n-j-1} - \mathrm{Y}_{n-j-1}, \\ a_1 = t^{+}_{n-j-1,1} + \theta_{n-j-1} + \mathrm{T}_{n-j-1} - \mathrm{Y}_{n-j-1}, \\ a_\nu = t_{n-j-1,\nu} - \mathrm{Y}_{n-j-1} \qquad (\nu = 2, \ldots, s). \end{cases}$$

En utilisant (3.34) pour ces valeurs des a_ν, (1.32) devient

$$(3.37)\quad J_{nj}=\sum_{\lambda=0}^{s-1}(K_0-C_0)U_{\lambda s}\exp\Big[(t^+_{n-j-1,1}+\theta_{n-j-1}-y_{n-j-1})(z_0+z_1)$$
$$+t_{n-j-1}z_1+\sum_{\nu=2}^{s}(t_{n-j-1,\nu}-y_{n-j-1})z_\nu\Big]\varphi_{j\lambda}\Big(z_{1'},\ \ldots,\ z_{\lambda'};\ \sum_{0}^{s}z_\nu\Big),$$

d'où l'on tire, en effectuant l'intégration par rapport à y_{n-j-1}, indiquée dans (3.33),

$$(3.38)\quad \int_0^\infty J_{nj}\,df_2(y_{n-j-1})=\sum_{\lambda=0}^{s-1}(K_0-C_0)U_{\lambda s}\exp[(t^+_{n-j-1,1}+\theta_{n-j-1})z_0$$
$$+(t^+_{n-j-1,1}+\theta_{n-j-1}+t_{n-j-1})z_1+\sum_{\nu=2}^{s}t_{n-j-1,\nu}z_\nu]$$
$$\times\varepsilon_2\Big(-\sum_{0}^{s}z_\nu\Big)\varphi_{j\lambda}\Big(z_{1'},\ \ldots,\ z_{\lambda'};\ \sum_{0}^{s}z_\nu\Big).$$

Écrivons ici pour le moment $\theta_{n-j-1}=\theta$, $t_{n-j-1}=t$, décomposons le facteur $e^{(\theta+t)z_1}$ en $1+(e^{(\theta+t)z_1}-1)$ et utilisons les notations (S 3.2) et (S 3.3); il vient alors

$$(3.39)\qquad \int_0^\infty J_{nj}\,df_2(y_{n-j-1})=A_1+B_1,$$

où nous avons posé

$$(3.40)\quad A_1=\sum_{\lambda=0}^{s-1}(K_0-C_0)U_{\lambda s}\,e^{(\theta+c_1^+)z_0+c_1^+z_1+\sum_2^s c_\nu z_\nu}f_\lambda\Big(z_{1'},\ \ldots,\ z_{\lambda'};\ \sum_{0}^{s}z_\nu\Big),$$

$$(3.41)\quad B_1=\sum_{\lambda=0}^{s-1}(K_0-C_0)U_{\lambda s}(e^{(t+\theta)z_1}-1)$$
$$\times e^{(\theta+c_1^+)z_0+c_1^+z_1+\sum_2^s c_\nu z_\nu}f_\lambda\Big(z_{1'},\ \ldots,\ z_{\lambda'};\ \sum_{0}^{s}z_\nu\Big).$$

Pour la même raison que lors de la transformation de (1.39) [*voir* équ. (S 3.1) et (S 3.5)], le facteur $e^{c_1^+z_1}$, dans A_1, peut être remplacé par $e^{c_1z_1}$. En écrivant, en outre, ξ au lieu de z_0, nous obtenons

$$(3.42)\quad \left\{\begin{aligned} &A_1=\sum_{\lambda=0}^{s-1}(K_\xi-C_\xi)\,e^{\theta\xi+c_1^+\xi}U_{\lambda s}\,e^{\sum_1^s c_\nu z_\nu}f_\lambda\Big(z_{1'},\ \ldots,\ z_{\lambda'};\ \xi+\sum_{1}^{s}z_\nu\Big)\\ &\qquad\qquad [c_1=\min_{\nu=1,\ldots,s}c_\nu],\end{aligned}\right.$$

d'où, en appliquant (S 3.25) et permutant $K_\xi - C_\xi$ avec $U_{\lambda s}$,

$$(3.43)\quad A_1 = \sum_{\lambda=0}^{s-1} U_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s c_\nu z_\nu} (K_\xi - C_\xi)\, e^{\theta\xi} \left(\sum_1^s z_\nu - \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'} - \xi\right)^{-1}$$
$$\times \left[\left(\sum_1^s z_\nu - \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'}\right) f_\lambda\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right) - \xi f_\lambda\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'} + \xi\right)\right],$$

A_1 se transformant ainsi en une expression de la forme (S 3.5).

La fonction B_1 ne diffère du B défini par (S 3.6) que par la présence de l'opérateur $(K_0 - C_0)\, e^{(\theta + c_1^+) z_0}$, par la substitution de la f. c. particulière $e^{(t+\theta) z_1}$ à $\varepsilon_1(z_1)$ et par le fait que le dernier argument de f_λ est $\sum_0^s z_\nu$ au lieu de $\sum_1^s z_\nu$. En effectuant ces modifications dans le deuxième membre de (S 3.24) et en remplaçant la lettre z_0 par ξ, nous obtenons la formule

$$(3.44)\quad B_1 = \sum_{\lambda=0}^{s-1} (K_\xi - C_\xi)\, e^{(\theta + c_1^+)\xi}\, C_\zeta (e^{(t+\theta)\zeta} - 1)$$
$$\times e^{c_1^+ \zeta} U_{\lambda s} f_{\lambda+1}\left(\zeta, z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \xi + \zeta + \sum_1^s z_\nu\right),$$

la fonction $f_s(z_1, \ldots, z_s; y)$ étant toujours définie par (S 3.23).

En transformant enfin les produits $e^{(\xi+\zeta) c_1^+} U_{\lambda s} e^{\sum_1^s c_\nu z_\nu} f_{\lambda+1}$ au moyen de l'identité (S 3.25), nous trouvons pour B_1 l'expression

$$(3.45)\quad B_1 = \sum_{\lambda=0}^{s-1} U_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s c_\nu z_\nu} C_\zeta (K_\xi - C_\xi)\, e^{\theta\xi} (e^{(t+\theta)\zeta} - 1)$$
$$\times \left(\sum_1^s z_\nu - \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'} - \xi - \zeta\right)^{-1}$$
$$\times \left[\left(\sum_1^s z_\nu - \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'}\right) f_{\lambda+1}\left(\zeta, z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right) - (\xi + \zeta) f_{\lambda+1}\left(\zeta, z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'} + \xi + \zeta\right)\right]$$

qui est de la forme (S 3.5).

Des équations (3.33) et (3.39) résulte la formule

$$(3.46) \qquad J_{n,j+1} = \int_0^\infty \int_0^\infty d^2 f(t, \theta)(A_1 + B_1).$$

Avant d'être en mesure d'intervertir la dernière opération avec les opérateurs C_ζ et C_ξ qui figurent dans (3.43) et (3.45), nous devons dans le cas général où l'intégrale $\varepsilon(z_1, z_2)$ [équ. (3.31)] diverge pour $R(z_1) > 0$ et pour $R(z_2) > 0$, ramener les chemins de ces opérateurs sur l'axe imaginaire. Dans (3.45), C_ζ peut immédiatement être remplacé, à cause du facteur $e^{(t+\theta)\zeta} - 1$, par $\tilde{C}_\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \ldots \frac{d\zeta}{\zeta}$. D'autre part, les expressions qui figurent dans (3.43) et (3.45) après les signes $U_{\lambda s} e^{\sum_1^s c_\nu z_\nu}$, sont de la forme $(K_\xi - C_\xi) e^{\theta\xi} F(\xi)$, où, en raison de (S 3.3) et des propriétés admises pour les $v_{j\lambda}$, $F(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)$ pour $|\xi| \to \infty$, $R(\xi) \geqq 0$; par conséquent, il vient

$$(3.47) \qquad \begin{aligned}(K_\xi - C_\xi) e^{\theta\xi} F(\xi) &= F(0) - C_\xi[1 + (e^{\theta\xi} - 1)] F(\xi) \\ &= F(0) - C_\xi(e^{\theta\xi} - 1) F(\xi) \\ &= F(0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} (e^{\theta\xi} - 1) F(\xi) \frac{d\xi}{\xi}.\end{aligned}$$

Dans les deuxièmes membres de A_1 et B_1, décomposés suivant ce schéma, l'opération $\int_0^\infty \int_0^\infty \ldots d^2 f(t, \theta)$ peut être permutée avec les autres intégrations, pourvu que, de manière analogue à (1.38), nous supposions les inégalités

$$(3.48) \qquad E(T) = \int_0^\infty t\, d_t f(t, \infty) < \infty, \qquad E(\theta) = \int_0^\infty \theta\, d_\theta f(\infty, \theta) < \infty.$$

En utilisant (3.31) et revenant aux notations $t_{n-j-1,\nu}$ et $v_{j\lambda}$ [équ. (S 3.2) et (S 3.3)], on obtient ainsi pour $J_{n,j+1}$ une expression de la forme (1.40), d'où résultent pour les $v_{j+1,\lambda}$ des formules de récurrence, généralisations de (1.41), qui permettent de démontrer, en procédant tout comme dans le supplément S 4, les différentes propriétés analytiques des $v_{j\lambda}$ et des fonctions V_λ [équ. (1.43)]. Pour ces fonctions on tire des formules de récurrence et des valeurs

(1.28) des $v_{0\lambda}$ les équations intégrales

$$
(3.49)\quad \left\{
\begin{aligned}
&[1 - z\,\varepsilon_2(-y)].V_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y)\\
&\quad + \frac{z}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\varepsilon(0, \xi) - 1}{\xi}\left(y - \sum_1^\lambda z_\nu - \xi\right)^{-1}\\
&\qquad \times\left[\left(y - \sum_1^\lambda z_\nu\right)\varepsilon_2(-y)\,V_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y)\right.\\
&\qquad\qquad \left. - \xi\,\varepsilon_0\left(-\sum_1^\lambda z_\nu - \xi\right)V_\lambda\left(z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu + \xi\right)\right]d\xi\\
&\quad - \frac{z}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\varepsilon(\zeta, \zeta) - 1}{\zeta}\left(y - \sum_1^\lambda z_\nu - \zeta\right)^{-1}\\
&\qquad \times\left[\left(y - \sum_1^\lambda z_\nu\right)\varepsilon_2(-y)\,V_{\lambda+1}(\zeta, z_1, \ldots, z_\lambda; y)\right.\\
&\qquad\qquad \left. - \zeta\,\varepsilon_2\left(-\sum_1^\lambda z_\nu - \zeta\right)V_{\lambda+1}\left(\zeta, z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu + \zeta\right)\right]d\zeta\\
&\quad + \frac{z}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\varepsilon(\zeta, \xi + \zeta) - \varepsilon(\zeta, \zeta) - \varepsilon(0, \xi) + 1}{\xi\zeta}\\
&\qquad \times\left(y - \sum_1^\lambda z_\nu - \xi - \zeta\right)^{-1}\\
&\qquad \times\left[\left(y - \sum_1^\lambda z_\nu\right)\varepsilon_0(-y)\,V_{\lambda+1}(\zeta, z_1, \ldots, z_\lambda; y)\right.\\
&\qquad\qquad - (\xi + \zeta)\,\varepsilon_0\left(-\sum_1^\lambda z_\nu - \xi - \zeta\right)\\
&\qquad\qquad\qquad \left.\times V_{\lambda+1}\left(\zeta, z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu + \xi + \zeta\right)\right]d\xi\,d\zeta\\
&\qquad\qquad = \delta_{\lambda 0}\,\frac{q}{q + y}\\
&\qquad\qquad (\lambda = 0, \ldots, s - 1),
\end{aligned}
\right.
$$

auxquelles s'ajoute l'équation (1.45) qui donne V_s en fonction des autres V_λ. Pour la f. g. des e. m. $E(e^{-q\tau_n} \mid t_{0\nu})$ la formule (1.46) reste valable.

Cependant, ces équations se simplifient dans le cas où il existe $\delta > 0$ tel que l'intégrale (3.31) converge pour $R(z_1) < \delta$, $R(z_2) < \delta$. Dans cette hypothèse où nous n'avons besoin ni de déplacer les chemins de C_ζ et de C_ξ, ni d'utiliser la décomposition (3.47), les équations (3.49) prennent la forme

$$
(3.50)\quad \left\{
\begin{aligned}
& V_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y) \\
& \quad - \frac{z}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \varepsilon(0, \xi)\, \varepsilon_2\left(-\sum_1^\lambda z_\nu - \xi\right)\left(y - \sum_1^\lambda z_\nu - \xi\right)^{-1} \\
& \quad \times V_\lambda\left(z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu + \xi\right) d\xi \\
& \quad - \frac{z}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty+\delta_1}^{i\infty+\delta_1} \frac{d\zeta}{\zeta}\int_{-i\infty+\delta_2}^{i\infty+\delta_2} \varepsilon(\zeta, \xi) \\
& \quad \times \varepsilon_2\left(-\sum_1^\lambda z_\nu - \xi\right)\left(y - \sum_1^\lambda z_\nu - \xi\right)^{-1} \\
& \quad \times V_{\lambda+1}\left(\zeta, z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu + \xi\right)\frac{\xi\, d\xi}{\xi - \zeta} = \delta_{\lambda 0}\frac{q}{q+y} \\
& \left[R\left(y - \sum_1^\lambda z_\nu - \xi\right) > 0;\ \lambda = 0, \ldots, s-1;\ 0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta\right]
\end{aligned}
\right.
$$

plus maniable que (3.49) (¹).

CHAPITRE IV.

Résolution des équations intégrales (1.44), (1.45) pour $\varepsilon_1(\zeta) = \dfrac{1}{1-\zeta}$.

Dans le cas où la t. L. $\varepsilon_1(z)$ [équ. (1.35)] est rationnelle, les équations intégrales (1.44) se transforment, quelles que soient la f. r. $f_2(t)$ et sa t. L. $\varepsilon_2(z)$, en des équations fonctionnelles. Les solutions $V_0(y)$, ... de ces équations peuvent alors être exprimées

(¹) Dans [8], p. 165, les équations (3.50), (1.45) ont été résolues pour

$$f(t, \theta) = (1 - e^{-t})\, g(\theta), \qquad f_2(t) = 1 - e^{-pt} \qquad [R(p) \geq 0],$$

où $g(\theta)$ désigne une f. r. telle que l'intégrale $\int_0^\infty e^{z\theta}\, dg(\theta)$ converge pour $z = \delta$, le nombre $\delta > 0$ étant arbitrairement petit.

sous forme finie, au moyen d'une partie des solutions de certaines équations transcendantes où figurent les variables z, z_1, $\ldots$, z_{s-1}.

En remettant la discussion du cas général d'un tel $\varepsilon_1(z)$ au chapitre suivant, nous traiterons maintenant de manière plus détaillée le cas du $\varepsilon_1(z)$ rationnel le plus simple. Supposons que $f_1(+0)=0$, en excluant ainsi de prime abord les d. c. nulles qui ne modifient pas les énoncés de la théorie des attentes. Sous cette condition, la t. L. rationnelle la plus simple est de la forme $\frac{1}{1-c^{-1}z}$, correspondant à la f. r. $1-e^{-ct}$. En posant, en outre $c=1$ nous avons donc

$$(4.1) \qquad f_1(t)=1-e^{-t}, \qquad \varepsilon_1(z)=\frac{1}{1-z},$$

d'où résulte la relation

$$(4.2) \qquad \mathrm{E}(\mathrm{T})=\int_0^\infty t\,df_1(t)=\int_0^\infty e^{-t}\,t\,dt=1;$$

en disposant ainsi de la constante c, nous avons donc pris l'e. m. de la d. c. pour unité de temps.

Dans (1.44), posons $\varepsilon_1(\zeta)=\frac{1}{1-\zeta}$; alors les fonctions à intégrer qui y figurent, possèdent, en vertu de (S 4.19), dans le demi-plan droit des ζ un seul pôle $\zeta=1$ et sont $O(|\zeta|^{-2})$ pour $\mathrm{R}(\zeta)>0$, $|\zeta|\to\infty$, de sorte que les intégrales en question se réduisent à des résidus en $\zeta=1$. les équations (1.44) se transformant ainsi en

$$(4.3) \quad \left\{\begin{aligned} &[1-z\,\varepsilon_2(-y)]\,\mathrm{V}_\lambda(z_1,\ \ldots,\ z_\lambda;\ y)-z\left(y-\sum_1^\lambda z_\nu-1\right)^{-1}\\ &\quad\times\left[\left(y-\sum_1^\lambda z_\nu\right)\varepsilon_2(-y)\,\mathrm{V}_{\lambda+1}(1,\ z_1,\ \ldots,\ z_\lambda;\ y)\right.\\ &\qquad\left.-\,\varepsilon_2\left(-\sum_1^\lambda z_\nu-1\right)\mathrm{V}_{\lambda+1}\left(1, z_1, \ldots, z_\lambda;\ \sum_1^\lambda z_\nu+1\right)\right]=\delta_{\lambda 0}\,\frac{q}{q+y}\\ &\qquad\qquad[\mathrm{R}(z_1)\geqq 0,\ \ldots,\ \mathrm{R}(y)\geqq 0;\ \lambda=0,\ \ldots,\ s-1].\end{aligned}\right.$$

Rappelons ici que dans le cas le plus important où à l'instant initial X_0 les s lignes sont libres, donc où

$$(4.4) \qquad t_{01}\leqq 0, \qquad \ldots, \qquad t_{0s}\leqq 0,$$

la formule (1.46) dont le premier membre est la f. g. des e. m. $\mathrm{E}(e^{-q\tau_n} \mid t_{0\nu})$, prend la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \,\mathrm{E}(e^{-q\tau_n} \mid 0, \ldots, 0) = \mathrm{V}_0(0); \tag{4.5}$$

il nous importe donc en premier lieu de construire la fonction $\mathrm{V}_0(0)$.

Dans ce but, posons dans les s équations (4.3) et dans (1.45) $z_1 = \ldots = z_s = 1$, d'où résultent pour les $s+1$ fonctions

$$\mathrm{V}_\lambda(y) = \mathrm{V}_\lambda(1, \ldots, 1; y) \qquad (\lambda = 0, \ldots, s) \tag{4.6}$$

les $s+1$ équations linéaires

$$\left\{\begin{aligned} &[1 - z\,\varepsilon_2(-y)]\,\mathrm{V}_\lambda(y) - \frac{z}{y-\lambda-1} \\ &\quad \times [(y-\lambda)\,\varepsilon_2(-y)\,\mathrm{V}_{\lambda+1}(y) - \varepsilon_2(-\lambda-1)\,\mathrm{V}_{\lambda+1}(\lambda+1)] = \delta_{\lambda 0}\frac{q}{q+y} \\ &\qquad\qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1), \end{aligned}\right. \tag{4.7}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{s} \mathrm{C}_s^\lambda \mathrm{V}_\lambda(y) = 0. \tag{4.8}$$

Ces équations permettent d'exprimer les fonctions $\mathrm{V}_\lambda(y)$ au moyen de s « constantes » $\mathrm{V}_1(1), \ldots, \mathrm{V}_s(s)$, lesquelles se déterminent (en principe) en utilisant le fait qu'en vertu de (S 4.18), les $\mathrm{V}_\lambda(y)$ sont finies pour $\mathrm{R}(y) \geqq 0$. Toutefois dans le cas présent, ces calculs se simplifient. En posant dans (4.7) $y = \lambda$, on a pour les s quantités $\mathrm{V}_\lambda(\lambda)$ les $s-1$ équations homogènes

$$\left\{\begin{aligned} &[1 - z\,\varepsilon_2(-\lambda)]\,\mathrm{V}_\lambda(\lambda) - z\,\varepsilon_2(-\lambda-1)\,\mathrm{V}_{\lambda+1}(\lambda+1) = 0 \\ &\qquad (\lambda = 1, \ldots, s-1). \end{aligned}\right. \tag{4.9}$$

En divisant ensuite (4.7) par $(y-\lambda)[1 - z\,\varepsilon_2(-y)]$, nous obtenons les s équations

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{V}_\lambda(y)}{y-\lambda} &- \frac{z\,\varepsilon_2(-y)}{1 - z\,\varepsilon_2(-y)}\,\frac{\mathrm{V}_{\lambda+1}(y)}{y-\lambda-1} \\ &= -\frac{1}{1 - z\,\varepsilon_2(-y)}\,\frac{z\,\varepsilon_2(-\lambda-1)}{(y-\lambda)(y-\lambda-1)}\,\mathrm{V}_{\lambda+1}(\lambda+1) \\ &\quad + \delta_{\lambda 0}\frac{1}{1 - z\,\varepsilon_2(-y)}\,\frac{1}{y}\,\frac{q}{q+y} \qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1) \end{aligned}$$

qui, multipliées respectivement par $z^\lambda \varepsilon_2^\lambda(-y)[1-z\varepsilon_2(-y)]^{-\lambda}$, prennent, au moyen des notations

$$(4.10)\qquad h(y)=\frac{z\,\varepsilon_2(-y)}{1-z\,\varepsilon_2(-y)},\qquad b_\lambda=z\,\varepsilon_2(-\lambda)\,V'_\lambda(\lambda)\qquad(\lambda=1,\,\ldots,\,s),$$

la forme

$$(4.11)\qquad \left\{\begin{aligned} & h^\lambda(y)\frac{V_\lambda(y)}{y-\lambda}-h^{\lambda+1}(y)\frac{V_{\lambda+1}(y)}{y-\lambda-1} \\ & \quad =-\frac{1}{1-z\,\varepsilon_2(-y)}\,\frac{h^\lambda(y)\,b_{\lambda+1}}{(y-\lambda)(y-\lambda-1)}+\delta_{\lambda 0}\,\frac{1}{1-z\,\varepsilon_2(-y)}\,\frac{1}{y}\,\frac{q}{q+y} \\ & \qquad\qquad (\lambda=0,\,\ldots,\,s-1). \end{aligned}\right.$$

Au moyen de la deuxième notation (4.10), les équations (4.9) se transforment en

$$b_{\lambda+1}-\frac{b_\lambda}{h(\lambda)}=0\qquad(\lambda=1,\,\ldots,\,s-1),$$

d'où l'on tire

$$(4.12)\qquad b_{\lambda+1}=b_1\prod_{k=1}^{\lambda}\frac{1}{h(k)}\qquad(\lambda=1,\,\ldots,\,s-1).$$

En ajoutant ensuite les ν premières équations (4.11), nous avons

$$(4.13)\qquad \left\{\begin{aligned} & y^{-1}V_0(y)-h^\nu(y)\frac{V_\nu(y)}{y-\nu} \\ & \quad =-\frac{1}{1-z\,\varepsilon_2(-y)}\sum_{\lambda=0}^{\nu-1}\frac{h^\lambda(y)\,b_{\lambda+1}}{(y-\lambda)(y-\lambda-1)}+\frac{1}{1-z\,\varepsilon_2(-y)}\,\frac{1}{y}\,\frac{q}{q+y} \\ & \qquad\qquad (\nu=1,\,\ldots,\,s) \end{aligned}\right.$$

et en substituant dans (4.8) les expressions qui résultent de ces équations pour $V_1(y)$, ..., $V_s(y)$, nous obtenons pour $V_0(y)$ l'équation

$$(4.14)\qquad \left[1+y^{-1}\sum_{\nu=1}^{s}C_s^\nu h^{-\nu}(y)\,(y-\nu)\right]V_0(y)$$
$$=-\frac{1}{1-z\,\varepsilon_2(-y)}\sum_{\nu=1}^{s}C_s^\nu(y-\nu)\sum_{\lambda=0}^{\nu-1}\frac{h^{\lambda-\nu}(y)\,b_{\lambda+1}}{(y-\lambda)(y-\lambda-1)}$$
$$+\frac{1}{1-z\,\varepsilon_2(-y)}\,\frac{q}{q+y}\,y^{-1}\sum_{\nu=1}^{s}C_s^\nu h^{-\nu}(y)\,(y-\nu).$$

Pour le facteur de $V_0(y)$, il vient au moyen de (4.10)

$$y^{-1}\sum_{\nu=0}^{s}\ldots = y^{-1}[y(1+h^{-1}(y))^s - sh^{-1}(y)(1+h^{-1}(y))^{s-1}]$$
$$= y^{-1}[yz^{-s}\varepsilon_2^{-s}(-y) - s(1-z\varepsilon_2(-y))\,z^{-s}\varepsilon_2^{-s}(-y)]$$
$$= y^{-1}z^{-s}\varepsilon_2^{-s}(-y)\,[y-s+sz\,\varepsilon_2(-y)];$$

en divisant la dernière équation par ce facteur, nous avons donc

$$\text{(4.15)}\quad V_0(y) = \frac{1}{s-y-sz\,\varepsilon_2(-y)}\,\frac{yz^s\varepsilon_2^s(-y)}{1-z\,\varepsilon_2(-y)}$$
$$\times\left[\sum_{\lambda=0}^{s-1}\frac{b_{\lambda+1}}{(y-\lambda)(y-\lambda-1)}\sum_{\nu=\lambda+1}^{s}C_s^\nu h^{\lambda-\nu}(y)(y-\nu)+\frac{q}{q+y}\right]$$
$$+\frac{1}{1-z\,\varepsilon_2(-y)}\,\frac{q}{q+y}.$$

Or nous verrons plus loin que pour $|z|<1$, l'équation

$$\text{(4.16)}\qquad s-y-sz\,\varepsilon_2(-y)=0 \qquad \text{ou} \qquad 1-z\frac{\varepsilon_2(-y)}{1-\dfrac{y}{s}}=0$$

possède une racine unique $y_0(z)$ telle que $R[y_0(z)]>0$. Comme, d'autre part, la fonction $V_0(y)$ est continue (et bornée) pour $R(y)\geqq 0$, le deuxième membre de (4.15) et, par conséquent, l'expression qui y figure entre crochets, doit s'annuler pour $y=y_0(z)$, donc

$$\text{(4.17)}\quad \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{s-1}\frac{b_{\lambda+1}}{(y_0-\lambda)(y_0-\lambda-1)}\sum_{\nu=\lambda+1}^{s}C_s^\nu h^{\lambda-\nu}(y_0)(y_0-\nu)+\frac{q}{q+y_0}=0\\ \qquad\qquad\qquad\qquad [y_0=y_0(z)].\end{array}\right.$$

Au moyen de l'identité

$$\text{(4.18)}\quad \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\nu=\lambda+1}^{s}C_s^\nu h^{\lambda-\nu}(y_0)(y_0-\nu) = -C_{s-1}^\lambda y_0\\ \displaystyle\left[h(y_0)=\frac{z\,\varepsilon_2(-y_0)}{1-z\,\varepsilon_2(-y_0)}=\frac{s-y_0}{y_0}\right]\end{array}\right.$$

qui se démontre par induction sur λ, l'équation (4.17) prend la forme

$$\text{(4.19)}\quad y_0\sum_{\lambda=0}^{s-1}C_{s-1}^\lambda\frac{b_{\lambda+1}}{(y_0-\lambda)(y_0-\lambda-1)}=\frac{q}{q+y_0}\qquad [y_0=y_0(z)],$$

où nous substituerons aux $b_{\lambda+1}$ les expressions (4.12). En utilisant la notation

$$(4.20)\quad \left\{\begin{array}{l} A_0(z) = y_0 \sum_{\lambda=0}^{s-1} C_{s-1}^{\lambda} \left[(y_0-\lambda)(y_0-\lambda-1) \prod_{k=1}^{\lambda} h(k) \right]^{-1} \\ \left[h(k) = \dfrac{z\,\varepsilon_2(-k)}{1-z\,\varepsilon_2(-k)},\ y_0 = y_0(z) \right], \end{array}\right.$$

nous avons ainsi

$$(4.21)\qquad b_1 = \frac{q}{q+y_0(z)} A_0^{-1}(z).$$

Les équations (4.20), (4.21) et (4.12) permettent d'exprimer les s constantes b_λ et, par conséquent, les fonctions $V_0(y)$, ..., $V_s(y)$ [équ. (4.13) et (4.15)] par des grandeurs connues. Pour construire en particulier $V_0(0)$, faisons tendre $y \to +0$ dans (4.15), d'où

$$V_0(0) = \frac{z^s}{s(1-z)^2} b_1 \sum_{\nu=1}^{s} \nu C_s^{\nu} \left(\frac{1-z}{z}\right)^{\nu} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z}(b_1+1);$$

pour la f. g. (4.5) nous en tirons au moyen de (4.21) la formule

$$(4.22)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, E(e^{-q\tau_n} \mid 0) = \frac{1}{1-z} \left[\frac{q}{q+y_0(z)} A_0^{-1}(z) + 1 \right],$$

$A_0(z)$ étant donné par (4.20).

Avant d'utiliser cette formule, revenons à l'équation (4.16). D'après le théorème de Rouché ([13], p. 116), la fonction

$$(4.23)\qquad \frac{s-y-sz\,\varepsilon_2(-y)}{s-y} = 1 - z\frac{\varepsilon_2(-y)}{1-\dfrac{y}{s}}$$

a, pour $|z| < 1$, autant de zéros que de pôles à l'intérieur du demi-plan $R(y) \geqq 0$; car sur la frontière $R(y) = 0$, ainsi que pour $R(y) > 0$ et $|y|$ assez grand, l'inégalité

$$\left| z \frac{\varepsilon_2(-y)}{1-\dfrac{y}{s}} \right| \leqq |z| < 1$$

est vérifiée. Comme la fonction (4.23) n'a dans ce demi-plan qu'un seul pôle $y = s$, son numérateur possède donc un seul zéro $y_0(z)$ de partie réelle positive.

C. Q. F. D.

De la formule (4.22) nous allons tirer la valeur limite de $E(e^{-q\tau_n} \mid 0)$ pour $n \to \infty$, laquelle dépend du comportement de $y_0(z)$ pour $z \to 1-0$. Supposons d'abord que $f_2(t)$ vérifie l'inégalité

$$(4.24) \qquad \int_0^\infty t\, df_2(t) > \frac{1}{s} \int_0^\infty t\, df_1(t) = \frac{1}{s};$$

il en résulte que la fonction

$$(4.25) \qquad \varphi(y) = \frac{\varepsilon_2(-y)}{1 - \dfrac{y}{s}},$$

considérée dans l'intervalle $0 \leqq y < s$, décroît au point $y = 0$. Comme, d'autre part, $\varphi(0) = 1$ et que $\varphi(y)$ tend vers $+\infty$ pour $y \to s - 0$, cette fonction atteint dans un point unique y^* de l'intervalle $(0, s)$ [où $\varphi'(y^*) = 0$, $\varphi''(y^*) > 0$] un minimum $\varphi(y^*) < 1$.

En outre, $\varphi(y)$ vérifie l'inégalité $|\varphi(y)| \leqq \varphi[R(y)]$ [pour $R(y) < s$], de sorte qu'on a l'inégalité

$$(4.26) \qquad |z\varphi(y)| < 1 \quad \text{pour} \quad |z| < z^* \equiv \varphi^{-1}(y^*), \quad R(y) = y^* \quad [z^* > 1].$$

Pour $|z| < z^*$ l'équation (4.16), ou $1 - z\varphi(y) = 0$, possède donc, en vertu du théorème de Rouché, une racine unique $y_0(z)$ telle que $R(y_0) > y^* > 0$, la fonction $y_0(z)$ étant holomorphe pour $|z| < z^*$. Comme $|z^*| > 1$, $y_0(z)$, et par conséquent la fonction $z^s A_0(z)$ [équ. (4.20)], est holomorphe pour $|z| < z^*$. [On vérifie sans peine que $A_0(z)$ est holomorphe aux points z tels que $y_0(z) = \lambda (\lambda = 0, \ldots, s-1)$.]

En représentant le $n^{\text{ième}}$ coefficient de la série de Taylor (4.22) sous forme d'un résidu au point $z = 0$, nous avons, en désignant par K un petit cercle ayant l'origine pour centre et parcouru dans le sens positif,

$$(4.27) \qquad E(e^{-q\tau_n} \mid 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{1}{1-z} \left[\frac{q}{q + y_0(z)} A_0^{-1}(z) + 1 \right] z^{-n-1}\, dz.$$

Comme la fonction à intégrer est analytique pour $|z| < z^*$, on peut remplacer K par un cercle $1 < |z| < z^*$, en retranchant les résidus aux pôles de la fonction à intégrer situés entre ces deux cercles. Dans le domaine $1 < |z| < z^*$, $A_0(z)$ peut avoir un nombre fini de zéros qui seront des pôles de la fonction intégrée. Mais il est évident qu'aucun pôle, sauf $z = 0$, n'est situé à l'intérieur du cercle unité; car puisque $|E(e^{-q\tau_n})| \leqq 1$ pour $R(q) \geqq 0$, la série (4.22) converge pour $|z| < 1$ [et $R(q) \geqq 0$]. En outre, nous démontrerons ci-dessous qu'en dehors de $z = 1$ il n'existe pas non plus de pôles situés *sur* le cercle unité. En anticipant ce résultat et prenant δ' tel que $A_0(z) \neq 0$ pour $|z| \leqq 1 + \delta'$, nous obtenons

$$(4.28) \qquad E(e^{-q\tau_n} \mid 0) = \frac{q}{q + y_0(1)} A_0^{-1}(1) + 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1+\delta'} \frac{1}{1-z} [\ldots] z^{-n-1}\, dz;$$

mais la dernière intégrale dont le module est $< c'(1 + \delta')^{-n}$, tend vers zéro pour $n \to \infty$, de sorte que

$$(4.29) \qquad \lim_{n \to \infty} E(e^{-q\tau_n} \mid 0) = \frac{q}{q + y_0(1)} A_0^{-1}(1) + 1 \qquad \left[\text{pour} \int_0^\infty t\, df_2(t) > \frac{1}{s}\right].$$

La non-existence de pôles, autres que $z = 1$, situés sur le cercle unité sera démontrée de manière indirecte. S'il existait des pôles $z = e^{i\varphi_\nu} (\neq 1)$, ils ajouteraient au deuxième membre de (4.28) un nombre nécessairement fini de termes de la forme $c_\nu e^{in\varphi_\nu}$, de sorte que $E(e^{-q\tau_n} \mid 0)$ ne pourrait tendre vers une limite pour $n \to \infty$. Mais cela serait en contradiction avec un théorème dû à MM. J. Kiefer et J. Wolfowitz [3] qui ont établi que, quelles que soient $f_1(t)$ et $f_2(t)$, $\lim_{n\to\infty} \rho_n(t \mid t_{0\nu})$, donc $\lim_{n\to\infty} E(e^{-q\tau_n} \mid t_{0\nu})$, existe (et est indépendante des s grandeurs $t_{0\nu}$).

Cependant dans le cas présent, nous n'avons pas besoin d'utiliser ce théorème; car dans nos hypothèses (4.4), les $\rho_n(t) = \rho_n(t \mid 0)$ vérifient l'inégalité

$$(4.30) \qquad \rho_n(t) \geqq \rho_{n+1}(t) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

qui entraîne évidemment l'existence de $\lim_{n\to\infty} \rho_n(t)$ et, par conséquent, les formules (4.28) et (4.29).

Avant de démontrer la dernière inégalité, nous établirons une formule de récurrence pour les d. a. $\tau_n\,(n \geqq s)$. D'abord il vient $\tau_0 = \ldots = \tau_{s-1} = 0$, puisque dans l'hypothèse (4.4) toutes les s lignes sont libres à l'instant X_0. Pour $n \geqq s$, le $n^{\text{ième}}$ appel, produit à l'instant X_n, pourra être servi dès que $n - s$ parmi les n communications d'indices $< n$ auront pris fin, c'est-à-dire à partir de l'instant $\max\limits_{\nu=0,\ldots,n-1}{}^{(s)} (X_\nu + \tau_\nu + T_\nu)$; il vient donc, au moyen de la notation (1.7),

$$\tau_n = [\max_{\nu=0,\ldots,n-1}{}^{(s)} (X_\nu + \tau_\nu + T_\nu) - X_n]^+ = [\max_{\nu=0,\ldots,n-1}{}^{(s)} (X_\nu + \tau_\nu + T_\nu - X_n)]^+$$

ou, en écrivant $\max^{(s)+}$ au lieu de $[\max^{(s)}]^+$,

$$(4.31)\quad \begin{cases} \tau_n(T_0, \ldots, Y_{n-1}) = \max\limits_{\nu=0,\ldots,n-1}{}^{(s)+} [X_\nu + \tau_\nu(T_0, \ldots, Y_{\nu-1}) + T_\nu - X_n] \\ \qquad\qquad (n = s, s+1, \ldots). \end{cases}$$

De (4.31) on tire la relation

$$(4.32)\quad \begin{cases} \tau_{n-1}(T_1, \ldots, Y_{n-1}) = \max\limits_{\nu=0,\ldots,n-2}{}^{(s)+} [X_{\nu+1} + \tau_\nu(T_1, \ldots, Y_\nu) + T_{\nu+1} - X_n] \\ \quad = \max\limits_{\nu=1,\ldots,n-1}{}^{(s)+} [X_\nu + \tau_{\nu-1}(T_1, \ldots, Y_{\nu-1}) + T_\nu - X_n] \\ \qquad\qquad (n = s+1, s+2, \ldots). \end{cases}$$

Admettons maintenant que l'inégalité

$$(4.33)\quad \tau_\nu(T_0, Y_0, \ldots, T_{\nu-1}, Y_{\nu-1}) \geqq \tau_{\nu-1}(T_1, Y_1, \ldots, T_{\nu-1}, Y_{\nu-1})$$

qui est vérifiée pour $\nu = 1, \ldots, s$, puisque

$$\tau_s \geqq \tau_{s-1} = \ldots = \tau_0 = 0,$$

ait été démontrée pour $s \leqq \nu \leqq n-1$. Il en résulte que pour $\nu = 1, \ldots, n-1$, le $\nu^{\text{ième}}$ nombre figurant au dernier membre de (4.32) est inférieur ou égal au $\nu^{\text{ième}}$ nombre qui figure au deuxième membre de (4.31) (où en outre, se trouve un terme d'indice $\nu = 0$). Il est donc évident que la fonction $\max^{(s)+}$, formée pour les $n-1$ nombres qui figurent dans (4.32), est inférieure ou égale à $\max^{(s)+}$, formé pour les n nombres contenus dans (4.31), et cela démontre l'inégalité (4.33) pour $\nu = n$, et, par conséquent, pour tout $\nu \geqq 1$.

Comme tous les T_ν, et de même tous les Y_ν, ont les mêmes f. r., il résulte de (4.33) que, pour tout $\nu \geqq 1$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Prob}[\tau_\nu(T_0, \ldots, Y_{\nu-1}) < t] \leqq \mathrm{Prob}[\tau_{\nu-1}(T_1, \ldots, Y_{\nu-1}) < t] \\ &\quad = \mathrm{Prob}[\tau_{\nu-1}(T_0, \ldots, Y_{\nu-2}) < t], \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\rho_\nu(t\,|\,0) \leqq \rho_{\nu-1}(t\,|\,0) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

C. Q. F. D.

Dans (4.22) et (4.29) passons maintenant, au moyen de la formule de M. P. Lévy ([4], p. 38), des e. m. aux f. r. correspondantes $\rho_n(t) = \rho_n(t\,|\,0)$; observant que les v. a. τ_n sont $\geqq 0$, et anticipant que, dans le cas présent, $\rho_n(t)$ est continue, nous pouvons écrire cette formule sous la forme

$$(4.34) \qquad \rho_n(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN+0}^{iN+0} e^{qt}\, \mathrm{E}(e^{-q\tau_n}) \frac{dq}{q} \qquad (t > 0).$$

Dans le premier membre de (4.22) les opérations $\lim\limits_{N\to\infty} \int_{-iN+0}^{iN+0} \ldots dq$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ peuvent être permutées pour la même raison que lors du passage de (2.42) à (2.44), et comme la première de ces opérations transforme le deuxième membre de (4.22) en la somme des résidus aux points $q = 0$ et $q = -y_0(z)$, il vient

$$(4.35) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^n \rho_n(t) = \frac{1}{1-z}\left[1 + A_0^{-1}(z)\, e^{-y_0(z)t}\right] \qquad (|z| < 1;\ t > 0).$$

De même, on tire de (4.29), dans l'hypothèse (4.24), la relation

$$(4.36) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} e^{qt} \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(e^{-q\tau_n}) \frac{dq}{q} = \lim_{n\to\infty} \rho_n(t) = 1 + A_0^{-1}(1)\, e^{-y_0(1)t}$$

ou, écrite de manière explicite,

$$(4.37) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\rho(t) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(t) = 1 + \Bigg[y_0(1) \sum_{\lambda=0}^{s-1} C_{s-1}^{\lambda} \\ &\qquad \times (y_0(1) - \lambda)^{-1} (y_0(1) - \lambda - 1)^{-1} \prod_{k=1}^{\lambda} \frac{1 - \varepsilon_2(-k)}{\varepsilon_2(-k)} \Bigg]^{-1} e^{-y_0(1)t} \\ &\left[s - y_0(1) - s\,\varepsilon_2(-y_0(1)) = 0,\ \int_0^\infty t\, df_2(t) > \frac{1}{s};\ t > 0 \right] \quad (^1). \end{aligned} \right.$$

---

(1) Peu après notre publication [9] qui contenait, sans démonstration, les équations fondamentales de notre théorie ainsi que la formule (4.37), M. D. G. Kendall a publié un article [2] consacré au calcul de $\rho(t)$ et d'autres probabilités dans les hypothèses admises dans (4.37). Au moyen de raisonnements tout différents des

Cette formule est la généralisation, à des f. r. $f_2(t)$ arbitraires, de la formule

$$(4.38) \qquad \rho(t) = 1 - \frac{c^s}{s\,!}\left[\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{c^\nu}{\nu\,!} + \frac{s}{s-c}\,\frac{c^s}{s\,!}\right]^{-1} e^{-(s-c)t},$$

établie par A. K. Erlang dans l'hypothèse où les appels sont produits suivant la loi de Poisson, donc où

$$(4.39) \qquad f_2(t) = \operatorname{Prob}(Y < t) = 1 - e^{-ct} \qquad (c < s).$$

Remarquons ici que, par des méthodes bien connues, on peut tirer de la formule (4.27) et de son analogue pour $\rho_n(t\,|\,0)$ les développements asymptotiques de $E(e^{-q\tau_n}\,|\,0)$ et de $\rho_n(t\,|\,0)$ pour $n \to \infty$. En première approximation on trouve ainsi pour $\rho_n(t\,|\,0)$, dans l'hypothèse où $A_0(z) \neq 0$ pour $1 < z \leq z^*$, la formule

$$(4.40) \qquad \rho_n(t\,|\,0) = \rho(t\,|\,0) + O\left[n^{-\frac{3}{2}} z^{*^{-n}}\right] \qquad (n \to \infty).$$

Supposons maintenant, contrairement à (4.24), que

$$(4.41) \qquad \int_0^\infty t\, df_2(t) \leq \frac{1}{s}.$$

Alors la fonction $\varphi(y)$, considérée à nouveau pour $0 \leq y < s$, atteint son minimum 1 au point $y = 0$, de sorte que la solution $y_0(z)$ de l'équation (4.16), ou $1 - z\,\varphi(y) = 0$, tend vers zéro pour $z \to 1-0$; il vient donc $y_0(1-0) = 0$ et, par conséquent, en vertu de (4.20), $A_0(1-0) = -1$. Faisons ensuite tendre z vers $1-0$ dans les deux membres de la formule

$$(4.42) \qquad \rho_0(t) + \sum_{n=1}^\infty z^n[\rho_n(t) - \rho_{n-1}(t)] = 1 + A_0^{-1}(z)\, e^{-y_0(z)t}$$

qu'on obtient en multipliant (4.35) par $(1-z)$. Alors le deuxième membre tend vers zéro et le premier, en vertu du théorème d'Abel, vers la somme des coefficients de la série de Taylor, donc vers

$$\rho_0(t) + \sum_{n=1}^\infty [\rho_n(t) - \rho_{n-1}(t)] = \lim_{n\to\infty} \rho_n(t);$$

---

nôtres, M. Kendall démontre que $\rho(t)$ est de la forme $1 - C\,e^{-y_0(1)t}$ et donne un procédé qui permet de déterminer dans chaque cas particulier la constante C, sans toutefois établir la loi générale (4.37).

car cette somme dont les termes, en raison de (4.30), sont $\leqq 0$, converge évidemment. Dans l'hypothèse (4.41) nous obtenons donc

$$\rho(t) = \lim_{n \to \infty} \rho_n(t) = 0 \qquad (t \geqq 0). \tag{4.43}$$

Pour être en mesure d'établir, de manière analogue à (4.40), de quelle façon $\rho_n(t)$ tend pour $n \to \infty$ vers sa limite zéro, il faudrait admettre des hypothèses restrictives sur $f_2(t)$; en premier lieu, on pourrait ainsi supposer que l'intégrale $\varepsilon_2(z) = \int_0^\infty e^{zt}\, df_2(t)$ converge pour un nombre $z > 0$, si petit soit-il.

Construction de la fonction $V_1(z_1;\, z_1)$ pour $s \geqq 2$ et $f_1(t) = 1 - e^{-t}$.

Pour obtenir d'abord $V_1(z_1;\, y)$, d'où se déduit la fonction $V_1(z_1;\, z_1)$ qui figure dans (1.46), posons dans les $s-1$ dernières équations (4.3) et dans (1.45) $z_2 = \ldots = z_s = 1$. Pour les s fonctions

$$V_\lambda(z_1,\, 1,\, \ldots,\, 1;\, y) \qquad (\lambda = 1,\, \ldots,\, s) \tag{4.44}$$

résultent ainsi s équations linéaires à déterminant non nul où, en outre, figurent les $s-1$ fonctions

$$V_\lambda(z_1,\, 1,\, \ldots,\, 1;\, z_1 + \lambda - 1) \qquad (\lambda = 2,\, \ldots,\, s) \tag{4.45}$$

qui se déterminent en utilisant le fait que les fonctions (4.44) sont finies pour $R(y) \geqq 0$ et $R(z_1) \geqq 0$. En résolvant les équations linéaires vérifiées par les fonctions (4.44), on obtient donc en particulier pour $V_1(z_1;\, y)$ une expression où ne figurent que des quantités connues. De cette expression on tire pour $V_1(z_1;\, z_1)$ la formule

$$\begin{aligned} V_1(z_1;\, z_1) = {} & \frac{1}{1 - z\,\varepsilon_2(-z_1)}\, \frac{y_1 - z_1}{s z_1 - y_1}\, A_1^{-1}(z_1,\, z) \\ & \times \left\{ A_0^{-1}(z)\, \frac{q}{q + y_0} \sum_{\lambda=0}^{s-1} \left[(y_1 - \lambda)(y_1 - \lambda - 1) \prod_{k=1}^{\lambda} h(k) \right]^{-1} \right. \\ & \left. \times \left[(1 - z_1)\, y_1\, C_{s-2}^{\lambda} + z_1 (s - y_1)\, C_{s-2}^{\lambda-1} \right] + (z_1 - 1)\, \frac{q}{q + y_1} \right\}, \end{aligned} \tag{4.46}$$

où $A_0(z)$ et $A_1(z_1, z)$ sont respectivement définis par les équations (4.20) et

$$(4.47)\quad A_1(z_1, z) = (y_1 - z_1)\sum_{\lambda=0}^{s-2} C_{s-2}^{\lambda}\left[(y_1 - z_1 - \lambda)(y_1 - z_1 - \lambda - 1)\prod_{k=1}^{\lambda} h(z_1 + k)\right]^{-1},$$

tandis que $y_1 = y_1(z_1, z)$ désigne la racine unique de l'équation

$$(4.48)\qquad s - 1 - y + z_1 - (s-1)z\,\varepsilon_2(-y) = 0$$

telle que $R(y) > 0$ pour $0 < |z| < 1 + \frac{R(z_1)}{s-1}$.

Cette méthode permet de construire tous les V_λ. Les fonctions $V_0(y), \ldots, V_{\lambda-1}(z_1, \ldots, z_{\lambda-1}; y)$ étant construites, on tire $V_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$ d'un système de $s + 1 - \lambda$ équations linéaires, obtenues en posant $z_{\lambda+1} = \ldots = z_s = 1$ dans les $s - \lambda$ dernières équations (4.3) et dans (1.45); $s - \lambda$ fonctions non encore connues de $z_1, \ldots, z_\lambda$ qui figurent, en outre, dans ces équations, se déterminent par des considérations de continuité. On trouve ainsi que tous les $V_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$, donc toutes les fonctions $V_\lambda\left(z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu\right)$ qui figurent dans (1.46), peuvent être exprimées sous forme finie au moyen des fonctions $y_0(z)$ [équ. (4.16)] et

$$y_\lambda\left(\sum_{\nu=1}^{\lambda} z_\nu, z\right)\qquad (\lambda = 1, \ldots, s-1),$$

$y_\lambda(\zeta, z)$ désignant la racine unique de l'équation

$$(4.49)\quad s - \lambda - y + \zeta - (s-\lambda)z\,\varepsilon_9(-y) = 0\qquad (\lambda = 1, \ldots, s-1)$$

telle que $R(y) > 0$ pour $0 \leqq |z| < 1 + \frac{R(\zeta)}{s-\lambda}$.

Examinons maintenant le domaine d'holomorphie de $V_1(z_1; z_1)$, considérée en tant que fonction de z_1 et z. D'une manière générale. $V_1(z_1; z_1)$ est holomorphe pour $|z| < 1$ et $R(z_1) > 0$, comme le montrent les raisonnements faits à la fin du chapitre I [équ. (1.66) et (1.67)]. Mais nous verrons que, dans le cas présent, cette fonction est aussi holomorphe, ainsi que $O(|z_1|^{-1})$, pour $|z| \leqq 1$ et $R(z_1)$ assez grand.

Parmi les fonctions qui figurent au dénominateur de l'expression (4.46), seules $A_0(z)$, $A_1(z_1, z)$ et $1 - z\varepsilon_2(-z_1)$ pourraient donner lieu à des singularités dans le domaine mentionné. Or nous savons déjà que $A_0^{-1}(z)$ est holomorphe pour $|z| \leqq 1$. Ensuite la fonction $A_1(z_1, z)$ est holomorphe, tout comme $y_1(z_1, z)$ [équ. (4.48)], pour $|z| < 1 + \frac{R(z_1)}{s-1}$. Pour $|z| \leqq c$ (arbitraire) et $R(z_1) \to \infty$, $A_1^{-1}(z_1, z)$ se réduit, à un facteur près qui tend vers 1, à $-z^{s-1}\varepsilon_2(-y_1)\prod_{k=1}^{s-2}\varepsilon_2(-z_1-k)$; il existe, par conséquent, une constante c_1 telle que A_1^{-1} soit holomorphe pour $|z| \leqq 1$ et $R(z_1) \geqq c_1$. Enfin le facteur $[1 - z\varepsilon_2(-z_1)]^{-1}$ est holomorphe pour $|z| \leqq 1$ et $R(z_1) \geqq c_2 > 0$, c_2 étant arbitrairement petit. On peut donc trouver δ' et $c' > 0$ tels que $V_1(z_1;\, z_1)$ soit holomorphe pour $|z| \leqq 1 + \delta'$ et $R(z_1) \geqq c'$; en outre, on conclut de (4.46) que, dans ce domaine, $|V_1(z_1;\, z_1)| < c''|z_1|^{-1}$. Il en résulte que l'intégrale $\int_{-i\infty+c'}^{i\infty+c'} e^{\zeta t} V_1(\zeta;\, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$ est holomorphe, en tant que fonction de z, pour $|z| \leqq 1 + \delta'$.

Dans la formule (1.62) posons maintenant $t_{02} = \ldots = t_{0s} = 0$; il vient ainsi, en prenant pour C_1 la droite $R(\zeta_1) = c' > 0$,

$$
(4.50) \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, E(e^{-q\tau_n} \mid t_{01}, 0, \ldots, 0) = V_0(0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+c'}^{i\infty+c'} e^{\zeta t_{01}} V_1(\zeta;\, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (|z| < 1).
$$

Pour $t_{01} \leqq 0$, la dernière intégrale s'annule; pour $t_{01} > 0$, sa contribution à $E\, e^{-q\tau_n}$ s'obtient en effectuant, tout comme dans (4.27), l'opération $\frac{1}{2\pi i}\int_K \ldots z^{-n-1}\,dz$ où, en raison de l'holomorphie du deuxième terme du deuxième membre de (4.50), nous pouvons prendre pour K le cercle $|z| = 1 + \delta'$. On en conclut, au moyen d'une évaluation élémentaire de $\int_K \ldots dz$, que cette contribution est $O_{t_{01}}[(1+\delta')^{-n}]$, c'est-à-dire que, pour $t_{01} > 0$ donné, elle tend exponentiellement vers zéro. Notons que dans le cas où tous les $t_{0\nu}$ sont > 0, la même propriété pourrait être établie pour les contributions à la valeur numérique de $E\, e^{-q\tau_n}$, fournies par les autres termes du deuxième membre de (1.62).

Appliquons maintenant les formules (2.22) et (2.44) du chapitre II dans les hypothèses (4.1) et (4.4). Pour $\Phi(q, z)$ [équ. (2.13)] il faut alors prendre la fonction (4.22) qui est encore continue, et même holomorphe, *à gauche* de l'axe imaginaire des q. Nous sommes donc en droit de remplacer dans (2.22) le symbole $\hat{\int}$ [équ.(2.17)] par $\lim\limits_{N\to\infty} \int_{-iN-0}^{iN-0}$ et obtenons ainsi

$$\sum_{n,a=0}^{\infty} x^a z^n p_{na} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-z}\right) + (x-z) \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN-0}^{iN-0}$$

$$\times \left[\frac{1}{(1-z)(1-x)} - \frac{1}{1-z}\,\frac{\varepsilon_2(q)}{1-x\,\varepsilon_2(q)}\left(\frac{q}{q+y_0}\,A_0^{-1}(z)+1\right)\right]\frac{dq}{q}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-z}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{x-z}{(1-z)(1-x)}$$

$$+ \frac{z-x}{1-z} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN-0}^{iN-0} \frac{\varepsilon_2(q)}{1-x\,\varepsilon_2(q)}\left(\frac{1}{q+y_0(z)}\,A_0^{-1}(z) + \frac{1}{q}\right)dq.$$

Par suite de la continuité de $f_2(t)$, il vient en particulier $f_2(+0) = f_2(0) = 0$, de sorte que la limite de la dernière intégrale s'avère égale au résidu de sa fonction à intégrer au pôle $q = -y_0(z)$; on a donc finalement, en utilisant (4.16),

$$(4.51)\quad \sum_{n,a=0}^{\infty} x^a z^n p_{na} = \frac{1}{1-z} + \frac{z-x}{1-z}\,\frac{\varepsilon_2(-y_0)}{1-x\,\varepsilon_2(-y_0)}\,A_0^{-1}(z)$$

$$= \frac{1}{1-z} + \frac{z-x}{1-z}\,\frac{s-y_0}{sz-(s-y_0)x}\,A_0^{-1}(z) \qquad [y_0 = y_0(z)].$$

Pour la f. g. des probabilités

$$P_a = \lim_{n\to\infty} p_{na} \qquad (a = 0, 1, \ldots),$$

pour qu'en état d'équilibre statistique un appel trouve exactement a appels en attente, on tire de (4.51) dans l'hypothèse (4.24) la formule

$$(4.52)\quad \sum_{a=0}^{\infty} x^a P_a = 1 + (s-y_0)\,A_0^{-1}(1)\,\frac{1-x}{s-(s-y_0)x} \qquad [y_0 = y_0(1)],$$

où $y_0(1)$ désigne la racine positive de l'équation $s - y = s\,\varepsilon_2(-y)$; cette formule montre que P_1, P_2, ... forment une série géométrique d'argument $1-\frac{1}{s}y_0(1)$. Dans l'hypothèse (4.41) on obtient naturellement $\sum_0^\infty x^a P_a \equiv 0$ [1].

Dans l'hypothèse (4.4), la formule (2.44) devient

$$\sum_{\lambda=0}^{s}\sum_{n=0}^{\infty} x^\lambda z^n p_n^\lambda = \frac{x^s}{1-z} + V_0(0),$$

$V_0(0)$ étant déterminé par les équations (2.45) et (1.45). Pour la f. r. (4.1) les équations (2.45) prennent elles aussi, en raison de la continuité de $f_2(t)$ pour $t=0$, la forme (4.3), avec $(x-1)^\lambda - \delta_{\lambda 0}x^s$ pour deuxièmes membres; elles peuvent donc être résolues de la même façon que les équations (4.3).

En introduisant dans la dernière formule l'expression de $V_0(0)$ qu'on obtient ainsi, on a pour la f. g. cherchée

$$(4.53)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\lambda=0}^{s}\sum_{n=0}^{\infty} x^\lambda z^n p_n^\lambda = \frac{1}{1-z} A_0^{-1}(z) \Bigg\{ y_0 \sum_{\nu=0}^{s-1}(x-1)^\nu \\ &\quad \times \left[C_{s-1}^{\nu}\frac{1}{y_0-\nu} + \sum_{\lambda=\nu}^{s-1} C_{s-1}^{\lambda}\left((y_0-\lambda)(y_0-\lambda-1)\prod_{k=\nu+1}^{\lambda} h(k)\right)^{-1}\right] - x^s \Bigg\} \\ &\qquad\qquad [y_0 = y_0(z)]. \end{aligned} \right.$$

Désignant par

$$\tilde{P}_\lambda = \lim_{n\to\infty} p_n^\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, s)$$

la probabilité pour qu'en état d'équilibre stationnaire un appel trouve exactement λ lignes occupées, on tire de (4.53), dans l'hypothèse (4.24),

$$(4.54)\quad \begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^{s} x^\lambda \tilde{P}_\lambda = A_0^{-1}(1) \Bigg\{ & y_0(1) \sum_{\nu=0}^{s-1}(x-1)^\nu \Bigg[C_{s-1}^{\nu}\frac{1}{y_0(1)-\nu} \\ & + \sum_{\lambda=\nu}^{s-1} C_{s-1}^{\lambda}(y_0(1)-\lambda)^{-1}(y_0(1)-\lambda-1)^{-1}\prod_{k=\nu+1}^{\lambda}\frac{1-\varepsilon_2(-k)}{\varepsilon_2(-k)}\Bigg] - x^s \Bigg\}, \end{aligned}$$

---

[1] La formule pour la f. g. $\sum_{n,j=0}^{\infty} z^n x^j p_n^{(j)}$ des probabilités $p_n^{(j)}$ pour que, à l'instant X_n, j appels soient *ou* en attente *ou* en cours de communication, que nous avons donnée dans [9] [équ. (3) et (4)], et qui est valable dans les hypothèses (4.1) et (4.4), peut elle aussi être établie par la méthode utilisée dans le chapitre II.

tandis que dans l'hypothèse (4.41) il vient

$$\sum_0^s x^\lambda \tilde{P}_\lambda \equiv x^s.$$

CHAPITRE V.

Résolution des équations intégrales (1.44), (1.45) dans différentes hypothèses sur les transformées de Laplace Stieltjes $\varepsilon_1(\zeta)$ et $\varepsilon_2(\zeta)$.

Avant de parler des hypothèses sur $\varepsilon_1(\zeta)$ et $\varepsilon_2(\zeta)$ dans lesquelles on peut faire disparaître les signes d'intégration qui figurent dans (1.44), mentionnons que, pour traiter le cas $s = 1$, on dispose de méthodes particulières (*voir*, par exemple, [12]) qui ne s'appliquent pas pour $s > 1$, et que nous renonçons à exposer ici.

Dans chacune des deux hypothèses 1° et 2° indiquées déjà dans l'introduction, et pour s quelconque, les solutions des équations (1.44) peuvent être exprimées sous forme finie.

1° La méthode de résolution des équations (1.44), (1.45) utilisée au chapitre IV dans l'hypothèse (4.1) s'applique dans tous les cas où la t. L. $\varepsilon_1(z)$ est rationnelle, $\varepsilon_2(z)$ étant une t. L. arbitraire, pourvu que les fonctions analytiques données, symétriques en $z_1, \ldots, z_\lambda$, $a_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$, qui figurent dans les deuxièmes membres de ces équations, vérifient dans le domaine (1.25) des inégalités de la forme

$$|a_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y)| < \frac{c}{|y|} \qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1),$$

ou encore qu'elles possèdent des représentations de la forme (S 6.1). Dans le cas des équations (1.44), les $V_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$, considérées en tant que fonctions de y, sont *rationnelles* en y et $\varepsilon_2(-y)$.

Dans l'hypothèse où

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{c} f_1(t) = \sum_{i=1}^n c_i(1 - e^{-a_i t}) \\ \left[\sum_{i=1}^n c_i = 1,\ a_1 \neq a_2 \neq \ldots \neq a_n;\ R(a_i) > 0,\ i = 1, \ldots, n \right], \end{array} \right.$$

donc où

$$(5.2) \qquad \varepsilon_1(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i c_i}{a_i - z},$$

esquissons brièvement le procédé de résolution sur le cas $s = 2$.

Alors les équations (1.44) et (1.45) se transforment, en vertu de l'inégalité (S 4.19), respectivement en

$$(5.3) \qquad [1 - z\,\varepsilon_2(-y)]\,V_0(y) - z\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{y - a_i}$$
$$\times [y\,\varepsilon_2(-y)\,V_1(a_i;\,y) - a_i\,\varepsilon_2(-a_i)\,V_1(a_i;\,a_i)] = \frac{q}{q+y},$$

$$(5.4) \qquad [1 - z\,\varepsilon_2(-y)]\,V_1(z_1;\,y) - z\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{y - z_1 - a_i}$$
$$\times [(y - z_1)\,\varepsilon_2(-y)\,V_2(a_i, z_1; y) - a_i\,\varepsilon_2(-z_1 - a_i)\,V_2(a_i, z_1;\,a_i + z_1)] = 0,$$

$$(5.5) \qquad V_2(z_1, z_2;\,y) = -V_0(y) - V_1(z_1;\,y) - V_1(z_2;\,y).$$

Introduisant dans (5.4) les expressions (5.5) des fonctions $V_2(a_i, z_1;\,y)$ et utilisant (5.2), nous avons

$$(5.6) \qquad [1 - z\,\varepsilon_2(-y)\,\varepsilon_1(y - z_1)]\,V_1(z_1;\,y)$$
$$= -z\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{y - z_1 - a_i}\,[(y - z_1)\,\varepsilon_2(-y)\,(V_0(y) + V_1(a_i;\,y))$$
$$+ a_i\,\varepsilon_2(-a_i - z_1)\,V_2(a_i,\,z_1;\,a_i + z_1)].$$

En posant ici $z_1 = a_1, \ldots, a_n$ et en utilisant (5.3), nous obtenons pour les $n+1$ fonctions

$$(5.7) \qquad V_0(y), \quad V_1(a_1;\,y), \quad \ldots, \quad V_1(a_n;\,y)$$

$n+1$ équations linéaires non homogènes dont le déterminant $D_n(y, z)$ a, dans le demi-plan droit des y, $\frac{n(n+1)}{2}$ pôles $a_i + a_k$ ($i, k = 1, \ldots, n$); par conséquent $D_n(y, z)$ possède pour z assez petit $\frac{n(n+1)}{2}$ zéros $y_\nu(z)$ de partie réelle positive (sauf pour des valeurs exceptionnelles des a_i et c_i qui se traitent par continuité, les V_λ étant, de même que les $v_{j\lambda}$, des fonctions continues de ces paramètres). En résolvant ces équations, on trouve par exemple pour $D_n(y, z)\,V_0(y)$ une forme linéaire des $n + \frac{n(n+1)}{2}$ grandeurs

$$(5.8) \qquad V_1(a_i;\,a_i) \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad \text{et} \qquad V_2(a_i,\,a_k;\,a_i + a_k) \quad (i, k = 1, \ldots, n)$$

et de $\frac{q}{q+y}$, dont les coefficients sont continus, à un nombre fini de pôles près, pour $R(y) \geqq 0$. Nous sommes donc en droit de poser dans cette formule

$$y = y_1(z), \quad \ldots, \quad y_{\frac{n^2+n}{2}}(z),$$

d'où résultent $\frac{n^2+n}{2}$ équations linéaires pour les grandeurs (5.8), n autres équations s'obtenant en posant $y = z_1 = a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ dans (5.4); ces $\frac{n^2+n}{2} + n$ équations linéaires permettent de calculer les grandeurs (5.8) et par là, de construire $V_0(y)$ et les autres fonctions (5.7) [1].

Revenons à (5.6). Pour $|z| < 1$ et $R(z_1) \geqq 0$, la fonction $1 - z\,\varepsilon_2(-y)\,\varepsilon_1(y - z_1)$ a, en vertu du théorème de Rouché, n zéros $y_\nu(z_1, z)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ de partie réelle positive qui, substitués à y dans (5.6), fournissent n équations linéaires pour le calcul des n fonctions $V_2(a_i, z_1; a_i + z_1)$. Toutes les fonctions qui

---

(1) On voit que les grandeurs (5.8), considérées en tant que fonctions de q, sont des formes linéaires des fractions $\frac{q}{q+y_\nu(z)}$, de sorte que $V_0(0)$ [équ. (4.5)] est une fonction linéaire de ces fractions, à savoir

$$V_0(0) = \frac{1}{1-z}\left[1 - q \sum_{1}^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{\alpha_\nu(z)}{q+y_\nu(z)}\right].$$

En procédant comme au chapitre IV [équ. (4.22), (4.29), (4.36)], on trouve pour la f. r. du d. a. $\rho(t)$, dans l'hypothèse où les nombres $y_\nu(1)$ sont deux à deux différents, la formule

$$\rho(t) = 1 - \sum_{1}^{\frac{n^2+n}{2}} \alpha_\nu(1)\, e^{-y_\nu(1)\,t} \qquad \left(t > 0,\ s = 2,\ \varepsilon_2'(0) > \frac{1}{2}\varepsilon_1'(0) = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} \frac{c_\nu}{a_\nu}\right).$$

Soit maintenant $\varepsilon_1(\zeta)$ une fonction rationnelle quelconque, d'ordre n, de ζ. On trouve alors que, pour s arbitraire, la f. r. $\rho(t)$ du d. a. d'équilibre statistique est de la forme

$$\rho(t) = 1 - \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\nu_\mu} \alpha_{\mu\nu}\, e^{-y_\mu t}$$

$$\left[t > 0,\ \varepsilon_2'(0) > \frac{1}{s}\,\varepsilon_1'(0),\ R(y_1) > 0, \ldots, R(y_\mu) > 0;\ \sum_{\mu=1}^{m} (\nu_\mu + 1) \leqq C_{n+s-1}^{s}\right].$$

figurent au deuxième membre de (5.6), étant ainsi construites, on connaît aussi $V_1(z_1; y)$ ainsi que, en vertu de (5.5), la fonction $V_2(z_1, z_2; y)$, ce qui, en principe, résout notre problème.

Le déterminant $D_n(y, z)$ est divisible, en tant que polynome en z, de degré $\leqq n$, par $1 - z\varepsilon_2(-y)\varepsilon_1\left(\frac{y}{2}\right)$; pour $n = 2$, 3 il vient respectivement

$$(5.9)\quad \begin{cases} D_2(y, z) = \left[1 - z\varepsilon_2(-y)\varepsilon_1\left(\frac{y}{2}\right)\right]\left[1 - z\varepsilon_2(-y)\dfrac{c_1a_1 + c_2a_2}{a_1 + a_2 - y}\right], \\ D_3(y, z) = \left[1 - z\varepsilon_2(-y)\varepsilon_1\left(\frac{y}{2}\right)\right] \\ \qquad \times\left[1 - z\varepsilon_2(-y)\left(\dfrac{c_1a_1+c_2a_2}{a_1+a_2-y} + \dfrac{c_1a_1+c_3a_3}{a_1+a_3-y} + \dfrac{c_2a_2+c_3a_3}{a_2+a_3-y}\right)\right. \\ \qquad + z^2\varepsilon_2^2(-y)(c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3) \\ \qquad \times\left(\dfrac{c_1a_1}{(a_1+a_2-y)(a_1+a_3-y)} + \dfrac{c_2a_2}{(a_1+a_2-y)(a_2+a_3-y)}\right. \\ \qquad \left.\left. + \dfrac{c_3a_3}{(a_1+a_3-y)(a_2+a_3-y)}\right)\right]. \end{cases}$$

De la même manière que pour $s = 2$, on peut aussi procéder pour s arbitraire. On calculera successivement, pour $\alpha = 0, \ldots, s - 1$, les $C_{s-\alpha+n}^{s-\alpha}$ fonctions

$$V_{\lambda+\alpha}\left(z_1, \ldots, z_\alpha, a_{1^*}, \ldots, a_{\lambda^*}; \sum_{\nu=1}^{\alpha} z_\nu + \sum_{\nu=1}^{\lambda} a_{\nu^*}\right) \qquad (\lambda = 0, \ldots, s - \alpha),$$

$1^*, \ldots, \lambda^*$ parcourant toutes les combinaisons λ à λ avec répétitions des indices $1, \ldots, n$.

Comme les fonctions $V_{\lambda+\alpha}(z_1, \ldots, z_\alpha, a_{1^*}, \ldots, a_{\lambda^*}; y)$ s'expriment linéairement, au moyen de coefficients connus, par les fonctions précédentes, on obtient ainsi la résolution complète de (1.44), (1.45), dans les hypothèses présentes.

2° Supposons maintenant que $\varepsilon_1(z)$ est un polynome en e^{hz} et que la f. c. $\varepsilon_2(z)$ est rationnelle, la première de ces hypothèses signifiant que toutes les d. c. T_n sont des multiples entiers, en nombre fini, de l'intervalle de temps h; nous admettrons que pour $f_1(t)$ donné, h a déjà été choisi aussi grand que possible, et prendrons ci-après ce h pour unité de temps.

Nous montrerons sur l'exemple $s = 2$ que dans les hypothèses présentes la résolution des équations (1.44), (1.45) s'obtient, tout comme dans l'hypothèse traitée au début de ce chapitre, en adjoignant les solutions de certaines équations transcendantes; en particulier on trouve que les $V_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$ sont des fonctions rationnelles de y. Soit donc

$$(5.10)\qquad \varepsilon_1(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\nu\zeta} \qquad \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = 1,\ a_n > 0,\ n \geqq 1\right),$$

$$(5.11)\qquad \begin{cases} \varepsilon_2(\zeta) = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{m} \frac{b_\mu c_\mu}{b_\mu - \zeta} \\ \left(\displaystyle\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu = 1;\ c_1, \ldots, c_m \neq 0;\ R(b_1) > 0, \ldots, R(b_m) > 0;\ m \geqq 1\right) \end{cases}$$

En raison des propriétés de $\varepsilon_1(\zeta)$, nous pouvons amener le chemin d'intégration de (1.44) sur une droite C_δ choisie telle que

$$(5.12)\qquad R(y-\zeta) < 0, \qquad R(y - z_1 - \zeta) < 0 \qquad \text{pour} \quad R(\zeta) = \delta.$$

Pour $s = 2$, nos équations prennent la forme

$$(5.13)\qquad [1 - z\,\varepsilon_2(-y)]\,V_0(y) - \frac{z}{2\pi i}\int_C \frac{\varepsilon_1(\zeta)-1}{\zeta}\,\frac{1}{y-\zeta}$$
$$\times [y\,\varepsilon_2(-y)\,V_1(\zeta; y) - \zeta\,\varepsilon_2(-\zeta)\,V_1(\zeta; \zeta)]\,d\zeta = \frac{q}{q+y},$$

$$(5.14)\qquad [1 - z\,\varepsilon_2(-y)]\,V_1(z_1; y) - \frac{z}{2\pi i}\int_C \frac{\varepsilon_1(\zeta)-1}{\zeta}\,\frac{1}{y - z_1 - \zeta}$$
$$\times[(y-z_1)\varepsilon_2(-y)V_2(\zeta, z_1; y) - \zeta\,\varepsilon_2(-z_1-\zeta)V_2(\zeta, z_1; \zeta+z_1)]\,d\zeta = 0,$$

$$(5.15)\qquad V_2(\zeta, z_1; y) = -V_0(y) - V_1(z_1; y) - V_1(\zeta; y).$$

On démontre au moyen de la méthode des approximations successives que dans les hypothèses présentes, V_1 et V_2 sont, pour $|z|$ assez petit, des séries de Taylor respectivement en $e^{-\zeta}$, et en $e^{-\zeta}$ et e^{-z_1}, donc

$$(5.16)\qquad V_1(\zeta; y) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(y)\,e^{-k\zeta},$$

$$(5.17)\qquad V_2(\zeta, z_1; y) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z_1; y)\,e^{-k\zeta};$$

en vertu de (5.15), les coefficients de ces séries vérifient les relations

$$(5.18)\qquad w_k(z_1; y) = -\delta_{k0}[V_0(y) + V_1(z_1; y)] - v_k(y) \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Des équations (5.10) et (5.16) à (5.18) on tire les formules

$$(5.19)\quad [\varepsilon_1(\zeta)-1]\,V_1(\zeta;y)=\left(\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu e^{\nu\zeta}-1\right)\sum_{k=0}^{\infty}v_k(y)\,e^{-k\zeta}$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}v_k(y)\sum_{\nu=k+1}^{n}a_\nu e^{(\nu-k)\zeta}+P_1(e^{-\zeta}),$$

$$(5.20)\quad [\varepsilon_1(\zeta)-1]\,V_2(\zeta,z_1;y)=\sum_{k=0}^{n-1}w_k(y)\sum_{\nu=k+1}^{n}a_\nu e^{(\nu-k)\zeta}+P_2(e^{-\zeta})$$
$$=-[V_0(y)+V_1(z_1;y)]\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu e^{\nu\zeta}-\sum_{k=0}^{n-1}v_k(y)\sum_{\nu=k+1}^{n}a_\nu e^{(\nu-k)\zeta}+P_2(e^{-\zeta}),$$

où $P_1(e^{-\zeta})$ et $P_2(e^{-\zeta})$ désignent des séries de Taylor en $e^{-\zeta}$.

Introduisons la première de ces expressions dans l'intégrale (5.13); comme, en vertu de (5.12),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{y}{\zeta(y-\zeta)}\,e^{c\zeta}\,d\zeta=0\quad(c\leqq 0),\qquad =1-e^{cy}\quad(c>0),$$

la contribution de $P_1(e^{-\zeta})$ à cette intégrale est nulle, l'équation (5.13) se transformant ainsi en

$$(5.21)\quad [1-z\,\varepsilon_0(-y)]\,V_0(y)-z\,\varepsilon_0(-y)\sum_{k=0}^{n-1}v_k(y)\sum_{\nu=k+1}^{n}a_\nu(1-e^{(\nu-k)y})$$
$$=\frac{q}{q+y}-\frac{z}{2\pi i}\int_C[\varepsilon_1(\zeta)-1]\,\frac{\varepsilon_0(-\zeta)}{y-\zeta}\,V_1(\zeta;\zeta)\,d\zeta\qquad[R(y-\zeta)<0].$$

De la même façon on obtient, en introduisant l'expression (5.20) dans l'intégrale (5.14),

$$(5.22)\quad\left\{\begin{aligned}&[1-z\,\varepsilon_2(-y)\,\varepsilon_1(y-z_1)]\,V_1(z_1;y)+z\,\varepsilon_0(-y)\,[1-\varepsilon_1(y-z_1)]\,V_0(y)\\&\quad+z\,\varepsilon_0(-y)\sum_{k=0}^{n-1}v_k(y)\sum_{\nu=k+1}^{n}a_\nu(1-e^{(\nu-k)(y-z_1)})\\&=-\frac{z}{2\pi i}\int_C[\varepsilon_1(\zeta)-1]\,\frac{\varepsilon_2(-z_1-\zeta)}{y-z_1-\zeta}\,V_2(\zeta,z_1;\zeta+z_1)\,d\zeta\\&\qquad\qquad[R(y-z_1-\zeta)<0,\ R(\zeta)=\delta>0].\end{aligned}\right.$$

Or, considérées en tant que fonctions de y, les intégrales qui figurent dans (5.21) et (5.22) sont holomorphes pour $R(y)<\delta$, et en utilisant les relations

$$V_1(\zeta;\ \zeta)=O(|q+\zeta|^{-1}) \quad \text{et} \quad V_2(\zeta,\ z_1;\ \zeta+z_1)=O(|q+\zeta+z_1|^{-1})$$

[équ. (S 4.18)], on voit que ces fonctions tendent vers zéro pour $|y|\to\infty$, $R(y)\leqq 0$; de telles fonctions seront désignées pour le moment par $\varphi_-(y)$. En outre, l'intégrale qui figure dans (5.22) tend pour $|y|\to\infty$, $R(y)\leqq 0$ vers zéro, *uniformément* par rapport aux points d'un segment donné quelconque de l'axe imaginaire des z_1; en effectuant dans cette formule les opérations $\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi i}^{\pi i}\cdots e^{jz_1}\,dz_1\,(j=0,\ 1,\ \ldots)$, c'est-à-dire en calculant les coefficients du développement taylorien du premier membre de (5.22) suivant les puissances de e^{-z_1}, on obtient donc à nouveau des $\varphi_-(y)$. Les n relations qui résultent ainsi pour $j=0,\ldots,n-1$, fournissent, jointes à (5.21), pour les $n+1$ fonctions

$$V_0(y),\quad v_0(y),\quad \ldots,\quad v_{n-1}(y) \tag{5.23}$$

le système d'équations linéaires

$$(1-\rho)V_0(y)+\rho\sum_{k=0}^{n-1}v_k(y)\sum_{\nu=k+1}^{n}a_\nu(e^{(\nu-k)y}-1)=\frac{q}{q+y}+\varphi_-(y), \tag{5.24}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\rho\,V_0(y)\,(\delta_{i0}-a_i\,e^{iy})+\sum_{k=0}^{n-1}v_k(y)\\ &\quad\times\left[\delta_{i0}\,\rho\sum_{\nu=k}^{n}a_\nu+\delta_{ik}-\rho\,a_{i-k}\,e^{(i-k)y}-\rho\,a_{i+k}\,e^{iy}\right]=\varphi_-(y)\\ &\quad (i=0,\ \ldots,\ n-1;\ a_\nu=0 \text{ pour } \nu<0 \text{ et } \nu>n),\end{aligned}\right. \tag{5.25}$$

où il a été posé

$$\rho=z\,\varepsilon_2(-y). \tag{5.26}$$

En résolvant ces équations dont le déterminant sera à nouveau désigné par $D_n(y,\ z)$, on voit que les $n+1$ fonctions

$$D_n(y,\ z)\,V_0(y),\quad \ldots,\quad D_n(y,\ z)\,v_{n-1}(y), \tag{5.27}$$

multipliées par $\left[\prod_{\mu=1}^{m}(y+b_\mu)\right]^n$, sont holomorphes dans le demi-plan $R(y)\leqq 0$, à un pôle du premier ordre au point $y=-q$ près, et que les fonctions (5.23) elles-mêmes sont $O(|y|^{-1})$ pour $|y| \to \infty$, $R(y) \leqq 0$. Or, D_n est de la forme

$$(5.28) \qquad D_n(y, z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n+1} z^\nu \varepsilon_2^\nu(-y) p_\nu(e^y),$$

$p_0(x), \ldots, p_{n+1}(x)$ désignant des polynomes dont les coefficients ne dépendent que des a_ν [équ. (5.10)]; en particulier, le terme de plus haut degré de $p_{n+1}(x)$ est $(-a_n)^{n+1}(-x)^{\frac{n^2+n}{2}}$, de sorte que $p_{n+1}(e^y) \not\equiv 0$.

Dans l'hypothèse où

$$(5.29) \qquad p_{n+1}(e^{-b_\mu}) \neq 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m),$$

$D_n(y, z)$ a donc, en vertu de (5.11), exactement

$$(5.30) \qquad N = (n+1)m$$

pôles dans le demi-plan gauche des y, à savoir les pôles $-b_1, \ldots, -b_m$ qui, tous, sont de l'ordre $n+1$, et d'autre part, chacune des fonctions (5.23) s'annule en ces points, donc

$$(5.31) \qquad \begin{cases} V_0(-b_\mu) = 0, \quad v_0(-b_\mu) = 0, \quad \ldots, \quad v_{n-1}(-b_\mu) = 0 \\ \qquad (\mu = 1, \ldots, m). \end{cases}$$

En vertu du théorème de Rouché, $D_n(y, z)$ a dans ce demi-plan, pour $|z|$ assez petit, exactement N zéros

$$(5.32) \qquad y_1(z), \quad \ldots, \quad y_N(z) \qquad [R(y_1) < 0, \ldots, R(y_N) < 0];$$

en raison des propriétés mentionnées plus haut des produits (5.27), les fonctions (5.23) ont donc dans le domaine $R(y) \leqq 0$ pour seules singularités des pôles (en général simples) aux points $y_\nu(z)$ et, en outre, au point

$$(5.33) \qquad y_0(z) = -q.$$

D'autre part, $V_0(y)$ et les coefficients (5.23) du développement (5.16) de $V_1(z_1; y)$ sont holomorphes pour $R(y) > 0$, ainsi que $O(|y|^{-1})$ pour $|y| \to \infty$, donc bornées dans un voisinage de $y = \infty$; par conséquent, ce sont des fonctions rationnelles de y

qui, lorsque les points (5.32) et (5.33) sont deux à deux différents, ont la forme

$$(5.34)\quad \begin{cases} V_0(y)=\sum_{j=0}^{N}\dfrac{a_{0,j}(z)}{y-y_j(z)}; \qquad v_k(y)=\sum_{j=0}^{N}\dfrac{a_{k+1,j}(z)}{y-y_j(z)} \\ \qquad\qquad (k=0,\ldots,n-1). \end{cases}$$

Portant ces expressions dans le premier membre de (5.22), nous voyons que la fonction

$$\prod_{\mu=1}^{m}(y+b_\mu)[1-z\,\varepsilon_0(-y)\,\varepsilon_1(y-z_1)]\,V_1(z_1;y)$$

a dans le demi-plan $R(y)\leq 0$ pour seules singularités des pôles simples aux $N+1$ points (5.32) et (5.33), et que $V_1(z_1;y)$ tend vers zéro pour $|y|\to\infty$, $R(y)\leq 0$. Comme, d'autre part, $V_1(z_1;y)$ est holomorphe et $O(|y|^{-1})$ pour $R(y)>0$, c'est, pour $|z|$ assez petit, une fonction rationnelle de y, laquelle a pour pôles simples, outre $y_0,\ldots,y_N(z)$, les m zéros

$$(5.35)\quad y_{N+1}(z_1,z),\quad \ldots,\quad y_{N+m}(z_1,z)\qquad [R(y_{N+1})<0,\ldots,R(y_{N+m})<0]$$

que la fonction

$$1-z\,\varepsilon_0(-y)\,\varepsilon_1(y-z_1)$$

possède (pour $|z|$ assez petit) dans le domaine $R(y)<0$; il vient, par conséquent,

$$(5.36)\qquad V_1(z_1;y)=\sum_{j=0}^{N+m}\frac{\tilde{a}_j(z_1,z)}{y-y_j}.$$

En posant ensuite $y=-b_\mu$ $(\mu=1,\ldots,m)$ dans le premier membre de (5.22) [qui *existe* pour $R(y)\leq 0$], nous obtenons, en utilisant (5.31), les relations

$$(5.37)\qquad V_1(z_1;-b_\mu)=0\qquad (\mu=1,\ldots,m).$$

Les fonctions obtenues en portant les expressions (5.34) dans les premiers membres de (5.24) et (5.25) sont finies aussi bien aux points $y_0,\ldots,y_N$ qu'en $y=-b_1,\ldots,-b_m$ [sauf que la fonction (5.24) a au point $y=y_0=-q$ un pôle simple de résidu q];

cela nous permettra de déterminer les $(n+1)(N+1)$ coefficients a_{kj} qui figurent dans ces expressions.

Désignons respectivement par

$$(5.38)\qquad M(y) = \{ m_{ik}(y) \}_{i,k=0,\ldots,n} \qquad [\,|M(y)| = D_n(y, z)]$$

la matrice des coefficients des équations (5.24) et (5.25), par $M_{ik}(y)$ le mineur de l'élément $m_{ik}(y)$, par $A_j\,(j = 0, \ldots, N)$ la colonne formée par les $n+1$ éléments $a_{0j}, \ldots, a_{nj}$, par Q la colonne formée par les $n+1$ nombres q, 0, ..., 0, et par O la colonne dont tous les $n+1$ éléments sont nuls. Du fait que les résidus des deux membres des équations (5.24) et (5.25) aux points $y_0, \ldots, y_N$ sont égaux, résultent les équations matricielles

$$(5.39)\qquad M(-q)A_0 = Q, \qquad M(y_j)A_j = O \qquad (j = 1, \ldots, N),$$

dont les solutions s'expriment comme suit au moyen de N facteurs indéterminés $e_1, \ldots, e_N$:

$$(5.40)\qquad \begin{cases} a_{k0} = \dfrac{q\, M_{0k}(-q)}{D_n(-q, z)}, \qquad a_{kj} = e_j\, M_{0k}(y_j) \\ (k = 0, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, N). \end{cases}$$

Les conditions à remplir aux points $-b_1, \ldots, -b_m$ sont équivalentes aux équations (5.31). En portant dans ces équations les expressions (5.34) et (5.40), nous obtenons les $m(n+1) = N$ équations linéaires

$$(5.41)\qquad \sum_{j=1}^{N} \frac{e_j\, M_{0k}(y_j)}{b_\mu + y_j} = \frac{q\, M_{0k}(-q)}{(q - b_\mu)\, D_n(-q, z)} \qquad (k = 0, \ldots, n;\ \mu = 1, \ldots, m)$$

qui déterminent les N facteurs e_j et, par conséquent, tous les coefficients a_{kj} qui figurent dans (5.34); en particulier, les $N+1$ coefficients a_{0j} nous donnent la fonction $V_0(y)$.

Introduisant ensuite les expressions (5.34) et (5.36) dans le premier membre de (5.22) [qui est une $\varphi_-(y)$], nous obtenons les $N+1$ équations

$$(5.42)\qquad \begin{aligned} &[1 - z\,\varepsilon_2(-y_j)\,\varepsilon_1(y_j - z_1)]\,\tilde{a}_j(z_1, z) \\ &\quad + z\,\varepsilon_2(-y_j)\,[1 - z\,\varepsilon_1(y_j - z_1)]\,a_{0j}(z) \\ &\quad + z\,\varepsilon_2(-y_j) \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(z) \sum_{\nu=k}^{n} a_\nu \left(1 - e^{(\nu+1-k)(y_j - z_1)}\right) = 0 \qquad (j = 0, \ldots, N) \end{aligned}$$

qui permettent de calculer les coefficients $\tilde{a}_0(z_1, z), \ldots, \tilde{a}_N(z_1, z)$ de (5.36) au moyen des coefficients désormais connus $a_{kj}(z)$.

Enfin les relations (5.37) qui résultent de la propriété de la fonction (5.22), d'être finie aux points $y = -b_1, \ldots, -b_m$, fournissent les m équations

$$(5.43) \qquad \sum_{j=0}^{N+m} \frac{\tilde{a}_j(z_1, z)}{b_\mu + y_j} = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

qui déterminent les m derniers coefficients $\tilde{a}_{N+1}, \ldots, \tilde{a}_{N+m}$ de (5.36).

Les fonctions V_0 et V_1 construites de cette façon vérifient en effet les équations (5.13) à (5.15).

On reconnaît aisément que les déterminants D_n [équ. (5.24), (5.25), (5.28)] sont divisibles par le produit

$$(5.44) \quad f(y, z) = \left[1 - z\,\varepsilon_2(-y)\,\varepsilon_1\left(\frac{y}{2}\right)\right]\left[1 - z\,\varepsilon_2(-y)\,\varepsilon_1\left(\frac{y}{2} + \pi i\right)\right].$$

Pour $n = 1, 2, 3$, il vient, au moyen de la notation (5.26),

$$(5.45) \quad \begin{cases} D_1(y, z) = f(y, z), \\ D_2(y, z) = f(y, z)\,[1 + \rho(-a_0 + a_2 e^{y})], \\ D_3(y, z) = f(y, z)\,[1 + \rho(-2a_0 + a_2 e^{y}) \\ \qquad\qquad + \rho^2(a_0^2 - a_0 a_2 e^{y} + a_1 a_3 e^{2y} - a_3^2 e^{3y})]. \end{cases}$$

Esquissons maintenant le procédé de résolution pour s arbitraire. Il vient alors

$$(5.46) \quad V_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = \sum_{k_1, \ldots, k_\lambda = 0}^{\infty} v_{k_1, \ldots, k_\lambda}(y)\, e^{-\sum_{\nu=1}^{\lambda} k_\nu z_\nu} \qquad (\lambda = 0, \ldots, s)$$

et nous posons, pour $a = 0, 1, \ldots, s-1$,

$$(5.47) \quad \begin{cases} V_{\lambda, k_{a+1}, \ldots, k_\lambda}(z_1, \ldots, z_a; z) = \displaystyle\sum_{k_1, \ldots, k_a = 0}^{\infty} v_{k_1, \ldots, k_\lambda}(y)\, e^{-\sum_{\nu=1}^{a} k_\nu z_\nu} \\ \qquad (0 \leqq k_{a+1}, \ldots, k_\lambda \leqq n-1;\ \lambda = a, a+1, \ldots, s-1); \end{cases}$$

ces fonctions sont symétriques par rapport aux indices $k_{a+1}, \ldots, k_\lambda$, puisque les V_λ sont symétriques par rapport à $z_1, \ldots, z_\lambda$.

Admettons que, pour $a = 0, \ldots, a_0 - 1$, nous ayons déjà représenté les fonctions (5.47) sous forme de fonctions rationnelles de y.

En procédant comme lors de la déduction des équations (5.24) et (5.25), on tire des $s - a_0$ dernières équations (1.44) et de (1.45) pour les

$$C_n^0 + C_{1+n}^1 + \ldots + C_{s-a_0-2+n}^{s-a_0-1} = C_{s-a_0-1+n}^{s-a_0-1}$$

fonctions (5.47) d'indices $0 \leqq k_{a_0+1} \leqq \ldots \leqq k_\lambda \leqq n-1$ $C_{s-a_0-1+n}^{s-a_0-1}$ équations linéaires d'une forme analogue à (5.24), (5.25). Ensuite les raisonnements faits précédemment pour $s = 2$ et $a = 0$, 1 montrent que les fonctions (5.47) $(a = a_0)$ sont, elles aussi, rationnelles en y et qu'elles ont, outre les pôles des précédentes fonctions (5.47) $(a < a_0)$, $m C_{s-a_0-1+n}^{s-a_0-1}$ autres pôles $y_\mu(z_1, \ldots, z_{a_0}, z)$, racines (de partie réelle négative) d'une équation transcendante $D_{n, a_0, s}(y; z_1, \ldots, z_{a_0}, z) = 0$ qui a un nombre fini de termes. Les résidus de ces fonctions aux pôles $y = y_\mu$ se déterminent par la méthode des coefficients indéterminés, en observant que toutes les fonctions (5.47) s'annulent aux pôles $y = -b_1, \ldots, -b_m$ de $\varepsilon_2(-y)$ (équ. (5.11)). Comme ces fonctions se confondent pour $\lambda = a$ avec les fonctions V_λ, qui s'avèrent comme des fonctions *rationnelles* de q et e^q, nous obtenons de cette manière la résolution complète de nos équations intégrales. Cette méthode de résolution s'applique aussi, avec de légères modifications, aux équations (1.58), (1.59), dont les deuxièmes membres, dans les hypothèses présentes, sont rationnels en y ainsi que des fonctions holomorphes de $e^{-z_1}, \ldots, e^{-z_\lambda}$.

C'est A. K. Erlang qui, le premier, a construit la f. r. $\rho(t)$ pour tout s dans l'hypothèse la plus simple suivant (5.10) et (5.11), à savoir pour $\varepsilon_1(\zeta) = e^\zeta$, $\varepsilon_2(\zeta) = \frac{c}{c-\zeta}$, donc pour

$$(5.48) \qquad \begin{cases} f_1(t) = 0 \quad (0 \leqq t < 1), \quad = 1 \quad (t \geqq 1), \\ f_2(t) = 1 - e^{-ct} \quad (t \geqq 0,\ c < s). \end{cases}$$

Ensuite, nous avons traité le même problème, en le généralisant de différentes manières (*Math. Z.*, t. **32**, 1930, p. 64-100 et 729-750).

Dans l'hypothèse où

$$(5.49) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1(\zeta) = a e^{h\zeta} + (1-a)\, e^{2h\zeta} \qquad (0 \leqq a \leqq 1), \\ \varepsilon_2(\zeta) = \dfrac{c}{c-\zeta} \qquad \left(c < \dfrac{s}{h(2-a)}\right), \end{cases}$$

nous avons construit $\rho(t)$ pour $s=2$ ([5], p. 532) et établi des formules, valables pour tout s, pour la probabilité de non-attente $\rho(+0)$ et pour le d. a. moyen $E(\tau)=\int_0^\infty t\,d\rho(t)$ ([6], 2e partie).

3° Expliquons enfin, de quelle façon le phénomène d'encombrement total des s lignes peut être traité par notre théorie.

Admettons que sur notre groupe (dont l'état d'occupation à l'instant initial $X_0=0$ sera toujours déterminé par les s paramètres $t_{01},\dots,t_{0s}$) tant d'appels sont lancés à partir de cet instant que dorénavant toutes les s lignes seront constamment occupées. Il s'agit alors d'étudier, entre autres, de quelle manière les courbes $y=\rho_n(t)$, f. r. des d. a. τ_n des appels successivement servis, tendent pour $n\to\infty$ vers la droite $y=0$.

Pour $s=1$, la construction de $\rho_n(t)$ est un problème simple, car il vient alors $\tau_n=t_{01}^{+}+\sum_{\iota=0}^{n-1}T_\iota$, donc $Ee^{-q\tau_n}=e^{-qt_{01}^{+}}\varepsilon_1^n(-q)$, d'où l'on tire $\rho_n(t)$ par l'opération $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN+0}^{iN+0}e^{qt}\dots\frac{dq}{q}$.

Cependant pour $s>1$ ce problème est moins facile à aborder. Nous prendrons alors pour f_2 la fonction

$$f_2(0)=0,\qquad f_2(t)=1\quad(t>0),\qquad \text{d'où}\qquad \varepsilon_2(z)\equiv 1;\tag{5.50}$$

ce choix signifie que toutes les v. a. Y_ν [équ. (1.3) et (1.4)] sont nulles, de sorte que, dès l'instant initial, un nombre infini d'appels seront en attente.

Dans l'hypothèse (5.50), toutes les formules, qui ont été établies sans supposer la continuité de $f_2(t)$, restent valables; en particulier, c'est le cas pour les formules (1.46) et (4.5) dont on utilisera surtout la deuxième pour étudier les phénomènes en question.

Mais pour la f. r. (5.50), les équations intégrales du chapitre I se simplifient. Les fonctions $v_{j\lambda}$ définies par (1.27), (1.28) et (1.41) sont alors de la forme $v_{j\lambda}(z_1,\dots,z_\lambda;y)=(q+y)^{-1}\tilde{v}_{j\lambda}(z_1,\dots,z_\lambda)$, ce qu'on démontre aisément par induction complète. On peut donc poser

$$V_\lambda(z_1,\dots,z_\lambda;y)=(q+y)^{-1}\tilde{V}_\lambda(z_1,\dots,z_\lambda)\qquad(\lambda=0,\dots,s),\tag{5.51}$$

les équations (1.44) et (1.45) se transformant ainsi en

$$(5.52)\quad \begin{cases} (1-z)\left(q+\sum_1^{\lambda} z_\nu\right)^{-1} \tilde{V}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda) \\ \quad -\dfrac{z}{2\pi i}\displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\varepsilon_1(\zeta)-1}{\zeta}\left(q+\zeta+\sum_1^{\lambda} z_\nu\right)^{-1} \tilde{V}_{\lambda+1}(\zeta, z_1, \ldots, z_\lambda)\, d\zeta = \delta_{\lambda,0} \\ \qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1), \end{cases}$$

$$(5.53)\quad \sum_{\lambda=0}^{s} \sum_{1', \ldots, \lambda'=1}^{s} \tilde{V}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda) = 0.$$

De la même façon, on trouve que les fonctions $V_\lambda^{(2)}$ définies par (1.58), (1.59) et (1.54) sont de la forme

$$V_\lambda^{(2)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y, z, q, z', q') = (q+q'+y)^{-1} \tilde{V}_\lambda^{(2)}(z_1, \ldots, z_\lambda; z, q, z', q'),$$

les $\tilde{V}_\lambda^{(2)}$ vérifiant, outre (5.53), les équations (5.52) modifiées comme suit : le paramètre q du premier membre et le deuxième membre seront respectivement remplacés par $q+q'$ et par $\left(q'+\sum_1^{\lambda} z_\nu\right)^{-1} \tilde{V}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; z', q')$. Des formules analogues sont valables pour les fonctions $V_\lambda^{(1)}$ qui figurent dans (1.61), ainsi que pour les $V_\lambda^{(n)}$ ultérieures.

Formellement, les méthodes de résolution des équations (1.44) et (1.45), exposées dans ce chapitre, restent valables dans l'hypothèse (5.50); mais pour des t. L. $\varepsilon_1(\zeta)$ suivant (5.2) ou (5.10) les équations (5.52), (5.53) peuvent être résolues directement par des procédés élémentaires. Pour $|z|$ assez petit et $R(z_1) \geqq 0, \ldots, R(z_\lambda) \geqq 0$, les $\tilde{V}_\lambda$ sont bornées en vertu de (5.51) et (S 4.19). Dans le cas d'un $\varepsilon_1(\zeta)$ rationnel, les intégrales, qui figurent dans (5.52), sont donc égales à la somme des résidus aux pôles de $\varepsilon_1(\zeta)$. On a ainsi des équations fonctionnelles, analogues à (5.3) et (5.4), et qui peuvent être résolues en suivant le schéma exposé à la fin de la première partie de ce chapitre, sans qu'il soit nécessaire d'adjoindre des solutions d'équations non linéaires. Pour les $\tilde{V}_\lambda$ on obtient ainsi des fonctions rationnelles de $z_1, \ldots, z_\lambda$, z et q.

Ensuite, pour des $\varepsilon_1(\zeta)$ suivant (5.10), les équations (5.52) et (5.53) peuvent être résolues par un procédé analogue à celui qui a été exposé à la fin de la deuxième partie de ce chapitre. Posons

$$(5.54)\quad \tilde{V}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda) = \sum_{k_1, \ldots, k_\lambda = 0}^{\infty} \tilde{v}_{k_1, \ldots, k_\lambda} e^{-\sum_{\nu=1}^{\lambda} k_\nu z_\nu} \qquad (\lambda = 0, \ldots, s)$$

et définissons, pour $a = 0, \ldots, s-1$, de manière analogue à (5.47) des systèmes de fonctions $\tilde{V}_{\lambda, k_{a+1}, \ldots, k_\lambda}(z_1, \ldots, z_a)$. Les $C_{s-a-1+n}^{s-a-1}$ fonctions différentes contenues dans le $a^{\text{ième}}$ système vérifient $C_{s-a-1+n}^{s-a-1}$ équations linéaires dont les coefficients sont des fonctions élémentaires, tandis que les deuxièmes membres dépendent linéairement des fonctions des a précédents systèmes. Les fonctions de tous ces s systèmes peuvent donc être calculées successivement, et pour les $\tilde{V}_\lambda$ on obtient ainsi des fonctions rationnelles de $e^{z_1}, \ldots, e^{z_\lambda}$, e^q et z.

SUPPLÉMENTS.

S 1. Convergence absolue de l'intégrale s-uple (1.18).

On voit de prime abord qu'il suffit de démontrer la convergence absolue de l'intégrale (1.18) dans le cas où $C_1, \ldots, C_s$ sont des droites $z_\nu = a_\nu + iy_\nu$ ($a_\nu > 0$, $-\infty < y_\nu < \infty$; $\nu = 1, \ldots, s$), le module de la fonction à intégrer étant alors majoré par l'expression

$$(S\,1.1)\quad \frac{c}{\left| q + \sum_1^s z_\nu \right|} \prod_{\nu=1}^{s} \frac{1}{|z_\nu|} = \frac{c}{\sqrt{a_0^2 + \left(\sum_1^s y_\nu\right)^2}} \prod_{\nu=1}^{s} \frac{1}{\sqrt{a_\nu^2 + y_\nu^2}},$$

où nous avons posé

$$a_0 = \mathrm{R}\left(q + \sum_1^s z_\nu\right) > 0$$

et où $c > 0$ désigne une constante appropriée.

Car dans le cas où les C_ν sont des courbes $x_\nu = x_\nu(y_\nu)$ suivant la figure 1 (p. 12) qui, sauf dans un voisinage du point $z_\nu = 0$, coïncident avec l'axe imaginaire, les maximums des quotients

$$\sqrt{\frac{a_\nu^2 + y_\nu^2}{x_\nu^2(y_\nu) + y_\nu^2}} \quad (\nu = 1, \ldots, s) \qquad \text{et} \qquad \frac{\sqrt{a_0^2 + \left(\sum_1^s y_\nu\right)^2}}{\left|q + \sum_1^s z_\nu(y_\nu)\right|}$$

considérés en fonction de $y_1, \ldots, y_s$, sont évidemment finis.

Donc, nous pourrons nous borner à démontrer que l'intégrale itérée

$$\text{(S 1.2)} \qquad A_s = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy_s}{\sqrt{a_s^2 + y_s^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy_{s-1}}{\sqrt{a_{s-1}^2 + y_{s-1}^2}} \cdots \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy_1}{\sqrt{a_1^2 + y_1^2}} \frac{1}{\sqrt{a_0^2 + \left(\sum_1^s y_\nu\right)^2}}$$

converge et dans ce but nous établirons la formule

$$\text{(S 1.3)} \qquad A_s = 2^{s+1}\pi^{-1} \int_0^\infty \prod_{\nu=0}^{s} K_0(a_\nu t)\, dt,$$

où K_0 désigne la fonction cylindrique de Schläfli ([14], p. 181, équ. (5)) d'indice zéro. Pour $t > 0$, $K_0(t)$ est une fonction positive décroissante de t, ce que montre par exemple la formule

$$\text{(S 1.4)} \qquad K_0(t) = \int_0^\infty e^{-t\cosh x}\, dx \qquad (t > 0);$$

les formules asymptotiques

$$\text{(S 1.5)} \qquad K_0(t) = \log\frac{1}{t} + O(1) \qquad (\text{pour } t \to +0);$$

$$\text{(S 1.6)} \qquad K_0(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2t}}\, e^{-t}\left[1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right] \qquad (\text{pour } t \to \infty)$$

mettent en évidence que l'intégrale (S 1.3) converge, c'est-à-dire que

$$\text{(S 1.7)} \qquad A_s < \infty.$$

Pour établir (S 1.3), utilisons les formules bien connues

$$\text{(S 1.8)} \qquad \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\,\mathrm{K}_0(a\,|t|)\,dt \qquad (a>0),$$

$$\text{(S 1.9)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{K}_0(a\,|t|) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \left(= \int_0^{\infty} \cos xt \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \right) \\ \qquad\qquad (a>0,\ t\neq 0), \end{array} \right.$$

dont la première fournit la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy_1}{\sqrt{a_1^2+y_1^2}} \frac{1}{\sqrt{a_0^2+\left(\sum_1^s y_\nu\right)^2}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy_1}{\sqrt{a_1^2+y_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sum_1^s y_\nu}\,\mathrm{K}_0(a_0\,|t|)\,dt.$$

Dans le deuxième membre, intervertissons l'ordre des intégrations, sous réserve de justifier ce procédé, et utilisons (S 1.9); il vient ainsi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy_1}{\sqrt{a_1^2+y_1^2}} \frac{1}{\sqrt{a_0^2+\left(\sum_1^s y_\nu\right)^2}} = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sum_1^s y_\nu}\,\mathrm{K}_0(a_0\,|t|)\,\mathrm{K}_0(a_1\,|t|)\,dt.$$

En effectuant ici l'opération $\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\frac{dy_2}{\sqrt{a_2^2+y_2^2}}$ qui sera intervertie dans le deuxième membre avec $\int_{-\infty}^{\infty}\ldots dt$, on obtient l'expression

$$\frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sum_1^s y_\nu} \prod_{\nu=0}^{2} \mathrm{K}_0(a_\nu\,|t|)\,dt$$

et en répétant ce procédé encore $s-2$ fois, on transforme le deuxième membre de (S 1.2) en

$$\frac{2^s}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\nu=0}^{s} \mathrm{K}_0(a_\nu\,|t|)\,dt = \frac{2^{s+1}}{\pi}\int_0^{\infty} \prod_0^{s} \mathrm{K}_0(a_\nu t)\,dt,$$

ce qui démontre (S 1.3) et, par conséquent, l'inégalité (S 1.7).

Pour abréger, posons

$$\text{(S 1.10)} \qquad \Phi_r(t) = \prod_{\nu=0}^{r} \mathrm{K}_0(a_\nu t) \qquad (r=0,1,\ldots);$$

il nous reste à justifier que, dans des intégrales itérées de la forme

$$\text{(S 1.11)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2+b^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(y+c)} \Phi_r(|t|)\, dt$$
$$= 4\int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2+b^2}} \int_0^{\infty} \cos ct \cos yt\, \Phi_r(t)\, dt \qquad (b > 0),$$

les intégrations peuvent être interverties. Ce procédé est certainement légitime pour l'intégrale $\int_0^n dy \int_0^N f(y,\, t)\, dt$ $(n < \infty,\ N < \infty)$, car la fonction

$$\text{(S 1.12)} \quad f(y,\, t) = \frac{1}{\sqrt{y^2+b^2}} \cos ct \cos yt\, \Phi_r(t)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{y^2+b^2}} \cos ct\, \Phi_r(t)\, [\cos yt - 1] + \frac{\cos ct}{\sqrt{y^2+b^2}} \Phi_r(t)$$

peut être décomposée en la somme d'une fonction continue et d'une fonction de la forme $g(y)\, h(t)$. Il vient donc

$$\int_0^n \frac{dy}{\sqrt{y^2+b^2}} \int_0^N \cos ct \cos yt\, \Phi_r(t)\, dt$$
$$= \int_0^N \cos ct\, \Phi_r(t)\, dt \int_0^n \cos yt \frac{dy}{\sqrt{y^2+b^2}}$$

et comme, en vertu de (S 1.6) et (S 1.10),

$$\int_N^{\infty} \Phi_r(t)\, dt = O\left(e^{-N\sum_0^r a_\nu} N^{-\frac{r+1}{2}}\right),$$

nous en tirons pour $N \to \infty$ la relation

$$\int_0^n \frac{dy}{\sqrt{y^2+b^2}} \int_0^{\infty} \cos ct \cos yt\, \Phi_r(t)\, dt$$
$$= \int_0^{\infty} \cos ct\, \Phi_r(t)\, dt \left[\int_0^{\infty} \cos yt \frac{dy}{\sqrt{y^2+b^2}} - \int_n^{\infty} \cos yt \frac{dy}{\sqrt{y^2+b^2}}\right].$$

En faisant tendre ici n vers l'infini, nous obtenons

$$\text{(S 1.13)} \quad \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} f(y,\, t)\, dt = \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} f(y,\, t)\, dy$$
$$- \lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} dt \int_n^{\infty} f(y,\, t)\, dy.$$

Pour justifier la permutation de l'ordre des intégrations dans (S 1.11), nous devons donc démontrer que le dernier terme de (S 1.13) s'annule, c'est-à-dire que

$$\text{(S 1.14)} \qquad \lim_{n \to \infty} \int_0^\infty \cos ct \, \Phi_r(t) \, dt \int_n^\infty \cos yt \frac{dy}{\sqrt{y^2 + b^2}} = 0.$$

Lors de cette démonstration, le facteur $\frac{1}{\sqrt{y^2 + b^2}}$ peut être remplacé par $\frac{1}{y}$, en vertu de la relation

$$\text{(S 1.15)} \qquad \left| \int_0^\infty \cos ct \, \Phi_r(t) \, dt \int_n^\infty \cos yt \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + b^2}} - \frac{1}{y} \right) dy \right| < O(n^{-2}) \int_0^\infty \Phi_r(t) \, dt \to 0.$$

Au moyen de l'identité

$$\text{(S 1.16)} \qquad \int_n^\infty \cos yt \frac{dy}{y} = -\frac{\sin nt}{nt} + \frac{1}{t} \int_n^\infty \sin ty \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{t} O(n^{-1})$$

et des formules (S 1.5) et (S 1.6) on vérifie ensuite que pour $t_0 \to +0$,

$$\text{(S 1.17)} \qquad \left| \int_{t_0}^\infty \cos ct \, \Phi_r(t) \, dt \int_n^\infty \cos yt \frac{dy}{y} \right| < O(n^{-1}) \int_{t_0}^\infty \Phi_r(t) \frac{dt}{t} = O(n^{-1}) \, O\left(\log^{r+2} \frac{1}{t_0} \right).$$

Comme la dernière expression tend vers zéro pour $t_0 = n^{-1}$ et $n \to \infty$, nous pouvons remplacer l'opération $\int_0^\infty \cdots dt$, dans (S 1.14), par $\int_0^{\frac{1}{n}} \cdots dt$; il ne nous reste donc qu'à démontrer que l'expression

$$\text{(S 1.18)} \qquad \int_0^{\frac{1}{n}} \cos ct \, \Phi_r(t) \, dt \int_n^\infty \cos yt \frac{dy}{y} = \frac{1}{n} \int_0^1 \cos \frac{cx}{n} \Phi_r \left(\frac{x}{n} \right) dx \left[-\frac{\sin x}{x} - \int_x^\infty \sin \xi \frac{d\xi}{\xi^2} \right]$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Or pour $0 < x \leq 1$, il vient au moyen de (S 1.5)

$$\left| -\frac{\sin x}{x} + \int_x^\infty \sin \xi \frac{d\xi}{\xi^2} \right| < 1 + \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} + \int_1^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} = \log \frac{1}{x} + 2,$$

$$\Phi_r \left(\frac{x}{n} \right) < c' \log^{r+1} \frac{n}{x}.$$

La valeur absolue de l'expression (S 1.18) est donc inférieure à

$$\frac{c'}{n}\int_0^1 \log^{r+1}\frac{n}{x}\left(\log\frac{1}{x}+2\right)dx < \frac{c''}{n}\log^{r+1} n \to 0,$$

et cette relation démontre la formule (S 1.14); en justifiant la permutation des intégrations dans (S 1.11), nous avons complété ainsi la démonstration de (S 1.7).

S 2. Démonstration de l'identité

$$(\text{S } 2.1)\quad \left\{\begin{aligned} & U_{\lambda s}\, e^{\sum\limits_{\nu=1}^{s} c_\nu z_\nu} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_{\nu=1}^{s} z_\nu\right) \\ & = (K_1 - C_1) \sum_{1', \ldots, \lambda'=2}^{s} C_{1'} \ldots C_{\lambda'} \\ & \quad \times e^{c_1 z_1 + \sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} c_{\nu'} z_{\nu'}} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; z_1 + \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'}\right) \\ & \quad (c_1 \leqq c_2, \ldots, c_s;\ 0 \leqq \lambda \leqq s-1), \end{aligned}\right.$$

la fonction $f(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$ étant supposée holomorphe dans le domaine (1.24) et y vérifiant une inégalité de la forme

$$(\text{S } 2.2)\qquad |y f(z_1, \ldots, z_\lambda; y)| < c'.$$

En vertu de (1.31) et (1.30), le premier membre de (S 2.1) est la somme de C_s^λ termes de la forme

$$\begin{aligned} (\text{S } 2.3)\quad & C_{1'} \ldots C_{\lambda'}\left[\prod^{(\lambda)} K_\nu - \prod^{(\lambda)} C_\nu\right] e^{\sum\limits_1^s c_\nu z_\nu} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right) \\ & = C_{1'} \ldots C_{\lambda'}\, e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} c_{\nu'} z_{\nu'}} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'}\right) \\ & \quad - C_1 \ldots C_s\, e^{\sum\limits_1^s c_\nu z_\nu} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right). \end{aligned}$$

Supposant d'abord que $1', \ldots, \lambda' \neq 1$, désignons par $\mu\,(1 < \mu \leqq s)$ un indice différent de $1, 1', \ldots, \lambda'$ et permutons les opérateurs C_ν

figurant dans le deuxième terme du deuxième membre de (S 2.3) de telle manière que les deux derniers opérateurs soient C_μ et C_1. Nous sommes en droit de procéder ainsi, car en raison de l'inégalité (S 2.2), l'intégrale s-uple correspondante converge absolument (*voir* le supplément S 1).

Dans l'intégrale itérée

$$(S\,2.4)\qquad C_\mu C_1\, e^{c_1 z_1 + c_\mu z_\mu} f\left(\ldots;\sum_1^s z_\nu\right) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_\mu}\frac{dz_\mu}{z_\mu}\int_{C_1} e^{c_1 z_1 + c_\mu z_\mu} f\left(\ldots;\sum_1^s z_\nu\right)\frac{dz_1}{z_1}$$

remplaçons la variable z_1 par $z_1^* = z_1 + z_\mu$ et intervertissons les intégrations, ce qui donne

$$(S\,2.5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} e^{c_1 z_1^*} f\left(z_{1'},\ldots,z_{\lambda'};\ z_1^* + \sum_2^s z_\nu - z_\mu\right) dz_1^* \\ &\qquad\qquad \times \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\mu} e^{(c_\mu - c_1) z_\mu}\frac{dz_\mu}{z_\mu (z_1^* - z_\mu)} \\ &\qquad [R(z_\mu) > 0,\ R(z_1^* - z_\mu) > 0]. \end{aligned}\right.$$

Comme $c_\mu - c_1 \geqq 0$ par hypothèse, $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\mu}\cdots dz_\mu$ est égale au résidu au point $z_\mu = 0$, donc à $\frac{1}{z_1^*}$. En supprimant l'astérisque de z_1^*, nous obtenons donc la relation

$$(S\,2.6)\qquad \left\{\begin{aligned} &C_\mu C_1\, e^{c_1 z_1 + c_\mu z_\mu} f\left(z_{1'},\ldots,z_{\lambda'};\sum_1^s z_\nu\right) \\ &\qquad = C_1\, e^{c_1 z_1} f\left(z_{1'},\ldots,z_{\lambda'};\sum_1^s z_\nu - z_\mu\right) \\ &\qquad (\mu \neq 1, 1', \ldots, \lambda';\ c_1 \leqq c_\mu). \end{aligned}\right.$$

En continuant ainsi pour tous les indices μ différents de $1, 1' \ldots, \lambda'$, nous arrivons à transformer le deuxième terme du deuxième membre de (S 2.3) en

$$(S\,2.7)\qquad -C_1 C_{1'}\ldots C_{\lambda'}\, e^{c_1 z_1 + \sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} c_{\nu'} z_{\nu'}} f\left(z_{1'},\ldots,z_{\lambda'};\ z_1 + \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'}\right),$$

de sorte que dans le cas présent, le deuxième membre de (S 2.3) peut être écrit, au moyen de (1.30), sous la forme

$$\text{(S2.8)}\quad \begin{cases} (K_1 - C_1)\, C_{1'} \ldots C_{\lambda'}\, e^{c_1 z_1 + \sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} c_{\nu'} z_{\nu'}} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\ z_1 + \sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'}\right) \\ \qquad (1', \ldots, \lambda' \neq 1). \end{cases}$$

Considérant ensuite ceux parmi les termes (S 2.3) dont un des indices accentués (qui sera désigné par $1'$) est égal à 1, nous obtenons pour le premier membre de (S 2.4), en procédant de la même façon que précédemment,

$$\text{(S 2.9)}\quad \begin{cases} C_\mu C_1\, e^{c_1 z_1 + c_\mu z_\mu} f\left(z_1, z_{2'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum\limits_{1}^{s} z_\nu\right) \\ \quad = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C e^{c_1 z_1^\star}\, dz_1^\star\, \dfrac{1}{2\pi i}\int_{C_\mu} e^{(c_\mu - c_1) z_\mu} \\ \quad \times f\left(z_1^\star - z_\mu, z_{2'}, \ldots, z_{\lambda'}; z_1^\star + \sum\limits_{2}^{s} z_\nu - z_\mu\right) \dfrac{dz_\mu}{z_\mu (z_1^\star - z_\mu)} \\ \qquad [R(z_\mu) > 0,\ R(z_1^\star - z_\mu) > 0]. \end{cases}$$

Comme $f(z_1^\star - z_\mu, \ldots; \ldots)$ est holomorphe et, en vertu de (S 2.2), bornée pour $R(z_\mu) < R(z_1^\star)$, l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_C \cdots dz_\mu$ est, comme plus haut, égale au résidu en $z_\mu = 0$, de sorte que (S 2.6) reste valable pour $1' = 1$. En procédant de la même manière pour tous les indices $\mu \neq 1', 2', \ldots, \lambda'$, nous transformons le deuxième terme du deuxième membre de (S 2.3) en

$$- C_{1'} \ldots C_{\lambda'}\, e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} c_{\nu'} z_{\nu'}} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'}\right),$$

de sorte que dans le cas où $1' = 1$, le deuxième membre de (S 2.3) s'annule.

Ainsi $U_{\lambda s}\, e^{\sum\limits_{1}^{s} c_\nu z_\nu} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum\limits_{1}^{s} z_\nu\right)$ s'avère égale à la somme de tous les C_{s-1}^{λ} termes de la forme (S 2.8), ce qui démontre l'identité (S 2.1) [1].

S 3. Transformation de la formule (1.39).

Observons d'abord que dans le premier terme $\left(\text{c'est-à-dire dans la première somme } \sum_{\lambda=0}^{s-1}\right)$ qui figure dans le deuxième membre de (1.39), nous pouvons remplacer le nombre $t_{n-j-1,1}^{+}$ par $t_{n-j-1,1}$, car cette substitution est sans influence sur le résultat des opérations C_1 et K_1 [équ. (1.29) et (1.30)] contenues dans les opérateurs $U_{\lambda s}$. Cela est évident pour K_1 et résulte pour C_1 de la relation

$$\text{(S 3.1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1} e^{cz_1}\varepsilon_2\left(-\sum_1^s z_\nu\right) v_{j\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right)\dfrac{dz_1}{z_1} = 0 \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad c < 0, \end{array}\right.$$

qui se démontre au moyen de l'inégalité (1.26) et de (1.35).

Désignant par A et B les deux termes du deuxième membre de (1.39) et utilisant les notations

$$\text{(S 3.2)} \qquad t_{n-j-1,\nu} = c_\nu \qquad \left(\nu = 1, \ldots, s;\ c_1 = \min_{\nu=1,\ldots,s} c_\nu\right),$$

$$\text{(S 3.3)} \quad \varepsilon_2(-y)\, v_{j\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = f_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y) \qquad (\lambda = 0, \ldots, s),$$

---

[1] Au sujet de l'opérateur $K_1 - C_1$ qui figure dans (S 2.1) et dans plusieurs formules de S 3 et S 7, observons que pour des fonctions $f(z)$ analytiques et bornées pour $|R(z)| < \delta$ et telles que

$$Cf(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} f(z)\frac{dz}{z}$$

existe, il vient

$$(K - C)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{i\infty-0}^{-i\infty-0} f(z)\frac{dz}{z}.$$

Cependant dans ce travail nous ne pouvons pas employer les opérateurs

$$C'_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{i\infty-0}^{-i\infty-0} \cdots \frac{dz_\nu}{z_\nu}$$

utilisés dans [7] et [8]; car en renonçant à toute hypothèse restrictive sur les f. r. $f_1(t)$ et $f_2(t)$, nous aboutissons à des fonctions $f(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$ qui, en général, ne sont pas prolongeables analytiquement au delà du domaine (1.24).

nous avons donc les relations

$$\text{(S 3.4)} \qquad J_{n,j+1} = A + B,$$

$$\text{(S 3.5)} \qquad A = \sum_{\lambda=1}^{s-1} U_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s c_\nu z_\nu} f_\lambda\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right),$$

$$\text{(S 3.6)} \qquad B = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \tilde{U}_{\lambda s}\, e^{c_1^+ z_1 + \sum_2^s c_\nu z_\nu} [\varepsilon_1(z_1) - 1] f_\lambda\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right),$$

et il est clair que les f_λ ont toutes les propriétés admises au chapitre I pour les $v_{j\lambda}$. Comme le terme A de (S 3.4) possède déjà la forme requise (1.32), il ne nous reste qu'à transformer B en une expression de la même forme. Dans ce but décomposons l'opérateur $\tilde{U}_{\lambda s}$ [équ. (1.29) à (1.31)] comme suit :

$$\text{(S 3.7)} \qquad \begin{aligned} \tilde{U}_{\lambda s} = {} & \tilde{C}_1 \sum_{2', \ldots, \lambda' = 2}^{s} C_{2'} \ldots C_{\lambda'} \left[\prod^{(\lambda)} K_\nu - \prod^{(\lambda)} C_\nu\right] \\ & + \sum_{1', \ldots, \lambda' = 2}^{s} C_{1'} \ldots C_{\lambda'} \left[K_1 \prod_1^{(\lambda+1)} K_\nu - \tilde{C}_1 \prod_1^{(\lambda+1)} C_\nu\right] \\ = {} & \tilde{C}_1 U_{\lambda-1, s-1}[2, \ldots, s] + K_1 \sum_{1', \ldots, \lambda' = 2}^{s} C_{1'} \ldots C_{\lambda'} \prod_1^{(\lambda+1)} K_\nu \\ & - \tilde{C}_1 C_2 \ldots C_s \sum_{1', \ldots, \lambda' = 2}^{s} \qquad (U_{-1, s-1} \equiv 0), \end{aligned}$$

les signes $\tilde{C}_1$, $\prod^{(\lambda)}$ et $\prod_1^{(\lambda+1)}$ étant définis par les formules

$$\text{(S 3.8)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & \tilde{C}_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \cdots \frac{dz_1}{z_1}, \\ & \prod^{(\lambda)} = \prod_{\nu=2}^{s} (\nu \neq 2', \ldots, \lambda'), \qquad \prod_1^{(\lambda+1)} = \prod_{\nu=2}^{s} (\nu \neq 1', \ldots, \lambda'). \end{aligned} \right.$$

En vertu de (1.30) et (1.35), nous avons

$$\text{(S 3.9)} \qquad K_1[\varepsilon_1(z_1) - 1] = \varepsilon_1(0) - 1 = \int_0^\infty df_1(t) - 1 = 0,$$

de sorte que ceux parmi les termes de l'opérateur $U_{\lambda s}$ qui contiennent le facteur K_1, annulent la fonction à intégrer de (S 3.6). En introduisant le dernier membre de (S 3.7) dans (S 3.6) et écrivant ζ au lieu de z_1, nous obtenons donc

$$
\text{(S 3.10)}\quad \mathrm{B} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{c_1^+\zeta}[\varepsilon_1(\zeta)-1]\frac{d\zeta}{\zeta}
$$

$$
\times\sum_{\lambda=0}^{s-1}\Bigg[\mathrm{U}_{\lambda-1,s-1}\, e^{\sum_2^s c_\nu z_\nu} f_\lambda\Big(\zeta,\ z_{2'},\ \ldots,\ z_{\lambda'};\ \zeta+\sum_2^s z_\nu\Big)
$$

$$
-\,\mathrm{C}_2\ldots\mathrm{C}_s\, e^{\sum_2^s c_\nu z_\nu}\sum_{1',\ldots,\lambda'=2}^{s} f_\lambda\Big(z_{1'},\ \ldots,\ z_{\lambda'};\ \zeta+\sum_2^s z_\nu\Big)\Bigg].
$$

Les deux termes figurant ici entre crochets seront transformés maintenant en des expressions de la forme (S 3.5). En appliquant d'abord à $\mathrm{U}_{\lambda-1,s-1}\, e^{\sum_2^s c_\nu z_\nu} f_\lambda$, dans l'hypothèse où $c_2 \leqq c_3, \ldots, c_s$, l'identité (S 2.1), on a la relation

$$
\text{(S 3.11)}\qquad \mathrm{U}_{\lambda-1,s-1}\, e^{\sum_2^s c_\nu z_\nu} f_\lambda\Big(\zeta,\ z_{2'},\ \ldots,\ z_{\lambda'};\ \zeta+\sum_2^s z_\nu\Big)
$$

$$
=\sum_{2',\ldots,\lambda'=3}^{s}(\mathrm{K}_2-\mathrm{C}_2)\,\mathrm{C}_{2'}\ldots\mathrm{C}_{\lambda'}\, e^{c_2 z_2+\sum_{\nu=2}^{\lambda} c_{\nu'} z_{\nu'}}
$$

$$
\times f_\lambda\Big(\zeta,\ z_{2'},\ldots,\ z_{\lambda'};\ \zeta+z_2+\sum_{\nu=2}^{\lambda} z_{\nu'}\Big).
$$

Pour reconnaître que la dernière expression peut être écrite sous la forme

$$
\text{(S 3.12)}\quad (\mathrm{K}_1-\mathrm{C}_1)\sum_{2',\ldots,\lambda'=3}^{s}(\mathrm{K}_2-\mathrm{C}_2)\,\mathrm{C}_{2'}\ldots\mathrm{C}_{\lambda'}
$$

$$
\times\, e^{c_1 z_1+c_2 z_2+\sum_{\nu=2}^{\lambda} c_{\nu'} z_{\nu'}} f_\lambda\Big(\zeta,\ z_{2'},\ \ldots,\ z_{\lambda'};\ \zeta+z_1+z_2+\sum_{\nu=2}^{\lambda} z_{\nu'}\Big)
$$

utilisons (S 2.6) pour $\mu = 2$ et

$$
f = f_\lambda\Big(\zeta,\ z_{2'},\ \ldots,\ z_{\lambda'};\ \zeta+z_1+z_2+\sum_{\nu=2}^{\lambda} z_{\nu'}\Big);
$$

en indiquant les variables d'intégration différentes de z_1 et z_2 par des points, nous obtenons ainsi, en vertu de (1.30),

$$\text{(S 3.13)} \quad \begin{aligned} & C_1 C_2\, e^{c_1 z_1 + c_2 z_2} f_\lambda(\ldots;\, z_1 + z_2 + \ldots) \\ & = C_1\, e^{c_1 z_1} f_\lambda(\ldots;\, z_1 + \ldots) \\ & = C_1 K_2\, e^{c_1 z_1 + c_2 z_2} f_\lambda(\ldots;\, z_1 + z_2 + \ldots) \qquad (c_1 \leqq c_2), \end{aligned}$$

donc

$$\text{(S 3.14)} \qquad C_1 (K_2 - C_2)\, e^{c_1 z_1 + c_2 z_2} f_\lambda(\ldots;\, z_1 + z_2 + \ldots) = 0.$$

Au moyen de cette relation, il vient

$$\text{(S 3.15)} \quad \begin{aligned} & (K_2 - C_2)\, e^{c_2 z_2} f_\lambda(\ldots;\, z_2 + \ldots) \\ & = K_1 (K_2 - C_2)\, e^{c_1 z_1 + c_2 z_2} f_\lambda(\ldots;\, z_1 + z_2 + \ldots) \\ & = (K_1 - C_1)(K_2 - C_2)\, e^{c_1 z_1 + c_2 z_2} f_\lambda(\ldots;\, z_1 + z_2 + \ldots) \qquad (c_1 \leqq c_2), \end{aligned}$$

ce qui démontre que le deuxième membre de (S 3.11) est égal à (S 3.12).

Comme, d'autre part, l'expression (S 3.12) peut être écrite, au moyen de (S 2.1), sous la forme

$$\text{(S 3.16)} \quad \left\{ \begin{array}{l} (K_1 - C_1)\, U_{\lambda-1, s-1}\, e^{\sum_1^s c_\nu z_\nu} f_\lambda\left(\zeta,\, z_{2'},\, \ldots,\, z_{\lambda'};\, \zeta + \sum_1^s z_\nu\right) \\ \qquad (U_{\lambda-1, s-1} = U_{\lambda-1, s-1}[2, \ldots, s]), \end{array} \right.$$

nous obtenons pour le premier terme qui figure dans (S 3.10), la relation

$$\text{(S 3.17)} \quad \begin{aligned} & U_{\lambda-1, s-1}\, e^{\sum_2^s c_\nu z_\nu} f_\lambda\left(\zeta,\, z_{2'},\, \ldots,\, z_{\lambda'};\, \zeta + \sum_2^s z_\nu\right) \\ & = (K_1 - C_1)\, U_{\lambda-1, s-1}\, e^{\sum_1^s c_\nu z_\nu} f_\lambda\left(\zeta,\, z_{2'},\, \ldots,\, z_{\lambda'};\, \zeta + \sum_1^s z_\nu\right). \end{aligned}$$

En décomposant comme suit, au moyen de (1.31), l'opérateur du deuxième membre :

$$\text{(S 3.18)} \quad \begin{aligned} & (K_1 - C_1)\, U_{\lambda-1, s-1}[2, \ldots, s] \\ & = (K_1 - C_1) \sum_{2', \ldots, \lambda' = 2}^{s} C_{2'} \ldots C_{\lambda'} \prod^{(\lambda)} K_\nu \\ & - (K_1 - C_1)\, C_2 \ldots C_s \sum_{2', \ldots, \lambda' = 2}^{s}, \end{aligned}$$

et utilisant à nouveau (S 2.1), nous avons enfin la formule

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{S}\,3.19)\quad & \mathrm{U}_{\lambda-1,s-1}\, e^{\sum\limits_{2}^{s} c_\nu z_\nu} f_\lambda\left(\zeta,\, z_{2'},\, \ldots,\, z_{\lambda'};\, \zeta + \sum_{2}^{s} z_\nu\right) \\
&= \mathrm{U}_{\lambda-1,s}\, e^{\sum\limits_{1}^{s} c_\nu z_\nu} f_\lambda\left(\zeta,\, z_{1'},\, \ldots,\, z_{(\lambda-1)'};\, \zeta + \sum_{1}^{s} z_\nu\right) \\
&\quad -(\mathrm{K}_1 - \mathrm{C}_1)\mathrm{C}_2 \ldots \mathrm{C}_s\, e^{\sum\limits_{1}^{s} c_\nu z_\nu} \sum_{2',\ldots,\lambda'=2}^{s} f_\lambda\left(\zeta,\, z_{2'},\, \ldots,\, z_{\lambda'};\, \zeta + \sum_{1}^{s} z_\nu\right).
\end{aligned}
$$

Pour transformer la partie de B correspondant au deuxième terme qui figure entre crochets dans (S 3.10), nous avons besoin de la formule

$$
(\mathrm{S}\,3.20)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{c_1^+\zeta}[\varepsilon_1(\zeta) - 1]\,\frac{d\zeta}{\zeta}\,\mathrm{C}_1\, e^{c_1 z_1} f_\lambda\left(z_{1'},\, \ldots,\, z_{\lambda'};\, \zeta + \sum_{1}^{s} z_\nu\right) = 0 \\
&\qquad\qquad (1',\, \ldots,\, \lambda' \neq 1),
\end{aligned}
\right.
$$

qui se démontre en remplaçant z_1 par la variable d'intégration $z_1^* = z_1 + \zeta$ et en intervertissant les intégrations, $\int_{-i\infty}^{i\infty} \ldots d\zeta$ s'annulant alors en raison de l'inégalité $c_1^+ - c_1 \geqq 0$. Au moyen de cette formule, il vient

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{S}\,3.21)\quad & \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{c_1^+\zeta}[\varepsilon_1(\zeta) - 1]\,\frac{d\zeta}{\zeta} f_\lambda\left(\ldots;\, \zeta + \sum_{2}^{s} z_\nu\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{c_1^+\zeta}[\varepsilon_1(\zeta) - 1]\,\frac{d\zeta}{\zeta}\,\mathrm{K}_1\, e^{c_1 z_1} f_\lambda\left(\ldots;\, \zeta + \sum_{1}^{s} z_\nu\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{c_1^+\zeta}[\varepsilon_1(\zeta) - 1]\,\frac{d\zeta}{\zeta}\,(\mathrm{K}_1 - \mathrm{C}_1)\, e^{c_1 z_1} f_\lambda\left(\ldots;\, \zeta + \sum_{1}^{s} z_\nu\right).
\end{aligned}
$$

Par conséquent, nous sommes en droit d'ajouter dans le deuxième terme du deuxième membre de (S 3.10) le facteur $(\mathrm{K}_1 - \mathrm{C}_1)\, e^{c_1 z_1}$, sous condition d'y remplacer $f_\lambda\left(\ldots;\, \zeta + \sum\limits_{2}^{s} z_\nu\right)$ par $f_\lambda\left(\ldots;\, \zeta + \sum\limits_{1}^{s} z_\nu\right)$;

en portant, en outre, l'expression (S 3.19) dans le premier terme de (S 3.10), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\text{(S 3.22)}\quad \mathrm{B} = {} & \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{c_1\zeta}[\varepsilon_1(\zeta)-1]\frac{d\zeta}{\zeta} \\
& \times\Bigg\{\sum_{\lambda=0}^{s-2} \mathrm{U}_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s c_\nu z_\nu} f_{\lambda+1}\Big(\zeta,\, z_{1'},\, \ldots,\, z_{\lambda'};\, \zeta+\sum_1^s z_\nu\Big) \\
& \quad -(\mathrm{K}_1-\mathrm{C}_1)\mathrm{C}_2\ldots\mathrm{C}_s e^{\sum_1^s c_\nu z_\nu}\Big[\sum_{\lambda=0}^{s-1}\ \sum_{1',\ ,\lambda'=2}^{s} f_\lambda\Big(z_{1'},\ldots,z_{\lambda'};\zeta+\sum_1^s z_\nu\Big) \\
& \quad +\sum_{\lambda=1}^{s-1}\ \sum_{2',\,.\,,\lambda'=2}^{s} f_\lambda\Big(\zeta,\, z_{2'},\, \ldots,\, z_{\lambda'};\, \zeta+\sum_1^s z_\lambda\Big)\Big]\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Au moyen de la relation

$$
\text{(S 3.23)}\quad f_s(z_1,\, \ldots,\, z_s;\, y) = -\sum_{\lambda=0}^{s-1}\ \sum_{1',\,.\,,\lambda'=1}^{s} f_\lambda(z_{1'},\, \ldots,\, z_{\lambda'};\, y)
$$

qui résulte de (1.27) et (S 3.3), ainsi que de l'identité (S 2.1) (pour $\lambda = s-1$), il vient pour le deuxième terme entre accolades

$$
\begin{aligned}
& (\mathrm{K}_1-\mathrm{C}_1)\,\mathrm{C}_2\ldots\mathrm{C}_s\, e^{\sum_1^s c_\nu z_\nu} f_s\Big(\zeta,\, z_2,\, \ldots,\, z_s;\, \zeta+\sum_1^s z_\nu\Big) \\
& \qquad = \mathrm{U}_{s-1,s}\, e^{\sum_1^s c_\nu z_\nu} f_s\Big(\zeta,\, z_{1'},\, \ldots,\, z_{(s-1')};\, \zeta+\sum_1^s z_\nu\Big),
\end{aligned}
$$

de sorte que B prend la forme

$$
\text{(S 3.24)}\quad \left\{
\begin{aligned}
& \mathrm{B} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}[\varepsilon_1(\zeta)-1]\, e^{c_1\zeta} \\
& \qquad \times\sum_{\lambda=0}^{s-1}\mathrm{U}_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s c_\nu z_\nu} f_{\lambda+1}\Big(\zeta,\, z_{1'},\, \ldots,\, z_{\lambda'};\, \zeta+\sum_1^s z_\nu\Big)\frac{d\zeta}{\zeta} \\
& \qquad\qquad \Big(c_1 = \min_{\nu=1,\,.\,.,s} c_\nu\Big).
\end{aligned}
\right.
$$

Pour achever la transformation de B, nous utiliserons l'identité

$$
(\mathrm{S}\,3.25)\quad
\left\{
\begin{aligned}
& e^{\zeta \min^{+}(c_1,\dots,c_s)}\,\mathrm{U}_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s c_\nu z_\nu} f\left(z_{1'},\ \dots,\ z_{\lambda'};\ \sum_1^s z_\nu\right) \\
& = \mathrm{U}_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s c_\nu z_\nu} \frac{1}{\sum_1^s z_\nu - \sum_1^\lambda z_{\nu'} - \zeta} \\
& \quad \times\left[\left(\sum_1^s z_\nu - \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'}\right) f\left(z_{1'},\ \dots,\ z_{\lambda'};\ \sum_1^s z_\nu - \zeta\right)\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \zeta f\left(z_{1'},\ \dots,\ z_{\lambda'};\ \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'}\right)\right] \\
& \left[\mathrm{R}\left(\sum_1^s z_\nu - \zeta\right) \geqq 0,\ \mathrm{R}\left(\sum_1^\lambda z_{\nu'}\right) \geqq 0;\ \lambda = 0,\ \dots,\ s-1\right]
\end{aligned}
\right.
$$

qui est valable pour des nombres réels $c_1, \dots, c_s$ quelconques, $f(z_1, \dots, z_\lambda; y)$ ayant les mêmes propriétés que dans S 1. Pour la démonstration nous pouvons supposer que

$$c_1 \leqq c_2 \leqq \dots \leqq c_s, \quad \text{d'où} \quad \min^{+}(c_1, \dots, c_s) = c_1^{+}.$$

En appliquant dans cette hypothèse l'identité (S 2.1) aux deux membres de (S 3.25), nous obtenons

$$
(\mathrm{S}\,3.26)\quad
\begin{aligned}
& e^{c_1^{+}\zeta}(\mathrm{K}_1 - \mathrm{C}_1) \sum_{1',\dots,\lambda'=2}^{s} \mathrm{C}_{1'} \dots \mathrm{C}_{\lambda'}\, e^{c_1 z_1 + \sum_{\nu=1}^{\lambda} c_{\nu'} z_{\nu'}} \\
& \quad \times f\left(z_{1'},\ \dots,\ z_{\lambda'};\ z_1 + \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'}\right) \\
& = (\mathrm{K}_1 - \mathrm{C}_1) \sum_{1',\dots,\lambda'=2}^{s} \mathrm{C}_{1'} \dots,\ \mathrm{C}_{\lambda'}\, e^{c_1 z_1 + \sum_{\nu=1}^{\lambda} c_{\nu'} z_{\nu'}} \frac{1}{z_1 - \zeta} \\
& \quad \times\left[z_1 f\left(z_{1'},\ \dots,\ z_{\lambda'};\ z_1 + \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'} - \zeta\right)\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \zeta f\left(z_{1'},\ \dots,\ z_{\lambda'};\ \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Cette formule résulte de l'identité

$$(\mathrm{S}\,3.27)\quad \begin{cases} e^{c+\zeta}(\mathrm{K}_1-\mathrm{C}_1)\,e^{cz_1}\,g(z_1)=(\mathrm{K}_1-\mathrm{C}_1)\,e^{cz_1}\dfrac{1}{z_1-\zeta}[z_1 g(z_1-\zeta)-\zeta g(0)] \\ \qquad [g(z)=\mathrm{O}(\,|z|^{-1})\ \text{pour}\ \mathrm{R}(z)\geqq 0] \end{cases}$$

ou

$$(\mathrm{S}\,3.28)\quad e^{c+\zeta}\left[g(0)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0}e^{cz}\,g(z)\,\frac{dz}{z}\right]$$
$$=g(0)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0}e^{cz}[z\,g(z-\zeta)-\zeta\,g(0)]\frac{dz}{z(z-\zeta)},$$

en posant $c=c_1$ et

$$g(z_1)=\sum_{1',\ldots,\lambda'=0}^{s}\mathrm{C}_{1'}\,\ldots\,\mathrm{C}_{\lambda'}\,e^{\sum_{\nu=1}^{\lambda}c_{\nu'}z_{\nu'}}\,f\left(z_{1'},\,\ldots,\,z_{\lambda'};\,z_1+\sum_{\nu=1}^{\lambda}z_{\nu'}\right);$$

en démontrant (S 3.28), nous aurons donc en même temps démontré (S 3.25).

Mais la relation (S 3.28) est évidente pour $c\leqq 0$, car alors les deux intégrales qui y figurent, s'annulent; pour $c>0$ elle se démontre en prenant dans le deuxième membre $z-\zeta$, au lieu de z, pour variable d'intégration.

Au moyen de la notation (1.54), l'identité (S 3.25) prend la forme

$$(\mathrm{S}\,3.29)\quad e^{\zeta\min+(c_1,\ldots,c_s)}\,\mathrm{U}_{\lambda s}\,e^{\sum_1^{s}c_\nu z_\nu}\,f\left(z_{1'},\,\ldots,\,z_{\lambda'};\,\sum_1^{s}z_\nu\right)$$
$$=\mathrm{U}_{\lambda s}\,e^{\sum_1^{s}c_\nu z_\nu}\left[f(z_{1'},\,\ldots,\,z_{\lambda'};\,y)\right]^{[\zeta]}_{y=\sum_1^{s}z_\nu}$$

Afin de transformer B [équ. (S 3.24)], appliquons (S 3.29) pour

$$f(z_1,\,\ldots,\,z_\lambda;\,y)=f_{\lambda+1}(\zeta,\,z_1,\,\ldots,\,z_\lambda;\,y+\zeta)\quad(\lambda=0,\,\ldots\,s-1),$$

et intervertissons ensuite les opérations $\int_{-i\infty}^{i\infty}\ldots\,d\zeta$ et $\mathrm{U}_{\lambda s}$; il vient ainsi

$$(\mathrm{S}\,3.30)\quad \mathrm{B}=\sum_{\lambda=0}^{s-1}\mathrm{U}_{\lambda s}\,e^{\sum_1^{s}c_\nu z_\nu}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\varepsilon_1(\zeta)-1}{\zeta}$$
$$\times\left[f_{\lambda+1}(\zeta,\,z_{1'},\,\ldots,\,z_{\nu'};\,y+\zeta)\right]^{[\zeta]}_{y=\sum_1^{s}z_\nu}d\zeta,$$

de sorte que nous avons obtenu pour B une expression de la forme (S 3.5).

En portant les expressions (S 3.5) et (S 3.30) dans (S 3.4) et revenant aux notations $t_{n-j-1,\nu}$ et $\varepsilon_2 v_{j\lambda}$ [équ. (S 3.2) et (S 3.3)], nous obtenons ainsi la formule

$$(\text{S } 3.31) \qquad J_{n,j+1} \doteq \sum_{\lambda=0}^{s-1} U_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s t_{n-j-1,\nu} z_\nu}\, v_{j+1,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right),$$

où, en vertu de (1.54), nous avons posé

$$(\text{S } 3.32) \quad \begin{cases} v_{j+1,\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) \\ \quad = \varepsilon_2(-y) v_{j\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\varepsilon_1(\zeta)-1}{\zeta}\left(y - \sum_1^\lambda z_\nu - \zeta\right)^{-1} \\ \quad \times \left[\left(y - \displaystyle\sum_1^\lambda z_\nu\right)\varepsilon_2(-y)\, v_{j,\lambda+1}(\zeta, z_1, \ldots, z_\lambda; y)\right. \\ \quad \left. - \zeta\varepsilon_2\left(-\displaystyle\sum_1^\lambda z_\nu - \zeta\right) v_{j,\lambda+1}\left(\zeta, z_1, \ldots, z_\lambda; \displaystyle\sum_1^\lambda z_\nu + \zeta\right)\right] d\zeta \\ \qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1;\ j = 0, 1, \ldots). \end{cases}$$

Les deux dernières formules, auxquelles il faut ajouter (1.27), constituent la transformation cherchée de la formule (1.39).

S 4. Propriétés analytiques des fonctions $v_{j\lambda}$ suivant (1.27), (1.28) et (1.41).

En vue d'établir les propriétés des fonctions $v_{j\lambda}$ admises lors de la démonstration de la formule (S 3.31), démontrons que ces fonctions peuvent être représentées sous forme d'intégrales $(\lambda+1)$-uples de Stieltjes, multipliées par le facteur $\dfrac{q}{q+y}\cdot$ De manière plus précise, les $v_{j\lambda}$ admettent dans le domaine (1.25) la représentation

$$(\text{S } 4.1) \quad \begin{cases} v_{j\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = \dfrac{q}{q+y}\, S_{\lambda+1}\, e^{-t_0 y - \sum_1^\lambda t_\nu z_\nu}\, d^{\lambda+1} F_{j\lambda}(t_0, t_1, \ldots, t_\lambda) \\ \qquad (\lambda = 0, \ldots, s;\ j = 0, 1, \ldots), \end{cases}$$

où $S_{\lambda+1}$ désigne une intégration $(\lambda+1)$-uple étendue au domaine

$$(\text{S } 4.2) \qquad 0 \leqq t_0 < \infty, \quad 0 \leqq t_1 < \infty, \quad \ldots, \quad 0 \leqq t_\lambda < \infty;$$

$F_{j\lambda}(t_0, \ldots, t_\lambda)$ est une fonction (complexe) à variation bornée dans ce domaine et $d^{\lambda+1}F_{j\lambda} = d^{\lambda+1}_{t_0, t_1, \ldots, t_\lambda} F_{j\lambda}(t_0, \ldots, t_\lambda)$, sa différentielle totale.

On voit d'abord que les valeurs initiales $v_{0\lambda}$ [équ. (1.28)] peuvent être représentées sous la forme (S 4.1), en posant

$$\text{(S 4.3)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} F_{00}(t_0) = \tilde{s}(t_0), \qquad F_{01} = \ldots = F_{0,s-1} = 0, \\ F_{0s}(t_0, \ldots, t_s) = -\prod_{\nu=0}^{s} \tilde{s}(t_\nu), \end{array} \right.$$

où la fonction $\tilde{s}(x)$ est définie comme suit :

$$\tilde{s}(0) = 0, \qquad \tilde{s}(x) = 1 \qquad (x > 0);$$

en effet, les $F_{0\lambda}$ sont à variation bornée dans le domaine (S 4.2).

Dans l'hypothèse où (S 4.1) est valable pour un certain $j \geqq 0$ (et pour $\lambda = 0, \ldots, s$) nous allons démontrer maintenant que cette formule subsiste encore pour $j+1$; comme notre hypothèse est vérifiée pour $j = 0$, nous aurons ainsi démontré (S 4.1) pour tout $j \geqq 0$.

Désignons par $c_{j+1,\lambda}$ le deuxième terme du deuxième membre de (S 3.32) et substituons-y l'expression (S 4.1) de $v_{j+1,\lambda}$ ainsi que les intégrales (1.35). Au moyen de la notation

$$\text{(S 4.4)} \qquad \sigma_\lambda = \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_\nu$$

il vient alors

$$\text{(S 4.5)} \qquad v_{j+1,\lambda} = \varepsilon_2(-y)\, v_{j\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) + c_{j+1,\lambda},$$

$$\text{(S 4.6)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} c_{j+1,\lambda} = \dfrac{q}{2\pi i} \displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} d\zeta \int_0^\infty \frac{e^{u\zeta} - 1}{\zeta}\, df_1(u) \frac{1}{y - \sigma_\lambda - \zeta} \\ \qquad \times \displaystyle\int_0^\infty df_2(v) S_{\lambda+2} \left[\frac{y - \sigma_\lambda}{q + y} e^{-(v+t_0)y} - \frac{\zeta}{q + \sigma_\lambda + \zeta} e^{-(v+t_0)(\sigma_\lambda + \zeta)} \right] \\ \qquad \times e^{-t_1\zeta - \sum_1^\lambda t_{\nu+1} z_\nu}\, d^{\lambda+2} F_{j,\lambda+1}(t_0, \ldots, t_{\lambda+1}) \\ \qquad\qquad [\mathrm{R}(y - \sigma_\lambda) > 0;\ \lambda = 0, \ldots, s-1]. \end{array} \right.$$

Selon que les coefficients $u - t_1$ et $u - v - t_0 - t_1$, qui figurent dans $e^{(u-t_1)\zeta}$ et $e^{(u-v-t_0-t_1)\zeta}$, sont < 0 ou $\geqq 0$, la partie correspondante de $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} \ldots d\zeta$ se réduit à des résidus respectivement en $\zeta = y - \sigma_\lambda$

et aux points $\zeta = 0$ et $\zeta = -q - \sigma_\lambda$, tandis que le terme (-1) qui figure dans $(e^{u\zeta} - 1)$, ne contribue pas à $c_{j+1,\lambda}$. On obtient ainsi après quelques simplifications, en utilisant (S 4.4),

$$(\text{S } 4.7) \quad c_{j+1,\lambda} = \frac{q}{q+y}\left\{ \varepsilon_2(-y) \mathrm{S}_{\lambda+2}[1 - f_1(t_1)] e^{-t_0 y - \sum_1^\lambda t_{\nu+1} z_\nu} d^{\lambda+2} \mathrm{F}_{j,\lambda+1}(t_0, \ldots, t_{\lambda+1}) \right.$$

$$- \int_0^\infty df_2(v) \mathrm{S}_{\lambda+2} \int_{t_1}^{v+t_0+t_1} df_1(u) e^{-(v+t_0+t_1-u)y - \sum_1^\lambda (u-t_1+t_{\nu+1})z_\nu} d^{\lambda+2} \mathrm{F}_{j,\lambda+1}$$

$$\left. - \int_0^\infty df_2(v) \mathrm{S}_{\lambda+2} \int_{v+t_0+t_1}^\infty df_1(u)\, e^{-(u-v-t_0-t_1)q - \sum_1^\lambda (u-t_1+t_{\nu+1})z_\nu} d^{\lambda+2} \mathrm{F}_{j,\lambda+1} \right\}.$$

Les trois termes qui figurent entre accolades, peuvent être écrits sous forme d'intégrales $(\lambda + 1)$-uples de Stieltjes, multipliées par $\frac{q}{q+y}$, à savoir

$$(\text{S } 4.8) \qquad c_{j+1,\lambda} = \frac{q}{q+y} \sum_{i=1}^{3} \mathrm{S}_{\lambda+1}\, e^{-t_0 y - \sum_1^\lambda t_\nu z_\nu} d^{\lambda+1} \mathrm{G}_i(t_0, \ldots, t_\lambda),$$

où nous avons posé

$$(\text{S } 4.9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{G}_1(t_0, \ldots, t_\lambda) = \int_0^{t_0} df_\bullet(t'_0) \int_0^\infty [1 - f_1(t'_1)] \\ &\qquad \times d_{t'_1} \mathrm{F}_{j,\lambda+1}(t_0 - t'_0, t'_1, t_1, \ldots, t_\lambda), \\ &\mathrm{G}_2(t_0, \ldots, t_\lambda) = -\int_{t'_0=0}^\infty \int_{u=0}^m df_1(u + t'_1)\, d_{t'_1} \int_0^{u+t_0} df_2(v) \\ &\qquad \times \mathrm{F}_{j,\lambda+1}(t_0 + u - v, t'_1, t_1 - u, \ldots, t_\lambda - u), \\ &\mathrm{G}_3(t_0, \ldots, t_\lambda) = -\mathfrak{F}(t_0) \int_{t'_0=0}^\infty \int_{t'_1=0}^\infty \int_{u=t'_0}^m df_1(u + t'_1) \\ &\qquad \times \int_{v=0}^{u-t'_0} e^{-(u-t'_0-v)q}\, df_2(v)\, d^2_{t'_0, t'_1} \mathrm{F}_{j,\lambda+1}(t'_0, t'_1, t_1 - u, \ldots, t_\lambda - u) \\ &\qquad\qquad [m = \min(t_1, \ldots, t_\lambda)]. \end{aligned} \right.$$

En vertu de (1.35) et de notre hypothèse (S 4.1) sur la fonction $v_{j\lambda}$, le terme $\varepsilon_2 v_{j\lambda}$ peut lui ussi être représenté sous la forme (S 4.1); il en est donc de même, en raison de (S 4.5) et (S 4.8), pour $v_{j+1,\lambda}$

dont la fonction de répartition $F_{j+1,\lambda}$ est ainsi donnée par la formule

$$(S\,4.10)\quad F_{j+1,\lambda}(t_0, \ldots, t_\lambda) = \int_0^{t_0} df_2(v)\, F_{j\lambda}(t_0 - v, t_1, \ldots, t_\lambda) + \sum_{i=1}^{3} G_i(t_0, \ldots, t_\lambda) \qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1).$$

Ensuite il résulte de (1.27) que, de même, la fonction $v_{j+1,s}$ peut être représentée sous la forme (S 4.1) au moyen de la f. r.

$$(S\,4.11)\quad F_{j+1,s}(t_0, \ldots, t_s) = -\sum_{\lambda=0}^{s-1} \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{s} F_{j+1,\lambda}(t_0, t_{1'}, \ldots, t_{\lambda'}) \prod_{\nu=\lambda+1}^{s} \mathfrak{s}(t_{\nu'}),$$

de sorte que nous avons démontré (S 4.1) pour $j+1$ et, par conséquent, pour tout $j \geqq 0$.

Évaluons maintenant la variation totale de $F_{i+1,\lambda}$. Des formules (S 4.7) et (S 4.8), où $R(q) \geqq 0$, nous tirons l'inégalité

$$(S\,4.12)\quad \sum_{i=1}^{3} S_{\lambda+1} \,|\, d^{\lambda+1} G_i \,| \leqq S_{\lambda+2} [1 - f_1(t_1)] \,|\, d^{\lambda+2} F_{j,\lambda+1}(t_0, \ldots, t_{\lambda+1}) \,| + \int_0^\infty df_2(v)\, S_{\lambda+2} \int_{t_1}^\infty df_1(u) \,|\, d^{\lambda+2} F_{j,\lambda+1} \,| \leqq 2 S_{\lambda+2} \,|\, d^{\lambda+2} F_{j,\lambda+1} \,|$$

et au moyen de (S 4.10) nous obtenons ainsi

$$(S\,4.13)\quad S_{\lambda+1} \,|\, d^{\lambda+1} F_{j+1,\lambda} \,| \leqq S_{\lambda+1} \,|\, d^{\lambda+1} F_{j\lambda} \,| + \sum_{i=1}^{3} S_{\lambda+1} \,|\, d^{\lambda+1} G_i \,| \leqq S_{\lambda+1} \,|\, d^{\lambda+1} F_{j\lambda} \,| + 2 S_{\lambda+2} \,|\, d^{\lambda+2} F_{j,\lambda+1} \,| \qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1);$$

en outre, nous tirons de (S 4.11) l'inégalité

$$(S\,4.14)\qquad S_{s+1} \,|\, d^{s+1} F_{j+1,s} \,| \leqq \sum_{\lambda=0}^{s-1} C_s^\lambda S_{\lambda+1} \,|\, d^{\lambda+1} F_{j+1,\lambda} \,|.$$

En raison de (1.28) nous pouvons maintenant admettre que jusqu'à un certain $j \geqq 0$, les inégalités

$$(S\,4.15)\qquad S_{\lambda+1} \,|\, d^{\lambda+1} F_{j\lambda} \,| \leqq c_1 c_2^j \qquad (\lambda = 0, \ldots, s)$$

sont vérifiées avec des constantes appropriées $c_1 < \infty$ et $c_2 < \infty$. On en tire, en vertu de (S 4.13) et (S 4.14),

$$(S\,4.16)\quad \begin{cases} S_{\lambda+1} \,|\, d^{\lambda+1} F_{j+1,\lambda} \,| \leqq 3 c_1 c_2^j & (\lambda = 0, \ldots, s-1), \\ S_{s+1}\, d^{s+1} F_{j+1,s} \leqq (2^s - 1)\, 3 c_1 c_2^j, \end{cases}$$

de sorte qu'avec $c_2 \geqq 3(2^s - 1)$, les inégalités (S 4.15) sont valables pour tout $j \geqq 0$.

Puisque les variations totales des $F_{j\lambda}$ sont finies, les intégrales qui figurent dans (S 4.1), donc les fonctions $v_{j\lambda}$, sont continues dans le domaine (1.25) et holomorphes dans le domaine (1.24).

De (S 4.1) et (S 4.15) on conclut que dans le domaine (1.25) l'inégalité

$$\text{(S 4.17)} \quad |v_{j\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y)| \leqq \frac{c_1 c_2^j}{|q+y|} \qquad (\lambda = 0, \ldots, s; j = 0, 1, \ldots)$$

est vérifiée, de sorte que les séries $V_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} z^j v_{j\lambda}$ [équ. (1.43)] convergent pour $|z| < c_2^{-1}$. De (1.43) et (S 4.1) résultent enfin les représentations suivantes des V_λ, valables pour $|z| < c_2^{-1}$ dans le domaine (1.25),

$$\text{(S 4.18)} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = \dfrac{q}{q+y} S_{\lambda+1}\, e^{-t_0 y - \sum_1^\lambda t_\nu z_\nu} d^{\lambda+1} F_\lambda(t_0, \ldots, t_\lambda) \\ \qquad \left[F_\lambda = \sum_0^\infty z^j F_{j\lambda}(t_0, \ldots, t_\lambda);\ \lambda = 0, \ldots, s \right], \end{array} \right.$$

la variation totale des fonctions F_λ dans le domaine (S 4.2) étant $\leqq \dfrac{c_1}{1 - c_2 |z|}$. Pour $|z|$ assez petit, il vient par conséquent, au moyen d'une constante appropriée c_3,

$$\text{(S 4.19)} \qquad |V_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y)| < \frac{c_3}{|q+y|} \qquad (\lambda = 0, \ldots, s),$$

uniformément par rapport au domaine (1.25) des variables z_ν et y.

S 5. Propriétés des fonctions $v_{j\lambda}^{(2)}$, $V_\lambda^{(2)}$, $v_{j\lambda}^{(3)}$, $V_\lambda^{(3)}$, etc.

Ces fonctions qui figurent dans nos formules à partir de (1.53), peuvent elles aussi être représentées d'une manière analogue à (S 4.1) et elles ont les mêmes propriétés de continuité et d'analyticité que les $v_{j\lambda}$ et les V_λ. Montrons cela d'abord pour les fonctions $v_{0\lambda}^{(2)}$ définies par (1.53), (1.54) et (1.27). En introduisant l'expression (S 4.18) de V_λ dans (1.53) et utilisant (1.54) ainsi que la notation (S 4.4), nous obtenons

$$(\mathrm{S}\,5.1)\quad \left\{\begin{aligned} v_{0\lambda}^{(2)} = \frac{q'}{y+q+q'}\Bigg[&\frac{y-\sigma_\lambda}{y+q-\sigma_\lambda}\,\mathrm{S}_{\lambda+1}\, e^{-t_0(y+q)-\sum\limits_1^\lambda t_\nu z_\nu}\, d^{\lambda+1}\mathrm{F}_\lambda \\ &+\frac{y+q+q'}{y+q-\sigma_\lambda}\,\frac{q}{q'+\sigma_\lambda}\,\mathrm{S}_{\lambda+1}\, e^{-t_0\sigma_\lambda-\sum\limits_1^\lambda t_\nu z_\nu}\, d^{\lambda+1}\mathrm{F}_\lambda\Bigg] \\ [\mathrm{F}_\lambda = \mathrm{F}_\lambda(t_0,\ \ldots,\ t_\lambda;\ z',\ q');\ \lambda &= 0,\ \ldots,\ s-1]. \end{aligned}\right.$$

En décomposant comme suit :

$$\frac{y-\sigma_\lambda}{y+q-\sigma_\lambda} = 1 - \frac{q}{y+q-\sigma_\lambda},$$

$$\frac{y+q+q'}{y+q-\sigma_\lambda}\,\frac{q}{q'+\sigma_\lambda} = \frac{q}{y+q-\sigma_\lambda} + \frac{q}{q'+\sigma_\lambda},$$

il vient

$$(\mathrm{S}\,5.2)\quad \begin{aligned} v_{0\lambda}^{(2)} = \frac{q'}{y+q+q'}\Bigg[&\mathrm{S}_{\lambda+1}\, e^{-t_0 y-\sum\limits_1^\lambda t_\nu z_\nu}\, e^{-t_0 q}\, d^{\lambda+1}\mathrm{F}_\lambda \\ &+\frac{q}{q'+\sigma_\lambda}\,\mathrm{S}_{\lambda+1}\, e^{-\sum\limits_1^\lambda (t_0+t_\nu) z_\nu}\, d^{\lambda+1}\mathrm{F}_\lambda \\ &+ q\,\mathrm{S}_{\lambda+1}\frac{e^{-t_0\sigma_\lambda} - e^{-t_0(y+q)}}{y+q-\sigma_\lambda}\, e^{-\sum\limits_1^\lambda t_\nu z_\nu}\, d^{\lambda+1}\mathrm{F}_\lambda\Bigg]. \end{aligned}$$

Introduisant ici les expressions

$$(\mathrm{S}\,5.3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{q'+\sigma_\nu} &= \int_0^\infty e^{-t\sum\limits_1^\lambda z_\nu}\, e^{-tq'}\, dt, \\ \frac{e^{-t_0\sigma_\lambda} - e^{-t_0(y+q)}}{y+q-\sigma_\lambda} &= \int_0^{t_0} e^{-ty-(t_0-t)\sum\limits_1^\lambda z_\nu}\, e^{-tq}\, dt, \end{aligned}\right.$$

on reconnaît que les trois termes du deuxième membre de (S 5.2) peuvent être représentés au moyen d'intégrales de Stieltjes de la forme (S 4.1), de variations totales inférieures ou égales respectivement à

$$(\mathrm{S}\,5.4)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}_{\lambda+1}\, e^{-t_0\mathrm{R}(q)}\,|\, d^{\lambda+1}\mathrm{F}_\lambda\,|, \\ &|\,q\,|\int_0^\infty |\,e^{-tq'}|\, dt\,\mathrm{S}_{\lambda+1}\,|\,d^{\lambda+1}\mathrm{F}_\lambda\,| = \frac{|\,q\,|}{\mathrm{R}(q')}\,\mathrm{S}_{\lambda+1}\,|\,d^{\lambda+1}\mathrm{F}_\lambda\,|, \\ &|\,q\,|\,\mathrm{S}_{\lambda+1}\int_0^{t_0} |\,e^{-tq}|\, dt\,|\,d^{\lambda+1}\mathrm{F}_\lambda\,| < \frac{|\,q\,|}{\mathrm{R}(q)}\,\mathrm{S}_{\lambda+1}\,|\,d^{\lambda+1}\mathrm{F}_\lambda\,|, \end{aligned}\right.$$

donc finies. Ainsi $v_{0,0}^{(2)}, \ldots, v_{0,s-1}^{(2)}$ et, de même, $v_{0s}^{(2)}$ [*voir* équ. (1.27)] et (S 4.11)] peuvent être mises sous la forme

$$\text{(S 5.5)} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{0\lambda}^{(2)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y; z', q, q') \\ \quad = \dfrac{q'}{y+q+q'} \mathrm{S}_{\lambda+1}\, e^{-t_0 y - \sum\limits_1^\lambda t_\nu z_\nu}\, d^{\lambda+1}\mathrm{F}_{0\lambda}^{(2)}(t_0, \ldots, t_\lambda) \\ \qquad (\mathrm{S}_{\lambda+1} \,|\, d^{\lambda+1}\mathrm{F}_{0\lambda}^{(2)} \,| < \infty;\ \lambda = 0, \ldots, s). \end{array} \right.$$

Nous en concluons, en raisonnant comme pour les $v_{j\lambda}$, que toutes les $v_{j\lambda}^{(2)}$ peuvent être représentées de la même façon au moyen de fonctions $\mathrm{F}_{j\lambda}^{(2)}$ dont les variations totales vérifient des inégalités de la forme (S 4.15). Par conséquent, les $v_{j\lambda}^{(2)}$ vérifient dans le domaine (1.25) une inégalité

$$\text{(S 5.6)} \quad |\, v_{j\lambda}^{(2)} \,| < \frac{c_1^{(2)} c_2^{(2)j}}{|\, y+q+q' \,|} \qquad (\lambda = 0, \ldots, s;\ j = 0, 1, \ldots),$$

de sorte que les séries (1.57), qui définissent les fonctions $\mathrm{V}_\lambda^{(2)}$, convergent pour $|\, z \,|$ assez petit et, tout comme les $v_{j\lambda}^{(2)}$, les $\mathrm{V}_\lambda^{(2)}$ peuvent être représentées sous la forme (S 5.5) au moyen de fonctions à variation bornée $\mathrm{F}_\lambda^{(2)}(t_0, \ldots, t_\lambda;\ z, z', q, q')$.

En continuant ainsi, on conclut de proche en proche à l'existence des fonctions $\mathrm{V}_\lambda^{(3)}, \mathrm{V}_\lambda^{(4)}, \ldots$ qui, toutes, peuvent être représentées par des formules analogues à (S 4.18); il en résulte que pour $|\, y \,| \to \infty$, ces fonctions sont $\mathrm{O}(\,|\, y \,|^{-1})$ [uniformément par rapport au domaine (1.25)].

S 6. Le passage de l'équation (2.40) a (2.42).

Dans l'hypothèse où la f. r. $f_2(y)$ [équ. (1.4)] est continue, nous allons démontrer maintenant que le procédé utilisé pour calculer l'e. m. (1.14) s'applique encore, avec la définition (2.33) des opérateurs C_ν, dans le cas de l'e. m. (2.40). Toutes les fonctions $f(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$ considérées dans cette section et surtout, comme nous verrons, les $v_{j\lambda}$ du chapitre II, possèdent, au lieu de (S 4.1), une représentation sous forme d'une intégrale de Stieltjes, à savoir

$$\text{(S 6.1)} \quad f(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = \mathrm{S}_{\lambda+1}\, e^{-t_0 y - \sum\limits_1^\lambda t_\nu z_\nu}\, d_{t_0, \ldots, t_\lambda}^{\lambda+1} \mathrm{F}(t_0, \ldots, t_\lambda);$$

en outre, la fonction F est de variation bornée dans le domaine (S 4.2), donc

$$(S\,6.2)\qquad S_{\lambda+1}\,|\,d^{\lambda+1}F(t_0,\,\ldots,\,t_\lambda)\,| < \infty.$$

En admettant que pour un certain $j \geqq 0$, les $v_{j\lambda}$ peuvent être mises sous la forme (S 6.1) [ce qui, en vertu de (2.39), est vrai pour $j = 0$], justifions d'abord le passage de la formule (1.32) de J_{nj} [où nous introduirons à nouveau l'expression (1.34)] à (1.36). J_{nj} [*voir* équ. (1.23)] est une somme d'intégrales multiples de la forme

$$(S\,6.3)\quad \left\{\begin{aligned} A_\lambda(\eta) &= \lim_{N_1,\ldots,N_\lambda \to \infty} \frac{1}{(2\pi i)^\lambda}\int_{-iN_1+0}^{iN_1+0}\cdots \\ &\times \int_{-iN_\lambda+0}^{iN_\lambda+0} e^{\sum_1^\lambda t'_\nu z_\nu - \eta\sum_1^\lambda z_\nu}\, v_{j\lambda}\left(z_1,\ldots,z_\lambda;\sum_1^\lambda z_\nu\right)\frac{dz_1\ldots dz_\lambda}{z_1\ldots z_\lambda} \\ &\qquad (\lambda = 0,\,\ldots,\,s), \end{aligned}\right.$$

où nous avons posé pour le moment $y_{n-j-1} = \eta$ et désigné par $t'_1, \ldots, t'_s$ les nombres $t^+_{n-j-1,1} + t_{n-j-1}, t_{n-j-1,2}, \ldots, t_{n-j-1,s}$; la fonction $v_{j\lambda}\left(z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu\right)$ qui figure ici peut être représentée, en conséquence de notre hypothèse sur $v_{j\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$, sous forme d'une intégrale λ-uple de Stieltjes.

Que l'opération

$$\int_0^\infty \cdots df_2(y_{n-j-1}) \equiv \int_0^\infty \cdots df_2(\eta)$$

peut être permutée avec les signes d'intégration de (S 6.3), se voit aisément dans le cas où la f. r. f_2 est continue, mais nous le démontrerons sans utiliser cette hypothèse; il suffira d'ailleurs d'admettre que $\lambda = 1$, le cas $\lambda > 1$ se traitant de la même façon. Soit donc

$$(S\,6.4)\quad A_1(\eta) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN+0}^{iN+0} e^{tz-\eta z}\,v(-z)\frac{dz}{z},\quad \text{où } v(z) = \int_0^\infty e^{\theta z}\,dF(\theta);$$

nous devons démontrer que

$$(S\,6.5)\quad \int_0^\infty A_1(\eta)\,df_2(\eta) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN+0}^{iN+0} e^{tz}\int_0^\infty e^{-\eta z}\,df_2(\eta)\,\varphi(-z)\frac{dz}{z}$$
$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN+0}^{iN+0} e^{tz}\,\varepsilon_2(-z)\,\varphi(-z)\frac{dz}{z}.$$

Posons $F(\theta) = 0$ pour $\theta < 0$; en outre, la fonction à variation bornée $F(\theta)$ peut être supposée *normée*, c'est-à-dire telle qu'en ses points de discontinuité

$$(S\,6.6)\qquad F(\theta) = \frac{1}{2}[F(\theta+0) + F(\theta-0)].$$

En vertu du théorème déjà mentionné de M. P. Lévy ([1], p. 93), il vient alors $A_1(\eta) = F(t-\eta)$, de sorte que le premier membre de (S 6.5) est le produit de composition des fonctions f_2 et F. Mais d'après le même théorème, le dernier membre de (S 6.5) est égal à la fonction à variation bornée (et normée) dont la t. L. est $\varepsilon_2(z)\,\varphi(z)$, donc égal au produit de composition *normé* de f_2 et F. Pour démontrer (S 6.5), nous devons par conséquent montrer que le premier membre, donc $\int_0^\infty df_2(\eta)\,F(t-\eta)$, est normé ; mais c'est évident puisque l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}[F(t-\eta+\delta) + F(t-\eta-\delta) - 2F(t-\eta)]\,df_2(\eta),$$

où il est permis de passer à la limite $\delta = 0$ *sous* le signe d'intégration (*voir*, par exemple, [1], p. 66), tend, en vertu de (S 6.6), vers zéro avec δ.

Après le passage de (1.32) à (1.36), justifions celui de cette dernière formule à (1.39). Décomposons (1.36) à nouveau suivant (1.37) et écrivons τ au lieu de t_{n-j-1}; la partie de (1.36) qui dépend de τ, est dans le cas présent de la forme

$$(S\,6.7)\quad \left\{\begin{aligned} &B(\tau) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN}^{iN} e^{\omega t}(e^{z\tau}-1)\,\varphi(-z)\frac{dz}{z} = \lim_{N\to\infty} g_N(\tau) \\ &\qquad\left[\varphi(z) = \int_0^\infty e^{\theta z}dF(\theta)\right]\end{aligned}\right.$$

et nous devons démontrer que l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes $\int_0^\infty B(\tau)\,df_1(\tau)$ peut être calculée en permutant les opérations $\int_0^\infty \ldots df_1(\tau)$ et $\lim\limits_{N\to\infty}\int_{-iN}^{iN}\ldots dz$.

Or la fonction

$$(S\,6.8)\quad g_N(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN}^{iN} e^{zt}(e^{z\tau}-1)\int_0^\infty e^{-z\theta}dF(\theta)\frac{dz}{z}$$
$$=\int_0^\infty dF(\theta)\frac{1}{2\pi i}\int_{-N}^{N} e^{iy(t-\theta)}(e^{iy\tau}-1)\frac{dy}{y}$$
$$=\int_0^\infty dF(\theta)\frac{1}{\pi}\int_0^N[\sin y(t-\theta+\tau)-\sin y(t-\theta)]\frac{dy}{y}$$

est bornée pour tout N et, quel que soit τ, cette fonction tend pour $N\to\infty$ vers une limite [qui, dans l'hypothèse (S 6.6), est égale à $F(t+\tau)-F(t)$]; il vient par conséquent

$$(S\,6.9)\quad \int_0^\infty B(\tau)\,df_1(\tau)=\int_0^\infty df_1(\tau)\lim_{N\to\infty} g_N(\tau)=\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty g_N(\tau)\,df_1(\tau).$$

Écrivons $g_N(\tau)$ pour le moment sous la forme

$$g_N(\tau)=\int_{-iN}^{iN}\gamma(z,\tau)\,dz;$$

on a alors, en vertu de (S 6.8) l'inégalité $|\gamma(z,\tau)|<c'\tau$, de sorte qu'en admettant à nouveau l'hypothèse (1.38), on trouve la relation

$$(S\,6.10)\quad \int_0^\infty g_N(\tau)\,df_1(\tau)=\int_{-iN}^{iN}dz\int_0^\infty \gamma(z,\tau)\,df_1(\tau)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN}^{iN} e^{zt}[\varepsilon_1(z)-1]\,\varphi(-z)\frac{dz}{z}.$$

Donc, les opérations en question peuvent être permutées et en définissant l'opérateur $\tilde{C}_1$, au lieu de (S 3.8), par

$$(S\,6.11)\qquad \tilde{C}_1=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN}^{iN}\ldots\frac{dz_1}{z_1},$$

nous tirons de (S 6.9) et (S 6.10) la formule

$$(\text{S }6.12)\qquad \int_0^\infty \mathrm{B}(\tau)\,df_1(\tau) = \tilde{\mathrm{C}}_1\, e^{z_1 t}[\varepsilon_1(z_1)-1]\,\nu(-z_1),$$

qui démontre (1.39) dans l'hypothèse présente sur les $\nu_{j\lambda}$.

Passons maintenant aux formules de S 2 et S 3 qui doivent être démontrées pour des fonctions $f(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$ suivant (S 3.3). Par suite de l'hypothèse admise pour les $\nu_{j\lambda}$, ces fonctions remplissent elles aussi les conditions (S 6.1) et (S 6.2). En désignant respectivement par F et $\mathrm{F}_{j\lambda}$ les fonctions figurant dans les représentations (S 6.1) de f et de $\nu_{j\lambda}$, on tire de (1.35) et (S 3.3) d'une manière bien connue la relation

$$(\text{S }6.13)\qquad \mathrm{F}(t_0, \ldots, t_\lambda) = \int_0^{t_0} d_x \mathrm{F}_{j\lambda}(x, t_1, \ldots, t_\lambda)\, f_2(t_0 - x).$$

En raison de la continuité de $f_2(t)$, $\mathrm{F}(t_0, \ldots, t_\lambda)$ est, par conséquent, continue en t_0, uniformément par rapport à $t_1, \ldots, t_\lambda$.

La démonstration de l'identité (S 2.1) était précédemment basée sur la formule (S 2.6); cette formule qui, comme nous avons vu [après (S 2.9)], restait valable pour $1' = 1$, doit être redémontrée dans les conditions présentes. Au moyen de (S 6.1) et en écrivant $\sum\limits_1^{s}{}'$ au lieu de $\sum\limits_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{s}$, (S 2.6) prend la forme

$$(\text{S }6.14)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{C}_\mu \mathrm{C}_1 e^{c_1 z_1 + c_\mu z_\mu} \mathrm{S}_{\lambda+1}\, e^{-t_0 \sum\limits_1^{s} z_\nu - \sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} t_\nu z_{\nu'}}\, d^{\lambda+1}\mathrm{F}(t_0, \ldots, t_\lambda) \\ &\quad = \mathrm{C}_1 e^{c_1 z_1}\, \mathrm{S}_{\lambda+1}\, e^{-t_0 \sum\limits_1^{s}{}' z_\nu - \sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} t_\nu z_{\nu'}}\, d^{\lambda+1}\mathrm{F}(t_0, \ldots, t_\lambda) \\ &\qquad\qquad (\mu \neq 1, 1', \ldots, \lambda';\ c_1 \leqq c_\mu). \end{aligned}\right.$$

En vue de démontrer cette relation, notons qu'en vertu de (S 6.2) C_μ et C_1 peuvent être permutés avec $\mathrm{S}_{\lambda+1}$ et que $\mathrm{C}_1\, e^{a z_1} = \mathrm{s}(a)$ [équ. (2.28) et (2.33)]; ainsi, (S 6.14) se transforme en

$$\begin{aligned} &\mathrm{S}_{\lambda+1}\, e^{-t_0 \sum\limits_1^{s}{}' z_\nu - \sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} t_\nu z_{\nu'}}\, \mathrm{s}(c_1 - t_0)\, \mathrm{s}(c_\mu - t_0)\, d^{\lambda+1}\mathrm{F}. \\ &= \mathrm{S}_{\lambda+1}\, e^{-t_0 \sum\limits_1^{s}{}' z_\nu - \sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} t_\nu z_{\nu'}}\, \mathrm{s}(c_1 - t_0)\, d^{\lambda+1}\mathrm{F}. \end{aligned}$$

Or puisque $c_\mu \geqq c_1$, il vient

$$s(c_1 - t_0)\,s(c_\mu - t_0) = s(c_1 - t_0) \qquad (\text{sauf pour } c_1 = c_\mu = t_0);$$

dans le cas exclu, les deux membres de cette formule sont respectivement égaux à $\frac{1}{4}$ et à $\frac{1}{2}$. Mais comme $F(t_0, \ldots, t_\lambda)$ est continue en t_0, ainsi que de variation totale bornée, la contribution de la partie $t_0 = c_1$ du domaine (S 4.2) aux deux dernières intégrales de Lebesgue-Stieltjes est nulle, ce qui démontre (S 6.14) et, par conséquent, la formule (S 2.6); cette formule se démontre de manière tout analogue dans le cas où un des indices primés, 1′, coïncide avec 1.

Les raisonnements subséquents de S 3, jusqu'à l'équation (S 3.19) incluse, s'appliquent sans changement sauf qu'à partir de (S 3.10) il faudra écrire $\lim\limits_{N \to \infty} \int_{-iN}^{iN} \ldots d\zeta$ au lieu de $\int_{-i\infty}^{\infty} \ldots d\zeta$ partout où la variable z_1 de l'opérateur $\tilde{C}_1$ sera remplacée par ζ. Ensuite, nous devons démontrer la formule modifiée (S 3.20) qui, au moyen de (1.35), (2.33) et (S 6.1), prend la forme

$$(\text{S } 6.15)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty df_1(\tau) \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN}^{iN} (e^{\tau\zeta} - 1)\, e^{\zeta c^+} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad \times \lim_{N_1 \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN_1+0}^{iN_1+0} e^{c z_1}\, S_{\lambda+1}\, e^{-t_0\left(\zeta + \sum\limits_1^{s} z_\nu\right) - \sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} t_\nu z_{\nu'}}\, d^{\lambda+1} F \frac{dz_1}{z_1} = 0 \\ &\qquad\qquad (1', \ldots, \lambda' \neq 1), \end{aligned}\right.$$

$F = F(t_0, \ldots, t_\lambda)$ ayant les propriétés mentionnées plus haut. Pour le premier membre nous obtenons, en procédant comme lors de la transformation de (S 6.14), l'expression

$$(\text{S } 6.16)\quad \begin{aligned} &\int_0^\infty df_1(\tau)\, S_{\lambda+1}\, e^{-t_0 \sum\limits_1^{\lambda} z_\nu - \sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} t_\nu z_{\nu'}} \\ &\quad \times [s(\tau + c^+ - t_0) - s(c^+ - t_0)]\, s(c - t_0)\, d^{\lambda+1} F. \end{aligned}$$

Mais comme le produit

$$[s(\tau + c^+ - t_0) - s(c^+ - t_0)]\, s(c - t_0)$$

s'annule, sauf pour

$$t_0 = c^+ = c \geqq 0, \qquad \tau > 0,$$

la dernière intégrale est nulle en raison de la continuité de $F(t_0, \ldots, t_\lambda)$ en tant que fonction de t_0, de sorte que nous avons démontré (S6.15), donc (S3.20), dans l'hypothèse présente.

Nous devons ensuite réexaminer la formule (S3.25) qui, tout comme dans S3, se ramène au moyen de (S2.1) à l'identité (modifiée) (S3.28). Mais la démonstration de cette identité reste inchangée pourvu que $\lim\limits_{N\to\infty} \int_{-iN+0}^{iN+0} e^{cz} g(z) \frac{dz}{z}$ existe, ce qui est le cas dans les hypothèses (S6.1) et (S6.2) sur les fonctions f et F; par conséquent, (S3.25) reste valable. Comme les raisonnements ultérieurs de S3 restent inchangés, nous aboutissons donc à nouveau aux formules (S3.31) et (S3.32) (modifiée).

Pour démontrer enfin que, tout comme les $v_{j\lambda}$, $v_{j+1,\lambda}$ peut être représenté suivant (S6.1) et (S6.2), portons l'expression

$$\text{(S6.17)} \quad v_{j,\lambda+1}(\zeta, z_1, \ldots, z_\lambda; y) = S_{\lambda+2}\, e^{-t_0 y - t_1\zeta - \sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} t_{\nu+1} z_\nu}\, d^{\lambda+2} F_{j,\lambda+1}(t_0, \ldots, t_{\lambda+1})$$

dans (S3.32). En procédant comme lors de la transformation de (S4.6) et (S4.7) et observant que la f. r. f_2 est continue, nous obtenons la formule

$$\text{(S6.18)} \quad v_{j+1,\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = \varepsilon_2(-y)\, v_{j\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) + \int_0^\infty df_2(v)\, S_{\lambda+2}$$
$$\times \left[1 - f_1(t_1)\, e^{-(v+t_0)y - \sum\limits_{1}^{\lambda} t_{\nu+1} z_\nu} - \int_{t_1}^{v+t_0+t_1} df_1(u)\, e^{-(v+t_0+t_1-u)y - \sum\limits_{\nu=1}^{\lambda}(u-t_1+t_{\nu+1}) z_\nu} \right]$$
$$\times d^{\lambda+2} F_{j,\lambda+1}.$$

Il en résulte que la fonction $v_{j+1,\lambda}$ possède elle aussi une représentation de la forme (S6.17) et telle que

$$\text{(S6.19)} \quad S_{\lambda+1} | d^{\lambda+1} F_{j+1,\lambda} | \leqq S_{\lambda+1} | d^{\lambda+1} F_{j\lambda} | + 2 S_{\lambda+2} | d^{\lambda+2} F_{j,\lambda+1} | < \infty.$$

Donc tous les $v_{j\lambda}$ ($j = 0, 1, \ldots$) possèdent la représentation en question, puisque les $v_{0\lambda}$ [équ. (2.39)] peuvent être exprimés ainsi avec

$$\text{(S6.20)} \qquad F_{0\lambda}(t_0, \ldots, t_\lambda) = [(x-1)^\lambda - \delta_{\lambda_0} x^s]\, \mathfrak{s}(t_0) \ldots \mathfrak{s}(t_\lambda).$$

Ainsi le passage de l'équation (2.40) à (2.42) se trouve justifié.

De (S 6.19) résultent, comme dans S 4, les inégalités (S 4.14) à (S 4.16) qui entraînent l'existence, dans le cas présent, des fonctions $V_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$ [équ. (1.43)].

S 7. Démonstration de l'identité

$$U_{\lambda s}\, e^{\sum_1^s z_\nu \max(a_\nu, a_0)} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right) \tag{S 7.1}$$
$$= (K_0 - C_0)\, U_{\lambda s}\, e^{\sum_0^s a_\nu z_\nu} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_0^s z_\nu\right)$$

pour des fonctions $f(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$ qui sont holomorphes dans le domaine (1.24) et y vérifient l'inégalité (S 2.2); les opérateurs C_ν figurant ci-dessus dans les $U_{\lambda s} = U_{\lambda s}[1, \ldots, s]$ sont définis par (1.29).

Nous pouvons admettre que

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_s$$

et supposerons d'abord qu'il existe un indice m tel que

$$a_m \leqq a_0 < a_{m+1} \qquad (1 \leqq m \leqq s;\ a_{s+1} = \infty). \tag{S 7.2}$$

En vue de transformer le deuxième membre de (S 7.1), considérons pour $1 \leqq \nu \leqq m$, donc $a_\nu \leqq a_0$, l'expression

$$(K_0 - C_0)\, C_\nu\, e^{a_0 z_0 + a_\nu z_\nu} f(z_\nu, \ldots; z_0 + z_\nu + \ldots) \tag{S 7.3}$$
$$= C_\nu\, e^{a_\nu z_\nu} f(z_\nu, \ldots; z_\nu + \ldots)$$
$$- \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_C \frac{dz_\nu}{z_\nu} \int_C e^{a_0 z_0 + a_\nu z_\nu} f(z_\nu, \ldots; z_0 + z_\nu + \ldots) \frac{dz_0}{z_0},$$

où les variables d'intégration différentes de z_0 et z_ν sont indiquées par des points. Substituant, dans $\int_C \ldots dz_0$, $z_0 - z_\nu$ à z_0 et intervertissant ensuite l'ordre des intégrations, nous obtenons, en vertu des inégalités $a_0 - a_\nu \geqq 0$ et $\mathrm{R}(z_0 - z_\nu) > 0$,

$$- \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_C \int_C = - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_C dz_0 \int_C e^{a_0 z_0 - (a_0 - a_\nu) z_\nu}$$
$$\times f(z_\nu \ldots, z_0 + \ldots) \frac{dz_\nu}{z_\nu (z_0 - z_\nu)}$$
$$= - C_0\, e^{a_\nu z_0} f(z_0, \ldots; z_0 + \ldots),$$

de sorte que

$$(S\,7.4)\quad (K_0 - C_0)\, C_\nu\, e^{a_0 z_0 + a_\nu z_\nu} f(z_\nu, \ldots; z_0 + z_\nu + \ldots) = 0 \qquad (a_\nu \leqq a_0);$$

de la même façon nous obtenons la relation

$$(S\,7.5)\quad (K_0 - C_0)\, C_\nu\, e^{a_0 z_0 + a_\nu z_\nu} f(\ldots; z_0 + z_\nu + \ldots) = 0 \qquad (a_\nu \leqq a_0).$$

Or dans le deuxième membre de (S 7.1) dont l'opérateur [*voir* équ. (1.31)] est égal à

$$(K_0 - C_0)\left(\sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{s} C_{1'} \ldots C_{\lambda'} \prod^{(\lambda)} K_\nu - C_1 \ldots C_s \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{s}\right),$$

tous les termes où figure un C_ν d'indice $1 \leqq \nu \leqq m$, peuvent, en vertu des deux dernières formules, être supprimés; le deuxième membre de (S 7.1) se réduit ainsi à

$$(S\,7.6)\quad (K_0 - C_0) \sum_{1',\ldots\lambda'=m+1}^{s} C_{1'} \ldots C_{\lambda'}\, e^{a_0 z_0 + \sum_{\nu=1}^{\lambda} a_{\nu'} z_{\nu'}} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; z_0 + \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'}\right).$$

Dans l'hypothèse (S 7.2), le premier membre de (S 7.1) prend au moyen de (S 2.1) la forme

$$(S\,7.7)\quad \begin{cases} U_{\lambda,s}\, e^{a_0 \sum_1^m z_\nu + \sum_{m+1}^{s} a_\nu z_\nu} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^s z_\nu\right) \\ = (K_1 - C_1) \sum_{1',\ldots,\lambda'=2}^{s} C_{1'} \ldots C_{\lambda'}\, e^{a_0 z_1 + \sum_{\nu=1}^{\lambda} a'_{\nu'} z_{\nu'}} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; z_1 + \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'}\right) \\ (a'_2 = \ldots = a'_m = a_0;\ a'_{m+1} = a_{m+1},\ \ldots,\ a'_s = a_s) \end{cases}$$

qui, pour $m = 1$, se confond avec l'expression précédente du deuxième membre. Dans le cas où $m > 1$, les expressions

$$(K_1 - C_1)\, C_\nu\, e^{a_0 z_1 + a_0 z_\nu} f(z_\nu, \ldots; z_1 + z_\nu + \ldots) \qquad (2 \leqq \nu \leqq m)$$

s'annulent en vertu de (S 7.4), de sorte que peuvent être supprimés tous les termes de l'opérateur du deuxième membre de (S 7.7) où figure au moins *un* C_ν d'indice $2 \leqq \nu \leqq m$. Le deuxième membre de

(S 7.7) [c'est-à-dire, le premier membre de (S 7.1)] se réduit ainsi à l'expression

$$(\mathrm{S}\ 7.8)\quad (K_1 - C_1) \sum_{1', \dots, \lambda' = m+1}^{s} C_{1'} \dots C_{\lambda'}\, e^{a_0 z_1 + \sum_{\nu=1}^{\lambda} a_{\nu'} z_{\nu'}} f\left(z_{1'}, \dots, z_{\lambda'};\, z_1 + \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'} \right),$$

identique à (S 7.6), ce qui démontre l'identité (S 7.1) dans le cas où $a_0 \geqq a_1$.

Il nous reste à démontrer cette identité dans le cas où

$$(\mathrm{S}\ 7.9)\qquad a_0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \dots \leqq a_s.$$

Alors, il vient $\max(a_\nu, a_0) = a_\nu$ $(\nu = 1, \dots, s)$, de sorte que (S 7.1) se réduit à la relation

$$C_0 U_{\lambda s}\, e^{\sum_0^s a_\nu z_\nu} f\left(z_1, \dots, z_{\lambda'};\, \sum_0^s z_\nu \right) = 0$$

qui, en utilisant (S 2.1), prend la forme

$$(\mathrm{S}\ 7.10)\qquad (K_1 - C_1)\, C_0 \sum_{1', \dots, \lambda' = 2}^{s} C_{1'} \dots C_{\lambda'}\, e^{a_0 z_0 + a_1 z_1 + \sum_{\nu=1}^{\lambda} a_{\nu'} z_{\nu'}}$$
$$\times f\left(z_{1'}, \dots, z_{\lambda'};\, z_0 + z_1 + \sum_{\nu=1}^{\lambda} z_{\nu'} \right) = 0.$$

Or, en vertu de (S 7.5), il vient

$$(K_1 - C_1)\, C_0\, e^{a_0 z_0 + a_1 z_1} f(\dots;\, z_0 + z_1 + \dots) = 0 \qquad (\text{pour } a_0 \leqq a_1),$$

de sorte que tous les termes du premier membre de (S 7.10) sont nuls. Cela démontre, dans l'hypothèse présente (S 7.9), la relation (S 7.10) et, par conséquent, l'identité (S 7.1).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. CRAMÉR, *Mathematical methods of statistics*, Princeton, 1946.

[2] D. G. KENDALL, *Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain* (*Ann. Math. Stat.*, t. 24, 1953, p. 338 354).

[3] J. KIEFER et J. WOLFOWITZ, *On the theory of queues with many servers* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 78, 1955, p. 1 18).

[4] P. LÉVY, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, 2e édit., Paris, 1954.

[5] F. POLLACZEK, *Ueber das Warteproblem* (*Math. Zeitschr.*, t. 38, 1934, p. 492 537).

[6] F. POLLACZEK, *Sur l'application de la théorie des fonctions au calcul de certaines probabilités continues utilisées dans la théorie des réseaux téléphoniques* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 10, 1946, p. 1 56).

[7] F. POLLACZEK, *Application d'opérateurs intégro combinatoires aux intégrales multiples de Dirichlet* (*Ann. Inst H. Poincaré*, t. 11, 1949, p. 113 133).

[8] F. POLLACZEK, *Réduction de différents problèmes concernant la probabilité d'attente au téléphone à la résolution de systèmes d'équations intégrales* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 11, 1949, p. 135-173).

[9] F. POLLACZEK, *Sur une généralisation de la théorie des attentes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 578-580).

[10] F. POLLACZEK, *Généralisation de la théorie probabiliste des systèmes téléphoniques sans dispositif d'attente* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1469-1470).

[11] F. POLLACZEK, *Développement de la théorie stochastique des lignes télé phoniques pour un état initial quelconque* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 239, 1954, p. 1764 1766).

[12] F. POLLACZEK, *Problèmes stochastiques posés par le phénomène de formation d'une queue d'attente à un guichet et par des phénomènes apparentés* (*Mém. Sc. Math.*, fasc. 136, Paris, 1957).

[13] E. C. TITCHMARSH, *The theory of functions*, Oxford, 1932.

[14] G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, 2e édit., Cambridge, 1944.

TABLE DES MATIÈRES.