MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

ALEXANDER DINGHAS

Minkowskische Summen und Integrale superadditive Mengenfunktionale isoperimetrische Ungleichungen

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 149 (1961)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1961__149__3_0>

Alexander DINGHAS
o. Prof. a. d. Freien Universität Berlin

MINKOWSKISCHE SUMMEN UND INTEGRALE
SUPERADDITIVE MENGENFUNKTIONALE ISOPERIMETRISCHE UNGLEICHUNGEN

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CXLIX

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & Cie, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

1961

DEM ANDENKEN

AN

GEORGES VALIRON

MINKOWSKISCHE SUMMEN UND INTEGRALE

SUPERADDITIVE MENGENFUNKTIONALE. ISOPERIMETRISCHE UNGLEICHUNGEN

Von Dr. Alexander DINGHAS,
o. Prof. a. d. Freien Universitat Berlin.

VORWORT

Der geniale Gedanke von Brunn über die Abbildung zweier konvexer Punktmengen aufeinander durch gleiche Volumenverhaltnisse und die darauf von Minkowski aufgebaute Theorie der konvexen Körper hat in den letzten zwanzig Jahren beachtliche Fortschritte erfahren, die nicht nur zur Verschärfung und Vertiefung alter Resultate, sondern darüber hinaus zu neuen Ergebnissen geführt haben.

Der Plan, einige wesentliche und charakteristische Fortschritte auf diesem Gebiet in einem Bericht zusammenzufassen, tauchte zuerst auf bei einem Besuch von mir bei Herrn Valiron in Paris im Jahre 1953. Später, nach dessen Erkrankung, besprach ich den Plan konkreter mit Hörrn Fréchet in Berlin, der auch die Liebenswürdigkeit hatte, Herrn Villat dafür zu interessieren.

Die Darstellung eines so umfangreichen und so alten Gebietes, wie das hier zur Sprache kommende, zwingt den Verfasser zur Auswahl und gelegentlichen Betonung dessen, was er (mit mehr oder weniger Recht) für wichtig hält. Das gibt dem Buch den Reiz des persönlichen Geschmacks. Ich versuche hier, eine Linie zu halten, die bei Brunn und Minkowski anfängt und über Lusternik zu den neuesten Arbeiten führt. Auf dem Wege zeige ich dem interessierten Leser, was der mir zur Verfügung stehende beschränkte Raum zu zeigen gestattet. Herrn Prof. Villat gebührt mein Dank dafür, dass er den Druck des Manuskripts in deutscher Sprache genehmigte, ein sonst nicht üblicher Vorgang in dieser vorwiegend französisch sprachigen Sammlung.

Herr Privatdozent Dr. H. Pachale und die Herren J. Tippe und B. Watzek haben mir bei der Durchsicht der Korrekturen Hilfe geleistet. Fräulein Hertha Schleiff hat sich viel Mühe gegeben, das druckfertige Manuskript in die Schreibmaschine zu übertragen. Ihnen gebührt mein Dank.

Zuletzt gilt mein nicht minderer Dank dem Verlag Gauthier-Villars in Paris für das Eingehen auf jeglichen Wunsch und für die rasche Drucklegung.

EINLEITUNG

Der gesamte Fragenkomplex, worüber hier berichtet wird, beginnt mit der Dissertation von Brunn [1, 2] und den kurz darauf einsetzenden wichtigen Arbeiten von Hermann Minkowski [1]. Von hier aus führt ein mehr oder weniger gerader Weg zum Begriff des superadditiven Mengenfunktionals, der, soweit er mit den klassischen Sätzen von Brunn-Minkowski und Lusternik zusammenhängt, den Hauptgegenstand dieses *Mémorials* bildet.

Das allgemeinste und zugleich einfachste Problem, dem die Brunn-Minkowskische Theorie der konvexen Körper untergeordnet werden kann, lässt sich durch folgende Begriffsbildung abgrenzen :

Es sei H_0 eine additiv geschriebene, kommutative Halbgruppe (kurz : ein Halbmodul) mit den Elementen $x, y, \ldots$, und es bedeuten $A, B, \ldots$ nichtleere Teilmengen von H_0.

Man definiere die Menge A + B durch die Gleichung

$$(1)\qquad A + B = \{ x + y \mid x \in A, y \in B \}.$$

Bezeichnet dann 2^{H_0} die Gesamtheit aller nichtleeren Teilmengen von H_0, so bildet diese (Hille [1]) wegen der Erfüllbarkeit der beiden Bedingungen

$$1.\quad A + B \in 2^{H_0}$$

und

$$2.\quad (A + B) + C = A + (B + C) \qquad (A, B, C \in 2^{H_0})$$

eine additive Halbgruppe, die $H_0 (x \leftrightarrow \{ x \}!)$ als Teilhalbmodul enthält. Wir bezeichnen sie als den durch H_0 erzeugten Minkowskischen Halbmodul.

Liegt nun ein bestimmter Teilhalbmodul X von 2^{H_0} vor, und ist Φ ein darauf definiertes, endlichwertiges, nichtnegatives Mengenfunktional, so erhebt sich die wichtige Frage, inwieweit Φ superadditiv ist, d.h. die Eigenschaft besitzt, dass für je zwei Elemente A, B von X

$$(2)\qquad \Phi(A + B) \geqq \operatorname{Min} \{ F, \Phi(A) + \Phi(B) \}$$

mit

$$(3)\qquad F = \sup \{ \Phi(M) \mid M \in X \}$$

ist. Gilt anstelle (2) die Ungleichung

$$(4)\qquad \Phi(A + B) \leqq \Phi(A) + \Phi(B),$$

so soll Φ subadditiv heissen.

Die Ungleichung (2) kann, je nachdem F endlich oder unendlich ist, auf die beiden Normalformen

$$(5)\qquad \Phi(A + B) \geqq \operatorname{Min} \{ 1, \Phi(A) + \Phi(B) \}$$

bzw.

$$(6)\qquad \Phi(A + B) \geqq \Phi(A) + \Phi(B)$$

gebracht werden. Superadditive Mengenfunktionale vom Typus (5) kommen beispielsweise in der Schnirelmanschen additiven Zahlentheorie und beim Satz von Cauchy-Davenport vor. Auch die klassische isoperimetrische Aufgabe in einem Riemannschen Raum R^n von positiver Krümmung führt zu einer Ungleichung von der Form (5).

Ist H_0 ein reeller Vektorraum und enthält X mit A auch die Menge

$$(7) \qquad \lambda A = \{ \lambda x \mid x \in A,\ \lambda \text{ reell} \},$$

so heisst Φ ein lineares Mengenfunktional, falls

$$\Phi(\lambda A) = |\lambda| \Phi(A)$$

gilt. Jedes nichttriviale, lineare, superadditive Mengenfunktional ist offenbar vom Typus (6). Ist Φ ein solches Mengenfunktional und schreibt man (6) in der Form

$$(8) \qquad \Phi(A + \lambda B) \geqq \Phi(A) + \lambda \Phi(B) \qquad (\lambda > 0),$$

so folgt daraus durch Grenzübergang

$$(9) \qquad \Omega(A \mid B) \geqq \Phi(B)$$

mit

$$(10) \qquad \Omega(A \mid B) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\Phi(A + \lambda B) - \Phi(A)}{\lambda}.$$

Die Ungleichung (9) bzw. eine Potenz von (9) bezeichnen wir als die zu (6) gehörende Ungleichung für die Relativoberfläche. Geht man entsprechend von der Ungleichung

$$(11) \qquad \Phi(A + \lambda B) \leqq \Phi(A) + \lambda \Phi(B) \qquad (\lambda > 0)$$

aus, so erhält man

$$(12) \qquad \Omega(A \mid B) \leqq \Phi(B).$$

Das älteste und zugleich grundlegendste Resultat in der Richtung, innerhalb spezieller Halbmoduln lineare, superadditive Mengenfunktionale anzugeben, stammt von Brunn [1] und Minkowski [1], und lautet :

Der Minkowskische Halbmodul 2^M, dessen Elemente die nichtleeren, abgeschlossenen, konvexen Teilmengen von E^n sind, besitzt ein nichttriviales, superadditives Mengenfunktional Φ, nämlich die n-te Wurzel des Jordanschen Inhalts der betreffenden Menge.

Dieses Ergebnis wurde von Lusternik [1] im Jahre 1936 erheblich vertieft und verallgemeinert. Lusternik zeigte im wesentlichen :

Die Ungleichung (6) gilt auch dann, wenn A, B beliebige, nichtleere Teilmengen von E^n sind, sobald Φ^n das innere Lebesguesche Mass L_* bedeutet.

Die Mengen, für die in (6) und (9) das Gleichheitszeichen steht, sind im Falle des Brunn-Minkowskischen Falles relativ leicht zu ermitteln. Dagegen stösst man bei der entsprechenden Frage im Lusternikschen Fall auf erhebliche Schwierigkeiten analytischer Natur, die erst in der neueren Zeit zum Teil behoben werden konnten. Manches schwierige Problem [z. B. der Fall $L(A) = L(B) = 0$] bleibt noch ungelöst. Mit Rücksicht auf den ausgedehnten Stoff des Brunn-Minkowski-Lusternikschen Fragenkomplexes und die damit zusammenhängenden isoperimetrischen Ungleichungen musste oft klassisches Material entweder unberücksichtigt bleiben oder neu geformt werden. Dieser Entschluss fiel mir zum Teil umso leichter, als die inzwischen erschienenen ausgezeichneten Bücher von Herrn Hadwiger in Bern mich der Mühe enthoben haben, manches, wie z. B. den klassischen Fall konvexer Körper, in aller Ausführlichkeit zu behandeln. Dort findet der Leser auch ein vollständiges Literaturverzeichnis. Was vorliegendes Mémorial anbetrifft, so habe ich mich hier bemüht, den Begriff des superadditiven Mengenfunktionals im abstrakten Raum aller nichtleeren Teilmengen von E^n besonders herauszustellen und das Hauptgewicht der Darstellung darauf zu legen. Die dazu notwendige Vorarbeit war lang und konnte erst vor kurzem durch die Publikation meiner Arbeiten [9], [10] und [11] zum Abschluss (soweit ein solcher in der Mathematik möglich ist) gebracht werden. Das Warten auf das Erscheinen dieser Arbeiten erklärt auch zum Teil die verspätete Drucklegung des Manuskripts.

ERSTES KAPITEL

Minkowskische Mengensummen und superadditive Mengenfunktionale

1. Minkowskische Halbmoduln und Minkowskische Vektorräume. — Es bedeute im folgenden E^n den gewöhnlichen Zahlenraum, beschrieben durch die (euklidischen) Koordinaten $v_1, \ldots, v_n$ seiner Punkte. Der entsprechende Punkt soll kurz durch v bezeichnet werden. Für ein reelles α soll ferner αv den Punkt mit den Koordinaten $\alpha v_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ bezeichnen. Sind $x(x_1, \ldots, x_n)$, $y(y_1, \ldots, y_n)$ zwei beliebige Punkte von E^n, so stellt definitions gemäss $x+y$ den Punkt mit den Koordinaten $x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n$ dar.

Folgende Teilmengen von E^n erzeugen wichtige Minkowskische Halbmoduln :

A. Die Menge N aller Punkte x von E^n mit $x_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Die Teilmenge von E^n, deren Punkte x durch die Bedingungen $x_k \geq 0$ charakterisiert sind, soll mit $\overline{N}$ bezeichnet werden. Sowohl N als auch $\overline{N}$ sind Halbvektorräume, d. h. sie genügen den Axiomen (Banach [1]) :

1. $x+y = y+x$;
2. $x+(y+z) = (x+y)+z$;
3. Aus $x+y = x+z$ folgt $y = z$;
4. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad (\alpha > 0)$;
5. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \quad (\alpha > 0, \beta \geq 0)$

und

6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

B. Die nichtleeren, kompakten, konvexen Punktmengen von E^n. Der daraus entstehende Minkowskische Halbmodul wird mit 2^{M_0} bezeichnet. Beschränkt man sich auf solche konvexen Körper, die mindestens einen inneren Punkt aufweisen, so erhält man den wichtigen Teilmodul 2^M.

Der Halbmodul 2^{M_0} stellt unter Zugrundelegung der Operationen (1) und (7) einen Vektorraum im Banachschen Sinne dar. Sind in der Tat A, B zwei Elemente von 2^{M_0}, so sieht man leicht, dass die ersten zwei und letzten drei Axiome in A erfüllt sind. Dass auch 3. erfüllt ist, sieht man am leichtesten, wenn man A, B und A + B als Durchschnitt ihrer Stützhalbräume auffasst.

C. Die nichtleeren, kompakten Mengen von E^n. Der dadurch erzeugte Minkowskische Halbmodul wird mit 2^H bezeichnet werden.

D. Die nichtleeren Teilmengen von E^n. Der dadurch erzeugte Minkowskische Halbmodul wird mit 2^{H_0} bezeichnet werden.

Es gilt offenbar

$$N \subset 2^M \subset 2^{M_0} \subset 2^H \subset 2^{H_0}.$$

Für die geschichtlichen Zusammenhänge dieser Nummer, insbesondere für den Halbmodul 2^M sind neben Minkowski [1] noch Bonnesen-Fenchel [1] und Fenchel [1] zu erwähnen. Die Bezeichnung Minkowskische Addition tritt, soviel ich weiss, zuerst bei Hadwiger [4] auf.

2. Stetige und bewegungsinvariante Mengenfunktionale. — Bedeutet wie üblich $|x-y|$ die gewöhnliche Entfernung von x und y, so soll $|A, B|$ bei gegebenen, nichtleeren $A, B \subset E^n$ die durch die Gleichung

$$(2.1) \qquad |A, B| = \operatorname{Max}\left\{ \sup_{x \in A}\left(\inf_{y \in B} |x-y|\right), \sup_{y \in B}\left(\inf_{x \in A} |x-y|\right)\right\}$$

definierte Grösse darstellen. Man stellt leicht fest, dass $|A, B|$ die Eigenschaften

1. $|A, B| \geqq 0$;
2. $|A, A| = 0$;
3. $|A, B| = |B, A|$

und

4. $|A, B| \leqq |A, C| + |B, C| \quad (C \subseteq E^n)$

aufweist. Da noch für $A, B \in 2^H$ aus $|A, B| = 0$ stets $A = B$ folgt, so metrisiert (2.1) den Minkowskischen Halbmodul 2^H.

Neben der Definition (2.1) ist folgende gleichwertige Definition von A, B von Nutzen :

Es sei allgemein M eine nichtleere Teilmenge von E^n. Man lege um jeden Punkt x von M eine offene Kugel S_x^h mit dem Radius $h\,(h > 0)$ und dem Mittelpunkt x und bilde die Menge (Cantor [1])

$$(2.2) \qquad M^h = \cup \{ S_x^h \mid x \in M \}.$$

Dann gilt

$$(2.3) \qquad |A, B| = \inf \{ h \mid A^h \supset B,\ B^h \supset A \}.$$

Die Menge M^h heisst oft die Cantor-Minkowskische Menge von M in der Entfernung h oder auch die Aussenmenge von M.

Es bedeute nun X einen Teilmodul von 2^H. Dann heisst bekanntlich X vollständig, wenn jede Cauchysche Folge ein Grenzelement hat, das in X enthalten ist. Dabei wird unter einer Cauchyschen

Folge eine Folge (A_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ verstanden mit der Eigenschaft, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$ existiert derart, dass für alle m, $n \geqq n_0$

(2.4) $$|A_m, A_n| < \varepsilon$$

gilt.

Nach Definition existiert für eine Cauchysche Folge (A_n) ein Element A von X mit der Eigenschaft

(2.5) $$\lim_{n \to \infty} |A_n, A| = 0.$$

Umgekehrt ist jede Folge (A_n), für die ein $A \in X$ existiert derart, dass (2.5) gilt, eine Cauchysche Folge.

Liegt der Halbmodul 2^{H_0} vor, so kann dieser durch die Entfernung (2.1) nicht metrisiert werden, da aus $|A, B| = 0$ nicht ohne weiteres $A = B$ folgt. In diesem Falle wird (2.5) durch die Gleichung

(2.6) $$\lim_{n \to \infty} A_n = A$$

ersetzt. Für den Teilmodul 2^{H} von 2^{H_0} fallen bekanntlich die Definitionen (2.5) und (2.6) zusammen (Kuratowski [1]).

Es sei X ein Minkowskischer Halbmodul und Φ ein auf X definiertes Mengenfunktional. Dann ist Φ endlichwertig, wenn für jedes beschränkte, nichtleere $A \in X$ $\Phi(A)$ endlich ausfällt.

Ist X vollständig, so heisst Φ stetig, wenn aus (2.5) bzw. (2.6)

(2.7) $$\lim_{n \to \infty} \Phi(A_n) = \Phi(A)$$

folgt.

Mengenfunktionale, die in den nachfolgenden Entwicklungen eine Rolle spielen, weisen im allgemeinen neben der Endlichwertigkeit und der Stetigkeit noch folgende Eigenschaften auf :

1. Gilt $A, B \in X (A \subseteq B)$, so ist

(2.8) $$\Phi(A) \leqq \Phi(B);$$

2. Für jedes $A \in X$ gilt

(2.9) $$\Phi(A) \geqq 0.$$

3. $\Phi(A)$ ist translationsinvariant.

Später werden weitere wichtige Klassen von superadditiven Mengenfunktionalen besprochen werden. Für die hier entwickelten Zusammenhänge vgl. man an erster Stelle Hadwiger [9] und [10], sowie Dinghas [10].

3. Das Hölder-Minkowskische Funktional Φ_r. — Ist $x \in \mathrm{N}$ und sind r_k $(k=1, \ldots, n;\ n>1)$ positive Zahlen mit $r_1+\ldots+r_n=1$, so setze man für $r \neq 0$, $-\infty<r<+\infty$

$$\Phi_r(x)=\left(r_1 x_1^r+r_2 x_2^r+\ldots+r_n x_n^r\right)^{\frac{1}{r}} \tag{3.1}$$

und definiere $\Phi_{-\infty}(x)$, $\Phi_0(x)$ und $\Phi_\infty(x)$ durch die Gleichungen

$$\Phi_{-\infty}(x)=\lim_{r \rightarrow-\infty} \Phi_r(x)=\operatorname{Min}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}. \tag{3.2}$$

$$\Phi_0(x)=\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_r(x)=x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n} \tag{3.3}$$

und

$$\Phi_\infty(x)=\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r(x)=\operatorname{Max}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}. \tag{3.4}$$

Die Funktion Φ_r hat bemerkenswerte Eigenschaften und bildet die Quelle einer Reihe wichtiger Ungleichungen der Analysis.

Satz 1. — *Bei festem $x \in \mathrm{N}$, $x \neq \lambda . 1$* [1] *ist $\Phi_r(x)$ eine eigentlich monoton wachsende stetige Funktion von r, also*

$$\Phi_{-\infty}(x)<\Phi_r(x)<\Phi_{r'}(x)<\Phi_\infty(x) \qquad (-\infty<r<r'<\infty). \tag{3.5}$$

Ferner gilt für $x, y \in \mathrm{N}$

$$\Phi_r(x+y)>\Phi_r(x)+\Phi_r(y) \qquad (-\infty<r<1) \tag{3.6}$$

bzw.

$$\Phi_r(x+y)<\Phi_r(x)+\Phi_r(y) \qquad (1<r<+\infty) \tag{3.7}$$

sobald x, y linear unabhängig sind.

Wir beweisen elementar zunächst den

Hilfssatz 1. — *Ist $x \neq \lambda . 1$, so ist*

$$\Phi_2(x)>\Phi_1(x). \tag{3.8}$$

[1] Solange 1 als Punkt von N gedacht wird, versteht man darunter den Vektor mit den Koordinaten 1.

Beweis. — Man setze für $k = 1, 2, \ldots, n$

$$F_k = (r_1 + \ldots + r_k)(r_1 x_1^2 + \ldots + r_k x_k^2) - (r_1 x_1 + \ldots + r_k x_k)^2$$

und bilde $F_{l+1} - F_l$ $(2 \leqq l < n)$. Man findet dann

$$F_{l+1} - F_l = \sum_{\lambda=1}^{l} r_{l+1} r_\lambda (x_{l+1} - x_\lambda)^2.$$

Daraus folgt wegen $F_2 = r_1 r_2 (x_1 - x_2)^2$ und $r_1 + \ldots + r_n = 1$

$$\Phi_2^2(x) - \Phi_1^2(x) = g(x_k \mid r_k) \tag{3.9}$$

mit

$$g(x_k \mid r_k) = \sum_{(k>l)} r_l r_k (x_l - x_k)^2 \geqq 0. \tag{3.10}$$

Wir beweisen jetzt den Satz 1. Man setze für $0 \leqq \lambda \leqq 1$

$$F_r(\lambda) = \Phi_r((1-\lambda)x + \lambda y) - \{(1-\lambda)\Phi_r(x) + \lambda \Phi_r(y)\} \tag{3.11}$$

und bilde $F''_r(\lambda)$. Man findet dann

$$F''_r(\lambda) = (r-1)\Phi_r(u)\, g\left(\frac{y_k - x_k}{u_k} \,\middle|\, \frac{r_k u_k^r}{\Phi_r^r(u)}\right) \tag{3.12}$$

mit $u_k = (1-\lambda)x_k + \lambda y_k$. Daraus folgt, dass $F_r(\lambda)$ für $r > 1$ konvex $[F''_r(\lambda) < 0]$ und für $r < 1$ konkav $[F''_r(\lambda) > 0]$ ist. Setzt man dann $\lambda = \frac{1}{2}$, so erhält man den Beweis von (3.6) und (3.7). Das Gleichheitszeichen dort kann offenbar dann und nur dann eintreten, wenn g verschwindet, d. h. wenn x und y linear abhängig sind.

Bildet man $F'_r(0)$ und $F''_r(0)$, so findet man leicht

$$F'_r(0) = \Omega(x \mid y) - \Phi_r(y) \tag{3.13}$$

und

$$F''_r(0) = (r-1)\Phi_r(x)\, g\left(\frac{y_k - x_k}{x_k} \,\middle|\, \frac{r_k x_k^r}{\Phi_r^r(x)}\right). \tag{3.14}$$

Hierbei ist

$$\Omega(x \mid y) = \sum_{1}^{n} r_k x_k^{r-1} y_k / \Phi_r^{r-1}(x). \tag{3.15}$$

Somit gilt

$$(3.16)\qquad \sum_1^n r_k x_k^{r-1} y_k \geqq \Phi_r^{r-1}(x)\,\Phi_r(y)$$

oder

$$(3.17)\qquad \sum_1^n r_k x_k^{r-1} y_k \leqq \Phi_r^{r-1}(x)\,\Phi_r(y),$$

je nachdem $r < 1$ oder $r > 1$ ist. In beiden Ungleichungen tritt das Gleichheitszeichen dann und nur dann ein, wenn $g = 0$ ist, d. h. für linear abhängige x und y.

Zum Beweis der Monotonie von $\Phi_r(x)$ bei festem $x \in \mathrm{N}$ verfahre man so : Es sei zunächst $r > 0$ und

$$(3.18)\qquad \Phi_{r'}(x) \leqq \Phi_r(x) \qquad (r < r').$$

Man setze $y_k = x_k^{r'}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Dann folgt aus (3.18)

$$(3.19)\qquad \Phi_1(y) \leqq \Phi_\sigma(y) \qquad \left(0 < \sigma = \frac{r}{r'} < 1\right).$$

Nun gilt für kleine $\varepsilon > 0$

$$\Phi_\sigma^\sigma(1 + \varepsilon y) = 1 + \varepsilon\sigma\,\Phi_1(y) + \frac{\varepsilon^2}{2}\sigma(\sigma - 1)\,\Phi_2^2(y) + (\varepsilon^3),$$

wobei allgemein (ε^α) $(\alpha > 0)$ eine Grösse bedeutet, die für kleine ε absolut genommen kleiner als $\mathrm{K}\varepsilon^\alpha$ mit einem endlichen von ε unabhängigen K bleibt. Andererseits ist mit Rücksicht auf (3.6)

$$\Phi_\sigma(1 + \varepsilon y) \geqq 1 + \varepsilon\,\Phi_\sigma(y)$$

und somit durch Vergleich

$$(3.20)\qquad 2\,\Phi_1(y) - (1 - \sigma)\,\varepsilon\,\Phi_2^2(y) + (\varepsilon^2) \geqq 2\,\Phi_\sigma(y) - (1 - \sigma)\,\varepsilon\,\Phi_\sigma^2(y).$$

Lässt man hier $\varepsilon \to 0$ konvergieren so folgt daraus in Verbindung mit (3.19) $\Phi_1(y) = \Phi_\sigma(y)$. Da nun diese Bedingung dann und nur dann erfüllt ist, wenn $y = \lambda . 1$ ist, so ist hiermit (für $r > 0$) die Monotonie von $\Phi_r(x)$ bewiesen.

Ist $r < 0$, so bezeichne allgemein $\frac{1}{x}$ den Punkt von N mit den Koordinaten $\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)$. Dann gilt

$$(3.21)\qquad \Phi_r(x) = \Phi_{-r}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right),$$

und somit ist $\Phi_r(x)$ für $r < 0$ mit abnehmendem r abnehmend. Das beweist vollständig den Satz 1 ([1]).

Die Superadditivität von

$$\Phi_0(x) = \prod_1^n x_k^{r_k} \tag{3.22}$$

lässt sich ohne Differentiationsprozesse folgendermassen begründen :

Hilfssatz 2. — *Es sei*

$$0 < a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_l < +\infty,$$

und es bedeute allgemein G_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$ *das geometrische Mittel von* $a_1, \ldots, a_k$. *Setzt man dann*

$$P_{k-2}(x, a) = 1\, x^{k-2} + 2x^{k-3}a + \ldots + (k-1)\, a^{k-2}$$
$$[k > 2,\ P_0(x, a) = 1],$$

so gilt

$$a_1 + \ldots + a_l - l G_l = \sum_2^l \left(a_k^{\frac{1}{k}} - G_k^{\frac{1}{k}}\right)^2 P_{k-2}\left(a_k^{\frac{1}{k}}, G_k^{\frac{1}{k}}\right). \tag{3.23}$$

Beweis. — Man setze

$$F_k = a_1 + \ldots + a_k - k G_k \qquad (2 \leqq k \leqq l).$$

Dann ist

$$F_k - F_{k-1} = a_k - k G_k + (k-1) G_{k-1},$$

und es genügt, wegen

$$F_2 = (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1})^2$$

die Gleichung

$$a_k - k G_k + (k-1) G_{k-1} = \left(a_k^{\frac{1}{k}} - G_{k-1}^{\frac{1}{k}}\right)^2 P_{k-2}\left(a_k^{\frac{1}{k}}, G_{k-1}^{\frac{1}{k}}\right)$$

zu beweisen. Das folgt aber leicht aus der Identität

$$x^k - k x y^{k-1} + (k-1) y^k = (x-y)^2 P_{k-2}(x, y).$$

([1]) Die Monotonie von $\Phi_r(x)$ kann auch aus der Ungleichung

$$\frac{d^2}{dr^2} \log \Phi_r^r(x) = \frac{1}{2} \Phi_r^{2r}(x) g\left(\log x_k \,\middle|\, \frac{r_k x_k^r}{\Phi_r^r(x)}\right) \geqq 0$$

geschlossen werden, welche die logarithmische Konvexität von $\Phi_r^r(x)$ als Funktion von r zum Ausdruck bringt. Denn letztere Eigenschaft hat die Tatsache zur Folge, dass $\log \Phi_r^r(x)/r = \log \Phi_r(x)$ nicht abnimmt.

Aus (3.23) folgt leicht, wenn man dort die ersten p_1 Zahlen a_k gleich $\sqrt{x_1}$ setzt, die darauf folgenden p_2 a_k gleich $\sqrt{x_2}$, usw., die Ungleichung

$$\left(\sum_1^n r_k \sqrt{x_k}\right)^2 - \prod_1^n x_k^{r_k} \geqq 0$$

mit rationalen

$$r_k = \frac{p_k}{l} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\, p_1 + \ldots + p_n = l).$$

Somit wird in Verbindung mit (3.9)

$$\sum_1^n r_k x_k - \prod_1^n x_k^{r_k} \geqq g(\sqrt{x_k} \mid r_k). \tag{3.24}$$

Das Uebrige folgt durch Grenzübergang der rationalen r_k gegen beliebige solche unter Beibehaltung der Bedingungen $r_k > 0$ und $r_1 + \ldots + r_n = 1$. Dass man nun aus (3.24) durch Addition die Ungleichung

$$\Phi_0(x+y) \geqq \Phi_0(x) + \Phi_0(y) \tag{3.25}$$

gewinnen kann, ist wohl trivial und bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Der Uebergang zu der Integralform des Funktionals $\Phi_r(x)$ geschieht ohne Schwierigkeit. Es bedeute z. B. J das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ und N_c die Gesamtheit aller in J stetigen, positiven Funktionen $f(x)$. Es sei ferner $\mu(x)$ ein Mass auf J mit

$$\int_J d\mu(x) = 1. \tag{3.26}$$

Dann existiert für jedes $f \in N_c$ das Funktional

$$\Phi_r(f) = \left\{\int_J f(x)^r d\mu(x)\right\}^{\frac{1}{r}}. \tag{3.27}$$

Sind f, $g \in N_c$, so gilt z. B.

$$\Phi_r(f+g) \geqq \Phi_r(f) + \Phi_r(g). \tag{3.28}$$

Das Analogon von (3.28) für $r = 0$, d. h. das Analogon von (3.25), führt zu der klassischen Hölderschen Ungleichung

$$\prod_1^n \left\{\int_J f_k(x)\, d\mu(x)\right\}^{r_k} \geqq \int_J \left\{\prod_1^n f_k(x)^{r_k}\right\} d\mu(x). \tag{3.29}$$

Der Fall $r_k = \frac{1}{n}$ führt zu den klassischen Minkowskischen Ungleichungen

$$M_r(x+y) \geqq M_r(x) + M_r(y) \qquad (0 < r \leqq 1)$$

bzw.

$$M_r(x+y) \leqq M_r(x) + M_r(y) \qquad (1 \leqq r < +\infty)$$

mit

$$M_r(x) = x_1^r + \ldots + x_n^r.$$

Als eine gute Orientierung für den Leser kann, was die hier (mit zum Teil neuen Methoden) entwickelten Ungleichungen und Zusammenhänge betrifft, das klassische Buch von Hardy-Littlewood-Pólya [1] dienen. Für den Beweis des Hilfssatzes 2 und die damit zusammenhängenden Gesichtspunkte vgl. man auch Dinghas [3].

4. Die Minkowskischen Funktionale V_k. — Liegt ein Minkowskischer Halbmodul X vor, und ist (ψ_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$ eine endliche Menge von superadditiven Mengenfunktionalen über X, so ist $\Phi_r(\psi)$ ebenfalls ein superadditives oder subadditives Mengenfunktional. Hierbei bedeutet ψ den Punkt in E^n mit den Koordinaten $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Genauer gesagt, gilt der

Satz 3. — *Ist* $0 \leqq r \leqq 1$, *so ist* $\Phi_r(\psi)$ *ein superadditives Mengenfunktional.*

Beweis. — Es seien A, B $\in$ X. Dann gilt

$$\psi_k(A+B) \geqq \psi_k(A) + \psi_k(B) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und somit wegen

$$\Phi_r(\psi(A) + \psi(B)) \geqq \Phi_r(\psi(A)) + \Phi_r(\psi(B))$$
$$\Phi_r(\psi(A+B)) \geqq \Phi_r(\psi(A)) + \Phi_r(\psi(B)).$$

Entsprechendes gilt, wenn man anstelle von Summen Integrale verwendet.

Eine wichtige Klasse superadditiver Mengenfunktionale über dem Halbmodul 2^M liefern die sogenannten Steinerschen Koeffizienten.

Es bedeute S die Einheitskugel von E^n und A eine beschränkte konvexe Punktmenge. Dann gilt nach Steiner [1]

$$|A + hS| = \sum_0^n \binom{n}{k} V_{n-k}(A) h^k. \tag{4.1}$$

Die (Steinerschen) Koeffizienten $V_k(A)$ sind nicht negativ und in Bezug auf die Transformation $A \to \lambda A (\lambda > 0)$ jedes Mal homogen vom Grad k. Es zeigt sich, dass $V_n(A)$ gleich dem Jordanschen Inhalt $|A|$ von A und $nV_{n-1}(A)$ gleich der Oberfläche von A ist. Ist A von der Dimension $m < n$, so sind sämtliche Koeffizienten $V_k(A)$ mit $k > m$ gleich Null. Bildet man die Mengen

$$(A + \lambda S) + hS \qquad (\lambda, h > 0)$$

und

$$A + (h + \lambda) S,$$

so erhält man durch Vergleich der Koeffizienten in den entsprechenden Steinerschen Formeln (4.1) die Gleichungen

$$V_k(A + \lambda S) = \sum_0^k \binom{k}{\mu} V_{k-\mu}(A) \lambda^\mu. \tag{4.2}$$

Hierbei ist $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Fenchel [2], [3] und A. Alexandroff [1], [2] haben u. a. bewiesen, dass innerhalb der Minkowskischen Halbgruppe 2^M sämtliche Funktionale $V_k(M)^{\frac{1}{k}}$ $(k = 1, \ldots, n)$ superadditiv sind, d. h. die Eigenschaft

$$V_k(A + B)^{\frac{1}{k}} \geqq V_k(A)^{\frac{1}{k}} + V_k(B)^{\frac{1}{k}} \tag{4.3}$$

für je zwei $A, B \in 2^M$ aufweisen. Wie in den angeführten Arbeiten von Fenchel noch gezeigt wird, tritt hier das Gleichheitszeichen dann und nur dann ein, wenn A, B homothetisch sind (also falls sie durch Translation und Ähnlichkeit ineinander übergehen).

Als Spezialfall dieser tiefgreifenden Untersuchungen von Fenchel und Alexandroff hat man den

Satz 4. — *Es sei* $x \in N$ *und* $0 < \lambda < +\infty$. *Man setze*

$$\prod_1^n (1 + \lambda x_k) = \sum_0^n \binom{n}{k} S_k(x) \lambda^k. \tag{4.4}$$

Dann gilt für $x, y \in N$

$$S_k(x + y)^{\frac{1}{k}} \geqq S_k(x)^{\frac{1}{k}} + S_k(y)^{\frac{1}{k}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.5}$$

und das Gleichheitszeichen tritt dann und nur dann ein, wenn die Punkte x und y linear abhängig sind.

Satz 4 kann mit Hilfe von (4.3) folgendermassen bewiesen werden : Es bedeute Q den Einheitswürfel

$$(4.6) \qquad 0 \leqq t_k \leqq 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und Π ein achsenparalleles Parallelotop, von dem angenommen wird, dass zwei diagonal gegenüberliegende Ecken in den Punkten $(0, \ldots, 0)$ und $(x_1, \ldots, x_n)$ liegen. Bildet man dann $\Pi + hS$ und $\Pi + hQ$, so stellt man leicht fest, dass

$$S_k(x) = \alpha_k V_k(\Pi) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

mit $n + 1$ von x unabhängigen Konstanten α_k gilt. Das genügt zum Beweis von (4.5) und zur Erledigung der dazugehörigen Einzigkeitsfrage. Die Steinerschen Koeffizienten V_k weisen interessante Eigenschaften auf, die in zwei Sätzen von Hadwiger [9] ihren Niederschlag finden. Der interessierte Leser findet sowohl dort als auch bei Hadwiger [2], [6], [8] und [12] eine ausgezeichnete Darstellung der Theorie der additiven bzw. konkaven Eikörperfunktionale. Wir kommen am Schluss des nächsten Kapitels darauf zurück.

5. Die Brunn-Minkowskische Abbildung und der Brunn-Minkowskische Satz. — Brunns fundamentales Ergebnis über die Superadditivität der n-ten Wurzel des Inhalts einer konvexen Punktmenge innerhalb des Halbmoduls 2^M kann am einfachsten durch eine (der Brunnschen verwandte) Methode erhalten werden, welche die Superadditivität des Funktionals $\Phi_0(x)$ benutzt.

Es bedeute zunächst M einen konvexen Körper von E^n, der mindestens einen inneren Punkt enthält, und es sei

$$\varphi_M(x) = \varphi_M(x_1, \ldots, x_n)$$

die charakteristische Funktion von M. Man schreibe $g_n^M(x)$ für $\varphi_M(x)$ und definiere für $k = 1, \ldots, n$ die Funktionen

$$g_{k-1}^M(x) = g_{k-1}^M(x_1, \ldots, x_k)$$

durch die Gleichungen

$$(5.1) \qquad g_{k-1}^M(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_k^M(x_1, \ldots, x_{k-1}, v)\, dv.$$

Es bezeichne jetzt M_* den offenen Kern von M. Man nehme $x \in M_*$ und bilde M_* mit Hilfe der Gleichungen

(5.2) $$\int_{-\infty}^{x_k} g_k^M(x_1, \ldots, x_{k-1}, v)\, dv = g_{k-1}^M(x_1, \ldots, x_{k-1})\tau_k$$

auf die Punktmenge

(5.3) $$T_* : \; 0 < \tau_k < 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ab.

Die Abbildung $M_* \leftrightarrow T_*$ ist ein-eindeutig und stetig. Ferner sind, wie man leicht sieht, sowohl $\tau_k = \tau_k(x_1, \ldots, x_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$ als auch ihre Umkehrungen $x_k = x_k(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ in Bezug auf die jeweils letzte Veränderliche monoton wachsend. Für die Jacobische Funktionaldeterminante

$$J(x \mid \tau) = \left| \frac{\partial x_i}{\partial \tau_k} \right|$$

in M_* findet man leicht

$$J(x \mid \tau) = \prod_1^n \frac{\partial x_k}{\partial \tau_k} = \prod_1^n \frac{g_{k-1}^M}{g_k^M} = g_0^M$$

mit

(5.4) $$g_0^M = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n^M dx_1 \ldots dx_n = | M |.$$

Die Abbildung $M_* \leftrightarrow T_*$ soll im folgenden als die Brunn-Minkowskische Abbildung bezeichnet werden. Es seien jetzt A, B zwei konvexe Punktmengen mit inneren Punkten. Man bilde beide Punktmengen A_*, B_* mit Hilfe der Transformation (5.2) auf T_* ab und schreibe kurz $x^A(\tau)$ bzw. $x^B(\tau)$ für die Vektoren mit den Komponenten x_k^A bzw. x_k^B $(k = 1, \ldots, n)$. Es sei

(5.5) $$C = \{ x \mid x = x(\tau) = x^A(\tau) + x^B(\tau),\ \tau \in T_* \}.$$

Dann gilt $C \subseteq A + B$, und somit wird

$$| A + B | = \int_C dx_1 \ldots dx_n \geqq \int_{T_*} J(x \mid \tau)\, d\tau_1 \ldots d\tau_n.$$

Nun ist

$$J(x \mid \tau) = \prod_1^n \frac{\partial x_k}{\partial \tau_k} = \prod_1^n \left\{ \frac{g_{k-1}^A}{g_k^A} + \frac{g_{k-1}^B}{g_k^B} \right\},$$

und mit Rücksicht auf (3.25)

$$J(x \mid \tau) \geqq \left\{ (g_0^A)^{\frac{1}{n}} + (g_0^B)^{\frac{1}{n}} \right\}^n = \left(| A |^{\frac{1}{n}} + | B |^{\frac{1}{n}} \right)^n.$$

Somit wird

$$| A + B |^{\frac{1}{n}} \geqq | A |^{\frac{1}{n}} + | B |^{\frac{1}{n}}. \tag{5.6}$$

Diese Ungleichung drückt den berühmten Brunn-Minkowskischen Satz aus. Soll hier das Gleichheitszeichen eintreten, so muss für $k = 1, 2, \ldots, n$ und $\tau \in T_*$

$$\frac{g_{k-1}^A}{g_k^A} = q \frac{g_{k-1}^B}{g_k^B} \qquad (q > 0) \tag{5.7}$$

gelten.

Aus (5.7) folgt (durch Multiplikation der Gleichungen miteinander)

$$| A |^{\frac{1}{n}} = q \, | B |^{\frac{1}{n}}$$

und mithin insbesondere

$$| A |^{\frac{1}{n}} \frac{dx_1^B}{d\tau_1} = | B |^{\frac{1}{n}} \frac{dx_1^A}{d\tau_1}.$$

Legt man den Schwerpunkt von A und B in den Nullpunkt, so erhält man leicht durch Integration das Ergebnis : Die Entfernungen der Stützebenen von A und B gleicher Normalrichtung vom Nullpunkt haben das konstante Verhaltnis $| A |^{\frac{1}{n}} : | B |^{\frac{1}{n}}$. Das hat die Homothetie von A und B zur Folge. Die Ungleichung (5.6) gilt auch dann, wenn A, B in linearen Unterräumen L^{m_A} bzw. L^{m_B} von der Dimension $m_A \leqq n$, $m_B \leqq n$ liegen.

Die vorhin eingeführte Brunn-Minkowskische Abbildung gestattet, den Brunn-Minkowskischen Satz leicht auf allgemeinere Punktmengen zu übertragen.

Es bezeichne X den Minkowskischen Halbmodul, dessen Elemente sich als Vereinigung von endlich vielen n-dimensionalen, abgeschlossenen, achsenparallelen Würfeln von E^n darstellen lassen. Hierbei kann ohne weiteres angenommen werden, dass die verschiedenen Würfel keine inneren Punkte gemeinsam haben.

Sind N_A, N_B zwei Elemente von X, die entsprechend die (nichtleeren) abgeschlossenen Punktmengen A, B von E^n enthalten, so kann mit Hilfe der Brunn-Minkowskischen Abbildung ihrer offenen Kerne auf T_* und Wiederholung des vorhin entwickelten Verfahrens ohne zusätzliche Schwierigkeit die Ungleichung

$$(5.8) \qquad |N_A + N_B|^{\frac{1}{n}} \geqq |N_A|^{\frac{1}{n}} + |N_B|^{\frac{1}{n}}$$

bewiesen werden.

Man definiere jetzt den äusseren Jordanschen Inhalt $\bar{J}(M)$ einer Punktmenge M von E^n durch die Gleichung

$$(5.9) \qquad \bar{J}(M) = \inf \{ |N_M| \mid N_M \supseteq M \}.$$

Dann wird wegen

$$\bar{J}(A + B) \geqq \inf \{ |N_A + N_B| \mid N_A \supseteq A,\ N_B \supseteq B \}$$

$$(5.10) \qquad \bar{J}(A + B)^{\frac{1}{n}} \geqq \bar{J}(A)^{\frac{1}{n}} + \bar{J}(B)^{\frac{1}{n}}.$$

Liegt nun eine nichtleere Punktmenge M von E^n vor und bedeutet allgemein F eine abgeschlossene Menge von E^n, so wird bekanntlich das innere Lebesguesche Mass $L_*(M)$ von M durch die Gleichung

$$(5.11) \qquad L_*(M) = \sup \{ \bar{J}(F) \mid F \subseteq M \}$$

definiert. Beachtet man dann, dass mit zwei nichtleeren, abgeschlossenen Mengen F_1 und F_2 die Minkowskische Summe $F_1 + F_2$ ebenfalls abgeschlossen ist, so erhalt man leicht aus (5.10) die in ihren wesentlichen Zügen erstmalig von Lusternik [1] bewiesene Ungleichung

$$(5.12) \qquad L_*(A + B)^{\frac{1}{n}} \geqq L_*(A)^{\frac{1}{n}} + L_*(B)^{\frac{1}{n}}.$$

Das eingehende Studium dieser Ungleichung wird den Gegenstand des nächsten Kapitels bilden.

Als letztes soll noch für eine Klasse von nichtkonvexen A und ein konvexes B die Ungleichung (5.6) verschärft werden.

Es seien $A \in X$ und B konvex. Man projiziere A und B auf die Hyperebene $x_n = 0$ und bezeichne mit A', B' die Projektionen von A, B auf $x_n = 0$. Man bilde jetzt A'_* und B'_* mit Hilfe des Brunn-Minkowskischen Verfahrens auf den (offenen) Einheitswürfel T'_* von $x_n = 0$ ab, indem man lediglich die $n-1$ ersten Gleichungen (5.2) verwendet. Es bedeuten allgemein

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}, 0)$$

einen Punkt von $x_n = o$ und d^v eine zur x_n-Achse parallele Gerade durch v. Dann gilt offenbar

$$(5.13) \qquad A + B = \cup \{ a^x + b^y \mid x \in A', y \in B' \}$$

mit

$$a^x = d^x \cap A, \qquad b^y = d^y \cap B.$$

Nun ist

$$\mid A + B \mid \geqq \int_{C'} \mid c^x \mid dx_1 \ldots dx_{n-1} = J,$$

wobei C' ähnlich wie C definiert wird und $x \in C'$ ist. Durch eine leichte Ueberlegung ergibt sich dann die Ungleichung

$$J \geqq \int_{T'} \left\{ \prod_{1}^{n-1} \left(\frac{g_{k-1}^A}{g_k^A} + \frac{g_{k-1}^B}{g_k^B} \right) \right\} \mid c_0^{x(\tau)} \mid d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1}.$$

Hierbei bedeutet $\mid c_0^{x(\tau)} \mid$ die (Jordansche) Länge von

$$c_0^{x(\tau)} = d^{x(\tau)} \cap (A + B).$$

Der Rest dieser Nummer beschäftigt sich nun mit der Aufgabe, für die Grösse $\mid c_0^{x(\tau)} \mid$ eine schärfere Abschätzung als die triviale

$$\mid c_0^{x(\tau)} \mid \geqq g_{n-1}^A + g_{n-1}^B$$

abzuleiten.

Definition. — *Es bedeute α eine feste Richtung. Ist dann A eine nichtleere Punktmenge von E^n, so soll $[A]^\alpha$ die kleinste abgeschlossene Menge mit folgender Eigenschaft bezeichnen : Sind x, y zwei Punkte von A und ist die Strecke $\overline{xy}$ parallel zu α, so ist diese in $[A]^\alpha$ enthalten.*

Die Punktmenge $[A]^\alpha$ (Dinghas [4]) heisst die konvexe Hülle von A in der Richtung α. Ist A konvex, so gilt für jede Richtung α $[A]^\alpha = A$.

Es seien jetzt $A \in X$ und nicht notwendigerweise konvex und B konvex mit inneren Punkten. Dann enthält $[A]^\alpha - A (\alpha = x_n)$ bei passender Wahl der x_n-Achse eine Menge R_0, deren abgeschlossene Hülle $\overline{R}_0$ eine zusammenhängende würfelförmige Menge aus X ist. Wählt man $h_0 (h_0 > o)$ hinreichend klein, so kann man ein $R \in X$ finden derart, dass $R + hB$ in R_0 enthalten ist.

Man beziehe jetzt B auf seinen Schwerpunkt und bezeichne bei der Abbildung $A'_* \leftrightarrow T'_*$ mit T'_1 diejenige Teilmenge von T'_*, deren Bildpunkte auf die Projektion R' von R auf die Ebene $x_n = 0$ fallen.

Dann gilt offenbar

$$| c_0^{x(\tau)} | \geqq g_{n-1}^{A} + h g_{n-1}^{B} + \sigma h$$

mit einer nur von der Beschaffenheit von B abhängigen, positiven Konstante σ. Wendet man nun das vorherige Verfahren an, so erhält man leicht

$$| A + hB | \geqq \left(| A |^{\frac{1}{n}} + h | B |^{\frac{1}{n}} \right)^n + h\sigma J_0$$

mit

$$J_0 \geqq \int_{T'_1} \frac{g_0^A}{g_{n-1}^A} d\tau_1 \dots d\tau_{n-1}.$$

Geht man jetzt zu den Koordinaten $x_1, \dots, x_{n-1}$ zurück, so findet man

$$J_0 = \int_R dx_1 \dots dx_{n-1} = | R' |$$

und somit

$$(5.14) \qquad | A + hB | \geqq \left(| A |^{\frac{1}{n}} + h | B |^{\frac{1}{n}} \right)^n + h\sigma | R' |.$$

Die Verallgemeinerung dieser Ungleichung auf bestimmte Klassen kompakter Punktmengen A kann folgendermassen geschehen :

Man bilde mit einem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ die Aussenmenge A^ε in der Entfernung ε und wähle $N (N \in X)$ so, dass $N \subseteq A^\varepsilon$ gilt. Die später ausführlicher zu definierende Punktmenge A^ε (Cantor-Minkowskische Konstruktion) wird bekanntlich durch die Gleichung $A^\varepsilon = A + \varepsilon S$ erklärt, wobei der Mittelpunkt der Einheitskugel S im Nullpunkt des Koordinatensystems liegen soll.

Wir verwenden die Hilfssätze :

Hilfssatz 1 (Behrend [1]). — *Ist* M *beschränkt, so hat die Menge* $M^h (0 < h < +\infty)$ *einen Jordanschen Inhalt.*

Hilfssatz 2 (Behrend [1]). — *Ist* A *beschränkt und* B *konvex, so hat* $A + hB (0 < h < +\infty)$ *einen Jordanschen Inhalt* $| A + hB |$.

Hilfssatz 3. — *Es bezeichne kurz* A^ε *die Aussenmenge* $A + \varepsilon S (\varepsilon > 0)$ *in der Entfernung* ε. *Dann gilt*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |A^\varepsilon| = \bar{J}(A). \tag{5.15}$$

Mit Hilfe dieser Sätze, deren Beweis in 12 nachgeholt wird, lässt sich aus (5.14) folgende Verschärfung der Brunn-Minkowskischen Ungleichung ableiten :

Es seien A kompakt und B konvex. Enthält $[A]^\alpha - A$ für eine Richtung α einen inneren Punkt, so gilt für kleine $h > 0$

$$\bar{J}(A + hB) \geqq \left(\bar{J}(A)^{\frac{1}{n}} + h\,\bar{J}(B)^{\frac{1}{n}}\right)^n + kh \tag{5.16}$$

mit einem $k > 0$.

Die Bedingung, dass $[A]^\alpha \setminus A$ einen inneren Punkt enthalten soll, kann hier durch eine wesentlich schwächere ersetzt werden. Wie der Leser aber selbst merken wird, lässt sich der allgemeine Fall zweier beliebiger nichtleerer Punktmengen auf diesem Wege schwer lösen. Somit wird das Ziel des nächsten Kapitels vorerst sein, die Brunn-Minkowskische Methode geeignet zu vertiefen und zu verallgemeinern.

Die Literatur über den Brunn-Minkowskischen Satz (5.6) ist sehr gross. Nachdem Brunn in [1] und [2] die entscheidende Idee der Abbildung von A auf B durch gleiche Inhaltsverhältnisse geliefert und die Ungleichung (5.6) (für $n = 2$ und 3) bewiesen hat, hat Minkowski [1] die allgemeine Theorie der konvexen Körper in E^3 in einer Reihe gross angelegter Abhandlungen aufgebaut. Der allgemeine Fall von (5.6) für ein beliebiges n wurde zugleich mit methodischen Vereinfachungen des Minkowskischen Verfahrens von H. Kneser und Süss [1] behandelt. Die grosse Abhandlung von Favard [1] bringt eine allgemeine Theorie der konvexen Körper von E^n. Alle Beweise von (5.6), welche den Brunn'schen Gedanken als Ausgangspunkt nehmen, verwenden mit Ausnahme des sich auf einen Gedanken von Erhard Schmidt stützenden Beweises von Dinghas [2] die vollständige Induktion. Den ersten Schritt, die Brunn-Minkowskische Methode auf nichtkonvexe A zu übertragen, machte Dinghas [1], indem er (5.6) für kompakte A und konvexe B ([1], Fussn. 13) bewies. Einen in manchen Punkten vereinfachten Beweis des Hauptresultates von Dinghas [1] bringt die

Arbeit von Dinghas und Erhard Schmidt [1]. Dort werden die Rechnungen der Einfachheit halber wieder für B = Kugel durchgeführt. Eine explizite Darstellung des Falles B-konvex gibt u.a. Buseman [1]. Der (schwierige) Uebergang zu nichtkonvexem B unter Verwendung Minkowskischer Methoden glückte zuerst Henstock und Macbeath [1]. Eine ausführliche Literaturangabe über den klassischen Brunn-Minkowskischen Satz bringen Bonnesen [1] und Bonnesen-Fenchel [1] sowie Blaschke [1]. Ueber neuere Arbeiten berichten ausführlich die Monographien [9] und [12] von Hadwiger.

ZWEITES KAPITEL

Der Brunn-Minkowski-Lusterniksche Satz und seine Verallgemeinerungen

6. **Allgemeine Begriffsbildungen.** — Es sei M eine nichtleere Punktmenge von E^n. Man setze für ein $x \in M$

(6.1) $$\sigma_\varepsilon(x \mid M) = L_*(M \cap S_x^\varepsilon)/|S_x^\varepsilon|.$$

Dann heisst x ein innerer Dichtepunkt von M, falls

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_\varepsilon(x \mid M) = \underline{\sigma}(x \mid M) = 1$$

gilt. Die äusseren Dichtepunkte werden analog definiert.

Definition. — *Die Menge*

(6.2) $$M_* = \{ x \mid x \in M, \underline{\sigma}(x \mid M) = 1 \}$$

wird der (innere) Dichtekern von M *genannt.*

Satz 5 (Henstock-Macbeath [1]). — *Die Menge* M *ist messbar, und es gilt*

(6.3) $$L(M_*) = L_*(M).$$

Ueber die gegenseitigen Beziehungen zwischen den (inneren) Dichtekernen von A, B und A + B haben Henstock und Macbeath [1] u. a. folgenden Satz bewiesen :

SATZ 6. — *Es gilt stets*

$$(A + B)_* \supseteq A_* + \overline{B}. \tag{6.4}$$

Diese Sätze bleiben auch dann richtig, wenn man L_* durch das äussere Mass L^* und M_* durch die Menge

$$M^* = \{ x \mid x \in M, \bar{\sigma}(x \mid M) = 1 \}$$

ersetzt.

Wir skizzieren hier den Beweis von Henstock und Macbeath.

Es bedeute V den Mengenverband aller Borelschen Mengen von E^n. Bekanntlich (Halmos [1]) fallt V mit den σ-Ringen zusammen, welche entweder durch die Klasse $\mathfrak{G}$ aller offenen Punktmengen von E^n oder durch die Klasse $\mathfrak{F}$ aller abgeschlossenen Punktmengen von E^n erzeugt werden. Bedeutet L das Borelsche Mass in E^n, so ist

$$L_*(M) = \sup \{ L(F) \mid F \subseteq M, F \in \mathfrak{F} \}, \tag{6.5}$$

und

$$L^*(M) = \inf \{ L(G) \mid G \supseteq M, G \in \mathfrak{G} \}. \tag{6.6}$$

Eine Borelsche Punktmenge K heisst ein massgleicher Kern von M (Halmos [1]), wenn :

1. $K \subseteq M$ gilt und
2. für jede Borelsche Teilmenge G von $M - K$, $L(G) = 0$ ist.

Aus der Definition des massgleichen Kerns folgt ohne Schwierigkeit : Ist E messbar, so ist $K \cap E$ ein massgleicher Kern für $M \cap E$.

Nun beweist man (Halmos [1], S. 59) :

1. Ist K ein massgleicher Kern von M, dann ist $L(K) = L_*(M)$;
2. Sind K_1, K_2 zwei massgleiche Kerne von M und

$$(K_1, K_2) = K_1 \cup K_2 - K_1 \cap K_2,$$

so gilt $L(K_1, K_2) = 0$.

Ist E wie vorhin messbar, so folgt daraus

$$L(K \cap E) = L_*(M \cap E)$$

und somit auch

$$L(K \cap S_x^\varepsilon) = L_*(M \cap S_x^\varepsilon).$$

Letzteres Resultat hat die Gleichung $K_* = M_*$ zur Folge. Der weitere Verlauf des Beweises stützt sich auf den klassischen Satz von Lebesgue (vgl. z. B. Saks [1], S. 129), wonach $K - K_*$ das Mass Null hat [1]. Da nun $L(K) = L_*(M)$ ist, so folgt daraus $L_*(M) = L(M_*)$ und somit auch der Beweis von (6.3). Die Gleichung $L(M^*) = L^*(M)$ lässt sich analog beweisen.

Zum Beweis von (6.4) nehme man $z \in A_* + \overline{B}$ an. Dann gilt

$$z = \lim_{k\to\infty} \{ y_k + x \mid x \in A_*,\ y_k \in B,\ k = 1, 2, \ldots \}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} L_*(S_z^\varepsilon \cap (A + B)) &= \lim_{k\to\infty} L_*(y_k + S_x^\varepsilon \cap (A + B)) \\ &\geqq \lim_{k\to\infty} L_*(y_k + S_x^\varepsilon \cap (y_k + A)) = L_*(S_x^\varepsilon \cap A). \end{aligned}$$

Lässt man jetzt $\varepsilon \to 0$ konvergieren, so erhält man $z \in (A + B)_*$.

An dieser Stelle sei noch hervorgehoben, dass Henstock und Macbeath den Satz 5 sowie auch den Satz 6 für lokal kompakte Gruppen formuliert und bewiesen haben, letzteren für solche, für die der Vitalische Ueberdeckungssatz gilt. Dabei ist L_* durch das entsprechende Haarsche Mass zu ersetzen.

7. **Der Satz von Brunn-Minkowski und Lusternik.** — Wie schon erwähnt, hat Lusternik die Ungleichung (5.8) als erster unter Zugrundelegung des Lebesgueschen Integralbegriffs für beliebige nichtleere messbare Punktmengen von E^n verallgemeinert und mit Hilfe von Symmetrisierungsmethoden, die auf Steiner und Schwarz zurückgehen, bewiesen. Unter Symmetrisierung versteht man im allgemeinen eine bestimmte (geometrische) Operation ω, die einer Punktmenge A die Punktmenge ωA zuordnet, die gewisse Symmetrieeigenschaften aufweist und dasselbe (Lebesgue'sche) Mass besitzt. Der durchschlagende Erfolg eines solchen Verfahrens ist allerdings darin zu erblicken, dass ein zweites Funktional (etwa die Oberfläche) bei der Abbildung $A \to \omega A$ nicht vergrössert wird. Es gelingt dann durch Anwendung abzählbar vieler Symmetrisierungen $\omega_n (n = 1, 2, \ldots)$ und Heranziehung von Methoden der Funktional-

---

(1) Bei den Beweisen von Saks sind die dort verwendeten Würfel durch Kugeln zu ersetzen.

analysis, eine konvergente Teilfolge von $(\omega_n A)$ zu konstruieren, deren Grenzmenge die gesuchten Extremaleigenschaften hat. Auf eine ausführlichere Darstellung der wichtigsten Symmetrisierungsverfahren kommen wir im nächsten Kapitel zurück.

Henstock und Macbeath [1] haben dem Lusternikschen Satz folgende scharfe Formulierung gegeben :

Satz 7. — *Sind* A, B *zwei nicht leere messbare Punktmengen von* E, *so gilt*

$$L_*(A+B)^{\frac{1}{n}} \geqq L_*(A)^{\frac{1}{n}} + L(B)^{\frac{1}{n}}. \tag{7.1}$$

Ist insbesondere $L_*(A) > 0$, so gilt sogar

$$L_*(A+B)^{\frac{1}{n}} \geqq L(A)^{\frac{1}{n}} + L(\overline{B})^{\frac{1}{n}}. \tag{7.2}$$

Entsprechend gilt, falls nur $L^*(A) > 0$ ist,

$$L^*(A+B)^{\frac{1}{n}} \geqq L^*(A)^{\frac{1}{n}} + L(\overline{B})^{\frac{1}{n}}. \tag{7.3}$$

Fragt man nach der Struktur der Punktmengen A und B, für die in den Ungleichungen (7.1), (7.2) und (7.3) das Gleichheitszeichen eintritt (Einzigkeitsfrage), so kann man beweisen :

Satz 8 (Henstock-Macbeath). — *Es bedeute allgemein* [M] *die konvexe Hülle von* M *und* M′ *die Menge* $E^n \setminus M$. *Ist dann* $0 < L(A)L(B) < \infty$, *so tritt in* (7.1) *das Gleichheitszeichen dann und nur dann ein, wenn* :

1. $L([A] \cap A') = L([B] \cap B') = 0$ *ist und*
2. $[A]$ *und* $[B]$ *homothetisch sind.*

Ist $L(A) = 0$, $0 < L(B) < +\infty$ *und gilt in* (7.1) *das Gleichheitszeichen, so besteht* A *lediglich aus einem Punkt. Diese Bedingungen sind auch hinreichend.*

Ueber den Fall $L(A) = L(B) = 0$ ist nichts bekannt. Die dafür von Lusternik gestellte Forderung $L(A+B) = 0$ (zumal die Messbarkeit von $A+B$ aus der Messbarkeit von A und B nicht folgt) ist insofern unbefriedigend, als sie über die Beschaffenheit von A, B keine Aussage liefert.

Der Beweis, den Henstock und Macbeath für diesen Satz gegeben haben, verwendet die alte Methode von Brunn über die Zuordnung von Parallelschnitten mit Hilfe gleicher Volumenverhaltnisse. Wie diese geniale Idee von Brunn allgemeinen Punktmengen angepasst wird, soll der Leser in der nächsten Nummer erfahren.

8. Der Henstock-Macbeath'sche Beweis des Lusternikschen Satzes. — Ist E^n durch die (euklidischen) Koordinaten $v_1, \ldots, v_n$ gegeben, so soll E_k $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ den Teilraum $v_{k+1}=\ldots=v_n=0$ bedeuten. Ferner soll $E_{n-k}(x_1, \ldots, x_k)$ (kürzer E^x_{n-k}) bei vorgegebenem $(x_1, \ldots, x_n)$ den linearen Unterraum von E^n darstellen, dessen Punkte $(v_1, \ldots, v_n)$ den Gleichungen

$$v_1=x_1, \qquad v_2=x_2, \qquad \ldots, \qquad v_k=x_k$$

genügen. Die Indizes $n-k$ bzw. k, welche hier die Dimension des betreffenden Unterraumes bedeuten, sollen zugleich auch die Dimension des verwendeten Inhalts bzw. Lebesgueschen Masses bestimmen. Danach soll z. B. $L_k(M)$ $(k=1, \ldots, n)$ zum Ausdruck bringen, dass 1) M in E^k bzw. E_k liegt und 2) dass M Lebesguemessbar mit dem Lebesgue'schen Mass $L_k(M)$ in Bezug auf E^k ist. Entsprechendes soll fur die Schnitte $M_{n-k}=M \cap E^x_{n-k}$ gelten. Versteht man unter E_0 den Punkt $(x_1, \ldots, x_n)$, so soll $L_0(M \cap E^x_0)$ die charakteristische Funktion $\varphi_M(x_1, \ldots, x_n)$ bedeuten.

Es bedeuten nun $f_1(x)$, $f_2(x)$ zwei auf E^1 definierte, eindeutige, nichtnegative, endlichwertige Borel-messbare Funktionen, die ausserhalb eines bestimmten Intervalls verschwinden. Man setze im Einklang mit dem klassischen Brunn-Minkowskischen Kunstgriff

$$x_k(\tau)=\inf\left\{x \,\middle|\, \int_{-\infty}^{x} f^\alpha(t)\,dt \geqq \tau F_k\right\}, \tag{8.1}$$

mit

$$F_k=\int_{-\infty}^{+\infty} f^\alpha(x)\,dx \qquad (k=1, 2) \tag{8.2}$$

und $0 \leqq \tau \leqq 1$.

Man bestätigt leicht :

1. Die Funktionen $x_k(\tau)$ sind im Intervall $T_0=(0, 1)$ eigentlich monoton;

2. Setzt man

$$x_0(\tau) = x_1(\tau) + x_2(\tau), \tag{8.3}$$

so gibt es für jedes $u_0 \in X_0 = X(T_0)$ einen und nur einen Punkt $\tau_0 \in T_0$ derart, dass $x_0(\tau_0) = u_0$ wird.

Nachfolgender fundamentaler Satz geht auf Henstock und Macbeath zurück :

Satz 9. — *Man setze allgemein*

$$H(x, y) = \begin{cases} f_1(x) + f_2(y) & | f_1(x) f_2(y) > 0, \\ 0 & | f_1(x) f_2(y) = 0 \end{cases} \tag{8.4}$$

und definiere die Funktion $f_0(u)$ $(u \in X_0)$ *durch die Gleichung*

$$f_0(u) = H(x_1(\tau), x_2(\tau)).$$

Dann gilt für jedes $0 < \alpha < +\infty$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(u)^\alpha \, du\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \geqq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)^\alpha \, dx\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)^\alpha \, dx\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \tag{8.5}$$

Der Beweis stützt sich auf folgende Hilfssätze :

Hilfssatz 1. — *Für jede Borelsche Teilmenge* E *von* T_0 *gilt*

$$L_1(x_0(E)) = L_1(x_1(E)) + L_1(x_2(E)). \tag{8.6}$$

Hilfssatz 2. — *Es gilt*

$$L_1(E) = \frac{1}{F_k} \int_{x_k(E)} f_k(x)^\alpha \, dx \qquad (k = 1, 2) \tag{8.7}$$

sofern $F_1 > 0$, $F_2 > 0$ *ist.*

Damit der Leser nicht auf die Arbeit von Henstock und Macbeath zurückzugreifen braucht, gebe ich hier kurz die Beweise dieser beiden Hilfssätze wieder und ziehe daraus den Schluss (8.5). Dabei nehme ich F_1, $F_2 > 0$ an, da ja (8.5) trivial ausfällt, sobald mindestens eine dieser Grössen verschwindet.

Der Beweis des Hilfssatzes 1 wird so geführt :

Es sei zunächst $x_0(\tau_1)$ ein beliebiger Punkt von $x_0(E)$ und Δ ein offenes Intervall, das diesen Punkt enthält. Man bilde die Grössen

$$\underline{\tau} = \inf \{ \tau \mid x_0(\tau) \in \Delta \}$$

und

$$\bar{\tau} = \sup \{ \tau \mid x_0(\tau) \in \Delta \}$$

und bezeichne die abgeschlossenen Intervalle $[\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ bzw. $[x_0(\underline{\tau} + 0), x_0(\bar{\tau} - 0)]$ durch N^0 bzw. J^0. Die entsprechenden Intervalle für ein Δ, das einen Punkt von $x_1(E)$ bzw. von $x_2(E)$ enthält, bezeichnen wir mit N^1 bzw. N^2 und J^1 bzw. J^2.

Es sei jetzt G_0 eine offene Ueberdeckung von $x_0(E)$, die aus den offenen punktfremden Intervallen Δ_k^0 $(k = 1, 2, \ldots)$ bestehen möge. Man konstruiere die Intervallfolgen (J_s^k) $(k = 0, 1, 2; s = 1, 2, \ldots)$ und betrachte die Vereinigungen

$$I_k = \bigcup_{s=1}^{\infty} J_s^k \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Dann erhält man nacheinander

1. $$L_1(J_s^0) = L_1(J_s^1) + L_1(J_s^2),$$

2. $$x_0(E) \cap \bar{\Delta}_s^0 = x_0(E) \cap J_s^0$$

und

3. $$L_1(G_0) \geqq L_1(I_0) = L_1(I_1) + L_1(I_2).$$

Somit wird wegen

$$L_1(x_1(I_1)) + L_1(x_2(I_2)) \geqq L_1(x_1(E)) + L_1(x_2(E)),$$
$$L_1(x_0(E)) \geqq L_1(x_1(E)) + L_1(x_2(E)).$$

Es seien jetzt G_1 bzw. G_2 zwei (offene) Ueberdeckungen von $x_1(E)$ bzw. $x_2(E)$. Man ersetze jedes Intervall $\Delta_s^k (k = 1, 2; s = 1, 2, \ldots)$ durch die Intervalle J_s^k und beachte, dass

$$M^k = \bigcup J_s^k \qquad (k = 1, 2)$$

die Menge $x_k(\mathrm{E})$ überdeckt. Bildet man die entsprechenden Intervalle N_s^k, so überdecken

$$\mathrm{N}_1 = \bigcup_s \mathrm{N}_s^1, \qquad \mathrm{N}_2 = \bigcup_s \mathrm{N}_s^2$$

die Menge E, und somit gilt $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2$.

Geht man nun von den (abzählbar vielen) Intervallen von $\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2$ aus, so erhält man durch Rückverfolgung des Prozesses abgeschlossene Intervalle, deren Vereinigung die Mengen P^1, P^2 und P^0 erzeugen, welche $x_1(\mathrm{E})$, $x_2(\mathrm{E})$ und $x_0(\mathrm{E})$ überdecken. Wegen $\mathrm{M}^k \supseteq \mathrm{P}^k$ $(k = 1, 2)$ gilt

$$\mathrm{L}_1(x_0(\mathrm{E})) \leqq \mathrm{L}_1(\mathrm{P}^0) = \mathrm{L}_1(\mathrm{P}^1) + \mathrm{L}_1(\mathrm{P}^2) \leqq \mathrm{L}_1(\mathrm{M}^1) + \mathrm{L}_1(\mathrm{M}^2),$$

und somit wegen

$$\mathrm{L}_1(\mathrm{M}^1) + \mathrm{L}_1(\mathrm{M}^2) = \mathrm{L}_1(\mathrm{G}^1) + \mathrm{L}_1(\mathrm{G}^2)$$

durch Grenzübergang

$$\mathrm{L}_1(x_0(\mathrm{E})) \leqq \mathrm{L}_1(x_1(\mathrm{E})) + \mathrm{L}_1(x_2(\mathrm{E})).$$

Das beweist den Hilfssatz 1. Der Beweis des Hilfssatzes 2 kann offenbar als erbracht angesehen werden, wenn man (8.7) für $k = 1$ und $\mathrm{E} = (\tau_0, \tau_1)$ beweist. Nun ist

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_1(\mathrm{E}) = \tau_1 - \tau_0 &= \frac{1}{\mathrm{F}_1}\int_{x_1(\tau_0)}^{x_1(\tau_1)} f_1(x)^\alpha\, dx \\ &= \frac{1}{\mathrm{F}_1}\int_{x_1(\tau_0)}^{x_1(\tau)} f_1(x)^\alpha\, dx + \sum_1^\infty \frac{1}{\mathrm{F}_1}\int_{\mathrm{J}_\nu} f_1(x)^\alpha\, dx,\end{aligned}$$

wobei J_ν die höchstens abzählbar vielen Intervalle bedeuten, welche die Punkte von $x_1(\tau_0) \leqq x \leqq x_1(\tau_1)$ enthalten, die bei der Abbildung (8.1) nicht erfasst werden. Da für jedes solche Intervall das zugehörige Integral verschwindet, so gilt

$$(8.8) \qquad \mathrm{L}_1(\mathrm{E}) = \tau_1 - \tau_0 = \frac{1}{\mathrm{F}_1}\int_{x_1(\mathrm{E})} f_1(x)^\alpha\, dx.$$

Nach dem Beweis der beiden Hilfssatze von Henstock und Macbeath ist der Beweis des Satzes 9 relativ einfach. Zunächst folgt aus dem

Hilfssatz 2, dass die Punktmengen

$$E_k = \{ \tau \mid f_k(x_k(\tau)) = 0 \}, \qquad (k = 1, 2)$$

das Mass Null haben.

Es bedeute nun bei gegebenen $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ E die τ-Menge mit der Eigenschaft

$$(8.9) \qquad \gamma_k \leqq f_k(x_k(\tau)) \leqq (1 + \varepsilon)\gamma_k \qquad (\varepsilon > 0,\ k = 1, 2).$$

Dann gilt für $k = 1, 2$

$$L_1(E) = \frac{1}{F_k} \int_{x_k(E)} f_k^\alpha(x)\, dx \leqq \frac{1}{F_k}(1+\varepsilon)^\alpha \gamma_k L_1(x_k(E)),$$

und somit wird

$$L_1(x_0(E)) = L_1(x_1(E)) + L_1(x_2(E)) \geqq (1+\varepsilon)^{-\alpha} (F_1 \gamma_1^{-\alpha} + F_2 \gamma_2^{-\alpha}) L_1(E).$$

Berücksichtigt man nun die Tatsache, dass wegen (8.9)

$$f_0(x_0(\tau)) \geqq \gamma_1 + \gamma_2 \qquad (\tau \in E)$$

ist, so erhält man

$$\int_{x_0(E)} f_0^\alpha(x)\, dx \geqq (\gamma_1 + \gamma_2)^\alpha L_1(x_0(E)),$$

also

$$(8.10) \qquad \int_{x_0(E)} f_0^\alpha(x)\, dx \geqq (1+\varepsilon)^{-\alpha} (\gamma_1 + \gamma_2)^\alpha (F_1 \gamma_1^{-\alpha} + F_2 \gamma_2^{-\alpha}) L_1(E).$$

Um den Ausdruck rechts nach unten abzuschätzen, setze man in der Ungleichung (3.25) $n = 2$ voraus und nehme

$$x_1 = \gamma_1, \qquad y_1 = \gamma_2; \qquad x_2 = F_1 \gamma_1^{-\alpha}, \qquad y_2 = F_2 \gamma_2^{-\alpha}.$$

Dann wird

$$(\gamma_1 + \gamma_2)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} (F_1 \gamma_1^{-\alpha} + F_2 \gamma_2^{-\alpha})^{\frac{1}{\alpha+1}} \geqq F_1^{\frac{1}{\alpha+1}} + F_2^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

also

$$\int_{x_0(E)} f_0^\alpha(x)\, dx \geqq (1+\varepsilon)^{-\alpha} \left\{ F_1^{\frac{1}{\alpha+1}} + F_1^{\frac{1}{\alpha+1}} \right\}^{\alpha+1} L_1(E).$$

Es bezeichne jetzt $E_{r_1 | r_2}$ $(r_1, r_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ die Mengen (8.8) mit

$$\gamma_1 = (1+\varepsilon)^{r_1}, \qquad \gamma_2 = (1+\varepsilon)^{r_2}.$$

Dann ist wegen $L_1(E_1) = L_1(E_2) = 0$ und

$$T_0 = \bigcup_{r_1, r_2} E_{r_1 | r_2} \cup E_1 \cup E_2$$

$$\sum_{r_1, r_2} L_1(E_{r_1 | r_2}) = L_1(T_0) = 1,$$

und infolgedessen gilt

$$\int_{x_0(T_0)} f_0^\alpha \, dx \geqq \sum_{r_1, r_2} \int_{x_0(E_{r_1 | r_2})} f_0^\alpha \, dx \geqq (1+\varepsilon)^{-\alpha} \left\{ F_1^{\frac{1}{\alpha+1}} + F_2^{\frac{1}{\alpha+1}} \right\}^{\alpha+1}$$

Lässt man hier $\varepsilon \to 0$ konvergieren, so erhält man

$$\int_{x_0(T_0)} f_0^\alpha(x) \, dx \geqq \left\{ F_1^{\frac{1}{\alpha+1}} + F_2^{\frac{1}{\alpha+1}} \right\}^{\alpha+1},$$

d. h. den Beweis des Satzes 9.

Man nehme jetzt an:

1. Die Mengen A, B sind F_σ-Mengen und (also auch $A + B$) sowohl selbst als auch jeder ihrer Schnitte durch eine Hyperebene Borel-messbar. [Bekanntlich enthalt jede messbare Punktmenge M eine F_σ-Menge mit dem (Borelschen) Mass $L_*(M)$.]

2. Es bezeichne E_{n-1}^x die Hyperebene $x_n = x$. Wir nehmen $\alpha = n - 1$ an und setzen $A \cap E_{n-1}^x = A^x$ und

$$f_1^{n-1}(x) = L_{n-1}(A^x), \qquad f_2^{n-1}(x) = L_{n-1}(B^x). \tag{8.11}$$

Dann wird

$$L(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} L_{n-1}(A^x) \, dx, \qquad L(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} L_{n-1}(B^x) \, dx$$

und

$$L_*(A + B) \geqq \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) \, dx.$$

Es sei nun angenommen, dass der Lusterniksche Satz für die Dimension $n - 1$ gilt. Dann folgt aus

$$L_{n-1}(A^{x(\tau)} + B^{x(\tau)})^{\frac{1}{n-1}} \geqq \left\{ L_{n-1}(A^{x(\tau)})^{\frac{1}{n-1}} + L_{n-1}(B^{x(\tau)})^{\frac{1}{n-1}} \right\}$$

durch Anwendung des Satzes 9 die Ungleichung

$$L_*(A+B) \geqq \left\{ L(A)^{\frac{1}{n}} + L(B)^{\frac{1}{n}} \right\}^n \tag{8.12}$$

Auf diesselbe Weise lassen sich alle übrigen Aussagen des Satzes 7 beweisen.

Henstock und Macbeath haben aus ihrem Satz 9 noch folgenden Schluss gezogen : Man definiere die Funktion $g_0(x)$ durch die Gleichung

$$g_0(x) = \sup \{ H(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = x \}. \tag{8.13}$$

Dann gilt der Satz :

SATZ 10. — *Ist $f_0(x)$ eine Borel-messbare Funktion, die der Ungleichung*

$$f_0(x) \geqq g_0(x) \tag{8.14}$$

genügt, so ist

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_0^{\alpha}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \geqq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^{\alpha}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_2^{\alpha}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \tag{8.15}$$

Wie wir in 10 zeigen werden, lassen sich aus den Sätzen von Henstock und Macbeath allgemeinere Folgerungen ziehen.

9. **Der Henstock-Macbeath'sche Einzigkeitssatz.** — Der Einzigkeitssatz 8 für den Fall linearer Punktmengen lässt sich leicht beweisen. Dabei genügt es, lediglich Punktmengen A, B mit $L_1(A) > 0$, $L_1(B) > 0$ zu betrachten. Ferner sieht man ohne weiteres ein, dass $L_1(A+B) = \infty$ wird, sofern eine der beiden Punktmengen nicht beschränkt ist. Es seien jetzt A, B beschränkt und es sei $[B] \cap (\overline{B})' \neq \emptyset$ (1). Dann enthalt diese Menge ein Intervall$(t, t+u)$ mit $t \in \overline{B}$.

Man setze

$$\alpha = \inf \{ x \mid x \in A_* \}$$

(1) [B] ist, wie bereits erwahnt, die konvexe Hulle von B.

und betrachte das Intervall $J = [\alpha, \alpha + \varepsilon]$ mit einem $\varepsilon > 0$ und wähle $x \in A_*$ derart, dass $x < \gamma + \varepsilon$ ausfällt. Es bedeute A_1 den Teil von A_*, der im Intervall $J = (\alpha, \alpha + u)$ enthalten ist. Nun bilde man die Summe $A_* + B$. Ist dann $x_0 \in J$, so zeigt eine einfache Ueberlegung, dass diese Menge folgende Punktmengen enthält, von denen je zwei einen Durchschnitt höchstens von der Länge ε haben :

1. Die Menge $x + \bar{B}$ vom Mass $L_1(\bar{B})$;
2. Die Menge $t + A_1$ vom Mass $L_1(A_1) > 0$ und
3. Die Menge $\beta + A_*$ vom Mass $L_1(A_*) = L_1(A)$. Hierbei wird β durch die Gleichung

$$\beta = \sup\{x \mid x \in B\}$$

definiert.

Daraus folgt

$$L_1(A_* + \bar{B}) \geqq L_1(A_*) + L_1(\bar{B}) + L_1(A) - 3\varepsilon,$$

also durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$

$$L_1(A_* + \bar{B}) \geqq L_1(A_*) + L_1(\bar{B}) + L_1(A). \tag{9.1}$$

Somit haben wir das Ergebnis : Es kann nur dann

$$L_1(A_* + \bar{B}) = L_1(A_*) + L_1(\bar{B}) \tag{9.2}$$

gelten, wenn $[B] \cap (\bar{B})'$ leer ausfällt, d. h. wenn $\bar{B}$ eine Strecke ist. Jetzt zeigt aber eine leichte Analyse der Bildung von $A_* + \bar{B}$, dass (9.2) im Falle, wo $\bar{B}$ eine Strecke ist, nur dann gelten kann, wenn $[A] \cap (\bar{A})'$ leer ist. Somit sind die Bedingungen

$$[A] \cap (\bar{A})' = [B] \cap (B)' = \emptyset \tag{9.3}$$

für die Gültigkeit von (9.2) notwendig. Dass sie aber auch hinreichend sind, ist trivial und bedarf keiner weiteren Erklärung.

Der Uebergang von (9.3) zu den Bedingungen 1) von Satz 8 wird durch Heranziehung der Satzes 6 bewerkstelligt.

Für $n > 1$ ist der Einzigkeitsbeweis komplizierter. Man zeigt zunächst (Henstock-Macbeath [1]) : Ist A eine F_σ-Menge, B abgeschlossen und gilt $0 < L(A)\,L(B) < +\infty$, so ist B^x für jedes

$x \in x_B(T_0)$ [1] nicht leer. Es bezeichne in der Tat J_k $(k = 1, 2, \ldots)$ die (abgeschlossene) Teilmenge von B, derenPunkte eine n-te Koordinate $x_n \in \left[x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right]$ haben. Dann gilt

$$L(J_k) = \int_{x-\frac{1}{k}}^{x+\frac{1}{k}} L_{n-1}(B^t)\,dt > 0,$$

und somit kann die Menge $B^x = \bigcap_1^\infty J_k$ nicht leer sein.

Wir führen jetzt mit Henstock und Macbeath folgenden Begriff ein : Es sei $v = (0, v_2, \ldots, v_n)$ ein Punkt der Ebene $x_1 = 0$ und l_v die Gerade $x_2 = v_2, \ldots, x_n = v_n$. Ist dann P eine (beschränkte) Teilmenge auf l_v, so soll P_* die Menge der inneren Dichtepunkte von P in Bezug auf l_v bedeuten.

Wir betrachten jetzt eine beliebige (beschränkte) Punktmenge A von E^n und sagen, A habe die Eigenschaft K (in E^n), falls auf einer Menge V von $x_1 = 0$ vom positiven Mass die Mengen $(A \cap l_v)_*$ $(v \in V)$ nicht konvex sind. Die Bedeutung dieser Begriffsbildung geht aus folgender Tatsache hervor (Henstock-Macbeath [1]) :

Hat A die Eigenschaft K, so kann in den Ungleichungen des Satzes 7 das Gleichheitszeichen nicht eintreten. Die Behauptung ist für $n = 1$ offenbar richtig. Ist $n > 1$, so folgt zunächst aus der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_{n-1}(A^x)\,dx = \int_{x_A(T_0)} L_{n-1}(A^x)\,dx,$$

dass, falls A in E^n die Eigenschaft K hat, A^x die Eigenschaft K auf einer Punktmenge von E^1 von positivem (linearen) Mass hat. Es bedeute T_1 die Teilmenge von T, für die $K^{x_A(\tau)}$ die Eigenschaft K hat. Dann gilt

$$L_1(x_0(T_1)) \geqq L_1(x_A(T_1)) > 0,$$

und somit genügt es zu zeigen, dass für $\tau \in T_1$

$$L_{n-1}(C^{x_0(\tau)}) > f_0^{n-1}(x_0(\tau)) \qquad (\tau \in T_1)$$

ausfällt, sofern man f_1 und f_2 durch die Gleichungen (8.11) definiert hat.

---

(1) $x_B(T_0)$ übernimmt hier die Rolle von $x_2(T_0)$.

Hat $B^{x_B(\tau)}$ ein positives Mass, so folgt die Behauptung durch Induktion unter Berücksichtigung der Ungleichung

$$C^{x+y} \supseteq A^x + C^y \qquad (C = A + B).$$

Ist $L_{n-1}(B^{x_B(\tau)}) = 0$, dann folgt wegen $H(x_A(\tau), x_B(\tau)) = 0$ die Ungleichung

$$L_1(C^{x_0(\tau)}) \geqq L_1(A^{x_A(\tau)}) > 0.$$

Jetzt beweist man mit Henstock und Macbeath : Hat die Punktmenge A bei jeder Wahl des Koordinatensystems die Eigenschaft K nicht, so muss sie konvex sein. Es seien in der Tat x, y zwei Punkte von A_* und es sei $0 < \lambda < 1$. Man setze $z = \lambda y + (1 - \lambda) x$ und nehme an (was keine Einschrankung der Allgemeinheit bedeutet), dass x im Nullpunkt liegt und y den Punkt $(1, 0, \ldots, 0)$ darstellt. Es bedeute M den n-dimensionalen achsenparallelen Würfel mit dem Mittelpunkt x und der Seitenlange $\varepsilon > 0$. Man setze

$$M_x = M \cap A, \; M_y = (M + y) \cap A \qquad \text{und} \qquad M_z = (M + z) \cap A$$

und wahle $0 < \varepsilon < \lambda < 1 - \varepsilon$. Dann sind M, $M + y$, $M + z$ punktfremd. Es bedeute w_1 die Projektion von M auf $x_1 = 0$ und δ eine positive Zahl $\left(0 < \delta < \frac{1}{2}\right)$. Wahlt man ε_0 genügend klein, so gilt für $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$L(M_x) > (1 - \delta)\,\varepsilon^n, \qquad L(M_y) > (1 - \delta)\,\varepsilon^n,$$

und somit hat mindestens eine der Teilmengen

$$\{\nu \mid L_1(l_\nu \cap M_x) > 0\}, \qquad \{\nu \mid L_1(l_\nu \cap M_y) > 0\}$$

ein Mass $\geqq (1 - \delta)\,\varepsilon^{n-1}$. Somit hat die Menge $L \subseteq w_1$, auf der beide Ungleichungen gelten, ein Mass $\geqq (1 - 2\,\delta)\,\varepsilon^{n-1}$. Hat also A die Eigenschaft K nicht, so ist $(A \cap l_\nu)^*$ konvex für fast alle $\nu \in L$ und somit $L_1(l_\nu) \cap M_z) \geqq \varepsilon$ für fast alle $\nu \in L$. Es gilt daher $L(M_z) \geqq (1 - 2\,\delta)\,\varepsilon^n$, also $z \in A_*$.

Man nehme jetzt an, es gelte für zwei beschrankte F_σ-Mengen A, B mit $0 < L(A)\,L(B)$

$$(9.3) \qquad L(C)^{\frac{1}{n}} = L(A)^{\frac{1}{n}} + L(B)^{\frac{1}{n}} \qquad (C = A + B).$$

Dann kann man der Reihe nach zeigen :

1. A_* ist konvex;

2. $A \subseteq \overline{A}_*$ und

3. $\overline{(A_*)}$, $\overline{(B_*)}$ sind zueinander homothetisch. Denn ist 1 falsch, so muss mit Rücksicht auf die vorherigen Entwicklungen

$$L(A+B)^{\frac{1}{n}} \geqq L_*(A_*+\overline{B})^{\frac{1}{n}} > L(A_*)^{\frac{1}{n}} + L(B)^{\frac{1}{n}} = L(A)^{\frac{1}{n}} + L(B)^{\frac{1}{n}}$$

gelten, was (9.3) widerspricht. Es sei jetzt 2 falsch. Dann gibt es ein $y \in A$ und eine Hyperebene E^{n-1} (die man ohne weiteres als die Ebene $x_1 = 0$ annehmen kann), die y von $\overline{(A^*)}$ trennt, und zwar so, dass $y_1 < 0$ und $x_1 \geqq 0$ für alle $x \in A_*$ gilt. Es sei

$$\gamma = \inf \{ x_1 \mid x \in B_*,\ x = (x_1, \ldots, x_n) \}$$

und B_1 der Teil von B mit

$$\gamma < x_1 < \gamma - y_1.$$

Dann enthält $\overline{A} + B_*$ die (punktfremden) Mengen $y + B_1$, $A_* + B_*$. Somit wird wegen $L(B_1) > 0$

$$\begin{aligned} L(C)^{\frac{1}{n}} &\geqq L(\overline{A}+B_*)^{\frac{1}{n}} > L(A_*+B_*)^{\frac{1}{n}} \\ &\geqq L(A_*)^{\frac{1}{n}} + L(B_*)^{\frac{1}{n}} = L(A)^{\frac{1}{n}} + L(B)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Der Beweis, dass die Gleichung (9.3) für konvexe A, B dann und nur dann gilt, wenn A, B homothetisch sind, ist klassisch (Man vgl. z. B. Minkowski [1], H. Kneser und Süss [1], Bonnesen-Fenchel [1]) und wird hier nicht ausführlich wiedergegeben werden.

Den letzten Teil des Satzes 8 beweist man folgendermassen : Man nehme gegen die Behauptung an, A enthalte zwei Punkte x, y $(x \neq y)$ etwa $(0, 0, \ldots, 0)$ und $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Dann gilt

$$C^x \supseteq B^x \cup B^{x-1},$$

$$L(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} L_{n-1}(B^x)\, dx$$

und somit wegen

$$L(A+B) \geqq \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Max} \{ L_{n-1}(B^x),\ L_{n-1}(B^{x-1}) \}\, dx$$

stets $L(A+B) > L(B)$, sofern nicht $L_{n-1}(B^x) = L_{n-1}(B^{x-1})$ für fast alle x ist. Wäre nun dies der Fall, so müsste

$$\int_m^{m+1} L_{n-1}(B^x)\,dx = \int_0^1 L_{n-1}(B^x)\,dx \qquad (m > 0)$$

gelten, was nur die Möglichkeiten $L(B) = 0$ oder $L(B) = \infty$ zulässt. Die Arbeit von Henstock und Macbeath stellt eine wesentliche Verallgemeinerung und Vertiefung Brunn-Minkowskischer Methoden dar. Von den unmittelbar vorangehenden Arbeiten, die mit Hilfe dieser Methoden über den Fall A, B = konvex hinausgingen, sind hier die Arbeit von Dinghas [1] und Dinghas und Erhard Schmidt [1] wie auch die Arbeit von Buseman [1] zu erwähnen. Die beiden zuerst erwähnten Arbeiten erledigen das Problem : A kompakt und B Kugel, die dort angewandten Methoden (Man vgl. Dinghas [1], Fussn. 13) und Buseman [1]) gelten unverandert auch für : A = kompakt und B konvex. Von den späteren Arbeiten sind hier noch die Arbeiten von Ohman [1] zu erwahnen. Auf die Arbeit von Hadwiger [4], der ähnlich wie Lusternik die Ungleichung (8.11) mit Hilfe wiederholter Symmetrisierungen beweist, komme ich im nächsten Kapitel zurück.

10. Relativmass von Punktmengen und allgemeine superadditive Mengenfunktionale. Verallgemeinerung des Lusternikschen Satzes. — Es sei X ein Minkowskischer Halbmodul, erzeugt durch eine bestimmte Klasse von nichtleeren, beschränkten Teilmengen von E^n. Man nehme an, dass zu jedem $A \in X$ eine Punktfunktion $g_A(x)$ mit folgenden Eigenschaften existiert :

1. $$0 \leq g_A(x) < +\infty;$$

2. Die Funktion $g_A(x)$ ist translationsinvariant. Das soll bedeuten : Geht A^τ durch die Translation τ aus A hervor, so gilt

$$g_{A^\tau}(x^\tau) = g_A(x) \qquad (x^\tau = x + \tau). \tag{10.1}$$

Allgemeiner kann man anstelle der Translationsinvarianz die Bewegungsinvarianz von $g_A(x)$ fordern.

3. Die Funktion $g_A(x)$ ist homogen von endlichem Grade $r \geq 0$ in Bezug auf A, d. h. sie genügt der Bedingung

$$g_{hA}(hx) = h^r g_A(x). \tag{10.2}$$

4. Die Funktion $g_A(x)$ ist monoton in Bezug auf A, d. h. sie genügt der Bedingung

$$g_A(x) \leqq g_B(x) \qquad (x \in A), \tag{10.3}$$

sofern $A \subseteq B$ ist.

5. Die Funktion $g_A(x)$ ist im folgenden Sinne superadditiv : Sind $A, B \in X$, so gilt für jedes Paar (x, y), $x \in A$, $y \in B$

$$g_{A+B}(x+y)^{\frac{1}{r}} \geqq g_A(x)^{\frac{1}{r}} + g_B(y)^{\frac{1}{r}}. \tag{10.4}$$

Mit Hilfe der Funktion $g_A(x)$ kann auf X ein superadditives Mengenfunktional definiert werden, das wir hier im Anschluss an Dinghas (Dinghas [8] und [10]) allgemein entwickeln.

Es sei $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ eine auf einer Menge $M \in X$ definierte positive beschränkte Funktion der Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ des Punktes x und es sei F eine kompakte Teilmenge von M. Unter einer Ueberdeckung durch eine W-Menge von F wird eine Ueberdeckung durch die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen, achsenparallelen Parallelotopen verstanden. Liegt eine solche Ueberdeckungsmenge vor, so wird sie wie üblich durch W bezeichnet.

Man betrachte jetzt endlich viele kompakte punktfremde Teilmengen $F_1, \ldots, F_m$ von M und wähle die Ueberdeckungen $W_1, \ldots, W_m$ $(W_k \supseteq F_k)$ so, dass $W_i \cap W_k = \emptyset \, (i \neq k)$ wird. Man setze

$$\mu_k = \inf \{ f(x) \mid x \in F_k \} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{10.5}$$

und

$$S = \inf \left\{ \sum_1^m \mu_k \, |W_k| \;\middle|\; W_k \supseteq F_k \right\} = \sum_1^m \mu_k \, L(F_k).$$

Dann definiert die Gleichung

$$J(f \mid M) = \sup \left\{ S \;\middle|\; \bigcup_1^m F_k \subseteq M \right\} \tag{10.6}$$

ein Mengenfunktional auf X.

Das Mengenfunktional, das man mit $f(x) = g_M(x)$ verknüpft, wobei letztere Funktion die Eigenschaften 1-5 aufweist, soll das Relativmass von M [in Bezug auf die Funktion $g_M(x)$] heissen und mit $J(g_M \mid M)$ [kurz $J(g_M)$] bezeichnet werden.

Satz 10'. — *Besteht* X *aus allen beschränkten Teilmengen von* E^n, *so gilt*

$$(10.7) \qquad J(g_{A+B})^{\frac{1}{r+n}} \geqq J(g_A)^{\frac{1}{r+n}} + J(g_B)^{\frac{1}{r+n}}.$$

Satz 10' folgt leicht aus einem allgemeineren Satz, der wieder aus Satz 10 durch Induktion folgt.

Man bezeichne die Funktion $f(x)$ bei gegebenem $M \in X$ als zulässig, wenn sie für jedes $x \in M$ der Ungleichung

$$(10.8) \qquad 0 < f(x) < C_M < +\infty$$

mit einer von M abhängigen Konstanten C_M genügt. Es seien jetzt $f_1(x), f_2(x)$ zwei auf A_1 bzw. A_2 definierte, zulässige Funktionen. Man definiere auf $A_0 = A_1 + A_2$ die Funktion $f_0(x)$ durch die Gleichung

$$(10.9) \quad f_0(x) = \sup\left\{\left(f_1(x')^{\frac{1}{r}} + f_2(x'')^{\frac{1}{r}}\right)^r \middle| x' \in A_1,\ x'' \in A_2;\ x = x' + x''\right\}$$

mit

$$x' = (x'_1, \ldots, x'_n), \qquad x'' = (x''_1, \ldots, x''_n).$$

Wegen

$$0 < f(x) < \left(C_A^{\frac{1}{r}} + C_B^{\frac{1}{r}}\right)^r$$

ist dann $f_0(x)$ ebenfalls zulässig.

Es gilt nun der

Satz. 11. — *Zwischen* $J(f_1 \mid A_1)$, $J(f_2 \mid A_2)$ *und* $J(f_0 \mid A_0)$ *besteht die Ungleichung*

$$(10.10) \qquad J(f_0 \mid A_0)^{\frac{1}{r+n}} \geqq J(f_1 \mid A_1)^{\frac{1}{r+n}} + J(f_2 \mid A_2)^{\frac{1}{r+n}}.$$

Beweis. — Es seien $F'_1, \ldots, F'_{m'}$ bzw. $F''_1, \ldots, F''_{m''}$ paarweise punktfremde, abgeschlossene Teilmengen von A_1 bzw. A_2. Wir überdecken jedes F'_k bzw. F''_k durch W-Mengen W'_k bzw. W''_k und nehmen an, dass $W'_i \cap W'_k = \emptyset$ und $W''_i \cap W''_k = \emptyset$ $(i \neq k)$ gilt. Es bedeuten nun W'^*_k bzw. W''^*_l die offenen Kerne von W'_k bzw, W''_l. Man definiere μ'_i, μ''_l durch die Vorschrift (10.5) und setze

$$(10.11) \qquad g_1(x) = \mu'_k \qquad (x \in W'_k,\ k = 1, 2, \ldots, m')$$

und

$$(10.12) \qquad g_2(x) = \mu''_l \qquad (x \in W''_l,\ l = 1, 2, \ldots, m'').$$

Hierbei kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass μ'_k bzw. μ''_l positiv sind. Liegt x in $W' - \bigcup_1^{m'} W'^{*}_k$ bzw. in $W'' - \bigcup_1^{m''} W''_l$, so soll $g_1(x)$ bzw. $g_2(x)$ gleich der zugehörigen unteren Limesfunktion genommen werden.

Setzt man nun

$$g_n^{A_1}(x) = \begin{cases} g_1(x) & (x \in W'), \\ 0 & (x \notin W') \end{cases}$$

und definiert man entsprechend $g_n^{A_2}(x)$, so liefert das Abbildungsverfahren von 5 unter Zugrundelegung des Brunnschen Gedankens, wie dieser dort entwickelt wird, die Ungleichung

$$(10.13) \qquad \int_{W'+W''} g_W \, dx_1 \ldots dx_n \geqq \left\{ (g_0^{A_1})^{\frac{1}{r+n}} + (g_0^{A_2})^{\frac{1}{r+n}} \right\}^{r+n}$$

mit

$$g_0^{A_1} = \int_{W'} g_1(x)\, dx_1 \ldots dx_n, \qquad g_0^{A_2} = \int_{W''} g_2(x)\, dx_1 \ldots dx_n$$

und

$$g_W(x) = \operatorname{Max} \left\{ \left(g_1(x')^{\frac{1}{r}} + g_2(x'')^{\frac{1}{r}} \right)^r \right\}$$
$$(x = x' + x'',\ x' \in W',\ x'' \in W).$$

Lässt man nun W'_k bzw. W''_l gegen F'_k bzw F'' konvergieren, so konvergieren die Integrale $g_0^{A_1}$ und $g_0^{A_2}$ gegen $J(f_1 \mid A_1)$ bzw. $J(f_2 \mid A_2)$. Jetzt betrachte man zwei monoton gegen $F' = \bigcup_1^{m'} F'_k$ bzw. $F'' = \bigcup_1^{m''} F''_l$ konvergierende Folgen (W'_n bzw. W''_n) von W-Ueberdeckungen von F' bzw. F'' und setze $F = F' + F''$ und

$$g(x) = \operatorname{Max} \left\{ \left(\mu_l'^{\frac{1}{r}} + \mu_k''^{\frac{1}{r}} \right)^r \right\} \qquad (x = x' + x'',\ x' \in F'_l,\ x'' \in F''_k).$$

Beachtet man dann, dass $g(x) \leqq f_0(x)$ $(x \in F)$ gilt, so wird bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ die linke Seite von (10.13) kleiner als

$$\int_F g_{W_n} \, dx_1 \ldots dx_n + M\varepsilon \qquad (W_n = W'_n + W''_n),$$

sofern man n hinreichend gross nimmt. Dabei ist M eine endliche Konstante.

Beim Grenzübergang $n \to \infty$ hat man nun folgende Tatsachen zu beachten :

1. Mit wachsendem n konvergiert $g_{W_n}(x)$ gegen $g(x)$.

2. Es gilt

$$I(f_0 \mid F) \leqq I(f_0 \mid A_0).$$

Lässt man dann nachträglich $\varepsilon \to 0$ konvergieren, so erhält man die Ungleichung (10.10). Somit dürfte zugleich auch Satz 10 als bewiesen angesehen werden.

Sind A_1, A_2 offene konvexe Punktmengen und allgemein $g_M(x)$ stetig in M, so kann die Einzigkeitsfrage von (10.8) (Dinghas [10]) folgendermassen beantwortet werden :

Das Gleichheitszeichen in (10.8) tritt dann und nur dann ein, wenn A_1, A_2 homothetisch sind.

Knothe [2], [3] konnte für $X = 2^M$ die Bedingung (10.4) durch die logarithmische Superadditivität von $g_M(x)$ ersetzen. Genauer hat er gezeigt : Gilt für $0 \leqq \mathfrak{I} \leqq 1$

$$\log g_{A_{\mathfrak{I}}}(x_{\mathfrak{I}}) \geqq (1-\mathfrak{I}) \log g_{A_1}(u_1) + \mathfrak{I} \log g_{A_2}(u_2),$$

mit

$$A_{\mathfrak{I}} = (1-\mathfrak{I})\, A_1 + \mathfrak{I} A_2, \qquad x_{\mathfrak{I}} = (1-\mathfrak{I})\, u_1 + \mathfrak{I} u_2$$

und $u_1 \in A_1$, $u_2 \in A_2$, so gilt (10.8), sofern die übrigen Voraussetzungen für $g_M(x)$ erfüllt sind.

Hadwiger (Hadwiger [10] und [11]) gibt eine Reihe interessanter superadditiver Mengenfunktionale verschiedener, ganzzahliger Dimension, von denen die einfachsten mit einigen von Knothe [1] betrachteten Sehnenpotenzenintegralen zusammenfallen. Solche Integrale wurden später von Bol [1] Gegenstand eingehender Untersuchung.

Für eine ausführliche Darstellung des hier kurz skizzierten Beweises der Sätze 10 und 11 vgl. man Dinghas [10]. Sowohl diese Arbeit als auch die Note [8] enthalten einen zweiten Beweis des Satzes 11, der induktiv vorgeht und den Satz 9 und 8 von Henstock und Macbeath verwendet.

DRITTES KAPITEL

Symmetrisierungen von Punktmengen. Weitere Beweise der Sätze von Brunn-Minkowski und Lusternik. Klassische und nichtklassische isoperimetrische Ungleichungen

11. Elementare Symmetrisierungen von Punktmengen. — Es seien A, B zwei beliebige, nichtleere beschränkte Punktmengen von E^n. Man setze

$$(A, B) = A \cup B \setminus A \cap B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \tag{11.1}$$

und

$$d(A, B) = L^*(A, B). \tag{11.2}$$

Der Ausdruck $d(A, B)$ hat die Eigenschaften :

1. Es gilt $d(A, A) = 0$.
2. Für je zwei Punktmengen A, B von E^n ist $d(A, B) = d(B, A) \geqq 0$.
3. Für je drei Punktmengen A, B, C von E^n gilt

$$d(A, B) \leqq d(A, C) + d(B, C).$$

Die Eigenschaften 1 und 2 folgen aus den selbstverständlichen Relationen $(A, B) = (B, A)$ und $(A, A) = \emptyset$. Für die Eigenschaft 3 hat man lediglich die Relation

$$(A, B) \subseteq (A, C) \cup (B, C)$$

zu berücksichtigen.

Es sei nun allgemein M eine F_σ-Menge, und es sei $\nu \in E_k$ ($k < n$, fest). Man betrachte den linearen Unterraum E^{ν}_{n-k} und stelle zunächst M durch die Gleichung

$$M = \bigcup \{ M \cap E^{\nu}_{n-k} \mid \nu \in E_k \} \tag{11.3}$$

dar.

Definition. — *Unter der elementaren Transformation* T^k *wird folgender Prozess verstanden : Es bedeute* S^r_ν (*bei nichtleerem* M_{n-k}) *die* [$(n-k)$*-dimensionale*] *abgeschlossene Kugel* *auf* E^{v}_{n-k} *um den Punkt* $v \in E_k$ *vom Radius* r, *wobei letzterer durch die Gleichung*

$$\omega_{n-k} r^{n-k} = \int_{M_{n-k}} dv_{k+1} \ldots dv_n \tag{11.4}$$

definiert wird. Hierbei bedeutet allgemein ω_q *den Inhalt der Einheitskugel in* E^q. *Ist* M_{n-k} *leer, so schreiben wir* $\emptyset$ *anstelle von* S^r_v.

Man setze jetzt

$$\overline{M} = \bigcup \{ S^r_v \mid v \in E_k \}. \tag{11.5}$$

Dann soll $\overline{M}$ die (in Bezug auf E_k) elementar-symmetrisierte Menge M heissen.

Ist $k = 1$, so fällt bekanntlich die Operation $M \to \overline{M}$ mit dem zuerst von Schwarz [1] eingeführten klassischen Abrundungsverfahren zusammen. Dagegen stellt (11.5) für $k = n - 1$ die berühmte Steinersche Symmetrisierung (Steiner [1]) von M in Bezug auf die Ebene $x_n = 0$ dar.

Zwei wichtige Eigenschaften der elementaren Symmetrisierungen werden durch folgende Sätze zum Ausdruck gebracht :

SATZ 12. — *Ist* M *kompakt, so ist* $\overline{M}$ *ebenfalls kompakt, und es gilt* $L(\overline{M}) = L(M)$.

SATZ 13. — *Gehen die beiden* F_σ*-Mengen* A, B *durch eine elementare Symmetrisierung in die Mengen* $\overline{A}$, $\overline{B}$ *über, so gilt*

$$d(\overline{A}, \overline{B}) \leqq d(A, B). \tag{11.6}$$

Dass $\overline{M}$ kompakt ist, kann leicht bewiesen werden. Die Gleichung $L(\overline{M}) = L(M)$ ist eine Folge des klassischen Fubinischen Satzes und von (11.4). Sie gilt auch für jede F_σ-Menge und somit auch für jedes messbare M.

Der Beweis des Satzes 13 kann folgendermassen erbracht werden : Man setze allgemein

$$F^k_M = \int_{M^p_{n-k}} dx_{k+1} \ldots dx_n \qquad (p \in E_k) \tag{11.10}$$

und berücksichtige die Gleichungen

$$(11.11) \qquad L(\bar{A} \cup \bar{B}) = \int_{E_k} \text{Max}\,\{F^k_A, F^k_B\}\, dx_1 \dots dx_k$$

und

$$(11.12) \qquad L(\bar{A} \cap \bar{B}) = \int_{E_k} \text{Min}\,\{F^k_A, F^k_B\}\, dx_1 \dots dx_k.$$

Nun ist, wie man leicht sieht,

$$\text{Max}\,\{F^k_A, F^k_B\} = F^k_{A\cup B} - \text{Min}\,\{F^k_{A-B}, F^k_{B-A}\}$$

und

$$\text{Min}\,\{F^k_A, F^k_B\} = F^k_{A\cap B} + \text{Min}\,\{F^k_{A-B}, F^k_{B-A}\}.$$

Somit wird durch Einsetzen in (11.11) bzw. (11.12)

$$(11.13) \qquad L(\bar{A} \cup \bar{B}) = L(A \cup B) - L(\overline{A - B} \cap \overline{B - A})$$

und

$$(11.14) \qquad L(\bar{A} \cap \bar{B}) = L(A \cap B) + L(\overline{A - B} \cap \overline{B - A}).$$

Daraus folgt durch Subtraktion

$$(11.15) \qquad d(\bar{A}, \bar{B}) = d(A, B) - 2L(\overline{A - B} \cap \overline{B - A})$$

und somit auch (11.6).

Satz 13 stellt ein wertvolles Hilfsmittel für die Behandlung isoperimetrischer Probleme durch Symmetrisierungsprozesse dar. (Für die Gleichung (11.14) und $k = n - 1$ siehe Hadwiger [4] und [9] und Dinghas [4]). Für die hier gegebenen allgemeinen Sätze vgl. man auch Dinghas [12]. Die (moderneren) Bücher von Hadwiger (Hadwiger [9] und [12]) ziehen lediglich die Steinersche Symmetrisierung in Betracht. Eine ausführlichere Darstellung beider klassischen Symmetrisierungen findet man für $n = 3$ bei Bonnesen [1] und für ein beliebiges n bei Bonnesen-Fenchel [1].

12. Vorbereitende Tatsachen zur isoperimetrischen Aufgabe für Cantor-Minkowskische Aussenmengen. Problemstellung. — Wir holen zunächst den Beweis der Hilfssätze 1-3 von Nr. 5 nach und beweisen zuerst, dass die Menge (2.2) einen Jordanschen Inhalt hat. Wir schreiben S^h_x anstelle von S^h_p und nehmen zunächst an, dass jedes S^h_x offen ist.

Man betrachte wie in 5 ein Netz n-dimensionaler, achsenparalleler Würfel W von der Seitenlänge $a < \frac{h}{\sqrt{n}}$. Es sei M beschränkt und es bezeichne n_i die Anzahl der Würfel W, die nur aus Punkten von M bestehen. Ist dann entsprechend n_e die Anzahl der Würfel W, die mindestens einen Punkt von M enthalten, so gilt

$$(12.1) \qquad 0 \leqq \bar{J}(M^h) - \underline{J}(M^h) \leqq (n_e - n_i)\, a^n = r a^n.$$

Hierbei bedeutet $\underline{J}$ den inneren Jordanschen Inhalt. Man verfeinere das Würfelnetz, indem man jeden Würfel W in u^n achsenparallele, kongruente Teilwürfel zerlegt, wo u die erste ungerade Zahl $> 2\sqrt{n+1}$ ist. Es sei W ein bestimmter Randwürfel. Dann kann nicht jeder der u^n Teilwürfel wieder Randwürfel sein. Ist nun der mittlere Teilwürfel von W kein Randwürfel, so ist die Behauptung erwiesen. Andernfalls muss W einen Punkt x^* von S^h enthalten. Somit gibt es einen Punkt x von M mit $|x - x^*| < h$, der (wegen $h > a\sqrt{n}$) ausserhalb W liegt. Die Strecke $\overline{x x^*}$ möge nun den Rand von W in x_0 schneiden. Es sei W_1 ein Teilwürfel von W, zu dem x_0 gehört. Ist dann x_1 ein beliebiger Punkt von W_1, so ist

$$(12.2) \qquad |x_1 - x_0| \leqq \sqrt{n}\,\frac{a}{u}, \qquad |x_0 - x^*| \geqq \frac{u-1}{2}\,\frac{a}{u},$$

und

$$(12.3) \qquad |x - x_1| < h - \frac{a}{u}\left(\frac{u-1}{2} - \sqrt{n}\right) < h.$$

Somit wird

$$0 \leqq \bar{J}(M^h) - \underline{J}(M^h) \leqq \left(\frac{u^n - 1}{u^n}\right) r a^n = \mu r a^n$$

und nach k-maliger Wiederholung

$$(12.4) \qquad 0 \leqq \bar{J}(M^h) - \underline{J}(M^h) \leqq \mu^k r a^n.$$

Das beweist den Hilfssatz 1 von 5. Der Fall, wo S^h_x abgeschlossene Kugeln sind, lässt sich ähnlich beweisen und wird hier in den Beweis des Hilfssatzes 2 einbezogen.

Es bedeute r_0 den Radius der maximalen Kugel, die in B Platz findet. Man nehme $a < \frac{r_0}{\sqrt{n}}$ und betrachte einen Randwürfel W von $A+B$. Jetzt teile man wieder W in u^n kongruente Teilwürfel, wobei wieder u ungerade gewählt wird. Ist nun der mittlere Teilwürfel von W wieder Randwürfel, so enthält er einen Punkt x_* von $A+B$. Da nun x_* in einem geeignet verschobenen B, etwa B^τ liegt, so gibt es einen Punkt x in A derart, dass $S_x^{r_0} \subseteq B^\tau$ gilt. Der Punkt x liegt wieder ausserhalb W. Wegen der Konvexität von B gehört somit die um den wie vorhin definierten Punkt x_0 gelegte Kugel S_{x_0} vom Radius $|x_0 - x_*| \frac{r_0}{|x - x_0|}$ dem Körper B an. Es bedeute jetzt d_0 den Durchmesser von B. Wegen $|x_0 - x_*| \geqq (u-1)\frac{d_0}{2u}$ wird

$$r_0 \frac{|x_0 - x_*|}{|x - x_*|} \geqq \frac{u-1}{2} \frac{a}{u} \frac{r_0}{d_0}.$$

Wählt man also $\frac{1}{2}(u-1) > \frac{d_0}{r_0}\sqrt{n}$, so wird

$$r_0 \frac{|x_0 - x_*|}{|x - x_*|} > \frac{a\sqrt{n}}{u},$$

und somit kann der Teilwürfel W (um x_0) kein Randwürfel sein. Das beweist den Hilfssatz 2 für $h = 1$.

Die hier gegebenen Beweise der Hilfssätze 1 und 2 gehen (wie auch die Hilfssätze selbst) auf Behrend [1] zurück. Der Beweis des Hilfssatzes 3 kann auf Grund diesbezüglicher Ausführungen von Nr. 5 leicht vom Leser erbracht werden.

Die Ausbildung eines kurzen Verfahrens mit Hilfe wiederholter elementarer Symmetrisierungen unter Zugrundelegung einer breiten Klasse von Ausgangsmengen beginnt, wenn man von den Arbeiten von Tonelli [1] absieht, mit der fundamentalen Arbeit von Gross [1]. Diese Arbeit enthält vieles, was in manchen späteren Arbeiten (z. B. Hadwiger [3], Dinghas [4]) in vereinfachter Form verwendet wird. Die Verwendung von Cantor-Minkowskischen Aussenmengen für das isoperimetrische Problem unter Heranziehung allgemeinerer Punktmengen beginnt systematisch mit der wichtigen Arbeit von Estermann [1].

Die klassische isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in E^n kann am deutlichsten durch folgende Problemstellung zum Ausdruck gebracht werden :

PROBLEM A. — *Es sei* $V > 0$. *Eine Menge* A *soll der Klasse* C_V *angehören, wenn :*

1. *A kompakt ist und*
2. $\bar{J}(A) = V$ *gilt.*

Dann soll bewiesen werden :

$$|S^h| = \inf\{|A^h| \mid A \in C_V\}. \tag{12.5}$$

Hierbei soll S die in C_V enthaltene Kugel bedeuten.

PROBLEM B (Einzigkeitsfrage). — *Für welche Teilklasse* C'_V *von* C_V *gilt*

$$|A^h| = |S^h| \tag{12.6}$$

nur für das Element $A = S$?

Problem A und Problem B können nach Minkowski folgendermassen verallgemeinert werden.

Es sei K_0 eine kompakte konvexe Punktmenge mit mindestens einem inneren Punkt. Man beziehe K_0 auf ihren Schwerpunkt und schreibe allgemein M^{hK_0} für $M + hK_0$. Dann lautet das verallgemeinerte Problem A :

PROBLEM A'. — *Man definiere* K *durch die Bedingungen*

a. $K = tK_0 \qquad (t > 0)$

b. $|K| = V.$

Dann gilt bei vorgegebenem $h > 0$:

$$|K^{hK_0}| \leqq \inf\{|A^{hK_0}| \mid A \in C_V\}. \tag{12.7}$$

Problem B lässt sich entsprechend formulieren.

In der nächsten Nummer soll mit Hilfe von Symmetrisierungsmethoden lediglich das Problem A behandelt werden.

13. Beweis der Extremaleigenschaft der Kugel mittels wiederholter Steinerscher Symmetrisierungen. — Es sei $A_0 \in C_V$. Dann soll K_{A_0} die Klasse derjenigen Punktmengen bedeuten, die man aus A_0 durch endlich viele Symmetrisierungen erhält. Sind A, $B \in K_{A_0}$, so gehen sie offenbar durch endlich viele Steiner-Symmetrisierungen auseinander hervor. Es bedeute nun wieder S die Kugel, die in C_v enthalten ist. Dann gilt der

HILFSSATZ 1. — *Es ist*

$$\Delta = \inf \{ d(A, S) \mid A \in K_{A_0} \} = 0. \tag{13.1}$$

Beweis. — Man nehme $\Delta > 0$ an. Dann gibt es bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $A_1 \in K_{A_0}$ mit

$$\Delta \leqq d(A_1, S) \leqq \Delta + \varepsilon. \tag{13.2}$$

Man symmetrisiere jetzt A_1 in Bezug auf die n Koordinatenebenen und bezeichne mit $\overline{A}_1$ die so entstandene Punktmenge. Dann gilt für $\overline{A}_1$ ebenfalls die Doppelungleichung (13.2). Wegen der Beschaffenheit von $\overline{A}_1$ und der Tatsache $\Delta > 0$ existiert eine Kugel S_0 von festem positivem (nur von Δ abhängigem) Radius derart, dass diese in $S \setminus \overline{A}_1$ Platz findet. Es sei jetzt N ein achsenparalleles Netz von E^n. Man wähle die Seitenlänge der Würfel von N so klein, dass S_0 in jeder möglichen Lage in S mindestens einen Würfel enthält. Es sei m die Anzahl der Würfel von N, die Punkte von $\overline{A}_1$ enthalten. Da $d(\overline{A}_1, S) \geqq \Delta > 0$ ist, so gibt es mindestens einen Würfel, etwa W, von N mit der Eigenschaft $L((\overline{A}_1 - S) \cap W) \geqq \frac{\Delta}{2m}$. Symmetrisiert man nun S und $\overline{A}_1$ in Bezug auf eine Ebene, die senkrecht zu der Strecke steht, welche den Mittelpunkt von S_0 mit dem Mittelpunkt von W verbindet, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung (11.15)

$$d(\overline{\overline{A}}_1, S) \leqq d(\overline{A}_1, S) - \frac{\Delta}{2m}$$

was für $\varepsilon < \frac{\Delta}{4m}$ offenbar falsch ist. Es muss also $\Delta = 0$ sein und somit (13.1) gelten.

HILFSSATZ 2. — *Für jedes* $A \in C_v$ *gilt*

$$|A^h| \geqq |\overline{A}^h|. \tag{13.3}$$

Beweis. — Wir zeigen zunächst : Es gilt

(13.4) $$\overline{(A^h)} \supseteq (\bar{A})^h.$$

Es bedeute in der Tat a eine zur Symmetrisierungsebene senkrechte Gerade und d_a den Durchschnitt $a \cap A$. Ist d_a nicht leer, so gilt offenbar

$$(\bar{d}_a)^h \subseteq \overline{(d_a^h)}.$$

Da noch

$$\bar{A}^h = \bigcup_a (\bar{d}_a)^h$$

ist und

$$\bigcup_a \overline{(d_a^h)} \subseteq \overline{(A_h)}$$

gilt, so ist (13.4) richtig.

Was jetzt folgt, kann kurz folgendermassen zusammengefasst werden. Es sei $o < k < h$. Wegen $\Delta = o$ gibt es ein $A \in K_{A_0}$ derart, dass jeder Punkt x von S eine Entfernung von $A \cap S$ hat, die höchstens k ist. Daraus folgt $S^{h-k} \subseteq (A \cap S)^h$, und somit wird

$$|A_0^h| \geqq |A^h| \geqq |S^{h-k}|$$

und durch Grenzübergang $k \to o$

(13.5) $$|A_0^h| \geqq |S^h|.$$

Für das hier entwickelte kurze Verfahren vgl. man neben der älteren Arbeit von Gross [1] die Arbeiten von Hadwiger (Hadwiger [3], [7] und [9]) und Dinghas [4].

Will man die Einzigkeitsfrage (Problem B) beantworten, so muss man von der Eigenschaft

(13.6) $$(A^{h_1})^{h_2} = (A^{h_2})^{h_1} = A^{h_1+h_2}$$

der Cantor-Minkowskischen Konstruktion ausgehen.

Es bedeute S_n die n-dimensionale Einheitskugel. Es sei für ein $h_0 > o$

(13.7) $$|A^{h_0}| = |S^{h_0}| \qquad (A \in C_V)$$

und

(13.8) $$|A| = \lim_{\varepsilon \to 0} |A^\varepsilon| \qquad (\varepsilon > o).$$

Dann wird mit Rücksicht auf (13.6)

$$|A^{h_0}| = |(A^h)^l| = |(S^h)^l| \quad (h_0 = h + l,\ l > 0),$$

und somit

$$|A^{h_0}|^{\frac{1}{n}} = |S^h|^{\frac{1}{n}} + l|S_n|^{\frac{1}{n}} \geqq |A^h|^{\frac{1}{n}} + l\,|S_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Gilt in (13.5) für ein $h = h_0$ das Gleichheitszeichen, so ist dies für jedes $h < h_0$ der Fall. Ein entsprechender Schluss gilt auch für die Minkowskische Bildung A^{hK_0}, sofern K_0 konvex ist.

Diese Ueberlegungen zeigen, dass man sich für Einzigkeitsfragen sehr wohl auf Aussenmengen A^h mit einem hinreichend kleinen $h > 0$ beschränken kann. Die Entwicklungen von 5 zeigen dann, dass für nicht konvexe A bei geeigneter Wahl der Symmetrisierungsebene die Ungleichung

$$(13.9) \qquad |A^h| \geqq |\bar{A}^h| + kh,$$

mit einem konstanten (von h unabhängigen) k gilt, sofern h hinreichend klein ist. Das führt dann zu der Ungleichung

$$(13.10) \qquad |A^h| \geqq |S^h| + kh$$

welche die Einzigkeitsfrage auf die Betrachtung konvexer Körper beschränkt.

Ist (13.9) gezeigt worden, so kann (Dinghas [4]) Problem B folgendermassen schnell erledigt werden :

Es sei A konvex und es bedeute T die Gesamtheit aller Parallelverschiebungen von A.

Man bilde die Grösse

$$J_0 = \mathrm{Max}\left\{ |A^\tau \cap S| \;\middle|\; \tau \in T \right\}$$

und betrachte ein τ_0 mit

$$|A^{\tau_0} \cap S| = J_0.$$

Ist nun $A \neq S$, so ist $J_0 < |S|$, und man kann mit Rücksicht auf (11.3) durch eine geeignete Symmetrisierung erreichen, dass

$$|\bar{A}_0 \cap S| > |A_0 \cap S| \qquad (A_0 = A^{\tau_0})$$

wird, was unmöglich ist.

Der ausführliche Beweis von (13.9) für die allgemeinsten kompakten Punktmengen steht noch aus. Dinghas' Behauptung in dieser Richtung (Dinghas [4]) bedarf einer nachträglichen Bestätigung.

14. Uebertragung auf den Lusternikschen Fall. Vergleiche mit der Brunn-Minkowskischen Methode. — Hadwiger [4] hat mit Hilfe von Methoden, die sich in der Richtung der in der vorigen Nummer entwickelten Methoden bewegen, vor dem Erscheinen der Arbeit von Henstock und Macbeath einen wichtigen Fall des Lusternikschen Satzes aufgegriffen und ihn mit Symmetrisierungsmethoden zu Ende geführt, ohne jedoch auf die Frage des Eintretens des Gleichheitszeichens in den fraglichen Ungleichungen einzugehen. Dabei verwendet er an entscheidender Stelle (ähnlich wie Lusternik) den schon vorhin erwähnten Auswahlsatz, der die Existenz von zwei Grenzelementen in K_A bzw. K_B im Sinne des Hilfssatzes 1 von Nr. 13 sichert. Hadwiger legt kompakte Punktmengen zugrunde und führt den Beweis von (5.14) in drei Schritten durch, die wir hier kurz andeuten :

1. Es bedeute für ein kompaktes $M \in E^n [K_M]$ denjenigen abstrakten Raum, den man aus K_M durch Hinzufügung aller Punktmengen erhält, die als Grenzmengen von Cauchyschen Folgen von K_A darstellbar sind (Hilfssatz 5, Nr. 17). Es seien jetzt A, B zwei kompakte Punktmengen von E^n. Man bilde $A + B$ und anschliessend $\overline{A}$, $\overline{B}$ und $\overline{A + B}$. Dann gilt

$$\overline{A + B} \supseteq \overline{A} + \overline{B} \tag{14.1}$$

und somit zunächst

$$\overline{J}(A + B) \geqq \overline{J}(\overline{A} + \overline{B}). \tag{14.2}$$

Eine ähnliche Ungleichung findet sich bei Lusternik.

Jetzt bilde man (unter Beibehaltung der Bezeichnungen von Nr. 13. und mit S_A anstelle von S)

$$J_0^A = \sup \{ | A^h \cap S_A | \mid A \in [K_A] \}. \tag{14.3}$$

Nun zeigt man mit Hilfe des Auswahlsatzes :

Es existiert ein $A_0 \in [K_A]$ mit der Eigenschaft

$$| A_0^h \cap S_A | = | S_A | = J_0^A. \tag{14.4}$$

2. Der zweite Schritt des Hadwigerschen Beweises besteht darin, die Existenz von zwei Punktmengen $A_1 \in [K_A]$ und $B_1 \in [K_B]$ nachzu-

weisen mit $A_1^h \supseteq A_0$ bzw. $B_1^h \supseteq B_0$, also [mit Rücksicht auf (14.4)] mit $A_1^{2h} \supseteq S_A$, $B_1^{2h} \supseteq S_B$.

Ist dies bewiesen, so verfährt man weiter so :

3. Man kann durch endlich viele Steinersche Symmetrisierungen zeigen :

$$\overline{(A_1 + B_1)^{4h}} \supseteq \overline{A}_1^{2h} + \overline{B}_1^{2h} \tag{14.5}$$

und somit

$$(\overline{A_1 + B_1})^{4h} \supseteq S_A + S_B.$$

Daraus folgt

$$|(A_1 + B_1)^{4h}| \geqq |S_A + S_B|,$$

also auch (durch Grenzübergang $h \to 0$)

$$\bar{J}(A + B) \geqq |S_A + S_B|.$$

Das beweist (5.14).

Einen weiteren Beweis von Hadwiger findet der Leser in Hadwiger [5]. Der Leser wird jedoch selbst gemerkt haben, dass alle mit Hilfe von Symmetrisierungen erbrachten Beweise, soweit diese die Fragen des Eintretens des Gleichheitszeichens nicht entscheiden (und das tun sie bisher nicht) von der Einfachheit des auf den Brunn-Minkowskischen Ideen fussenden Beweises von 5 stark zurückbleiben. Gerade aber die Einzigkeitsfrage (Problem B im allgemeinen Sinne) zwingt uns, zu den Methoden von Brunn und Minkowski zurückzukehren.

15. **Das Problem der klassischen und der Relativoberfläche.** — Das allgemeine Verfahren, wodurch aus (8) die isoperimetrische Ungleichung (9) abgeleitet wird, führt, angewandt auf die Ungleichung (10.7), direkt zur Ungleichung für die Relativoberfläche.

Man ersetze in (10.7) B durch hB und berücksichtige (10.2). Dann wird

$$J(A + hB \mid g_{A+hB})^{\frac{1}{r+n}} \geqq J(A \mid g_A)^{\frac{1}{r+n}} + J(B \mid g_B)^{\frac{1}{r+n}} \tag{15.1}$$

und nach leichtem Grenzübergang $h \downarrow 0$

$$M_r(A \mid B)^{n+r} \geqq J(A \mid g_A)^{n+r-1} J(B \mid g_B) \tag{15.2}$$

mit

$$(n + r)\, M_r(A \mid B) = \lim_{h \to 0} \frac{J_r(A + hB \mid g_{A+hB}) - J_r(A \mid g_A)}{h}. \tag{15.3}$$

Ist $g_A(x) = 1$ $(x \in A)$, also $J(g_A) = L_*(A)$, so definiert (15.3) die klassische Minkowskische Relativoberfläche $M(A \mid B)$. Im folgenden setzen wir

$$(15.4) \qquad nM(A \mid B) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{L_*(A + hB) - L_*(A)}{h}.$$

Für $B = S_n$ geht $M(A \mid B)$ in das (untere) Minkowskische Flächenmass $M(A) = M(A \mid S_n)$ über.

Neben den durch (15.3) bzw. (15.4) eingeführten Massen $M_r(A \mid B)$ und $M(A \mid B)$ kann man durch Betrachtung von Innenpunktmengen nach dem Vorbild der Cantor-Minkowskischen Aussenpunktmengen A^ε $(\varepsilon > 0)$ weitere Oberflächenmasse einführen. Das Konstruktionsprinzip findet der Leser am klarsten in dem Buch von Hadwiger (Hadwiger [12]) dargestellt. Dort findet er auch die (oft komplizierten) Beziehungen von $M(A)$ zu den anderen klassischen Oberflächenmassen, insbesondere zum Lebesgueschen bzw. zum Gross'schen Flächenmass.

Setzt man in (15.1) die Belegfunktion $g_M(x)$ gleich Eins voraus, so erhält man die klassische Minkowskische Ungleichung für die Relativoberfläche

$$(15.5) \qquad M(A \mid B) \geqq L_*(A)^{1-\frac{1}{n}} L_*(B)^{\frac{1}{n}}.$$

Das Einzigkeitsproblem dieser isoperimetrischen Ungleichung besteht nun darin, innerhalb einer möglichst breiten Klasse von Punktmengen A, B von E^n diejenigen Punktmengenpaare (A, B) zu bestimmen, für die in (15.5) das Gleichheitszeichen steht. Das Problem wurde von Buseman [1], Hadwiger-Ohman [1] und Dinghas [11] in Angriff genommen, der auch die bisher breiteste Klasse von zulässigen Mengen betrachtete. In den nachfolgenden Entwicklungen wird letztere Arbeit zugrunde gelegt.

Der Behandlung der Einzigkeitsfrage schicken wir folgende Hilfssätze voraus :

HILFSSATZ 1. — *Sind* A, B *Extremalpunktmengen, so trifft dies auch für* λA, μB *mit* $\lambda, \mu > 0$ *zu.*

HILFSSATZ 2. — *Ist* (A, B) *ein Extremalpaar von* (15.5), *so sind die Punktmengenpaare* $(A_*, \overline{B})$, $(\overline{(A^*)}, \overline{B}^*)$, $(\overline{A}, B_*)$, $(\overline{A}_*, \overline{(B_*)})$,

(A, B_*) *und* (A_*, B) *ebenfalls Extremalpaare, und es gilt*

$$L_*(A) = L(\bar{A}) = L(\bar{A}_*) = L(\overline{(A_*)}) \tag{15.6}$$

und

$$L_*(B) = L(\bar{B}) = L(\bar{B}_*) = L(\overline{(B_*)}). \tag{15.7}$$

Es bedeute jetzt A eine Teilmenge von E^n mit einem nichtleeren Dichtekern A_*. Man setze

$$\alpha_{A_*} = \inf\{x_n \mid x \in A_*\}; \qquad \beta_{A_*} = \sup\{x_n \mid x \in A_*\}. \tag{15.8}$$

Bildet man dann die Schnitt $A^x = A \cap E^x_{n-1}\,(x = x_n)$, so gilt der

Hilfssatz 3. — *Es sei* (A, B) *ein Extremalpaar von* (15.1). *Man schreibe der Kürze wegen wieder* A, B *für die Extremalpunktmengen* $\overline{(A_*)}$ $\bar{B}_*$ *und bezeichne mit* A^x *den Schnitt* $A \cap E^x_{n-1}\,(x = x_n)$. *Dann gilt für jeden Punkt x des offenen Intervalls* $J_{A^*} = (\alpha_{A^*}, \beta_{A^*})$ $L_{n-1}(A^x) > 0$.

Der Beweis des Hilfssatzes 1 folgt leicht aus den Gleichungen

$$M(\sigma A \mid B) = \sigma^{n-1} M(A \mid B)$$

und

$$M(A \mid \rho B) = \rho\, M(A \mid B) \qquad (\sigma, \rho > 0),$$

wenn man diese mit der Extremalgleichung

$$M(A \mid B) = L_*(A)^{1-\frac{1}{n}} L_*(B)^{\frac{1}{n}}$$

verbindet und die Transformationsformeln

$$L_*(\sigma A) = \sigma^n L_*(A), \qquad L_*(\rho B) = \rho^n L_*(B)$$

heranzieht.

Will man den Hilfssatz 2 beweisen, so muss man die Sätze 5 und 6 der Nr. 6 heranziehen. Bildet man nämlich $A + hB$, so wird

$$(A + hB)_* \supseteq (A_* + h\bar{B}) \supseteq \overline{(A_*)} + h\bar{B}_*$$

und durch Vertauschung von A und B

$$(A + hB)_* \supseteq (\bar{A} + hB_*) \supseteq \bar{A}_* + h\overline{(B_*)}.$$

Da nun allgemein

$$L(\overline{A}) \geqq L(\overline{(A_*)}) \geqq L(A_*) = L_*(A)$$

und

$$L(\overline{B}) \geqq L(\overline{(B_*)}) \geqq L(B_*) = L_*(B)$$

ist, so gilt zunächst für jedes Extremalpaar (A, B)

$$M(A \mid B) = M(A_* \mid B_*) = M(\overline{A}_* \mid (\overline{B}_*))$$

und

$$M(A \mid B) = M(\overline{A} \mid B_*) = M(A_* \mid \overline{(B_*)}).$$

Der gemeinsame Wert dieser Ausdrücke ist gleich $L_*(A)^{1-\frac{1}{n}} L^*(B)^{\frac{1}{n}}$
Nun ist offenbar noch

$$M(A \mid B) = M(A \mid B_*) = M(A_* \mid B) = L_*(A)^{1-\frac{1}{n}} L_*(B)^{\frac{1}{n}},$$

und somit ist der Hilfssatz 2 richtig.

Ich skizziere nun noch den Beweis des Hilfssatzes 3. Es sei zunächst $n = 1$ und (A, B) ein Extremalpaar auf E^1. Dann ist nach dem vorhin Gesagten $(\overline{A}, B_*)$ ebenfalls ein Extremalpaar. Ist dann $[\overline{A}] \cap (\overline{A}')$ nicht leer, so gilt für kleine h

$$L_*(\overline{A} + hB_*) \geqq L(A) + 2h\, L_*(B)$$

und somit wird wegen $L(B) > 0$

$$M(\overline{A} \mid B_*) \geqq 2\, L_*(B) > L_*(B).$$

Das beweist den Hilfssatz 3 für $n = 1$. Für $n > 1$ verfahre man nun so : Zunächst kann mit Rücksicht auf den Hilfssatz 1 $L(A) \neq L(B)$ vorausgesetzt werden. Ist dies getan, so bezeichne S eine offene Kugel von E^n, die $2B$ enthält. Da es auf eine Parallelverschiebung von B nicht ankommt, so kann noch angenommen werden, dass der Mittelpunkt von S im Koordinatenursprung liegt. Es sei $x \in J_{A_*}$ und es bezeichnen A_1, A_2 die Teilmengen von A mit $x_n \leqq x$ und $x_n \geqq x$. Dann gilt

$$L(A) = L(A_1 \cup A_2) = L(A_1) + L(A_2) \tag{15.9}$$

und für jedes $h > 0$

$$\begin{aligned} L(A + hB) &= L(A_1 + hB \cup A_2 + hB) \\ &= L(A_1 + hB) + L(A_2 + hB) - L(A_1 + hB \cap A_2 + hB). \end{aligned} \tag{15.10}$$

Es bezeichne jetzt G eine offene Punktmenge auf E^x_{n-1} (etwa die Vereinigung von endlich vielen offenen Kugeln von E^{n-1}_x), die $A_1 \cap A_2 = A^x$ überdeckt. Dann gibt es ein $h_0 > 0$ derart, dass für $0 < h < h_0$

$$(15.11) \qquad A_1 + hB \cap A_2 + hB \subseteq G + hS$$

ist. Wäre nämlich dies nicht der Fall, so gäbe es eine Nullfolge (h_k) $(k = 1, 2, \ldots)$ und eine Punktfolge (P_k) mit $P_k \in A_1 + h_k B$ und $P_k \in A_2 + h_k B$ derart, dass $P_k \notin G + h_k S$ gilt. Da A_1 und A_2 nichtleere, kompakte Punktmengen sind, so enthält (P_k) eine konvergente Teilfolge, die, wie man leicht sieht, gegen einen Punkt P_0 von $A_1 \cap A_2$ konvergieren muss. Andererseits kann P_0 nicht in G liegen. Er darf also höchstens in der (in Bezug auf die Ebene E^x_{n-1}) komplementären Punktmenge G' von G liegen, was auch unmöglich ist. Somit ist (15.10) richtig.

Es sei jetzt r der Radius von S und es bezeichne G^{hr} die Aussenmenge von G (auf E^x_{n-1}) in der Entfernung hr. Dann gilt für hinreichend kleines h

$$L(G + hS) \leqq 2\, L_{n-1}(G^{hr})\, hr$$

und somit wird nach einfachen Grenzübergängen ($G \rightarrow A_1 \cap A_2 = A^x$, $h \rightarrow 0$)

$$M(A \mid B) \geqq M(A_1 \mid B) + M(A_2 \mid B) - \frac{2r}{n} L_{n-1}(A^x).$$

Wird nun

$$M(A \mid B) = L(A)^{1-\frac{1}{n}} L(B)^{\frac{1}{n}}$$

vorausgesetzt, so folgt daraus in Verbindung mit den Ungleichungen

$$M(A_1 \mid B) \geqq L(A_1)^{1-\frac{1}{n}} L(B)^{\frac{1}{n}}$$

und

$$M(A_2 \mid B) \geqq L(A_2)^{1-\frac{1}{n}} L(B)^{\frac{1}{n}}$$

sowie der Gleichung (15.9) die Ungleichung

$$(L(A_1) + L(A_2))^{1-\frac{1}{n}} \geqq L(A_1)^{1-\frac{1}{n}} + L(A_2)^{1-\frac{1}{n}} - \frac{2r}{n} \frac{L_{n-1}(A^x)}{L(B)^{\frac{1}{n}}}.$$

die für $L_{n-1}(A^x) = 0$ falsch ist. Es muss also $L_{n-1}(A^x) > 0$ sein. Ich schliesse diese Ueberlegungen mit der Erledigung der Einzigkeitsfrage für $n = 1$. Aus der Tatsache, dass $[A_*]$ eine Strecke ist, folgt leicht, dass $\overline{A}$ eine Strecke sein muss. Man nehme jetzt an, $[B] \cap (\overline{B}')$ enthalte ein offenes Intervall J. Dann gilt für kleine h

$$L(A_* + h\overline{B}) \geqq h\,|\,J\,| + L_*(A) + L(\overline{B}),$$

und somit kann $M(A_*\,|\,\overline{B}) = L(\overline{B})$ dann und nur dann gelten, wenn $|\,J\,| = 0$ ist. Das hat wiederum zur Folge, dass $\overline{B}$ eine Strecke sein muss. Der Leser möge nun die weiteren Einzelheiten der Einzigkeitsaussagen selbst zu Ende führen.

Es sei jetzt $n > 1$. Der nächste Schritt des Beweises besteht in dem Nachweis, dass die Differentialgleichung

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{L(A)}{L(B)}\,\frac{L_{n-1}(B^x)}{L_{n-1}(A^\xi)} \tag{15.12}$$

im Intervall $[X_B]$ eine (totalstetige) Lösung $\xi = \xi(x)$ besitzt. Dabei bedeutet X_B die (messbare) Punktmenge $\{x\,|\,L_{n-1}(B^x) \geqq 0\}$. Zu diesem Zweck bilden wir für die Punktmengen A, B $[$d. h. $(\overline{A}_*)$ und $\overline{B}_*]$ die Funktionen $x_A(\tau)$, $x_B(\tau)$ und bezeichnen mit $E_x^r\,(r > 0)$ die (lineare) Punktmenge $\{x\,|\,L_{n-1}(A^r) < r\}$ und durch $\varphi_r(x)$ ihre charakteristische Funktion.

Dann ist E_x^r mit Rücksicht auf den klassischen Fubinischen Satz messbar, und es gilt

$$L_1(E_x^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_r(x)\,dx.$$

Es bezeichne nun E_τ^r die Punktmenge

$$\{\tau\,|\,L_{n-1}(A^{x(\tau)}) < r\} \qquad [x(\tau) = x_A(\tau)]$$

und $\varphi_r^*(\tau)$ ihre charakteristische Funktion. Beachtet man, dass $\varphi_r^*(\tau(x)) = \varphi_r(x)$ gilt, so folgt daraus, dass $\varphi_r^*(\tau(x))$ messbar ist und mithin [wegen der Messbarkeit von $L_{n-1}(A^x)$] auch $\varphi_r(x)\,L_{n-1}(A^x)$.

Nun gilt nach klassischen Sätzen der Lebesgueschen Integrationstheorie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_r^*(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_r(x)\,\frac{d\tau}{dx}\,dx,$$

sobald eins der beiden Integrale existiert. Das hat die Messbarkeit von E_τ^x und somit die Existenz des Integrals

$$J(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{L_{n-1}(A^{x(\tau)})}, \tag{15.13}$$

für jedes τ, $0 < \tau < 1$ zur Folge. Transformiert man dieses Integral mit Hilfe der totalstetigen Funktion $\tau = \tau(x)$ $(x = x_A!)$, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{L_{n-1}(A^x)}{L(A)}$$

fast überall auf der x-Achse (bei geeigneter Translation von A)

$$x(\tau) = x_A(\tau) = L(A) \int_0^\tau \frac{d\tau}{L_{n-1}(A^{x(\tau)})}$$

Daraus folgt :

1. Die Funktion $x_A(\tau)$ ist totalstetig;

2. Die Funktion $x_A(\tau(x_B))$ ist wegen der Totalstetigkeit von $\tau(x_B)$ eine totalstetige Funktion von x_B. Schreibt man jetzt kurz x für $x_B (x \in [X_B])$ und ξ für $x_A(\tau(x))$ als Funktion von x, so erhält man ohne weiteres (15.12).

Es bezeichne jetzt X_1 die (messbare) Teilmenge von $[X_B]$, auf der $L_{n-1}(B^x) > 0$ ist. Dann ist die Menge

$$X_0 = \{ \eta \mid \eta = x + \xi(x),\ x \in X_1 \} \tag{15.14}$$

ebenfalls messbar und die Zuordnung der Punkte von X_0 und X_1 durch die (totalstetige) Funktion $y = y(x)$ eineindeutig. Man schreibe C für A $+$ B und bezeichne die Schnitte von C mit der Hyperebene $x_n = \eta$ durch $C^\eta (\eta = \eta(x))$. Dann bestätigt man leicht die Ungleichung

$$L(C) \geqq \int_{X_0} L_{n-1}(C^\eta)\, d\eta. \tag{15.15}$$

Wendet man dieselben Betrachtungen auf die Summe $A + hB$ $(h > 0)$ an, so erhält man analog

$$L(A + hB) \geqq \int_{[X_1]} L_{n-1}(C^{\eta_h}) \left(h + \frac{dx}{d\xi}\right) dx \tag{15.16}$$

mit $\eta_h = hx + \xi(x)$ $(x = x_B)$.

Nun verwende man die Identität

$$L(A) = \int_{X_1} L_{n-1}(A^\xi) \frac{d\xi}{dx} dx$$

und bilde für $n > 1$ die Ausdrücke

$$M^h(A \mid B) = \frac{1}{n} \frac{L(A + hB) - L(A)}{h}$$

und

$$\overline{M}^h_{n-1}(A^\xi \mid B^x) = \frac{1}{n-1} \frac{L_{n-1}(C^{\eta_h(x)}) - L_n(A^\xi)}{h};$$

wegen $L_{n-1}(C^{\eta_h(x)}) \geqq L_{n-1}(A^\xi)$ wird dann

$$M^h(A \mid B) \geqq \int_{X_1} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \overline{M}^h_{n-1}(A^\xi \mid B^x) \frac{d\xi}{dx} + \frac{1}{n} L_{n-1}(A^\xi) \right\} dx.$$

Man verwende nun hier den Zwischenausdruck

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) L_{n-1}(A^\xi)^{\frac{n-2}{n-1}} L_{n-1}(B^x)^{\frac{1}{n-1}} \frac{d\xi}{dx}$$

und setze

$$D^h(A \mid B) = M^h(A \mid B) - L(A)^{1-\frac{1}{n}} L(B)^{\frac{1}{n}}$$

und

$$\overline{D}^h(x) = \overline{M}^h(x) - L_{n-1}(A^\xi)^{\frac{n-2}{n-1}} L_{n-1}(B^x)^{\frac{1}{n-1}}$$

mit

$$\overline{M}^h_{n-1}(x) = \overline{M}^h_{n-1}(A^\xi \mid B^x).$$

Man setze jetzt

$$J(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{L(A)}{L(B)} L_{n-1}(A^\xi)^{-\frac{1}{n-1}} L_{n-1}(B^x)^{\frac{n}{n-1}} + \frac{1}{n} L_{n-1}(A^\xi).$$

Dann gilt

$$J(x) \geqq \left\{ \frac{L(A)}{L(B)} \right\}^{\frac{n-1}{n}} L_{n-1}(B^x),$$

und somit wird

$$D^h(A \mid B) \geqq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_{X_1} \overline{D}^h_{n-1}(x) \frac{d\xi}{dx} dx.$$

Hierbei ist der Integrand rechts mit Rücksicht auf die Ungleichung

$$\overline{D}^h_{n-1}(x) \geqq \frac{1}{n-1} \frac{L_{n-1}(A^{hx+\xi}) - L_{n-1}(A^\xi)}{h}$$

nicht negativ.

Man wähle jetzt eine monotone Nullfolge $(h_k)(h = 1, 2, \ldots,)$, für die

$$\lim_{k \to \infty} M^{h_k}(A \mid B) = M(A \mid B)$$

gilt und wende beim Grenzübergang rechts das klassische Fatousche Lemma (Saks [1], S. 29) an und setze voraus, dass

$$D(A \mid B) = M(A \mid B) - L(A)^{1-\frac{1}{n}} L(B)^{\frac{1}{n}}$$

verschwindet. Dann erhält man wegen

$$\varliminf_{k \to \infty} \bar{D}^{h_k}(x) \geqq M_{n-1}(A^\xi \mid B^x) - L_{n-1}(A^\xi)^{\frac{n-2}{n-1}} L_{n-1}(B^x)^{\frac{1}{n-1}} \geqq 0$$

die Bedingung : Ist (A, B) ein Extremalpaar der vorausgesetzten Struktur, so gilt

$$\int_{X_1} \bar{D}_{n-1}(x) \frac{d\xi}{dx} dx = \int_{X_1} D_{n-1}(x) \frac{d\xi}{dx} = 0. \tag{15.17}$$

Hierbei bedeutet $D_{n-1}(x)$ das $(n-1)$-dimensionale Defizit

$$M_{n-1}(A^\xi \mid B^x) - L_{n-1}(A^\xi)^{\frac{n-2}{n-1}} L_{n-1}(B^x)^{\frac{1}{n-1}}.$$

In den nachfolgenden Zeilen zeige ich nun kurz, wie die notwendige Bedingung (15.17) die Einzigkeitsfrage für eine breite Mengenklasse erledigt.

Ist $n = 1$ und sind A, B kompakte Mengen von E^1, so stösst der Beweis der Einzigkeitsfrage mit Rücksicht auf die bisherigen Entwicklungen auf keine Schwierigkeiten. Man erhält leicht das Ergebnis : Die Gleichung

$$D_1(A \mid B) = M(A \mid B) - L(B) = 0 \tag{15.18}$$

für $L(A) > 0$, $L(B) > 0$ kann dann und nur dann gelten, wenn A und B zwei Strecken sind. Wir zeigen nun allgemein : Bilden A, B $(A = \overline{(A_*)}, B = \bar{B}_*)$ ein Extremalpaar, so müssen A, B konvex und homothetisch sein.

Diese Behauptung ist für $n = 1$ richtig. Man nehme nun für die Dimension $n - 1 \, (n \geqq 2)$ folgende Aussage als richtig an : Ist $x(x \in X_1)$ ein Punkt, für den $D_{n-1}(x) = 0$ gilt, so sind $\overline{(A^\xi)}_*$ und

$\overline{(B^x)_*}$ zwei kompakte (homothetische), konvexe Punktmengen. Dabei soll allgemein $(M^x)_*$ den inneren Dichtekern von M^x in bezug auf die Hyperebene E^x_{n-1} bedeuten.

Die aufgestellte Behauptung ist offenbar für $n = 2$ richtig. Man nehme jetzt an, die Punktmenge $A(A = \overline{(A_*)})$ sei nicht konvex. Ist dies der Fall, so gibt es zwei Punkte Q_1, Q_2 von A derart, dass ein Punkt $Q(Q \neq Q_1,\ Q \neq Q_2)$ der Strecke $\overline{Q_1 Q_2}$ der Menge A nicht angehört. Wegen der Abgeschlossenheit von A können nun in der Nähe von Q_1 bzw. Q_2 zwei Punkte P_1 bzw. P_2 von A_* so gefunden werden, dass die Strecke $\overline{P_1 P_2}$ einen Punkt P enthält, derart, dass eine (offene) Kugel S^δ_P vom Radius $\delta > 0$ um P keinen Punkt von A enthält. Man kann im folgenden ohne weiteres annehmen, dass P_1, P_2 auf der x_1-Achse liegen. Jetzt wähle man $0 < r < \delta$ und so, dass

$$L(A \cap S^r_{P_1}) \geqq (1-\varepsilon)\,|\,S^r_{P_1}\,|, \qquad L(A \cap S^r_{P_2}) \geqq (1-\varepsilon)\,|\,S^r_{P_2}\,|$$

mit einem $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ wird. Wir behaupten : Die Gesamtheit aller $x(-r < x < r)$, für die $\overline{(A^x)_*}$ nicht konvex ist, hat ein inneres (lineares Lebesguesches) Mass $m > 0$. In der Tat wird wegen

$$L_{n-1}(\overline{(A^x)_*} \cap S^r_{P_k}) = L_{n-1}(A^x \cap S^r_{P_k}) \qquad (k = 1,\ 2)$$

unter Heranziehung des klassischen Fubinischen Satzes

$$(15.19) \qquad \int_{-r}^{+r} L_{n-1}(\overline{(A^x)_*} \cap S^r_{P_k})\,dx \geqq (1-\varepsilon)\,|\,S^r_{P_k}\,|.$$

Hätte nun die Teilmenge E_r von $-r < x < r$, auf der beide Grössen $L_{n-1}(\overline{(A^x)_*} \cap S^r_{P_k})$ positiv sind, das Mass $m = 0$, so würde daraus durch Addition der beiden Ungleichungen die Ungleichung

$$(15.20) \qquad |\,S^r_P\,| \geqq 2(1-\varepsilon)\,|\,S^r_P\,|$$

folgen, die offenbar falsch ist. E_r hat also ein positives Mass und zugleich die Eigenschaft, dass $\overline{(A^x)_*}$ $(x \in E_r)$ nicht konvex ist. Das widerspricht aber der Voraussetzung, dass fast überall in $(\alpha_{A_*}, \beta_{A_*})$ die Grösse $D_{n-1}(x)$ verschwindet und somit dort $\overline{(A^x)_*}$ konvex ausfällt. Die Menge $\overline{(A_*)}$ ist also konvex. Wir sagen jetzt : Das geordnete Punktmengenpaar (A, B) gehört der Klasse $\mathfrak{E}$ an, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind :

1. A, B sind nicht leer;
2. Es gilt $L_*(A) > 0$, $L_*(B) > 0$;
3. Die Menge $\bar{A} - \overline{(A_*)}$ ist entweder leer oder es gibt eine Hyperebene H_{n-1} von E^n derart, dass die Projektion von $\bar{A} - \overline{(A_*)}$ auf H_{n-1} einen inneren Dichtepunkt (relativ zu H_{n-1}) aufweist und somit ein positives Mass (wieder relativ zu H_{n-1}) hat.

Nimmt man jetzt $(A, B) \in \mathfrak{E}$, so kann zunächst $\bar{A} - \overline{(A_*)}$ leer sein und somit $\bar{A} = \overline{(A_*)}$. Daraus folgt, dass $\bar{A}$ konvex sein muss. Trifft nun die zweite Alternative zu, so hat die Projektion von $\bar{A} - \overline{(A_*)}$ auf eine Hyperebene H_{n-1} [die man der Einfachheit halber ausserhalb $\overline{(A_*)}$ annehmen kann] mindestens einen inneren Dichtepunkt in bezug auf H_{n-1}. Man verschiebe die Punktmenge B so, dass die Gerade α durch den Nullpunkt O des Koordinatensystems, die senkrecht auf H_{n-1} steht, einen Durchschnitt D mit $\bar{B}_*$ von positivem linearem Mass $L_1(D)$ aufweist. Das ist stets möglich, da $L(\bar{B}_*) > 0$ gilt. Nun beachte man, dass bei genügend kleinem $\varepsilon_0 > 0$ die Projektion der Menge $\bar{A} - \overline{(A_*)}^{\varepsilon_0}$ auf H_{n-1} ebenfalls mindestens einen inneren Dichtepunkt (in bezug auf H_{n-1}) aufweist, und insofern hat diese für $h < \frac{\varepsilon_0}{2}$ ein positives $(n-1)$-dimensionales Mass K. Bildet man also $\bar{A} + hB_*$, so hat diese Punktmenge ein (inneres) Lebesguesches Mass $L_*(\bar{A} + hB_*)$, das gewiss nicht kleiner als $KL_1(D) + L_*(\overline{(A_*)} + hB_*)$ sein kann. Daraus ergibt sich aber

$$M(\bar{A} \mid B_*) \geqq M(\overline{(A_*)} \mid B_*) + K\,L_1(D),$$

also $M(\bar{A} \mid B_*) > M(\overline{(A_*)} \mid B_*)$ gegen die Voraussetzung.

Ist nun $A \in \mathfrak{E}$, so kann $\bar{A} - \overline{(A_*)}$ nur leer sein, und somit muss [wegen $L(\bar{A}) = L\overline{(A_*)}$] $\bar{A}$ konvex und $\bar{A} - A$ höchstens eine Nullmenge sein. Das beweist die Behauptung für A.

Ist nun $\bar{A}$ konvex und $L(\bar{A}) = L(A)$, so ist (wie man leicht sieht) mit (A, B) auch $(\bar{A}_*, \overline{(B_*)})$ ein Extremalpaar.

Man schreibe wieder B für $\overline{(B_*)}$ und nehme an, dass $\overline{(B^x)}_*$ fast überall auf X_1, wo $L_{n-1}((B^x)_*) = L_{n-1}(\overline{(B^x)_*}) > 0$ gilt, konvex ist.

Dann zeigt man, ähnlich wie dies für A getan wurde (Dinghas [11]), dass B, d. h. $\overline{(B_*)}$, konvex sein muss. Wendet man nun auf A ($\bar{A}$ konvex) und B das klassische Verfahren von Brunn-Minkowski an, so folgt leicht aus $L(\bar{B}) = L(\overline{(B_*)})$, dass $\bar{A}$ und $\overline{(B_*)}$ homothetisch sein müssen. Man nehme jetzt an, $\bar{B} - \overline{(B_*)}$ ($\overline{(B_*)}$ konvex!) sei nicht leer und bezeichne mit P einen Punkt von $\bar{B} - \overline{(B_*)}$. Wir beziehen die beiden Punktmengen $\bar{A}$ und $\bar{B}$ auf ihren gemeinsamen Schwerpunkt G und konstruieren die grösste Kugel S_G um G, die Platz in $\bar{A}$ findet. Man bilde jetz $\bar{A} + h\bar{B}$ und beachte, dass diese Punktmenge die Menge $(\bar{A} + h\bar{B}_*) + hP$ enthält. Da $\bar{A}$, $\overline{(B_*)}$ konvexe, homothetische Punktmengen sind, so enthält letztere Punktmenge die Vereinigung von $(\bar{A} + h\bar{B}_*)$ und einer Punktmenge V_h, die man dadurch erhält, dass man die Vereinigung aller zu $h\,\overline{GP}$ äquipollenten Strecken $h\,\overline{G'P'}$ mit $G' \in \bar{A}$ bildet. Bezeichnet dann d den Radius von S_G, so gilt, wie man leicht sieht, die Abschätzung

$$L(A_* + h\bar{B}) \geqq \left(|A|^{\frac{1}{n}} + h\,|\overline{(B_*)}|^{\frac{1}{n}}\right)^n + \text{K}\,h\,d^{n-1}$$

mit einem positiven, von h unabhängigen K. Diese Ungleichung zeigt aber, dass $\bar{B}$ nicht Extremalpunktmenge sein kann. Somit müssen sowohl $\bar{A}$ als auch $\bar{B}$ konvexe homothetische Körper sein mit

$$L(\bar{A}) = L(A) \qquad \text{und} \qquad L(\bar{B}) = L(B).$$

Die hier gegebene Behandlung der schwierigen Einzigkeitsfrage in der Minkowski-Lusternikschen Ungleichung für die Relativoberfläche lehnt sich eng an die Arbeit [11] von Dinghas an. Was die Entwicklung des ganzen Problems anbetrifft, so soll hierzu noch bemerkt werden, dass der erste Vorstoss in dieses Gebiet, wenn man den Fall konvexer Punktmengen (Minkowski) und des klassischen isoperimetrischen Problems für die Kugel (Dinghas und Erhard Schmidt [1]) beiseite lässt, von Buseman unternommen wurde, der mit Minkowskischen und nicht-Minkowskischen Methoden wichtige Spezialfälle erledigte. Kurz nachher gelang es Hadwiger und Ohman [1], mit Minkowskischen Methoden für eine speziellere Klasse als die Klasse $\mathfrak{C}$ einen Einzigkeitsbeweis zu geben.

16. Extremalaufgaben für Cantor-Minkowskische Aussenmengen in R^n. — Die Gesamtheit aller Punkte $P(x_1, \ldots, x_{n+1})$ eines Zahlenraumes E^{n+1}, dessen Koordinaten x_k die Bedingung

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \frac{x_{n+1}^2}{K} = \frac{1}{K} \tag{16.1}$$

erfüllen, wobei K endlich und $\neq 0$ ist, soll als ein Riemannscher Raum konstanter Krümmung K bezeichnet werden und durch R^n dargestellt werden. Ist $K < 0$, so heisst bekanntlich R^n hyperbolisch. Für $K > 0$ wird R^n sphärisch oder elliptisch genannt, je nachdem die Punkte $P(x_1, \ldots, x_{n+1})$ und $P'(-x_1, \ldots, -x_{n+1})$ als verschieden oder als identisch angesehen werden. Im folgenden kommen lediglich sphärische oder hyperbolische Räume R^n zur Sprache.

Man setze allgemein

$$\varphi(x) = \cos \sqrt{K}x, \qquad \psi(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt \tag{16.2}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} x_k &= v_k \qquad \left(k = 1, 2, \ldots, n-1, \sum_1^{n-1} v_k^2 = \psi^2(v) = \rho^2, v \geqq 0\right) \\ x_n &= \varphi(v)\,\psi(r), \\ x_{n+1} &= \varphi(v)\,\varphi(r). \end{aligned}\right. \tag{16.3}$$

Rechnet man dann das Bogenelement

$$ds^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2 + \frac{dx_{n+1}^2}{K} \tag{16.4}$$

von R^n auf die Koordinaten $v_1, \ldots, v_n$ um, so erhält man

$$ds^2 = \sum_1^{n-1} dv_k^2 + \frac{K}{1 - K\rho^2}\left(\sum_1^{n-1} v_k\, dv_k\right)^2 + (1 - K\rho^2)\, dr^2. \tag{16.5}$$

Ist $K > 0$, so variieren die Koordinaten $v_1, v_2, \ldots, v_n$ im Fundamentalbereich G_0

$$K\psi^2(v) < 1, \qquad -\pi \leqq 2\sqrt{K}\, r < \pi. \tag{16.6}$$

In diesem Falle bestätigt man leicht, dass G_0 durch die Gleichungen (16.3) auf den in $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ und $(0, 0, \ldots, 0, -1)$ punktierten Raum R^n eineindeutig abgebildet wird. Für $K < 0$

fällt der Variationsbereich der v_k und r mit dem euklidischen Raum zusammen, der durch die Koordinaten v_k und r beschrieben wird. Lässt man in (16.2) $K \to 0$ konvergieren, so erhält man als Grenzfall den euklidischen Raum E^n. Neben G_0 werden im folgenden die Nebenbereiche $G_n (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ betrachtet, die durch Parallelverschiebung von G_0 mittels des Transformationen

$$(16.7) \qquad \begin{cases} v'_k = v_k & (k = 1, 2, \ldots, n-1), \\ & r' = r + \dfrac{2\pi n}{\sqrt{k}} \end{cases}$$

entstehen.

Im folgenden entwickeln wir im Anschluss an Dinghas [5] das klassische isoperimetrische Problem für den sphärischen und hyperbolischen Raum R^n.

HILFSSATZ 1. — *Es sei* A *eine messbare Punktmenge von* R^n *und* A^* *seine Bildmenge in* G_0. *Dann gilt*

$$(16.8) \qquad L(A) = \int_{A^*} dv_1\, dv_2 \ldots dv_{n-1}\, dr.$$

Hierbei bedeutet L(A) das nichteuklidische (d. h. das sphärische bzw. hyperbolische) Lebesguesche Mass von A. Der Beweis stützt sich auf die Tatsache, dass die Determinante der Koeffizienten der quadratischen Form (16.5) den Wert $+1$ hat.

Ist A eine kompakte Teilmenge von R^n, so sollen (Steinersche) Symmetrisierungen stets in bezug auf die Hyperebenen

$$(16.9) \qquad A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n = 0$$

verstanden werden. Die Symmetrisierungsoperation in R^n wurde allgemein von Dinghas [12] behandelt, nachdem es Erhard Schmidt in zwei gross angelegten Abhandlungen (Schmidt [1] und [2]) gelungen war, mit Hilfe der Schwarzschen Abrundung auf R^n das klassische isoperimetrische Problem für den sphärischen und hyperbolischen Raum zu erledigen. Nachfolgende relativ kurze Darstellung, die lediglich Steinersche Symmetrisierungen verwendet, geht ebenfalls auf eine spätere Arbeit von Dinghas (Dinghas [5]) zurück.

DEFINITION. — *Es sei* A *eine kompakte Teilmenge von* R^n. *Man bilde mit Hilfe von* (16.3) *die Menge* A^*, *symmetrisiere diese* (*im* *üblichen Sinne) in bezug auf die Ebene* $r = 0$ *und gehe von der so symmetrisierten Menge* $\bar{A}^*$ *zu der entsprechenden Menge* $\bar{A}$ *von* R^n *zurück. Dann soll* $\bar{A}$ *die in Bezug auf* $x_n = 0$ *Steiner-symmetrisierte Menge heissen.*

Liegt anstelle der Ebene $x_n = 0$ die Ebene (16.9) vor, so hat man vorerst durch eine Bewegung letztere Ebene in die Gestalt $x_n = 0$ zu bringen. Bekanntlich versteht man allgemein unter einer Bewegung von R^n jede Transformation der Koordinaten x_k von der Form

$$x'_k = \sum_1^{n+1} a_{k\nu} x_\nu \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{16.10}$$

mit

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \ldots + x_n'^2 + \frac{x_{n+1}'^2}{K} = \frac{1}{K}.$$

Ist dann die Symmetrisierung in bezug auf die Ebene $x'_n = 0$ durchgeführt, so liefert der Uebergang zu den Koordinaten $x_1, \ldots, x_{n+1}$ die gesuchte Symmetrisierung.

Im folgenden erhalten die Bezeichnungen die den Verhältnissen in R^n angepasste Bedeutung.

Hilfssatz 2. — *Es gilt*

$$\Delta = \inf\{ d(A, S) \mid A \in K_{A_0} \} = 0. \tag{16.11}$$

Hilfssatz 3. — *Geht* $\bar{A}$ *aus* A *durch Symmetrisierung hervor, so gilt*

$$| A^h | \geq | \bar{A}^h |. \tag{16.12}$$

Da der Beweis von (16.11) ähnlich läuft wie der Beweis der entsprechenden Aussage (13.1) für den euklidischen Fall, so begnüge ich mich mit einer Skizze des Beweises des Hilfssatzes 3. Ist hier $K < 0$, so erfordert dieser lediglich die Wiederholung des Beweises des Hilfssatzes 2 von Nr. 12. Ist $K > 0$ (sphärischer Fall), so muss die Schlussweise vorsichtiger durchgeführt werden, da bei der Symmetrisierung die Menge A auseinandergerissen werden kann (sofern man $\bar{A}$ in G_0 unterbringen will). Der Beweis kann am einfachsten unter Heranziehung des Ergebnisses von Macbeath [2] durchgeführt werden, das wir hier in vereinfachter Form (und für einen Spezialfall) anführen:

Es bedeuten A, B zwei kompakte Punktmengen der Gerade

$$E^1: \quad -\infty < x < +\infty, \tag{16.13}$$

und es sei $C = A + B$. Man reduziere die Menge C mod 1, indem man die Menge

$$\overline{C} = \{\xi \mid 0 \leqq \xi < 1, \ \xi \equiv x, \ x \in C\} \tag{16.14}$$

bildet. Dann gilt für messbare A und B

$$L_*(\overline{C}) \geqq \operatorname{Min}\{1, L(A) + L(B)\}. \tag{16.15}$$

Man wende nun diesen Macbeath'schen Satz folgendermassen auf unser Problem an:

Es sei A die gegebene (kompakte) Punktmenge, $\overline{A}$ die in bezug auf $x_n = 0$ symmetrisierte Punktmenge, S eine (geodätische) Kugel in R^n vom (geodätischen) Radius $h > 0$, und es bezeichne kurz A^h die Menge $A + S$. Diese soll folgendermassen konstruiert werden:

Es bedeute S_x die zu S kongruente Kugel mit dem Mittelpunkt x. Dann ist

$$A + S = \bigcup \{S_x \mid x \in A\}. \tag{16.16}$$

Man betrachte einen Punkt $x\,(x_1, \ldots, x_{n+1})$ der Bildmenge A^* von A. Diesem entspricht ein Punkt $v\,(v_1, \ldots, v_n)$ von G_0 und der Kugel S_x ein in der r-Richtung konvexer Körper S^*. Bei Verschiebung von S_x auf dem durch die Gleichungen

$$y_k = x_k \qquad (k = 1, \ldots, n-1),$$
$$y_n = \psi(v)\,\psi(r), \qquad y_{n+1} = \varphi(v)\,\varphi(r),$$

mit $\psi(v)^2 = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2$ definierten Parallelkreis erleidet S_v^* eine (euklidische) Parallelverschiebung auf der Geraden

$$u_1 = v_1, \qquad \ldots, \qquad u_{n-1} = v_{n-1}.$$

Das rechtfertigt nun (unter Heranziehung des Resultates von Macbeath) den Schluss, dass für die Mengen $(\overline{\mathfrak{S}})^h$, $\overline{(\mathfrak{S}^h)}$ (bei gleichlautender Definition wie im euklidischen Fall) die Ungleichung

$$(\bar{\mathfrak{S}})^h \subseteq \overline{(\mathfrak{S}^h)}$$

gilt. Daraus folgt durch Vereinigung die Ungleichung

$$(\bar{A}^h) \subseteq \overline{(A^h)},$$

aus der (16.11) unmittelbar folgt. Die weiteren Ueberlegungen, die mit dem Kugelungstheorem von Gross zusammenhängen, laufen dem euklidischen Fall analog und sollen hier nicht wiedergegeben werden.

Die auf diese Weise gewonnene Ungleichung führt für den Fall $K \leqq 0$ zu der Ungleichung

$$|A^h| \geqq |S^h| \tag{16.17}$$

und für den sphärischen Raum R^n zu der Ungleichung

$$|A^h| \geqq \mathrm{Min}(|R^n|, |S^h|). \tag{16.18}$$

Die Ungleichungen (16.17) und (16.18) wurden, wie schon erwähnt, zuerst von Erhard Schmidt in zwei Abhandlungen (Erhard Schmidt [1] und [2]) ausführlich begründet und der Einzigkeitsfall diskutiert. Die hier gegeben kürzere Darstellung mit Hilfe der Steinerschen Symmetrisierung (im Gegensatz zu Erhard Schmidt, der die Schwarzsche Abrundung verwendet) geht auf die Arbeit von Dinghas [5] zurück. Dort wird lediglich der Fall betrachtet, dass A in einer Halbkugel liegt. Es bestehen aber kaum Zweifel daran, dass man (was hier geschehen ist) durch Heranziehung des Macbeathschen Satzes den ganzen Fragenkomplex des sphärischen Falles einfacher als bisher behandeln kann.

VIERTES KAPITEL

Riemann-Minkowskische Integrale. Weitere Verallgemeinerungen des Brunn Minkowskischen Satzes

17. Grundbegriffe und Hilfssätze. — Eine beschränkte, eindeutige mengenwertige Funktion $A(\lambda)$ wird im Intervall $J = [0, 1]$ dadurch gegeben, dass jedem $\lambda \in J$ eindeutig eine nichtleere kompakte Punktmenge A_λ zugeordnet wird. Man kann stets eine feste Kugel S_0 um den Nullpunkt angeben, derart dass jedes A_λ in S_0 liegt.

Ist J_{λ_0} ein (nicht ausgeartetes) abgeschlossenes Teilintervall von J_r das den Punkt λ_0 enthält, so soll die Grösse

$$\omega(J_{\lambda_0}) = \sup \{ | A_{\lambda'}, A_{\lambda''} | \mid \lambda', \lambda'' \in J_{\lambda_0} \} \tag{17.1}$$

die Schwankung von $A(\lambda)$ in J_{λ_0} heissen. Entsprechend heisst

$$\omega(\lambda_0) = \lim_{|J_{\lambda_0}| \to 0} \omega(J_{\lambda_0}) \tag{17.2}$$

die Schwankung von $A(\lambda)$ in λ_0. Ist $\omega(\lambda_0) = 0$, so soll $A(\lambda)$ stetig in λ_0 heissen. Gilt

$$\omega(\lambda) = 0 \qquad (\lambda \in J),$$

so heisst $A(\lambda)$ stetig.

Für die nachfolgenden Entwicklungen sind folgende Hilfssätze von Bedeutung :

HILFSSATZ 1. — *Es sei* A *eine nichtleere, abgeschlossene Punktmenge von* E^n *und es bedeute* $\mathfrak{A}$ *die Gesamtheit aller Mengen von der Form* $\lambda_1 A + \ldots + \lambda_l A$ *mit* $\lambda_1 + \ldots + \lambda_l = 1$. *Dann ist* [A] *das Supremum von* $\mathfrak{A}$.

HILFSSATZ 2. — *Ist* $A(\lambda)$ *stetig in* $\lambda (\lambda \in J)$, *so trifft dies auch für die Funktion* $[A(\lambda)] = ([A_\lambda])$ *zu.*

HILFSSATZ 3. — *Ist* $A(\lambda)$ *in* J *stetig, so ist sie dort gleichmässig stetig.*

HILFSSATZ 4. — *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *ist die Menge*

$$E_\varepsilon = \{ \lambda \mid \omega(\lambda) \geqq \varepsilon \}$$

abgeschlossen.

HILFSSATZ 5. — *Es seien* A_k, B_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *kompakte (nichtleere) Punktmengen von* E^n *und* $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ *positive Zahlen.*

Setzt man dann

$$A = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_l A_l$$

und

$$B = \lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_l B_l,$$

so gilt

$$A, B | \leqq \sum_1^l \lambda_k | A_k, B_k |. \tag{17.3}$$

Nachfolgender Satz stellt ein wichtiges Hilfsmittel bei der Durchführung der notwendigen Grenzübergange dar und hängt mit dem Bolzano-Weierstrass'schen Satz für den Raum 2^{H} zusammen :

SATZ 14 (Hadwiger [1]. — *Es bezeichne* (A_k) $(k=1, 2, \ldots)$ *eine abzählbare Menge gleichmässig beschränkter, nichtleerer, abgeschlossener Punktmengen von* E^n. *Dann lässt sich aus* (A_k) *eine Teilfolge* $(A_{k'})$ *bestimmen, die gegen eine nichtleere, kompakte Menge* A *derart konvergiert, dass*

$$\lim_{k'\to\infty} | A_{k'}, A | = 0 \tag{17.4}$$

wird.

Der Beweis des Hilfssatzes 1 kann folgendermassen erbracht werden. Es sei A^* eine abgeschlossene Menge von E^n, die jedes Element von $\mathfrak{A}$ umfasst. Sind x_1, x_2 zwei Punkte von A, so enthält A^* jeden Punkt von der Form $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, mit $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, also auch jeden Punkt von [A]. Das beweist die Behauptung.

Hilfssatz 2 folgt ohne Schwierigkeit aus der leicht beweisbaren Ungleichung

$$[A] \subseteq [B^h] \subseteq [B]^h \qquad (A \subseteq B^h,\ h > 0).$$

Die Beweise der Hilfssatze 3 und 4 lassen sich ähnlich wie im klassischen Fall durchführen und werden hier nicht gegeben. Der Beweis des Hilfssatzes 5 ist einfach und soll nur skizziert werden. Es sei $x^* \in A$, $y^* \in B$. Dann ist

$$x^* = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_l x_l, \qquad y^* = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_l y_l$$

mit

$$x_k \in A_k, \qquad y_k \in B_k.$$

Daraus folgt

$$| x^* - y^* | \leqq \lambda_1 | x_1 - y_1 | + \ldots + \lambda_l | x_l - y_l |,$$

und somit

$$\inf_{y^* \in B} | x^* - y^* | \leqq \sum_1^l \lambda_k \inf_{y_k \in B_k} | x_k - y_k |,$$

also für $x \in A$

$$\inf_{y \in B} | x - y | \leqq \sum_1^l \lambda_k | A_k, B_k |.$$

Durch Uebergang zum Supremum und Vertauschung der Rolle von A und B erhält man ohne weiteres (17.3). Ausführlichere Darstellungen der Beweise der Hilfssätze 1-5 findet man bei Dinghas [9].

Es bedeute jetzt $(A_k)(k=1, 2, \ldots)$ eine Cauchy-Folge von nichtleeren gleichmässig beschrankten, abgeschlossenen Punktmengen von E^n. Dann zeigt man : Es gibt eine nichtleere, kompakte Punktmenge A derart, dass

$$\lim_{k\to\infty} |A_k, A| = 0 \tag{17.5}$$

gilt. Man setze in der Tat

$$S_n = \bigcup_n^{\infty} A_k, \qquad T_n = \bar{S}_n.$$

Dann ist $T_{n+1} \subseteq T_n$, und somit ist $T = \bigcap_1^{\infty} T_n$ eine nichtleere abgeschlossene Punktmenge. Wäre nun $\lim\limits_{n\to\infty} |T_n, T| > 0$, so wäre die Menge $D_n = T_n - (\operatorname{int} T^\varepsilon \cap T_n)$ für jedes n nicht leer. Da nun die D_n nicht leer und monoton abnehmend sind, so ist $D = \bigcap_1^{\infty} D_n$ eine nichtleere abgeschlossene Punktmenge. Aus $D_n \cap (\operatorname{int} T^\varepsilon) = \emptyset$ folgt jetzt $D_n \cap T = \emptyset$, was wegen $D_n \subseteq T_n \to D \subset T$ offenbar falsch ist. Ist also $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es einen Index n derart, dass für alle $n \geqq n_0$, $T^\varepsilon \supseteq T_n$ gilt und somit wegen $T_k \supseteq A_k$ auch $T^\varepsilon \supseteq A_k$. Da jetzt (A_k) eine Cauchy-Folge ist, so gilt von einem n'_0 an $A_n^\varepsilon \supseteqq A_k$ $(k > n > n'_0)$ und somit die Ungleichung $A_n^\varepsilon \supseteq T$ für alle $n \geqq n'_0$. Kombiniert man dieses Resultat mit der Ungleichung $T^\varepsilon \supseteq A_n$, so folgt leicht die Ungleichung $|T, A_n| \leqq \varepsilon (n > \operatorname{Max}(n_0, n'_0))$ und hiermit $T = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Der zweite Teil des Beweises verfolgt das Ziel, die Existenz einer Cauchy-Teilfolge von (A_k) nachzuweisen. Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass jedes A_k im (achsenparallelen) Einheitswürfel um den Nullpunkt enthalten ist. Man zerlege W durch Unterteilung in $2^{kn}(k=1, 2, \ldots)$ kongruente Würfel von der Seitenlänge $\frac{1}{2^k}$. Man betrachte das Mengensystem, dessen Elemente E sich als Vereinigung von endlich vielen kleinen

Würfeln darstellen lassen. Die Anzahl der Elemente dieser Menge ist gleich $2^{2^{kn}}$. Jetzt ordne man jeder Menge A_ν unserer Folge dasjenige E zu, dessen Würfel mit A_ν gemeinsame Punkte haben. Es ist leicht zu sehen, dass bei festem k ein solches E unendlich oft auftritt. Es bedeute jetzt $(A_{k\nu})$ $(k = 1, 2 \ldots; \nu = 1, 2, \ldots)$ diejenige Teilfolge von (A_k) $(k = 1, 2, \ldots)$, deren Elementen $A_{k\nu}$ bei der k-ten Unterteilung dasselbe Element E zugeordnet wird. Dabei wird die Auswahl stets so getroffen, dass $(A_{k+1,\nu})$ eine Teilfolge von $(A_{k\nu})$ ist. Dann gilt $|A_{k\mu}, A_{k\nu}| \leqq \frac{\sqrt{n}}{2^k}$ und

$$|A_{ii}, A_{jj}| \leqq 2^{-r}\sqrt{n} \qquad [r = \operatorname{Min}(i, j)].$$

Somit ist gezeigt worden, dass die Folge (A_{ii}) eine Cauchy-Folge ist.

Das beweist den Satz **14**.

Nachfolgender Beweis verwendet lediglich die Kompaktheit von S.

Satz **14'** (Bolzano-Weierstrass). — *Es bedeute* S *einen metrischen kompakten topologischen Raum und* 2^S *den Raum aller nicht leeren Teilmengen von* S. *Bedeutet dann* (A_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ *eine abzählbare Folge von Elementen von* 2^S, *so gibt es ein* $A \in 2^S$ *derart, dass*

$$\lim_{k \to \infty} |A_{n_k}, A| = 0 \tag{17.6}$$

gilt.

Dabei wird allgemein $|A, B|$ mit Hilfe der in S definierten Metrik $|x, y|$ durch die Gleichung

$$|A, B| = \operatorname{Max}\left\{ \inf_{y \in A}\left(\sup_{x \in B} |x, y|\right), \inf_{y \in B}\left(\sup_{x \in A} |x, y|\right)\right\}$$

gegeben, sofern x, y Punkte von S bedeuten.

Der Beweis läuft so : Da S kompakt ist, so kann dieser (und somit jedes A_n) nach dem klassischen Satz von Heine-Borel-Lebesgue bei vorgegebenem $\eta > 0$ durch endlich viele Kugeln $K_1, \ldots, K_q$ $(q = q(\eta))$ vom Radius η überdeckt werden. Wählt man nacheinander $\eta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots,$ so kann man leicht für jedes A_n eine abzählbare Basis $N_n = (x_k^n)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ konstruieren mit der Eigenschaft, dass bei gegebenem $\varepsilon > 0$ $\left(\text{und von der Form } \frac{1}{k}, k \text{ ganz} > 0\right)$

$$A_n \subseteq \bigcup_{1}^{q} S_{x_k^n}^{\varepsilon} \qquad (x_k^n \in A_n,\ q \geqq q_0 = q_0(\varepsilon))$$

mit einem nur von ε abhängigen q_0 gilt. Jetzt wende man auf die Doppelfolge (x_k^n) das Cantorsche Diagonalverfahren an, indem man die Teilfolgen

$$X_1 = (x_1^{n_{1k}}), \qquad X_2 = (x_2^{n_{2k}}), \qquad \ldots, \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

folgendermassen konstruiert :

1. Die Folge $S_1 = (n_{1k})$ ist eine Teilfolge von $(m)\,(m = 1, 2, \ldots)$.

2. Es existiert
$$\lim_{k \to \infty} x_1^{n_{1k}} = x_1.$$

3. Die Folge $S_r = (n_{rk})\ (r = 2, 3, \ldots)$ ist eine Teilfolge von S_{r-1}.

4. Es existiert
$$\lim_{k \to \infty} x_r^{n_{rk}} = x_r.$$

Man betrachte nun die (nicht leere) abzählbare Punktmenge

$$N = \left\{ x_k \mid x_k = \lim_{r \to \infty} x_k^{n_{rr}},\ k = 1, 2, \ldots \right\}$$

und bilde die abgeschlossene Hülle $\overline{N}$ von N. Dann wird behauptet : Die Teilfolge $(A_{n_{rr}})$ von (A_n) konvergiert gegen $\overline{N}$ im Sinne der Gleichung (17.6). Man setze in der Tat $A_{n_{rr}} = C_r$ und schreibe der Einfachheit halber x_k^r für $x_k^{n_{rr}}$. Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gilt zunächst für alle $r \geqq r_0 = r_0(\varepsilon)$

$$C_r \subseteq \bigcup_{k=1}^{q_0} S_{x_k}^{\varepsilon} \subseteq \bigcup_{k=1}^{q_0} S_{x_k}^{2\varepsilon} \subseteq N^{2\varepsilon} \subseteq \overline{N}^{4\varepsilon}.$$

Andererseits folgt aus der Ungleichung

$$C_r \subseteq \bigcup_{k=1}^{q_0} S_{x_k}^{2\varepsilon} \qquad (r \geqq r_0),$$

dass

$$N \subseteq \bigcup_{k=1}^{q_0} S_{x_k}^{2\varepsilon} \subseteq \bigcup_{k=1}^{q_0} S_{x_k^r}^{3\varepsilon} \qquad (r \geqq r_0)$$

gelten muss. Daraus folgt $N \subseteq C_r^{3\varepsilon}$ $(r \geqq r_0)$ und somit auch $\overline{N} \subseteq C_r^{4\varepsilon}$ $(r \geqq r_0)$. Das beweist die Behauptung.

Hilfssatz 5 wurde in Verallgemeinerung eines ähnlichen (Blaschkeschen Satzes) (Blaschke [1]) für konvexe Körper von Hadwiger [1] formuliert und bewiesen. Man vgl. auch die Wiedergabe bei Macbeath [1]. Für allgemeine Zusammenhänge (sowohl für Hilfssatz 5 als auch für den zuletzt bewiesenen allgemeinen Satz) vgl. man die Kuratowskische Topologie (Kuratowski [1]).

18. Riemann-Minkowskische Summen. Konvergenzfragen. Das Riemann-Minkowskische Integral. — Sind auf J $n+1$ Punkte

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = 1$$

gegeben, so definieren diese eine Riemannsche Zerlegung des Intervalls J in m abgeschlossene Intervalle J_k

$$\lambda_{k-1} \leqq \lambda \leqq \lambda_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Jeder solchen Zerlegung E entspricht eine Riemann-Minkowskische Summe

$$S = S(A_\lambda \mid E) = \sum_1^n |J_k| \, A_{\xi_k} \tag{18.1}$$

mit $\xi_k \in J_k$. Man setze jetzt $\delta_M = \operatorname{Max}\{|J_k|\}$. Dann entsteht die Frage, inwieweit der Grenzwert

$$A = \lim_{\delta_M \to 0} \{ S(A_\lambda \mid E) \mid E \} \tag{18.2}$$

existiert und eine nichtleere abgeschlossene Punktmenge ist. Es sei E′ eine zweite Einteilung von J mit den Einteilungspunkten

$$0 = \lambda'_0 < \lambda'_1 < \ldots < \lambda'_m = 1.$$

Man setze

$$S' = S(A_\lambda \mid E') = \sum_1^{m'} |J'_k| \, A_{\xi'_k}$$

und bilde die Vereinigung von E und E'. Darunter wird die Einteilung $E''(\lambda''_0, \ldots, \lambda''_{m''})$ verstanden, welche sowohl aus den Punkten λ_k als auch aus den Punkten λ'_k besteht. Bei dieser Definition von E'' lässt sich jedes J_k bzw. jedes J'_k als Vereinigung von endlich vielen Intervallen

$$J''_r = \{ \lambda \mid \lambda''_{r-1} \leqq \lambda \leqq \lambda''_r \} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m'')$$

darstellen.

Man nehme jetzt an, jede Punktmenge A_λ von $A(\lambda)$ sei konvex. Wir schreiben S in der Form

$$S = \sum_1^{m''} | J''_r | A_{\eta_r} \tag{18.3}$$

wobei jedes Mal η_r gleich dem jeweiligen ξ_k des Intervalles J_k gewählt wird, in dem J''_r liegt. Analog schreiben wir

$$S' = \sum_1^{m''} | J''_r | A_{\eta'_r} \tag{18.4}$$

mit der entsprechenden Verabredung über η'_r. Wendet man jetzt den Hilfssatz 5 an, so erhält man zunächst die Ungleichung

$$| S, S' | \leqq \sum_1^{m''} | A_{\eta_r}, A_{\eta'_r} | . | J''_r |. \tag{18.5}$$

Ist $\{ \lambda \mid \omega(\lambda) > 0 \}$ leer, so kann man die Ungleichung $| S, S' | < \varepsilon$ dadurch erzwingen, indem man $\delta_M < \eta(\varepsilon)$ wählt. Der Fall, dass $\{ \lambda \mid \omega(\lambda) > 0 \}$ nicht leer ist und das Lebesguesche Mass Null hat, erledigt sich wie im Falle einer reellen Funktion und kann bei Dinghas [9] nachgelesen werden.

Ist die Konvergenz der Riemann-Minkowskischen Summen S bewiesen, so bietet die Definition des Riemann-Minkowskischen Integrals

$$\int_0^1 d\lambda \, A_\lambda = \lim_{\delta_M \to 0} \left\{ \sum_1^m | J_k | A_{\xi_k} \right\}. \tag{18.6}$$

keine wesentliche Schwierigkeit.

Sind die A nicht konvex, so definiert man (18.6) durch die Gleichung

$$(18.7) \qquad \int_0^1 d\lambda\, A_\lambda = \int_0^1 d\lambda\, [A_\lambda]$$

vorausgesetzt, dass die rechte Seite existiert. Analog werden die Integrale $\int_a^b d\lambda\, A_\lambda$, $(a < b)$ definiert.

Für das Riemann-Minkowskische Integral $\int_a^b d\lambda\, A_\lambda$ gelten folgende Gleichungen :

$$1. \qquad \int_a^b d\lambda (\alpha A_\lambda) = \alpha \int_a^b d\lambda\, A_\lambda \qquad (\alpha \text{ reell} > 0)$$

$$2. \qquad \int_a^b d\lambda \{\alpha A_\lambda + \beta B_\lambda\} = \alpha \int_a^b d\lambda\, A_\lambda + \beta \int_a^b d\lambda\, B_\lambda,$$

sobald $A(\lambda)$ und $B(\lambda)$ in $[a, b]$ integrierbar sind, und

$$3. \qquad \int_a^b d\lambda\, A_\lambda = \int_a^c d\lambda\, A_\lambda + \int_c^b d\lambda\, A_\lambda \qquad (a < c < b).$$

Der hier eingeführte Integralbegriff führt zu einer Verallgemeinerung des Brunn-Minkowskischen Satzes. Das soll in der nächsten Nummer geschehen.

19. **Der Brunn-Minkowskische Satz für mengenwertige Funktionen.** — Mit Hilfe des in Nr. 17 und 18 eingeführten Integralbegriffs kann nun zunächst folgender Satz (Dinghas [6], [7]) bewiesen werden :

Satz 13. — *Ist* $A(\lambda)$ *in* J *Riemann-Minkowski-integrierbar, so gilt*

$$(19.1) \qquad \left| \int_0^1 d\lambda\, A_\lambda \right|^{\frac{1}{n}} \geq \int_0^1 |A_\lambda|^{\frac{1}{n}} d\lambda.$$

Der Beweis dieses Satzes folgt ohne weiteres aus den nachstehenden Tatsachen :

1. Es gilt

$$|S|^{\frac{1}{n}} \geq |J_1|\, |A_{\xi_1}|^{\frac{1}{n}} + \ldots + |J_n|\, |A_{\xi_n}|^{\frac{1}{n}}.$$

2. Die Funktion $|A_\lambda|^{\frac{1}{n}}$ ist Riemann-integrierbar.

3. Es gilt $\lim\limits_{\delta_M \to 0} S = \int_0^1 d\lambda\, A_\lambda$.

Fragt man nach dem Eintreten des Gleichheitszeichens in (19.1), so sieht man zuerst leicht, dass $A(\lambda)$ (bis auf eine λ-Nullmenge) aus konvexen Mengen bestehen muss. Durch etwas längere Ueberlegungen (Dinghas [9]) kann man, indem man jedes A_λ mit Hilfe der Brunn-Minkowskischen Abbildung von Nr. 5 auf T_* abbildet und das Integral auf die Parameter $\tau_1, \ldots, \tau_n$ transformiert, sehen, dass folgender Einzigkeitssatz gilt :

Satz 14. — *Gilt* $|A_\lambda| > 0$ $(\lambda \in J)$, *so kann das Gleichheitszeichen in* (19.1) *für integrierbare mengenwertige Funktionen* $A(\lambda)$ *dann und nur dann eintreten, wenn es eine Riemann-integrierbare Funktion* $f(\lambda)$ *gibt, die ausserhalb der Nullmenge* $\{\lambda \mid \omega(\lambda) > 0\}$ *positiv ist und derart, dass*

$$A_\lambda = f(\lambda) A \tag{19.2}$$

mit einer festen konvexen Menge A *gilt.*

Da die Bedingung (19.2) offenbar hinreichend ist, so genügt es zu zeigen, dass sie auch notwendig ist. Wir nehmen A_λ als eine beschränkte, konvexe, abgeschlossene Punktmenge an und bilden mit Hilfe der Funktion $g_n^\lambda(\lambda) = \varphi^\lambda(\lambda)$ [wobei $\varphi^\lambda(x)$ die charakteristische Funktion von A_λ bedeutet] jedes A_λ auf T_* ab.

Auf diese Weise erhält man die Funktionen

$$x_k^\lambda(\tau_1, \ldots, \tau_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda \in J),$$

von denen man zeigen kann (Dinghas [9]), dass sie

1. in jeder Stetigkeitsstelle von (A_λ) stetige Funktionen von λ sind und

2. die Relationen

$$\frac{\partial x_k^\lambda}{\partial \tau_k} = \frac{g_{k-1}^\lambda(x_1^\lambda, \ldots, x_{k-1}^\lambda)}{g_k^\lambda(x_1^\lambda, \ldots, x_k^\lambda)} = f_k^\lambda(x_1^\lambda, \ldots, x_k^\lambda) \tag{19.3}$$

erfüllen. Hierbei sind x_r^λ als Funktionen von $\tau_1, \ldots, \tau_k$ gegeben.

Man setze jetzt $A = \int_0^1 d\lambda\, A_\lambda$ und betrachte die Menge $A^\varepsilon (\varepsilon > 0)$. Nimmt man dann bei der Bildung der Riemannschen Summen δ_M hinreichend klein, so liegen die entsprechenden S in A^ε und man erhält nach leichten Grenzübergängen die Ungleichung

$$(19.4) \qquad |A| \geq \int_{T^*} \left\{ \prod_1^n \int_0^1 f_k^\lambda \, d\lambda \right\} d\tau_1 \ldots d\tau_n.$$

Da nun mit Rücksicht auf die Ungleichung (3.30)

$$\prod_1^n \left\{ \int_0^1 f_k^\lambda \, d\lambda \right\}^{\frac{1}{n}} \geq \int_0^1 \left\{ \prod_1^n f_k^{\lambda \frac{1}{n}} \right\} d\lambda = \int_0^1 (g_0^\lambda)^{\frac{1}{n}} d\lambda$$

ist, und das Gleichheitszeichen nur dann eintritt, wenn zunächst die Gleichungen

$$(19.5) \qquad f_k^\lambda = C_k(\tau_1 \ldots \tau_k)\, \varphi(\lambda) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

fast überall in J erfüllt sind, so erhält man durch (19.4) einen Zugang zu der Einzigkeitsfrage von (19.1). Multipliziert man in der Tat die Gleichungen (19.5) miteinander, so erhält man leicht folgendes Resultat : Es gilt fast überall auf J die Gleichung

$$(19.6) \qquad \frac{dx_1^\lambda}{d\tau} = q(\lambda) \qquad [x_1^\lambda = x_1^\lambda(\tau)].$$

Da die A_λ konvex sind, so lässt sich daraus unschwer die Behauptung (19.2) ableiten.

Zum Schluss sei noch an dieser Stelle folgendes erwähnt : Man behalte die Konvexität von A_λ bei und nehme an, dass die Gewichtsfunktionen $g_n(x) = g_{A_\lambda}(x)$ folgende Eigenschaften haben :

1. Es gilt $g_{A_\lambda}(x) > 0$ $(x \in \operatorname{int} A_\lambda,\ \lambda \in J)$;
2. $g_{A_\lambda}(x)$ ist stetig in A_λ;
3. $g_{hA_\lambda}(hx) = h^r g_{A_\lambda}(x)$ $(r > 0)$ und
4. Sind A_{λ_1}, A_{λ_2} zwei Elemente von (A_λ) und $A_{\lambda_0} = A_{\lambda_1} + A_{\lambda_2}$, so gilt

$$(19.7) \qquad g_{A_{\lambda_0}}(x)^{\frac{1}{r}} \geq g_{A_{\lambda_1}}(x')^{\frac{1}{r}} + g_{A_{\lambda_2}}(x'')^{\frac{1}{r}} \qquad (x = x' + x'').$$

Hat man nun eine solche Funktion (und das Beispiel der grössten Kugel um x, die in A_λ liegt, zeigt, dass es solche gibt), so kann man die Ungleichung (19.1) verallgemeinern, indem man A_λ durch den allgemeinen Ausdruck

$$J_r(g_{A_\lambda} \mid A_\lambda) = \int_{A_\lambda} g_{A_\lambda}(x)\, dx_1 \ldots dx_n \tag{19.8}$$

ersetzt. Schreibt man dann auch $J_r(A \mid g_A)$ für $\int_A g_A(x)\, dx_1 \ldots dx_n$, so kann man die Gleichung

$$J_r(g_A \mid A)^{\frac{1}{r+n}} \geqq \int_0^1 J_r(A_\lambda \mid g_{A_\lambda})^{\frac{1}{r+n}} d\lambda \tag{19.9}$$

beweisen, die das Integralanalogon von (10.10) darstellt. Eine ausführlichere Darstellung dieser Zusammenhänge findet der Leser bei Dinghas [9].

20. **Einordnung in allgemeinere Probleme. Rückblick.** — Entwicklungsmässig kann man den Problemkreis, von dem hier lediglich ein kleiner, wichtiger Ausschnitt zur Darstellung kam, in drei speziellere Problemkreise auflösen, von denen jeder umfangreiche Literatur hervorgerufen hat :

1. Das Extremalproblem von Brunn-Minkowski in Zusammenhang mit der Cantor-Minkowskischen Konstruktion;
2. Das allgemeine Problem von Brunn-Minkowski und Lusternik und
3. Der Problemkreis von Cauchy-Davenport und Schnirelman-Mann.

Eigentlich liegt diesen drei Problemen folgendes Minimalproblem zugrunde (Henstock-Macbeath [1]) :

Es sei X eine topologische Gruppe mit den Elementen $a, b, c, \ldots$ und dem Kombinationsgesetz $\circ$. Man definiere für zwei nichtleere Punktmengen A, B von X die Menge $A \circ B$ durch die Gleichung

$$A \circ B = \{ c \mid c = a \circ b,\ a \in A,\ b \in B \}. \tag{20.1}$$

Ist nun eine Massfunktion μ auf X gegeben, so soll nach der Existenz einer reellen Funktion $\psi(x)$ [$\psi(x) \geqq 0$ für $x \geqq 0$] gefragt werden, so dass für je zwei Teilmengen A, B von X die Ungleichung

$$\mu(A \circ B) \geqq \psi(\mu A, \mu B) \tag{20.2}$$

gilt.

Sämtliche bisher behandelten Probleme führen zu einer Ungleichung von der Form

$$\Phi(\mu(A \circ B)) \geqq \operatorname{Min}\{F, \Phi(\mu(A)) + \Phi(\mu(B))\}, \tag{20.3}$$

mit

$$F = \sup\{\Phi(\mu(M)) \mid M \subseteq X\}.$$

Diese Ungleichung fällt offenbar mit der Ungleichung (2) zusammen, sofern man X additiv schreibt.

Ich bringe folgende Beispiele :

1. Es sei X eine zyklische, additive, kommutative Gruppe von der Primzahlordnung p, und es bedeute $n(M)$ die Anzahl der Elemente einer nichtleeren Teilmenge M von X. Dann gilt nach Cauchy [1] und Davenport [1]

$$n(A + B) \geqq \operatorname{Min}\{p, n(A) + n(B) - 1\}. \tag{20.4}$$

Nimmt man hier an, dass sämtliche zugelassenen Teilmengen A, B von X das Nullelement enthalten und dass $n(M)$ die Anzahl der von Null verschiedenen Elemente von M bedeutet, so erhält man für die Dichte

$$d(M) = \frac{n(M)}{p-1}$$

die Ungleichung

$$d(A + B) \geqq \operatorname{Min}\{1, d(A) + d(B)\}. \tag{20.5}$$

Für kontinuierlich verteilte Mengen auf einem Torusraum X, der aus E^n dadurch hervorgeht, indem man zwei Punkte $x(x_1, \ldots, x_n)$ und $y(y_1, \ldots, y_n)$ als identisch ansieht, sobald die Kongruenzen $x_k \equiv y_k \pmod 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ gelten, hat, wie schon erwähnt, Macbeath [1] eine zu (20.5) analoge Ungleichung bewiesen. Das Hauptergebnis seiner Arbeit sei hier erneut zusammengefasst :

Man ordne vermöge der Kongruenzbeziehung $x_k \equiv \xi_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ jedem Punkt $x(x_1, \ldots, x_n)$ von X den Punkt $\xi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ von E^n zu, wobei $0 \leqq \xi_k < 1$ $(k = 1, \ldots, n)$ ist. Die Abbildung $x \to \xi$

bezeichne man mit ψ. Sind dann A, B zwei nichtleere, messbare Teilmengen von X, so gilt

$$\mu_*(A+B) \geqq \operatorname{Min}\{1, \mu(A)+\mu(B)\}. \tag{20.6}$$

Hier sind im Gegensatz zu (20.5) die Fälle, für die das Gleichheitszeichen eintritt, nicht restlos geklärt. An dieser Stelle soll noch die bedeutende Arbeit von M. Kneser (Kneser [1]) erwähnt werden.

2. Es bedeute n eine natürliche Zahl >1, und es sei X_n die Menge der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n$.

Man definiere für zwei natürliche Zahlen a, b die Operation $a \circ b$ durch die Gleichung

$$a \circ b = \begin{cases} a+b \mid a+b \leqq n, \\ 0 \quad \mid a+b > n \end{cases} \tag{20.7}$$

und schreibe der Einfachheit halber $a+b$ für $a \circ b$. Der so definierte Halbmodul X_n besitzt dann das superadditive Funktional

$$d_n(M) = \operatorname{Min}\left\{ \frac{A(k)}{k} \,\middle|\, 1 \leqq k \leqq n \right\}, \tag{20.8}$$

sobald M die Eins enthält und $A(k)$ die Anzahl der Elemente a von M mit $1 \leqq a \leqq k$ bedeutet. Dieser Sachverhalt wird bekanntlich durch den berühmten Satz von Khintchine-Schnirelman-Mann

$$d_n(A+B) \geqq \operatorname{Min}\{1, d_n(A)+d_n(B)\} \tag{20.9}$$

zum Ausdruck gebracht.

Der hieran interessierte Leser möge zur Orientierung die Arbeit von Mann [1] sowie die Arbeit von van der Corput [1] lesen.

3. Ist A eine kompakte Punktmenge in R^n und S eine Kugel desselben, so führt die (von Erhard Schmidt, Erhard Schmidt [1] und [2]) durchgeführte Cantor-Minkowskische Konstruktion $A+S$ wieder zu einem superadditiven Funktional.

Man definiere die Funktion $g(x)$ durch die Gleichung

$$g(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}\,dt}{\sqrt{1-Kt^2}} \qquad (K \geqq 0) \tag{20.10}$$

wobei für $K>0$, $0 \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{K}}$ ausfällt. Es sei $\psi(x) = g^{-1}(x)$, und es bedeute allgemein $\bar{\mu}(M)$ den (äusseren) Jordanschen Inhalt (auf R^n)

von M. Dann gelten nach Erhard Schmidt die Ungleichungen

$$(20.11) \qquad \psi\left(\frac{\bar{\mu}(C)}{\omega_n}\right) \geqq \psi\left(\frac{\bar{\mu}(A)}{\omega_n}\right) + \psi\left(\frac{\bar{\mu}(S)}{\omega_n}\right) \qquad \text{für} \quad K < 0,$$

und

$$(20.12) \qquad \psi\left(\frac{\bar{\mu}(C)}{\omega_n}\right) \geqq \operatorname{Min}\left\{K^{-\frac{n}{2}}, \psi\left(\frac{\bar{\mu}(A)}{\omega_n}\right) + \psi\left(\frac{\bar{\mu}(S)}{\omega_n}\right)\right\} \qquad \text{für} \quad K > 0.$$

Hierbei bedeutet C die Summe $A + S$ und, wie bereits erwähnt, ω_n den Inhalt der n-dimensionalen euklidischen Einheitskugel. Lässt man hier $K \to 0$ konvergieren, so erhält man den in den vorherigen Kapiteln ausführlich studierten Fall des euklidischen Raumes E^n.

Die in den Kapiteln 2 und 3 mit Hilfe von Symmetrisierungen durchgeführte Isoperimetriebeweise, sowie die sich auf den Auswahlsatz stützenden Konvergenzverfahren (man vgl. etwa Hadwiger [5]) können mehr oder weniger strukturell folgendem Beweisschema untergeordnet werden :

Es bedeute S den Raum E^n bzw. den Raum R^n, und es bezeichne Ω eine Klasse von Operationen ω, definiert für alle nicht leeren, kompakten Teilmengen A von S mit folgenden Eigenschaften :

1. Jedes ω bewirkt eine innere Transformation von A und überführt dieses in ein Element ωA von 2^S.

2. Es existiert ein endlichwertiges Mengenfunktional $J(A) \geqq 0$ mit der Eigenschaft

$$(20.13) \qquad J(\omega A) = J(A) \qquad (\omega \in \Omega)$$

(Später soll noch gefordert werden, dass dieses Funktional innerhalb eines geeigneten Teilraumes von 2^S nicht verschwindet).

3. Die identische Operation ω_0 mit der Eigenschaft $\omega_0 A = A$ für jedes $A \in 2^S$ ist in Ω enthalten.

4. Die Klasse Ω enthält mindestens ein Element $\omega \neq \omega_0$. Das bedeutet : Es existiert ein ω derart, dass die Gleichung $\omega A = A$ nicht für alle zulässigen A gilt.

Wir definieren nun den Begriff der Kette :

Eine abzählbare Folge (A_k) $(k = 0, 1, 2, A_0 = A)$ heisst eine Kette, wenn jedes $A_k (k = 1, 2, \ldots)$ durch endlich viele Transformationen ω

aus A hervorgeht. Die durch A erzeugte Kette wird im folgenden mit X_A bezeichnet.

Neben dem Begriff der Kette ist noch der Begriff des Fixelementes von Bedeutung.

Ein Element A^* von 2^S heisst ein Fixelement, wenn für alle $\omega \in \Omega$, $\omega A^* = A$ gilt. Die Gesamtheit aller Fixelemente von 2^S wird mit X_0 bezeichnet.

Die meisten Beweise nun des klassischen isoperimetrischen Problems in E^n bzw. in R^n können am kürzesten nach folgendem Schema geführt werden :

a. Man deute $J(A)$ als äusseren Jordanschen Inhalt von A und betrachte den Teilraum X_{V_0} mit $J(A) = V_0$ (V_0 vorgegeben > 0).

b. Die Operationen ω sollen Steinersche Symmetrisierungen in Bezug auf $(n-1)$-dimensionale Hyperebenen (mit entsprechender Modifikation in R^n) bedeuten.

Es existiere nun ein endlichwertiges Mengenfunktional Φ auf X_{V_0} mit den Eigenschaften :

1. $\Phi(A)$ ist in X_{V_0} nach unten beschränkt;
2. $\Phi(A)$ ist im Sinne der Ungleichung

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} \Phi(A_n) \geq \Phi(A) \tag{20.14}$$

für alle im Sinne der Gleichung $\lim\limits_{n \to \infty} |A_n, A| = 0$ gegen A konvergente Folgen (A_n) nach unten halbstetig.

3. Für jedes $A \in X_{V_0}$ und $\omega \in \Omega$ gilt

$$\Phi(\omega A) \leq \Phi(A). \tag{20.15}$$

Man bilde nun die Grösse

$$q = \inf \{ \Phi(A) \mid A \in X_{V_0} \} \tag{20.16}$$

und konstruiere die Folge (A_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ durch die Vorschrift

$$q \leq \Phi(A_n) \leq q + \frac{1}{n}. \tag{20.17}$$

Mit Rücksicht auf den Bolzano-Weierstrass'schen Satz und (20.14) existiert ein $A_0 \in X_{V_0}$ mit $\Phi(A_0) = q$, und somit wird

(20.18) $$\Phi(A) \geq \Phi(A_0) \qquad (A \in X_{V_0}).$$

Das Element A_0 hat zunächst die Eigenschaft, dass $\Phi(\omega A) = \Phi(A)$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt.

Man nehme nun an, es existiere ein Fixelement $S_0 \in X_{V_0}$ und dass zu jedem $A \in 2^S$, $A \neq S_0$ ein $\omega \in \Omega$ existiert derart, dass

(20.19) $$J(\omega A \cap S_0) > J(A \cap S_0)$$

gilt.

Mit Hilfe dieser zusätzlichen Voraussetzung kann man nun in (20.10) A_0 durch S_0 ersetzen.

Es sei in der Tat $A_0 \neq S_0$. Man konstruiere die Kette X_{A_0}, bilde die Grösse

$$q_1 = \sup \{ J(M \cap S_0) \mid M \in X_{A_0} \}$$

und konstruiere eine konvergente Folge (M_n) $(M_n \in X_{A_0}, n = 1, 2 \ldots)$ derart, dass

$$\lim_{n \to \infty} J(M_n \cap S_0) = q_1$$

gilt. Es sei M_0 eine Häufungsmenge dieser Folge. Ist dann $M_0 \neq S_0$, so gäbe es ein $\omega \in \Omega$ mit $J(\omega M_0 \cap S_0) > J(M_0 \cap S_0) = q_1$, was unmöglich ist. Nun ist für jedes M_n

$$\Phi(A_0) \geq \Phi(M_n) \geq \Phi(S_0)$$

und somit schliesslich

(20.20) $$\Phi(A) \geq \Phi(S_0) \qquad (A \in X_{V_0}).$$

Das hier skizzierte Beweisschema kann sowohl an das klassische isoperimetrische Problem in E^n als auch an dasjenige in R^n angepasst werden. In beiden Fällen kann $\Phi(A)$ durch das zuerst in den Nr. 12 und 16 verwendete Funktional $|A^h|$ ersetzt werden. Wie bereits erwähnt, bedeuten ω (jeweils den Krümmungsverhältnissen des Raumes angepasste) Steinersche Symmetrisierungen. Die hier eingeschobene Verwendung des Bolzano-Weierstrass'schen Satzes verkürzt das dort entwickelte Verfahren. Ungleichung (20.19) fasst in abstrakterer Form die entsprechenden Hilfssätze von Nr. 12 und 16 zusammen. Für den Fall $K > 0$ liegt, wie bereits erwähnt, sobald A nicht in einem Halbraum von R^n liegt, keine bis in die Einzelheiten gehende Darstellung des in Nr. 16 und hier entwickelten

Verfahrens vor. Jedoch scheint die Verwendung des vorhin besprochenen Satzes von Macbeath (Macbeath [2]) einen kurzen Zugang zu der Ungleichung

$$(20.21) \qquad |A^h| \geqq |(\omega A)^h|,$$

unabhängig von der Tatsache, ob A (im Falle $K > 0$) in einem Halbraum von R^n liegt oder nicht, zu ermöglichen.

Die Behandlung des Problems der Oberfläche (und somit des eigentlichen isoperimetrischen Problems) bereitet, sofern man sich der Symmetrisierungsmethode bedienen will, grosse Schwierigkeiten, die bisher restlos nur durch die (längeren) Abhandlungen von Erhard Schmidt für kompakte A überwunden wurden. Die hier entwickelte Methode scheint kürzer zu sein, ist jedoch bisher (mit Ausnahme der Arbeiten von Dinghas (Dinghas [4], [5])) nicht weiter verfolgt worden.

Will man beim isoperimetrischen Problem anstelle des Cantor-Minkowskischen Oberflächenmasses die Lebesguesche Definition (Lebesgue [1]) der Oberfläche (die im allgemeinen eine kleinere Masszahl liefert) zugrundelegen, so wird man, wie dies am eindringlichsten von A. S. Besicovitch (Besicovitch [1]) an einem (berühmten) Beispiel demonstriert wurde, auf Ergebnisse geführt, die der (räumlichen) isoperimetrischen Ungleichung widersprechen.

Diese Widersprüche konnten erst durch T. Radó (Radó [1], [2]) geklärt werden. Nach Rado bedarf die bisher angenommene Inhaltsdefinition des von einer geschlossenen Fréchetschen Fläche begrenzten Raumstücks einer topologische Präzisierung. Erst dann kann man die klassische isoperimetrische Ungleichung (zunächst für den gewöhnlichen Raum) für eine allgemeine Klasse von Punktmengen unter Zugrundelegung der Lebesgueschen Oberfläche, ohne auf Widersprüche zu stossen, formulieren.

Ich schliesse diese Nummer mit einigen kurzen geschichtlichen Betrachtungen.

Brunn scheint die Tragweite seiner Entdeckung, nämlich die Abbildung zweier konvexer Körper aufeinander mit Hilfe gleicher Volumenverhältnisse, was die Anwendung auf die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel anbetrifft, unterschätzt zu haben, denn er bemerkt ausdrücklich [1], dass sich « dieser Gedanke wohl zum Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel nicht verwerten lässt ». Minkowski, dem dies gelungen ist, zitiert diese Stelle ([1], S. 125), bemerkt aber nicht, dass der Brunnsche Gedanke auch für beliebiges A und konvexes B zum Ziele führt. Auch Bonnesen war dieser Ansicht. So schrieb er in Zusammenhang mit der klassischen isoperimetrischen Ungleichung $O^3 - 36\pi V^2 \geqq 0$ zwischen der Oberfläche O und dem Volumen V eines konvexen Körpers : « Cette inégalité subsiste aussi pour les corps non convexes, mais on ne peut pas l'obtenir par ces méthodes » ([1], S. 111). Dinghas, dem zuerst dieser Nachweis gelang, bemerkte wiederum nicht, dass die Einschränkung auf konvexe B überflüssig war. Nachdem jedoch Lusternik sowie Henstock und Macbeath diese zweite Traditionsschranke überwanden, konnte man (Dinghas [8]) nachweisen, dass die Grenzen des Brunn-Minkowski-Lusternikschen Satzes immer noch viel zu eng gelegt worden waren.

Interessant für die Geschichte des isoperimetrischen Problems und die schrittweise Erweiterung der zugrundegelegten Ausgangsmengen ist noch die Tatsache, dass Bonnesen von Verallgemeinerungen im Sinne Tonellis und Gross' (und wahrscheinlich noch weniger von deren Nachfolgern) nicht sehr viel hielt, « or du point de vue géométrique » schreibt er an einer Stelle in seinem Buch ([1], S. 147) « ces sortes de hérissons ne sont pas particulièrement intéressants ».

LITERATURNACHWEIS

ALEXANDROFF (A.) :

[1] *Neue Ungleichungen für die Mischvolumen konvexer Körper* (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, N. S., Bd. 14, 1937, S. 155-157).

[2] *Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern* I *bis* IV (russisch mit deutschen Zusammenfassungen) (*Rec. Math. Moscou*, Bd. 2, 1937, S. 947-972; N. S., Bd. 2, 1937, S. 1205-1238; Bd. 3, 1938, S. 27-46 und 227-251).

BANACH (S.) :

[1] *Théorie des opérations linéaires*, Warschau, 1932.

BEHREND (F.) :

[1] Bemerkung zur Inhaltstheorie (*Math. Ann.* Bd. 111, 1935, S. 289-292).

BESICOVITCH (A. S.) :

[1] *On the definition and the value of the area of a surface.* (*Quart. J. Math. Oxford*, Ser. 16, 1945, S. 86–102).

BLASCHKE (W.) :

[1] *Kreis und Kugel* (erste Aufl. Veit, Leipzig, 1916, 169 S., 2te unveränderte Aufl., de Gruyter, Berlin, 1956).

BOL (G.) :

[1] *Zur Theorie der Eikörper* (*Jahresber. dtsch. Math.-Verein*, Bd. 52, 1942, S. 250-266).

BONNESEN (T.) :

[1] *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes* (Gauthier-Villars, Paris, 1929, 175 S.).

BONNESEN (T.) und FENCHEL (W.) :

[1] *Theorie der konvexen Körper, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Bd. 3 (Springer-Verlag, Berlin, 1934, 164 S.).

BRUNN (H.) :

[1] *Ueber Ovale und Eiflächen, Inauguraldiss.* (München, 1887, 42 S.).

[2] *Ueber Kurven ohne Wendepunkte, Habilitationsschrift* (München, 1889, 75 S.).

BUSEMANN (H.) :

[1] *The isoperimetric Problem for Minkowski Area* (*Amer. J. Math.*, Bd. 71, 1949, S. 743-762).

CANTOR (G.) :

[1] *De la puissance des ensembles parfaits de points* (*Acta Math.*, Bd. 4, 1884, S. 381-392).

CAUCHY (A. L.) :

[1] *Recherches sur les nombres* (*J. Éc. Polytechnique*, Bd. 9, 1813, S. 99-116).

CORPUT (VAN DER) :

[1] *On sets of integers* I, II, III (*Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, Bd. 50, 1947, S. 252-261, 340-350 und 429-435).

DAVENPORT (H.) :

[1] *On the addition of residue classes* (*J. London. Math. Soc.*, Bd. 10, 1935, S. 30-32). *A historical Note* (Ebend. Bd. 22, 1947, S. 100-101).

DINGHAS (A.) :

[1] *Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel für den n-dimensionalen Raum* (*Sitz. Akad. Wiss.*, Wien, math.-naturw. Kl., Abt. II, Bd. 149, 1940, S. 399-432).

[2] *Ueber einen geometrischen Satz von Wulff für die Gleichgewichtsform von Kristallen* (*Z. Kristallogr.*, Bd. 105 *a*, 1944, S. 304 314).

[3] *Zur Abschätzung arithmetischer Mittel reeller Zahlen durch Differenzprodukte derselben* (*Rend. Circ. mat. Palermo*, II, Bd. 2, 1954, S. 177-202).

[4] *Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im euklidischen Raum von n Dimensionen* (*Math. Nachr.*, Bd. 2, 1949, S. 107 113).

[5] *Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung* (*Math. Nachr.*, Bd. 2, 1949, S. 148-162).

[6] *Sur une généralisation du théorème de Lusternik concernant des familles continues des ensembles* (*C. R. Acad. Sc.*, Bd. 239, 1954, S. 575-576).

[7] *Démonstration du théorème de Brunn-Minkowski pour des familles continues d'ensembles* (*C. R. Acad. Sc.*, Bd. 239, 1954, S. 605-607).

[8] *Ueber zwei allgemeine Sätze von Brunn-Minkowski-Lusternikschem Typus* (*Det Kongel. Norske Videnskabers Selskabs Forhandl.*, Bd. 28, 1955, S. 182-185).

[9] *Zum Minkowskischen Integralbegriff abgeschlossener Mengen* (*Math. Z.*, Bd. 66, 1956, S. 173-188).

[10] *Ueber eine Klasse superadditiver Mengenfunktionale von Brunn-Minkowski-Lusternikschem Typus* (*Math. Z.*, Bd. 68, 1957, S. 111-125).

[11] *Zur Einzigkeitsfrage der Minkowski-Lusternikschen Ungleichung für die Relativoberfläche* (*Math. Z.*, Bd. 68, 1957, S. 299-315).

[12] *Ueber das Verhalten der Entfernung zweier Punktmengen bei gleichzeitiger Symmetrisierung derselben* (*Arch. Math.*, Bd. 8, 1957, S. 46-51).

DINGHAS (A.) und ERHARD SCHMIDT :

[1] *Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n dimensionalen euklidischen Raum* (*Abh. Preuss. Akad. Wiss.*, math.-naturw. Kl., 1943, Nr. 7).

ESTERMANN (TH.) :

[1] *Ueber Carathéodorys und Minkowskis Verallgemeinerungen des Längenbegriffs* (*Abh. Math. Sem. Hamburg*, Bd. 4, 1924, S. 73-116).

FAVARD (I.) :

[1] *Sur les corps convexes* [*J. Math. pures et appl.*, (9), Bd. 12, 1953, S. 219-282].

FENCHEL (W.) :

[1] *Ueber die neuere Entwicklung der Brunn-Minkowskischen Theorie der konvexen Körper*, Neunter skandin. Kongress, Helsinki, 1938.

[2] *Inégalités quadratiques entre les volumes mixtes des corps convexes* (*C. R. Acad. Sc.*, Bd. 203, 1936, S. 647-650).

[3] *Généralisation du théorème de Brunn et Minkowski concernant les corps convexes* (*C. R. Acad. Sc.*, Bd. 203, 1936, S. 764-766).

FENCHEL (W.) und BONNESEN (T.) (s. a. BONNESEN) :

[1] *Theorie der konvexen Körper, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Bd. 3 (Springer-Verlag, Berlin, 1934, 164 S.).

GROSS (W.) :

[1] *Die Minimaleigenschaft der Kugel* (*Wiener Monatsh.*, Bd. 28, 1917, S. 77-97).

HADWIGER (H.) :

[1] *Ein Auswahlsatz für abgeschlossene Punktmengen* (*Portug. Math.*, Bd. 8, 1949, S. 13-15).

[2] *Ueber beschränkte additive Funktionale konvexer Polygone* (*Publ. Math. Debrecen*, Bd. 1, 1949, S. 104-108).

[3] *Kurzer Beweis der isoperimetrischen Ungleichung für konvexe Bereiche* (*Elem. Math.*, Bd. 3, 1948, S. 111-112).

[4] *Minkowskische Addition und Subtraktion beliebiger Punktmengen und die Theoreme von Erhard Schmidt* (*Math. Z.*, Bd. 53, 1950-1951, S. 210 218).

[5] *Beweis der isoperimetrischen Ungleichung für abgeschlossene Punktmengen* (*Portug. Math.*, Bd. 8, 1949, S. 89-93).

[6] *Translationsinvariante, additive und stetige Eibereichfunktionale* (*Publ. Math. Debrecen*, Bd. 2, 1951, S. 81-94).

[7] *Einfache Herleitung der isoperimetrischen Ungleichung für abgeschlossene Punktmengen* (*Math. Ann.*, Bd. 124, 1952, S. 158-160).

[8] *Additive Funktionale k-dimensionaler Eikörper* I (*Arch. Math.*, Bd. 3, 1952, S. 470-478; Teil II, *Publ. Math. Debrecen*, Bd. 4, 1953, S. 374-379).

[9] *Altes und Neues über konvexe Körper*, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1955.

[10] *Konkave Eikörperfunktionale* (*Monatsh. Math.*, Bd. 59, 1955, S. 230-237).

[11] *Konkave Eikörperfunktionale und höhere Trägheitsmomente* (*Comment. Math. Helv.*, Bd. 30, 1956, S. 285-296).

[12] *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und, Isoperimetrie*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957.

HADWIGER (H.) und OHMANN (D.) :

[1] *Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie* (*Math. Z.*, Bd. 66, 1956, S. 1-8).

HALMOS (P.) :

[1] *Measure Theory*, Van Nostrand Co., New-York, 1950.

HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.) und PÓLYA (G.) :

[1] *Inequalities*, Cambridge, 2nd ed., 1952.

HENSTOCK (R.) und MACBEATH (A. M.) :

[1] *On the Measure of Sum-Sets* (I). *The Theorems of Brunn, Minkowski and Lusternik* [*Proc. London. Math. Soc.*, (3), Bd. 3, 1953, S. 182-194].

HILLE (E.) :

[1] *Functional Analysis and Semi-groups*, New-York, 1948.

KNESER (H.) und SÜSS (W.) :

[1] *Die Volumina in linearen Scharen konvexer Körper* (*Math. Tidsk.*, B, 1932, S. 19-25).

KNESER (M.) :

[1] *Summenmengen in lokalkompakten abelschen Gruppen* (*Math. Z.*, Bd. 66, 1956, S. 88-110).

KNOTHE (H.) :

[1] *Ueber Ungleichungen bei Sehnenpotenzenintegralen* (*Deutsche Math.*, Bd. 2, 1937, S. 544-551).

[2] *Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Brunn-Minkowskischen Theorie* (*Bericht über die Mathematikertagung in Tübingen*, H. Laupp, Tübingen, 1946, S. 91-92).

[3] *Contributions to the theory of convex bodies* (*Mich. Math. J.*, Bd. 4, 1957, S. 39-52).

KURATOWSKI (C.) :

[1] *Topologie*, II, Warschau, 1952.

LEBESGUE, (H.) :

[1] *Intégrale, longueur, aire* (*Ann. Math., Pura Appl.*, t. 7, 1902, S. 231-359).

LUSTERNIK (L.) [LJUSTERNIK (L.)] :

[1] *Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige messbare Mengen* (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, Bd. 3, 1935, S. 55-58).

MACBEATH (A. M.) :

[1] *Compactness Theorems* (*Seminar on Convex Sets*, Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, 1949-1950).

[2] *On measure of Sum-Sets*, II. *The Sum-Theorem for the Torus* (*Proc. Camb. Phil. Soc.*, Bd. 49, 1953, S. 40-43).

MACBEATH (A. M.) und HENSTOCK (R.) (s. a. u. HENSTOCK) :

[1] *On the Measure of Sum-Sets* (I). *The theorems of Brunn, Minkowski and Lusternik* [*Proc. London Math. Soc.*, (3), Bd. 3, 1953, S. 182-194].

MANN (H. B.) :

[1] *A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers* [*Ann. Math.*, (2), Bd. 43, 1942, S. 523-527].

MINKOWSKI (H.) :

[1] *Gesammelte Abhandl.*, Bd. 2, Teubner Verlag, Leipzig und Berlin, 1911.

OHMANN (D.) :

[1] *Ungleichungen zwischen den Quermassintegralen beschränkter Punktmengen* (Teil I, *Math. Ann.*, Bd. 124, 1952, S. 265-276; Teil II, *Math. Ann.*, Bd. 127, 1954, S. 1-7).

OHMANN (D.) und HADWIGER (H.) (s. a. u. HADWIGER) :

[1] *Brunn-Mikowskischer Satz und Isoperimetrie* (*Math. Z.*, Bd. 66, 1956, S. 1-8).

RADÓ (T.) :

[1] *The isoperimetric inequality and the Lebesgue definition of surface area* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 61, 1947, S. 530 555).

[2] *Length and Area* (*Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, t. 30, 1948, New York.

SAKS (S.) :

[1] *Theory of the Integral* (Warschau, 1937, 2te Auflage).

SCHMIDT (E.) :

[1] *Die Brunn-Minkowskische Ungleichung und ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie* (Teil I, *Math. Nachr.*, Bd. 1, 1948, S. 81-157; Teil II, ebenda Bd. 2, 1949, S. 171-244).

[2] *Der Brunn-Minkowskische Satz und sein Spiegelungstheorem sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und hyperbolischen Geometrie* (*Math. Ann.*, Bd. 120, 1948, S. 307-422).

SCHMIDT (E.) und DINGHAS (A.) [Man vgl. DINGHAS (A.) und ERHARD SCHMIDT].

SCHWARZ (H. A.) :

[1] *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Bd. II, Berlin, Verlag Julius Springer, 1890.

STEINER (J.) :

[1] *Ueber parallele Flächen* (*Monats. Preuss. Akad. Wiss.*, 1840, S. 114-118; Wiederabgedr. : *Gesammelte Werke*, Bd. 2, S. 173-176).

SÜSS (W.) und KNESER (H.) [Man vgl. KNESER (H.) und SÜSS (W.)].

TONELLI (L.) :

[1] *Sulle proprietà di minimo della sfera* (*Rend. Circ. math. Palermo*, Bd. 39, 1915, S. 109-138).

NAMENVERZEICHNIS

INHALTSVERZEICHNIS

Viertes Kapitel

Riemann-Minkowskische Integrale
Weitere Verallgemeinerungen des Brunn-Minkowskischen Satzes