Mémorial des sciences mathématiques

Paul Jaffard

Théorie de la dimension dans les anneaux de polynômes

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 146 (1960)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1960__146__3_0>

Paul JAFFARD
Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon
Maître de Conférences à l'École Polytechnique

THÉORIE DE LA DIMENSION DANS LES ANNEAUX DE POLYNOMES

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
Directeur : H. VILLAT
FASCICULE CXLVI

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

1960

INTRODUCTION

Tous les anneaux considérés dans cette étude seront commutatifs et munis d'un élément unité.

Etant donné un anneau A, nous nous proposons d'étudier la dimension dim $A^{(n)}$ de l'anneau $A^{(n)}$ des polynomes à n variables sur A. Rappelons brièvement les résultats suivants (dus pour la plus grande part à Krull):

Quel que soit l'anneau A on a, pour tout entier n, les inégalités :

(1) $$\dim A + 1 \leqslant \dim A^{(1)} \leqslant 2 \dim A + 1$$

Seidenberg a montré d'autre part l'existence d'un anneau A de dimension donnée à l'avance et tel que dim $A^{(1)}$ ait n'importe quelle valeur également donnée à l'avance comprise entre dim A + 1 et 2 dim A + 1. On ne peut donc améliorer dans le cas général les inégalités (1). Par récurrence sur n les inégalités (1) permettent d'écrire :

(2) $$n + \dim A \leqslant \dim A^{(n)} \leqslant 2^n(\dim A + 1) - 1$$

En fait les inégalités (2) peuvent être améliorées et on a pour tout anneau A et tout entier n :

(3) $$n + \dim A \leqslant \dim A^{(n)} \leqslant (1 + \dim A)n + \dim A$$

Ceci posé, Krull a montré que dans le cas où A est un anneau noethèrien on a l'égalité :

(4) $$\dim A^{(n)} = n + \dim A$$

Seidenberg a montré que l'égalité (4) était encore valable dans le cas (très différent) où A est un anneau de Prüfer.

Les anneaux de Prüfer ont des propriétés particulièrement simples du point de vue des valuations ou, ce qui revient au même, du point de vue des spécialisations. Cette remarque nous a conduit à étudier systématiquement la structure des chaines d'idéaux premiers de l'anneau $A^{(n)}$ à partir des spécialisations des corps de fractions des anneaux $A/\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ parcourant l'ensemble des idéaux premiers de A). C'est cette étude que nous exposons ici. Elle nous permet de retrouver très facilement, et de plusieurs façons différentes, le résultat de Seidenberg sur les anneaux de Prüfer. Elle nous permet également, mais plus difficilement (et sur ce point des problèmes importants restent encore à résoudre) de retrouver le résultat de Krull sur les anneaux noethèriens.

D'une manière générale nous montrons qu'à tout anneau A on peut associer deux entiers π et δ tels que :

$$0 \leqslant \pi \leqslant \delta \quad \text{et} \quad \pi \leqslant \dim A$$

et tels que pour tout entier n suffisamment grand on ait l'égalité :

$$\dim A^{(n)} = (1+\pi)n+\delta \tag{5}$$

Nous montrons également que si on se donne à l'avance deux entiers π et δ tels que $0 \leqslant \pi \leqslant \delta$, il existe un anneau A tel que pour tout entier n suffisamment grand on ait l'égalité (5).

A tout anneau A nous associons un entier (fini ou non) $\dim_v A$ que nous appelons la dimension valuative de A et qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\dim A \leqslant \dim_v A$$
$$\dim_v A^{(n)} = n + \dim_v A$$

On peut montrer alors que pour que l'entier π défini par l'égalité (5) soit égal à 0 il faut et il suffit que la dimension valuative de A soit finie. En ce cas $\delta = \dim_v A$ et l'égalité (5) est valable dès que $n \geqslant \dim_v A$.

Les anneaux vérifiant l'égalité (4) pour tout n sont ceux qui vérifient l'égalité $\dim_v A = \dim A$ (c'est la démonstration la plus simple du théorème de Seidenberg sur les anneaux de Prüfer). Nous montrons encore qu'étant donnés deux entiers (finis ou non) d et d' tels que $1 \leqslant d \leqslant d'$, il existe un anneau A tel que $\dim A = d$ et $\dim_v A = d'$. A partir de cette étude et d'un résultat de Seidenberg (tout anneau A intègre, intégralement clos, tel que $\dim A = 1$ et $\dim A^{(1)} = 2$, est un anneau de Prüfer) on retrouve immédiatement que tout anneau intégralement clos de nombres algébriques ou de fonctions algébriques à une variable sur un corps est un anneau de Prüfer.

Pour rendre ce mémoire plus facile à lire nous redémontrons certains théorèmes qui ne figurent pas dans les ouvrages d'algèbre.

Nous tenons à remercier Monsieur Henri Villat, qui a accueilli ce mémoire dans la belle collection qu'il dirige.

CHAPITRE I

Préliminaires

1 — Spécialisations et valuations

Nous rassemblons dans ce numéro quelques résultats sur les valuations et les spécialisations dont nous aurons besoin par la suite.

Rappelons que tous les anneaux et les corps que nous considérerons seront commutatifs et munis d'un élément unité qui sera toujours noté 1. Si K est un surcorps d'un corps k nous désignerons par $d.t$ $[K:k]$ le degré de transcendance de K sur k (c'est un entier naturel ou le symbole ∞). Plus généralement si A est un sous-anneau de l'anneau d'intégrité B, nous noterons $d.t[B:A]$ le degré de transcendance du corps des fractions de B sur le corps des fractions de A.

Soient v une valuation de Krull [1] d'un corps K et Γ le groupe de valeurs correspondant noté additivement. L'ensemble Γ_+ des éléments positifs ou nuls de Γ est partagé en classes d'équivalence dites *étages* de Γ de la manière suivante :

Deux éléments α et β appartiennent à un même étage si et seulement si il existe deux entiers m et n tels que $\beta \leqslant m\alpha$ et $\alpha \leqslant n\beta$. On appelle *rang* du groupe totalement ordonné Γ le nombre (fini ou non) des étages de Γ différents de l'étage constitué par l'élément neutre 0 du groupe. En particulier les groupes de rang un ou groupes archimédiens sont caractérisés comme étant les groupes ordonnés isomorphes aux sous-groupes de $\mathbf{R}$ (groupe ordonné additif des nombres réels).

Les étages de Γ sont en correspondance biunivoque avec les idéaux premiers non nuls de l'anneau de la valuation v : à l'étage $\mathscr{E}$ est associé l'idéal premier $\mathfrak{p}$ des éléments x de A tels que $v(x) \in \mathscr{E}$. Cette correspondance permet de donner une interprétation du *rang* de la valuation v (qui est, par définition, égal au rang de son groupe des valeurs) au moyen des spécialisations :

Les valuations d'un corps K sont en correspondance biunivoque

(1) Cf. Krull [2] ou Schilling [1].

(à des isomorphismes près du corps résiduel et du groupe des valeurs) avec les *spécialisations* de K, c'est-à-dire des applications de K dans dans les ensembles du type $k_\infty = (k \cup \infty)$ où k est un corps (k_∞ est dit *corps projectif*). Une telle application φ doit avoir les propriétés suivantes :

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$
$$\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b)$$
$$\varphi(1) = 1$$

avec $1/\infty = 0$, $1/0 = \infty$, $a \pm \infty = \infty$ si $a \neq \infty$ et $a\,\infty = \infty$ si $a \neq 0$. Les symboles suivants ne sont pas définis : $\infty \pm \infty$, 0∞, ∞/∞ et $0/0$. La spécialisation φ sera dite *triviale* si φ est l'application identique de K sur lui-même (c'est le cas de la valuation triviale correspondant à $\Gamma = (0)$).

Si $\varphi(K) = k_\infty$ ou k, nous dirons par abus de language que φ spécialise K sur k (quoique l'on puisse avoir $\infty \in \varphi(K)$), et on écrira $\varphi : K \to k$ ou $K \xrightarrow{\varphi} k$. On notera même $\varphi(K)$ au lieu de k sans qu'aucune confusion puisse en résulter.

On définit sans peine une spécialisation produit de plusieurs spécialisations. Une spécialisation φ sera dite de *rang* s (fini ou non) si elle est le produit de s spécialisations non triviales et n'est pas le produit de $s+1$ spécialisations non triviales.

Il est alors facile de voir que le rang de la spécialisation φ est égal au rang (fini ou non) de la valuation correspondante.

Soit une spécialisation φ produit de deux spécialisations φ_1 et φ_2 :

$$\varphi : K \xrightarrow{\varphi_1} k_1 \xrightarrow{\varphi_2} k_2$$

φ et φ_1 définissent deux valuations v et v_1 de K. De même φ_2 définit une valuation v_2 de k_1. On dit que v est une *valuation composée* de v_2 et de v_1. La valuation v est *plus fine* que v_1, c'est-à-dire que l'anneau de la valuation v_1 contient l'anneau de la valuation v. On écrira alors $v_1 \leqslant v$, et $v_1 < v$ si v est strictement plus fine que v_1, c'est-à-dire si on n'a pas $v \leqslant v_1$. Réciproquement, si v et w sont deux valuations de K telles que v soit plus fine que w, la valuation v est la composée d'une valuation w' du corps résiduel de la valuation w et de la valuation w. Si v est une valuation de rang s du corps K, il existe seulement s valuations de K strictement moins fines que v (la valuation triviale identiquement nulle étant comprise).

Etant donné un anneau d'intégrité A et son corps des fractions K, nous dirons qu'une valuation de K est *compatible* avec A si $v(A) \geqslant 0$.

Ceci revient à dire que la spécialisation de K qu'elle définit reste finie sur A. Par abréviation nous appelerons par la suite *valuation de* A toute valuation de K compatible avec A. Si v est une valuation de A, on appelle *centre* de v sur A l'idéal premier de A formé par tous les éléments x de A tels que $v(x) > 0$. On remarquera que *seule la valuation triviale a* (0) *pour centre sur* A : Soit φ la spécialisation de K correspondant à une valuation v de centre (0) sur A. La spécialisation φ induit sur A un isomorphisme, donc est elle-même un isomorphisme du corps des fractions K.

Ceci posé, on a le :

Théorème 1 (Théorème du prolongement des spécialisations) – K *étant un surcorps d'un anneau d'intégrité* A, *tout homomorphisme de* A *sur un anneau d'intégrité* B *peut se prolonger en une spécialisation de* K *sur une extension algébrique du corps des fractions de* B (1).

On en déduit immédiatement les trois corollaires suivants :

Corollaire 1 — K *étant un surcorps d'un corps k, toute spécialisation d'un corps k dans un corps (projectif)* L *peut se prolonger en une spécialisation de K dans un surcorps (projectif) algébrique sur L.*

Corollaire 2 — $\mathfrak{p}$ *étant un idéal premier d'un anneau d'intégrité A, il existe une valuation de* A *ayant* $\mathfrak{p}$ *comme centre sur* A.

Il suffit de prolonger l'homomorphisme $A \to A/\mathfrak{p}$.

Corollaire 3 — Soit v une valuation de l'anneau d'intégrité A *ayant* $\mathfrak{q}$ *pour centre sur* A. *Si* $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier de* A *contenant* $\mathfrak{q}$, *il existe une valuation w de* A *plus fine que v et ayant* $\mathfrak{p}$ *pour centre sur* A.

K étant le corps des fractions de A et φ la spécialisation de K définie par v, on considère une spécialisation ψ de $\varphi(K)$ prolongeant l'homomorphisme $A/\mathfrak{q} \to A/\mathfrak{p}$. La spécialisation $\psi\varphi$ de K définit alors une valuation répondant à la question.

Proposition 1 — Soient K' *une extension d'un corps* K, v_1 *et* v_2 *deux valuations de* K *telles que* $v_1 < v_2$ *et* v_2' *une valuation de* K' *prolongeant* v_2. *Il existe alors une valuation* v_1' *de K' prolongeant* v_1 *et telle que* $v_1' < v_2'$

Soient Γ_2' le groupe de valeurs de la valuation v_2' et Γ_2 celui de la valuation v_2. On a $\Gamma_2 \subset \Gamma_2'$. La valuation v_1 étant moins fine que v_2

(1) Cf. par exemple Lang [1], Ch. I, th. 1.

correspond à un étage $\mathscr{E}$ de Γ_2 qui est intersection avec Γ_2 d'un étage $\mathscr{E}'$ de Γ_2'. L'étage $\mathscr{E}'$ de Γ_2' permet de définir la valuation v_1' cherchée.

Soient A [X] un anneau de polynomes à un nombre quelconque de variables (formant l'ensemble X) sur un anneau d'intégrité A, k et K les corps de fractions de A et de A [X], et soit v une valuation de l'anneau A. Désignons par V et par $\mathfrak{q}$ l'anneau et l'idéal premier de la valuation v. On vérifie sans peine que le sous-anneau $V' = (V[X])_{\mathfrak{q}[X]}$ de K est un anneau de valuation définissant une valuation v' de K ayant les propriétés suivantes :

v' est une valuation de A [X] qui prolonge v et v' a pour centre $\mathfrak{p}$A [X] sur A [X] si $\mathfrak{p}$ désigne le centre de v sur A. La valuation v' peut être ainsi définie :

Si P est un élément quelconque de k[X], P peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme d'une somme de monomes dont les degrés généralisés sont distincts. Si $a_1, \ldots, a_n$ sont les coefficients de ces monomes on aura :

$$v'(P) = \inf(v(a_1), \ldots, v(a_n))$$

Si P/Q est un élément quelconque de K (P, Q $\in k$ [X]), on aura évidemment $v'(P/Q) = v'(P) - v'(Q)$.

On en déduit que les valuations v et v' ont même groupe de valeurs et par suite même rang.

v' sera dit le *prolongement canonique à* A [X] *de la valuation* v.

Théorème 2 — Soient une valuation v de rang n d'un corps K *et une extension* K′ *de* K *dont le degré de transcendance sur* K *est égal à d : Le rang n′ d'une valuation quelconque v′ de* K′ *prolongeant v est tel que;*

$$n \leqslant n' \leqslant n + d \tag{1}$$

Réciproquement si n′ est un entier (fini ou non) satisfaisant aux inégalités (1), *il existe une valuation v′ de* K′ *prolongeant v et ayant pour rang n′.*

Soit v' une valuation de rang n' prolongeant la valuation v.

Le groupe de valeurs Γ de v est un sous-groupe (ordonné) du groupe de valeurs Γ' de v'. Si $\gamma \geqslant 0$ est un élément de Γ, il définit un étage $\mathscr{E}(\gamma)$ (resp. $\mathscr{E}'(\gamma)$) dans Γ (resp. dans Γ') tel que $\mathscr{E}(\gamma) = \mathscr{E}'(\gamma) \cap \Gamma$. Par suite $n \leqslant n'$.

Si d est infini on a évidemment $n' \leqslant n + d$. Supposons donc d fini et montrons que $n' \leqslant n + d$. Tout revient à montrer que le groupe Γ' ne peut avoir plus de d étages dont l'intersection avec Γ soit vide.

Soient $x_1, \ldots, x_m$ des éléments de K' tels que $v'(x_1), \ldots, v'(x_m)$ définissent des étages de Γ', tous différents, et ayant une intersection vide avec Γ. Supposons d'autre part le numérotage des x_i fait de telle manière que :

$$v'(x_1) < v'(x_2) < \ldots\ldots < v'(x_m).$$

Tout revient à montrer que $m \leqslant d$. Montrons pour cela que les x_i sont algébriquement indépendants sur K. Supposons qu'il existe une relation algébrique entre les x_i à coefficients dans K :

$$\sum a_{\alpha_1 \cdots \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots x_m^{\alpha_m} = 0 \qquad (a_{\alpha_1 \cdots \alpha_m} \in K)$$

les m-uples $(\alpha_1, \ldots., \alpha_m)$ étant tous distincts.

On en déduit une égalité de la forme :

$$v'(a_{\alpha_1 \cdots \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots x_m^{\alpha_m}) = v'(a_{\beta_1 \cdots \beta_m} x_1^{\beta_1} \ldots\ldots x_m^{\beta_m})$$

avec $(\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_m) \neq (\beta_1, \ldots\ldots, \beta_m)$

Ceci entraîne :

$$v'(a_{\alpha_1 \cdots \alpha_m}) - v'(a_{\beta_1 \cdots \beta_m}) + (\alpha_1 - \beta_1) v'(x_1) + \ldots + (\alpha_m - \beta_m) v'(x_m) = 0.$$

Soit p le plus grand des nombres i tel que $\alpha_i - \beta_i \neq 0$. On peut toujours supposer $\alpha_p > \beta_p$.

Alors $(\alpha_1 - \beta_1)\, v'(x_1) + \ldots\ldots + (\alpha_m - \beta_m)\, v'(x_m)$ est un élément > 0 dont l'étage est celui de $v'(x_p)$, donc $v'(a_{\beta_1 \cdots \beta_m}) - v'(a_{\alpha_1 \cdots \alpha_m})$ est un élément > 0 de Γ dont l'étage dans Γ est celui de $v'(x_p)$, d'où une contradiction qui entraîne l'inégalité (1).

Réciproquement montrons que si n' satisfait aux inégalités (1), il existe une valuation v' de K' prolongeant v et de rang n'.

Soit $(x_\iota)_{\iota \in I}$ un ensemble d'éléments de K' algébriquement indépendants sur K et tel que K' soit algébrique sur $K'' = K(x_\iota)_{\iota \in I}$.

L'ensemble I ayant d éléments, on peut trouver un sous-ensemble J de I ayant $n' - n$ éléments. A tout élément ι de J associons un groupe totalement ordonné Z_ι isomorphe au groupe additif des entiers ordinaires ordonné de la manière habituelle. Ordonnons totalement l'ensemble I et considérons la somme directe $\Gamma'' = (\sum_{\iota \in J} Z_\iota) \dotplus \Gamma$ ordonnée lexicographiquement (la dernière composante déterminant l'ordre étant celle relative au groupe Γ). Le groupe Γ'' a pour rang $n + (n' - n) = n'$.

L'anneau $A = K[x_\iota]_{\iota \in J}$ est anneau de polynomes par rapport aux variables x_ι ($\iota \in J$) à coefficients dans K. Soit M un monome de A que l'on peut écrire sous la forme :

$$M = a\, x_{\alpha_1}^{n_1} \dots\dots x_{\alpha_s}^{n_s}$$

avec $a \in K$, $\alpha_i \in J$ et $n_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$.

Désignons par $g(M)$ l'élément de $\sum_{\iota \in I} Z_\iota$ ainsi défini :

La composante d'indice ι de $g(M)$ est n_i si $\iota = \alpha_i$ et 0 si $\iota \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$.

Ceci posé, tout polynome P non nul de A peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme $P = M_1 + \dots + M_t$, les M_i étant des monomes non nuls tels que $i \neq j \rightarrow g(M_i) \neq g(M_j)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant t)$.

Les $g(M_i)$ étant des éléments distincts du groupe totalement ordonné (lexicographiquement) $\sum_{\iota \in I} Z_\iota$, soit i_0 l'entier compris entre 1 et t tel que :

$$g(M_{i_0}) = \sup\,(g(M_1), \dots, g(M_t))$$

On peut écrire :

$$M_{i_0} = a\, x_{\alpha_1}^{n_1} \dots\dots x_{\alpha_s}^{n_s} \quad (a \in K)$$

Désignons par $v_1''(P)$ l'élément de Γ'' ainsi défini :

Sa composante dans $\sum_{\iota \in I} Z_\iota$ est $-g(M_{i_0})$ et sa composante dans Γ est $v(a)$. On vérifie sans peine que si P et Q sont deux éléments non nuls de A, on a :

$$v_1''(PQ) = v_1''(P) + v_1''(Q)$$

et si $P + Q \neq 0$:

$$v_1''(P + Q) \geqslant \inf\,(v_1''(P), v_1''(Q))$$

On en déduit que si $K_1'' = K(x_\iota)_{\iota \in J}$ est le corps des fractions de A, on peut encore définir une valuation (encore notée v_1'') de K_1'' en posant :

$$v_1''(P/Q) = v_1''(P) - v_1''(Q) \qquad\qquad (P, Q \in A)$$

v_1'' ayant pour groupe de valeurs Γ'' est une valuation de rang n de K_1' qui prolonge v.

L'anneau $B = K[x_\iota]_{\iota \in I}$ est anneau des polynomes par rapport aux variables x_ι ($\iota \in I$, $\iota \notin J$) à coefficients dans l'anneau A. Désignons par v'' le prolongement canonique à B de la valuation v_1'' de A. Le rang de v'' est encore n'.

Soit alors v' un prolongement de v'' au corps K'. Comme K' est algébrique sur le corps des fractions de B, la première partie de la démonstration montre que le rang de v' est égal au rang de v'', c'est-à-dire à n'. D'où le théorème 2.

Corollaire 1 — *K' étant une extension d'un corps K dont le degré de transcendance sur K est égal à d, toute valuation de K' triviale sur K a un rang inférieur ou égal à d.*

En particulier :

Corollaire 2 — *Si K' est une extension algébrique du corps K, toute valuation de K' triviale sur K est triviale sur K'.*

Plus généralement :

Corollaire 3 — *Si K' est une extension algébrique du corps K, toute valuation v' de K' induit sur K une valuation v de même rang.*

Corollaire 4 — *Soient A' un anneau entier sur un anneau A et deux idéaux premiers $\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{q}'$ de A' tels que $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{q}' \cap A$. L'inclusion $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{p}'$ entraine alors $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}'$.*

En passant au quotient par $\mathfrak{q}'$, on peut supposer $\mathfrak{q}' = \{0\}$. Soit alors v' une valuation de A' ayant pour centre $\mathfrak{p}'$ sur A' (corollaire 2 du théorème 1). v' induit la valuation triviale sur A ce qui entraine (corollaire 2) que v' est aussi triviale, donc que $\mathfrak{p}' = (0)$.

Corollaire 5 — *Soient A' un anneau d'intégrité entier sur un anneau A et deux valuations v_1' et v_2' de A' ayant des centres distincts sur A' et telles que $v_1' < v_2'$. Les valuations v_1' et v_2' induisent des valuations v_1 et v_2 ayant des centres distincts sur A.*

Soient $\mathfrak{p}_1'$ et $\mathfrak{p}_2'$ les centres de v_1' et v_2' sur A', $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ les centres de v_1 et v_2 sur A, le corollaire 4 montre $\mathfrak{p}_1' \neq \mathfrak{p}_2'$ entraine $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$.

Corollaire 6 — *Soit φ une spécialisation de rang n' d'un corps K' induisant une spécialisation de rang n sur un sous-corps K de K'. On a :*

$$n' + d.t.\,[\varphi(K'):\varphi(K)] \leqslant n + d.t.\,[K':K] \tag{2}$$

Soit v' la valuation de K' définie par φ. D'après le théorème 2 on peut trouver une valuation w' de $\varphi(K')$ de rang $d.t.\,[\varphi(K'):\varphi(K)]$ et triviale sur $\varphi(K)$. Soit v_1' la valuation de K' composée des valuations v' et w'. Elle a un rang au moins égal à $n' + d.t.\,[\varphi(K'):\varphi(K)]$ et elle induit sur K une valuation de rang n. Le théorème 2 permet donc d'écrire l'inégalité (2).

Corollaire 7 — φ étant une spécialisation d'un surcorps K′ *de* K, *on a l'inégalité* :

$$d.t.\,[\varphi(K'):\varphi(K)] \leqslant d.t.\,[K':K]$$

C'est une conséquence immédiate du corollaire 6 si on remarque que l'on a toujours $n \leqslant n'$.

Corollaire 8 — φ étant une spécialisation d'un corps K′ *algébrique sur un corps* K, *le corps* $\varphi(K')$ *est algébrique sur* $\varphi(K)$.

C'est l'application du corollaire 7 au cas $d.t.\,[K':K] = 0$.

Corollaire 9 — K′ *étant une extension algébrique du corps* K, *si les deux valuations v_1' et v_2' de* K′ *induisent la même valuation v sur* K, *on ne peut avoir $v_1' < v_2'$.*

Supposons que l'on ait $v_1' < v_2'$. Les valuations v_1' et v_2' définissent alors des spécialisations φ_1 et φ_2 de K′ telles que $\varphi_2 = \psi\varphi_1$, ψ désignant une spécialisation non triviale de $\varphi_1(K')$. Le corollaire 8 montre que $\varphi_1(K')$ est algébrique sur $\varphi_1(K)$ et le corollaire 2 que ψ n'est pas triviale sur $\varphi_1(K)$. Ceci entraîne la contradiction $v_1 < v_2$ qui démontre le corollaire.

Si on reprend les notations du théorème 2 et de sa démonstration, on voit que, φ étant la spécialisation de K′ définie par la valuation v', $\varphi(K'')$ s'identifie à $\varphi(K)$ et que $d.t.\,[\varphi(K'):\varphi(K'')] = d.t.\,[K':K'']$: En effet on vérifie sans peine que les éléments $\varphi(x_\iota)_{\iota \in CJ}$ sont algébriquement indépendants sur $\varphi(K)$ et que $\varphi(K')$ est algébrique sur $\varphi(K)(\varphi(x_\iota))_{\iota \in CJ}$. On en déduit le :

Corollaire 10 — Soit K′ *un surcorps de* K *tel que* $d.t.\,[K':K] = d$, *et soit φ une spécialisation de* K. *A tout entier $m \leqslant d$ on peut associer une spécialisation φ' de* K′ *qui prolonge φ et telle que*

$$d.t.\,[\varphi'(K'):\varphi(K)] = m$$

2 — Généralités sur la dimension des anneaux de polynomes

A étant un anneau (commutatif avec élément unité), on appelle *chaine* d'idéaux premiers de A (ou, par abbréviation, chaine de A) toute suite finie $\mathscr{C} = \{\mathfrak{p}_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ d'idéaux premiers de A telle que :

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{p}_n$$

les $\mathfrak{p}_i$ étant distincts ou non.

$\mathfrak{p}_0$ sera dit le premier élément et $\mathfrak{p}_n$ le dernier élément de la chaine $\mathscr{C}$. Les chaines $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_{i+1}$ telles que $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_{i+1}$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ seront dites les *maillons* de la chaine $\mathscr{C}$.

A la chaine $\mathscr{C}$ est associée une chaine $\mathscr{C}'$ (dite *sans répétitions*)

$$\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \cdots\cdots \subset \mathfrak{q}_m$$

l'ensemble $\{\mathfrak{p}_0, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n\}$ étant identique à l'ensemble $\{\mathfrak{q}_0, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m\}$ et l'inégalité $i \neq j$ entrainant $\mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{q}_j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant m)$. Le nombre m est appelé la *longueur* de la chaine $\mathscr{C}$. C'est encore le nombre de maillons distincts de la chaine $\mathscr{C}$. Tout maillon a pour longueur 1.

Rappelons que A tout entier n'est jamais considéré comme un idéal premier, mais que (0) l'est si A est intégre.

$\mathfrak{p}$ étant un idéal premier de A, on appelle *hauteur* de $\mathfrak{p}$ et on notera $ht(\mathfrak{p})$ la borne supérieure (finie ou non) des longueurs des chaines dont $\mathfrak{p}$ est le dernier élément. On appelle *profondeur* de $\mathfrak{p}$ et notera $pf(\mathfrak{p})$ la borne supérieure (finie ou non) des longueurs des chaines dont $\mathfrak{p}$ est le premier élément. Enfin on appelle *dimension* de l'anneau A et on désignera par dim A la borne supérieure (finie ou non) des longueurs des chaines de A.

Un anneau A sera dit *équidimensionnel* si toute chaine de A peut être plongée dans une chaine de longueur dim A. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier quelconque de l'anneau équidimentionnel A on a l'égalité :

$$ht(\mathfrak{p}) + pf(\mathfrak{p}) = \dim A$$

Ceci posé, on a la :

Proposition 2 — Si l'anneau A′ *est entier sur l'anneau* A, *on a l'égalité* :

$$\dim A' = \dim A$$

Montrons-le d'abord dans le cas où A′ est intégre. Posons $d' = \dim A'$ et $d = \dim A$. Soit une chaine sans répétition de longueur finie $x' \leqslant d'$ dans A′ :

$$(0) = \mathfrak{p}_0' \subset \mathfrak{p}_1' \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{p}_{x'}'$$

Posons $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}' \cap A$ $(0 \leqslant j \leqslant x')$. Le corollaire 4 du théorème 2 montre que :

$$(0) = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{p}_{x'}$$

est une chaine sans répétitions de A.

Comme ceci est vrai pour tout x' fini $\leqslant d'$, on a $d' \leqslant d$.

Soient maintenant une chaine sans répétition de longueur finie $x \leqslant d$ dans A :

$$(0) = \mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \ldots\ldots \subset \mathfrak{q}_x$$

et une suite de valuations w_i de A telle que :

$$w_0 < w_1 < \ldots\ldots < w_x$$

chaque w_i ayant $\mathfrak{q}_i$ pour centre sur A ($1 \leqslant i \leqslant x$). (L'existence d'une telle chaine est assurée par les corollaires 2 et 3 du théorème 1.)

Le corollaire 1 du théorème 1 permet de prolonger w_x en une valuation w'_x du corps des fractions K′ de A′ et l'application répétée de la proposition 1 permet de prolonger chaque w_i en une valuation w'_i de K′ telle que :

$$w'_0 < w'_1 < \ldots\ldots < w'_x$$

Comme A′ est entier sur A, chaque w'_i est une valuation de A′.

Soit $\mathfrak{q}'_i$ le centre de w'_i sur A′ ($0 \leqslant i \leqslant x$). Les égalités $\mathfrak{q}'_i \cap A = \mathfrak{q}_i$ ($0 \leqslant i \leqslant x$) et les inégalités $\mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{q}_j$ si $i \neq j$ montrent que $i \neq j$ entraine $\mathfrak{q}'_i \neq \mathfrak{q}'_j$ ($0 \leqslant i, j \leqslant x$).

A′ a donc une chaine de longueur x. Comme ceci est vrai pour tout x fini $\leqslant d$, on en conclut $d \leqslant d'$. Par suite $d = d'$ ce qui achève de montrer la proposition lorsque A′ est intègre.

Ne supposons plus maintenant que A′ soit nécessairement intègre. Soient $\mathcal{M}$ l'ensemble des idéaux premiers de A et $\mathcal{M}'$ l'ensemble des idéaux premiers de A′. On a les égalités :

$$\dim A = \operatorname*{Sup}_{\mathfrak{p} \in \mathcal{M}} (\dim (A/\mathfrak{p})) \quad \text{et} \quad \dim A' = \operatorname*{Sup}_{\mathfrak{p}' \in \mathcal{M}'} (\dim (A'/\mathfrak{p}'))$$

Si $\mathfrak{p}' \in \mathcal{M}'$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$ est un idéal premier de A tel que $A'/\mathfrak{p}'$ soit entier sur $A/\mathfrak{p}$. Comme $A'/\mathfrak{p}'$ est intègre on a $\dim A'/\mathfrak{p}' = \dim A/\mathfrak{p}$ et comme $\dim A/\mathfrak{p} \leqslant \dim A$ la relation $\dim A'/\mathfrak{p}' \leqslant \dim A (\forall \mathfrak{p}' \in \mathcal{M}')$ entraine $d' \leqslant d$.

Soit maintenant $\mathfrak{p} \in \mathcal{M}$ et S le complémentaire de $\mathfrak{p}$ dans A. Comme l'idéal (0) de A′ a une intersection vide avec S, il existe un idéal premier $\mathfrak{q}'$ de A′ tel que $\mathfrak{q}' \cap S = \varnothing$. Soit $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}' \cap A$. L'inclusion $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ entraine $\dim A/\mathfrak{p} \leqslant \dim A/\mathfrak{q}$. Comme $A'/\mathfrak{q}'$ est un anneau intègre entier sur $A/\mathfrak{q}$, on a $\dim A'/\mathfrak{q}' = \dim A/\mathfrak{q} \geqslant \dim A/\mathfrak{p}$. Or $\dim A'/\mathfrak{q}' \leqslant \dim A'$, donc dim $A/\mathfrak{p} \leqslant$ dim A' ($\forall \mathfrak{p} \in \mathscr{M}$). On en conclut $d \leqslant d'$. Par suite $d = d'$ et la proposition 2 est complètement démontrée.

A étant un anneau quelconque (commutatif avec élément unité), nous désignerons par $A^{(n)}$ l'anneau des polynomes à n variables sur A (et par $A^{(0)}$ l'anneau A lui-même). Nous nous proposons dans ce mémoire d'étudier le comportement de dim $A^{(n)}$ lorsque n varie, et en particulier de l'étudier pour de grandes valeurs de n.

Dans le cas où l'anneau A est un corps K, on peut énoncer le :

Théorème 3 (1) — *Si* K *est un corps, l'anneau* $K^{(n)}$ *des polynomes à n variables sur* K *est un anneau équidimensionnel de dimension n. Si* $\mathscr{P}$ *est un idéal premier de* $K^{(n)}$, *on a l'égalité* :

$$ht(\mathscr{P}) = n - d.t.\,[K^{(n)}/\mathscr{P} : K] \tag{3}$$

Soient maintenant A un anneau quelconque et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Un idéal premier $\mathscr{P}$ de $A^{(n)}$ sera dit *reposer* sur $\mathfrak{p}$ si $\mathscr{P} \cap A = \mathfrak{p}$. Parmis les idéaux premiers de $A^{(n)}$ qui reposent sur $\mathfrak{p}$, il en est un contenu dans tous les autres, c'est l'idéal $\mathfrak{p}A^{(n)}$.

Corollaire 1 — *Si tous les idéaux d'une chaine de* $A^{(n)}$ *reposent sur un même idéal de* A, *la longueur de cette chaine est inférieure ou égale à n.*

Soit

$$\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P}_1 \subset \cdots\cdots \subset \mathscr{P}_s$$

une telle chaine que l'on peut supposer sans répétition et soit $\mathfrak{p} = \mathscr{P}_i \cap A$ ($1 \leqslant i \leqslant s$). On peut passer au quotient par $\mathscr{P}_0$ et supposer $\mathscr{P}_0 = (0)$ et $\mathfrak{p} = (0)$. A est alors intègre et a un corps des fractions K. Soit A^* l'ensemble des éléments non nuls de A. Il y a une correspondance biunivoque conservant l'inclusion entre les idéaux premiers de $A^{(n)}$ qui reposent sur (0) et les idéaux premiers de l'anneau de fractions $(A^{(n)})_{A^*}$. Comme ce dernier peut être identifié à l'anneau $K^{(n)}$, le théorème 3 montre le corollaire.

Corollaire 2 — *Quel que soit l'entier* $n \geqslant 0$ *et quel que soit l'anneau* A *on a les inégalités.*

$$n + \dim A \leqslant \dim A^{(n)} \leqslant n(1 + \dim A) + \dim A \tag{4}$$

(1) Cf. KRULL [3], n° 19 et [5], Th. 14. On pourra également consulter VAN DER WAERDEN [1] et [2] §94, et E. NOETHER [1].

Soit $\mathfrak{p}_0$ un idéal premier de A. Le théorème 1 et la correspondance biunivoque (indiquée dans la démonstration du corollaire 1) entre idéaux premiers de $A^{(n)}$ reposant sur $\mathfrak{p}_0$ et idéaux premiers de $K_0^{(n)}$ (si K_0 est le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}_0$) montrent que :

$$n + \dim A \leqslant \dim A^{(n)}$$

D'autre part toute chaine sans répétition $\mathscr{C}$ de $A^{(n)}$ est de la forme :

(5) $\mathscr{P}_{0,0} \subset \mathscr{P}_{0,1} \subset \cdots \subset \mathscr{P}_{0,\alpha^{(0)}} \subset \mathscr{P}_{1,0} \subset \cdots \subset \mathscr{P}_{i,0} \subset \cdots \subset \mathscr{P}_{i,\alpha(i)}$

$\subset \mathscr{P}_{i+1,0} \subset \cdots \subset \mathscr{P}_{k,\alpha(k)}$

avec

(6) $\mathscr{P}_{i,j} \cap A = \mathscr{P}_{i',j'} \cap A$ si et seulement si $i = i'$

En posant $\mathscr{P}_{i,j} \cap A = \mathfrak{p}_i$ on a dans A la chaine sans répétition :

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_k$$

Par suite $k \leqslant \dim A$.

Le corollaire 1 montre d'autre part que $\alpha(i) \leqslant n$ $(0 \leqslant i \leqslant k)$.

La chaine $\mathscr{C}$ ayant pour longueur :

$$s = \alpha(0) + (1 + \alpha(1)) + \ldots\ldots + (1 + \alpha(k))$$

(en tenant compte des maillons $\mathscr{P}_{i,\alpha(i)} \subset \mathscr{P}_{i+1,0}$)

on a : $s \leqslant n + k(n+1) \leqslant n + (n+1) \dim A$

D'où le corollaire.

A étant un sous-anneau de l'anneau B et $\mathscr{P}$ étant un idéal premier de B tel que $\mathscr{P} \cap A = \mathfrak{p}$, nous appellerons *hauteur relative* de $\mathscr{P}$ relativement à l'anneau A et nous désignerons par $ht_A(\mathscr{P})$ la borne supérieure des longueurs des chaines de l'anneau B dont tous les éléments reposent sur $\mathfrak{p}$ (c'est-à-dire ont $\mathfrak{p}$ pour intersection avec A) et dont le dernier élément est $\mathscr{P}$. Ceci posé, on a :

Corollaire 3 — Si $\mathscr{P}$ est un idéal premier de $A^{(n)}$ tel que $\mathscr{P} \cap A = \mathfrak{p}$ on a l'égalité :

(7) $$hr_A(\mathscr{P}) = n - d.t.\,[A^{(n)}/\mathscr{P} : A/\mathfrak{p}]$$

Montrons d'abord le :

Lemme 1 — Soient $\mathfrak{q}$ *un idéal premier d'un anneau* B *et* S *un sous-*

ensemble multiplicativement clos de B *ne contenant pas de diviseur de* 0 *et tel que* $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$. *Si* $\bar{S}$ *désigne l'ensemble image de S dans l'anneau* $B/\mathfrak{q}$, *on peut identifier canoniquement les anneaux* $B_S/\mathfrak{q}_S$ *et* $(B/\mathfrak{q})_{\bar{S}}$.

Les relations $B \subset B_S$ et $\mathfrak{q}_S \cap B = \mathfrak{q}$ montrent que $B/\mathfrak{q}$ peut s'identifier canoniquement à un sous-anneau de $B_S/\mathfrak{q}_S$. Désignons par Q le corps des fractions de $B_S/\mathfrak{q}_S$. Si x est un élément de B_S, nous désignerons par $\bar{x}$ sa classe dans $B_S/\mathfrak{q}_S$ (Si $x \in B$, $\bar{x}$ est donc sa classe dans $B/\mathfrak{q}$.) L'anneau $(B/\mathfrak{q})_{\bar{S}}$ est un sous-anneau de Q. Montrons qu'il s'identifie à $B_S/\mathfrak{q}_S$: Tout élément de $B_S/\mathfrak{q}_S$ est de la forme $\bar{x}$ avec $x = a/s$ ($a \in B$; $s \in S$). L'égalité $\bar{x} = \bar{a}/\bar{s}$ montre que $\bar{x} \in (B/\mathfrak{q})_{\bar{S}}$. Donc $B_S/\mathfrak{q}_S \subset (B/\mathfrak{q})_{\bar{S}}$. Tout élément de $(B/\mathfrak{q})_{\bar{S}}$ est de la forme $\bar{b}/\bar{t}$ ($b \in B$; $t \in S$), donc s'identifie à l'élément $\bar{y}$ de $B_S/\mathfrak{q}_S$ tel que $y = \bar{b}/\bar{t}$. D'où le lemme.

On en déduit immédiatement le :

Lemme 2 — Soient $\mathfrak{q}$ *un idéal premier d'un anneau B et* S *un sous-ensemble multiplicativement clos de* B *ne contenant pas de diviseur de* 0 *et tel que* $S \cap \mathfrak{q} = \emptyset$. *Le corps des fractions de l'anneau* $B_S/\mathfrak{q}_S$ *s'identifie canoniquement au corps des fractions de* $B/\mathfrak{q}$.

Reprenons maintenant la démonstration du corollaire. Désignons par k le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$ et par K le corps des fractions de $A^{(n)}/\mathscr{P}$. On peut, en passant au quotient par $\mathfrak{p}A^{(n)}$, supposer $\mathfrak{p} = 0$. Comme $\mathscr{P} \cap A$ est alors égal à (0), le raisonnement employé dans la démonstration du corollaire 1 montre que l'ensemble Π des idéaux premiers de $A^{(n)}$ contenus dans $\mathscr{P}$ correspond biunivoquement (avec conservation de l'inclusion) à l'ensemble Π' des idéaux premiers de $k^{(n)}$ contenus dans $\mathscr{P}' = \mathscr{P}k^{(n)}$ ($A^{(n)}$ est un sous-anneau de $k^{(n)}$). Cette longueur maximale est donc égale (d'après le théorème 3) à $n - d.t.\,[L:k]$ si L désigne le corps des fractions de l'anneau $k^{(n)}/\mathscr{P}'$.

Or, $k^{(n)}$ étant l'anneau des fractions de $A^{(n)}$ relativement à l'ensemble multiplicativement clos $A^* = A - \{0\}$ et $\mathscr{P}'$ étant l'idéal premier correspondant à $\mathscr{P}$, le corps L s'identifie au corps des fractions de $A^{(n)}/\mathscr{P}$ (lemme 2), c'est-à-dire à K. D'où le corollaire.

L'anneau $A^{(m)}$ pouvant être considéré comme un sous-anneau de $A^{(m+n)}$ on peut énoncer le :

Corollaire 4 — Si $\mathscr{P}$ *est un idéal premier de* $A^{(m+n)}$, *on a l'égalité* :

$$hr_A(\mathscr{P}) = hr_A(\mathscr{P} \cap A^{(m)}) + hr_{A^{(m)}}(\mathscr{P}). \tag{8}$$

Soient $\mathscr{P}' = \mathscr{P} \cap A^{(m)}$ et $\mathfrak{p} = \mathscr{P} \cap A$ $(= \mathscr{P}' \cap A)$. Le corollaire 3 permet d'écrire les égalités :

$$hr_A(\mathscr{P}) = m + n - d.t.\,[A^{(n+m)}/\mathscr{P} : A/\mathfrak{p}]$$

$$hr_A(\mathscr{P} \cap A^{(m)}) = m - d.t.\,[A^{(m)}/\mathscr{P}' : A/\mathfrak{p}]$$

$$hr_{A^{(m)}}(\mathscr{P}) = n - d.t.\,[A^{(m+n)}/\mathscr{P} : A^{(m)}/\mathscr{P}'].$$

Comme on a d'autre part :

$$d.t.\,[A^{(n+m)}/\mathscr{P} : A/\mathfrak{p}] = d.t.\,[A^{(m+n)}/\mathscr{P} : A^{(m)}/\mathscr{P}'] + d.t.\,[A^{(m)}/\mathscr{P}' : A/\mathfrak{p}]$$

on en déduit immédiatement l'égalité (7).

CHAPITRE II

LE SYMBOLE $\delta(\mathfrak{q},\mathfrak{p})$

1 — Définition et interprétation du symbole $\delta(\mathfrak{q},\mathfrak{p})$

Soient $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}$ deux idéaux premiers d'un anneau A tels que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. Nous désignerons par $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ *la borne supérieure des nombres d tels que l'homomorphisme* $A/\mathfrak{q} \to A/\mathfrak{p}$ *puisse se prolonger en une spécialisation du corps des fractions de* $A/\mathfrak{q}$ *sur une extension de degré de transcendance d du corps des fractions de* $A/\mathfrak{p}$.

C'est un entier $\geqslant 0$ qui peut être infini. Le symbole $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ sera appelé le *poids* de la chaine $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.

Ici se pose un problème qui reste ouvert : Dans le cas où $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \infty$ existe-t-il nécessairement une spécialisation du corps des fractions de $A/\mathfrak{q}$ sur une extension de degré de transcendance infini du corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$ prolongeant l'homomorphisme $A/\mathfrak{q} \to A/\mathfrak{p}$?

L'égalité $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ entraine évidemment $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = 0$.

L'anneau A sera dit *sans poids* si on a $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = 0$ quelle que soit la chaine $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ de A; il sera dit *léger* si on a $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = 0$ toutes les fois que $\mathfrak{p}$ est un suridéal premier immédiat de $\mathfrak{q}$.

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A contenu dans $\mathfrak{q}$ et si $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{q}/\mathfrak{a}$ désignent les images de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ dans l'homomorphisme $A \to A/\mathfrak{a}$ on a visiblement $\delta(\mathfrak{q}/\mathfrak{a}, \mathfrak{p}/\mathfrak{a}) = \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$.

Lorsque A est intègre nous pouvons donner une interprétation de $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ au moyen des chaines de valuations de A :

Proposition 1 — $\mathfrak{p}$ *étant un idéal premier de l'anneau d'intégrité* A, $\delta((0), \mathfrak{p})$ *est la borne supérieure des longueurs des chaines :*

$$v_0 < v_1 < \ldots\ldots < v_n$$

de valuations de A *ayant toutes* $\mathfrak{p}$ *comme centre sur* A.

Ce résultat est trivial si $\mathfrak{p} = (0)$. Supposons donc $\mathfrak{p} \neq (0)$. Soient k le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$, K le corps des fractions de A et

$v_0 < v_1 < \ldots\ldots < v_n$ une chaine de valuations de A ayant toutes $\mathfrak{p}$ comme centre sur A. On en déduit une suite de $n + 1$ spécialisations (non triviales puisque $\mathfrak{p} \neq (0)$):

$$K \xrightarrow{\varphi_0} K_0 \xrightarrow{\varphi_1} K_1 \rightarrow \ldots\ldots \xrightarrow{\varphi_n} K_n$$

(la valuation v_i correspondant à la spécialisation $\varphi_i\,\varphi_{i-1} \ldots \varphi_0$ de K). v_0 ayant pour centre $\mathfrak{p}$ sur A, φ_0 induit sur A l'homomorphisme $A \rightarrow A/\mathfrak{p}$ et par suite K_0 peut être considéré comme un surcorps de k. Chacune des valuations v_i ayant pour centre $\mathfrak{p}$ sur A, l'anneau $A/\mathfrak{p}$ (et par suite le corps k), reste invariant dans la spécialisation $\varphi = \varphi_n \ldots\ldots \varphi_1$ de K_0. Comme celle-ci a un rang au moins égal à n, le corollaire 1 du théorème 2 (Ch. I) montre que $n \leqslant d.t.\,[K_0{:}k]$. Par suite $n \leqslant \delta((0), \mathfrak{p})$.

Réciproquement soit n un entier fini inférieur ou égal à $\delta((0), \mathfrak{p})$. Il existe une spécialisation φ_0 de K prolongeant l'homomorphisme $A \rightarrow A/\mathfrak{p}$ telle que $d.t.\,[\varphi_0(K){:}k] \geqslant n$. Le théorème 1 du Ch. I montre alors qu'il existe une spécialisation ψ du corps $\varphi_0(K)$ et de rang n qui est triviale sur k. La spécialisation ψ peut s'écrire comme produit de n spécialisations non triviales : $\psi = \varphi_n \ldots\ldots \varphi_1$. Soit v_i la valuation de K correspondant à la spécialisation $\varphi_i \ldots\ldots \varphi_1\,\varphi_0$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$. Toutes ces valuations ont pour centre $\mathfrak{p}$ sur A et on a :

$$v_0 < v_1 < \ldots\ldots < v_n$$

Il existe donc une chaine de longueur n formée par n valuations de A ayant $\mathfrak{p}$ pour centre sur A. D'où la proposition 1.

Rappelons que l'anneau intègre A est dit *anneau de Prüfer* si l'ensemble de ses idéaux fractionnaires finis forme un groupe multiplicatif ou encore si, quel que soit l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, l'anneau de fractions $A_\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation (1). Ceci posé, on a le :

Corollaire — Tout anneau de Prüfer est sans poids.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier d'un anneau de Prüfer A. Comme $A_\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation, il n'y a qu'une seule valuation de A dont le centre sur A est l'idéal $\mathfrak{p}$. La proposition 1 montre donc que dans A on a toujours $\delta(0, \mathfrak{p}) = 0$. Soient maintenant $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}$ deux idéaux premiers de A tels que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. On a $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \delta((0), \mathfrak{p}/\mathfrak{q})$ si $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ désigne l'idéal image de $\mathfrak{p}$ dans l'homomorphisme canonique $A \rightarrow A/\mathfrak{q}$. Mais

(1) Cf. KRULL [4] ou JAFFARD [3] (De tels anneaux sont appelés par Krull Multiplikatio nsringe).

$A/\mathfrak{q}$ est aussi un anneau de Prüfer [2], donc $\delta((0), \mathfrak{p}/\mathfrak{q}) = 0$ d'après ce qu'on vient de voir, ce qui entraine le corollaire.

La proposition 1 permet de déterminer $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ à partir de la considération des chaines de valuations de centre $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ de l'anneau $A/\mathfrak{q}$. Toutefois si A est intègre et si $\delta((0), \mathfrak{q}) < \infty$, on peut déterminer $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ directement à partir des chaines de valuations de A :

Proposition 2 — Soient $\mathfrak{q}$ *et* $\mathfrak{p}$ *deux idéaux premiers d'un anneau d'intégrité* A *tels que* $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ *et tels que* $\delta((0), \mathfrak{q}) = s$ *soit fini. Alors* $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ *est la borne supérieure des nombres* n *tels qu'il existe une chaine de valuations de* A *de la forme* :

$$w_0 < w_1 < \ldots\ldots < w_s < v_0 < v_1 < \ldots\ldots < v_n$$

remplissant les conditions suivantes :

1) *Chaque* w_i *a pour centre* $\mathfrak{q}$ *sur* A ($0 \leqslant i \leqslant s$)
2) *Chaque* v_j *a pour centre* $\mathfrak{p}$ *sur* A ($0 \leqslant j \leqslant n$).

Désignons par K, L et k les corps des fractions respectifs des anneaux A, $A/\mathfrak{q}$ et $A/\mathfrak{p}$. Puisque $\delta((0), \mathfrak{q}) = s$, il existe une spécialisation φ_0 de K sur un surcorps $\mathscr{L}$ de L prolongeant l'homomorphisme $A \to A/\mathfrak{q}$ et telle que $d.t.[\mathscr{L}:L] = s$. Le théorème 2 du chapitre I montre qu'il existe une spécialisation φ de $\mathscr{L}$ de rang s triviale sur L. Le corollaire 6 du théorème 2 (Ch. I) montre que $\mathscr{L}' = \varphi(\mathscr{L})$ est algébrique sur L. On peut écrire $\varphi = \varphi_s\varphi_{s-1} \ldots\ldots \varphi_1$, chaque φ_i étant une spécialisation non triviale du corps $\varphi_{i-1} \ldots\ldots \varphi_1(\mathscr{L})$. Désignons par w_i la valuation de K définie par la spécialisation $\varphi_i \ldots\ldots \varphi_0$ ($0 \leqslant i \leqslant s$). On a :

$$w_0 < w_1 < \ldots\ldots < w_s$$

chacune de ces valuations ayant pour centre $\mathfrak{q}$ sur A.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[ddd, dash] & \mathscr{L} \arrow[rr] \arrow[dr, dash] & & \mathscr{L}' \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[dl, dash] & \mathscr{K}_1 \arrow[rr, "\chi'"] \arrow[d, dash] & & \mathscr{K}'_1 \arrow[d, dash] \\
& & L \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dd, dash] & & \mathscr{K} \arrow[rr, "\chi"] \arrow[dr, dash] & & \mathscr{K}' \arrow[dl, dash] \\
& & & & & k \arrow[d, dash] & \\
A \arrow[rr] & & A/\mathfrak{q} \arrow[rrr] & & & A/\mathfrak{p} &
\end{tikzcd}$$

[2] Cf. par exemple JAFFARD [3] (Ch. IV, § I).

Soit n un entier fini tel que $n \leqslant \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$. Il existe une spécialisation ψ de L sur un surcorps $\mathscr{K}$ de k qui prolonge l'homomorphisme $A/\mathfrak{q} \to A/\mathfrak{p}$ et telle que $d.t.[\mathscr{K}:k] \geqslant n$. Le théorème 2 du Chapitre I montre qu'il existe une spécialisation de rang n, soit χ, de $\mathscr{K}$ sur un surcorps $\mathscr{K}'$ de k qui est triviale sur k.

La spécialisation ψ de L sur $\mathscr{K}$ peut se prolonger en une spécialisation ψ_0 de $\mathscr{L}'$ sur un surcorps $\mathscr{K}_1$ de $\mathscr{K}$ et la spécialisation χ de $\mathscr{K}$ sur $\mathscr{K}'$ peut se prolonger en une spécialisation χ' de $\mathscr{K}_1$ sur $\mathscr{K}'_1$. Comme $\mathscr{L}'$ est algébrique sur L, le corollaire 8 du théorème 2 (Ch. I) entraine $d.t.[\mathscr{K}_1:\mathscr{K}] = 0$ et $d.t.[\mathscr{K}'_1:\mathscr{K}'] = 0$. Par suite χ' est de rang n et on peut écrire $\chi' = \psi_n \psi_{n-1} \ldots\ldots \psi_1$, les ψ_i étant des spécialisations non triviales.

Soit v_i la valuation de K définie par la spécialisation $\psi_i \ldots\ldots \psi_1 \psi_0 \varphi \varphi_0$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$. Elle a $\mathfrak{p}$ pour centre sur A et on a :

$$w_0 < w_1 < \ldots\ldots < w_s < v_0 < v_1 < \ldots\ldots < v_n$$

Réciproquement donnons-nous une chaine :

$$w_0 < w_1 < \ldots\ldots < w_s < v_0 < v_1 < \ldots\ldots < v_n$$

de valuations de A remplissant les conditions de la proposition 2.

La spécialisation w_s définit une spécialisation Φ de K sur un surcorps $\mathscr{L}'$ de L. On a surement $d.t.[\mathscr{L}':\mathrm{L}] = 0$, sans cela il existerait, d'après le théorème 2 du Chapitre I, une spécialisation non triviale de $\mathscr{L}'$ qui serait triviale sur L et on en déduirait une valuation w_{s+1} de A dont le centre sur A serait $\mathfrak{q}$ et telle que $w_s < w_{s+1}$: Ceci contredirait la proposition 1 puisque $\delta((0), \mathfrak{q}) = s$.

La relation $w_s < v_0$ montre que la spécialisation de K définie par v_0 peut s'écrire $\psi_0\Phi$, où ψ_0 est une spécialisation de $\mathscr{L}'$ qui induit une spécialisation ψ de L sur un surcorps $\mathscr{K}$ de k. Comme $d.t.[\mathscr{L}':\mathrm{L}] = 0$, on a encore $d.t.[\mathscr{K}_1:\mathscr{K}] = 0$ (Ch. I : corollaire 7 du théorème 2). Les relations $v_0 < v_1 < \ldots\ldots < v_n$ montrent que la spécialisation de K définie par v_n peut s'écrire $\chi' \psi_0 \cdot \Phi$, où χ' est une spécialisation de rang n de $\mathscr{K}_1$ triviale sur k. Le corollaire 1 du théorème 2 du Ch. I montre que $d.t.[\mathscr{K}_1:k] \geqslant n$. Comme $d.t.[\mathscr{K}_1:\mathscr{K}] = 0$, on a encore $d.t.[\mathscr{K}:k] = n$ et l'existence de la spécialisation ψ montre que $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) \geqslant n$. D'où la proposition.

Corollaire 1 — Pour que l'anneau d'intégrité A *soit sans poids, il faut et il suffit qu'il remplisse la condition suivante :*

Si v et w sont deux valuations de A telles que $v < w$, elles ne peuvent avoir même centre sur A.

Nécessité — Si A est sans poids et si $v < w$, les valuations v et w ne peuvent avoir même centre $\mathfrak{p}$ sur A car la proposition 1 entrainerait alors la contradiction $\delta((0), \mathfrak{p}) > 0$.

Suffisance — Si A satisfait à la condition ainsi définie et si $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ sont deux idéaux premiers de A tels que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, la proposition 1 montre d'abord que $\delta((0), \mathfrak{q}) = 0$. On peut alors appliquer la proposition 2 qui montre que $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = 0$. L'anneau A est bien sans poids.

Corollaire 2 — Tout anneau de Prüfer est sans poids.

C'est une conséquence immédiate du corollaire 1 et du fait que toute valuation d'un anneau de Prüfer est complètement déterminée par son centre sur cet anneau.

On remarquera que cette nouvelle démonstration du corollaire 1 de la proposition 1 fait intervenir la proposition 2, mais n'utilise pas le fait que le quotient d'un anneau de Prüfer par un idéal premier est encore un anneau de Prüfer.

2 — Propriétés élémentaires du symbole $\delta(\mathfrak{q},\mathfrak{p})$

Proposition 3 — Si $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ et $\mathfrak{p}_3$ sont trois idéaux premiers d'un anneau A tels que $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_3$, on a l'inégalité :

$$\delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) + \delta(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) \leqslant \delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3) \tag{1}$$

Désignons par K_i le corps des fractions de l'anneau $A/\mathfrak{p}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Soient n_1 et n_2 deux entiers finis tels que $n_1 \leqslant \delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ et $n_2 \leqslant \delta(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)$. Pour $i = 1$ ou 2 il existe une spécialisation φ_i de K_i sur un surcorps L_i de K_{i+1} prolongeant l'homomorphisme $A/\mathfrak{p}_i \to A/\mathfrak{p}_{i+1}$ et tel que $d.t.\,[L_i : K_{i+1}] \geqslant n_i$. Soit ψ une spécialisation de L_1 sur un corps M prolongeant φ_2 et telle que d.t. $[M : L_2] = n_1$ (Ch. I, Corollaire 10 du Th. 2). La considération de la spécialisation $\psi\varphi_1$ de K_1 montre que $n_1 + n_2 \leqslant \delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3)$, d'où la proposition.

$$\begin{tikzcd}
K_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[ddd, dash] & L_1 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, dash] & M \arrow[d, dash] \\
& K_2 \arrow[r, dash, "\varphi_2"] \arrow[dd, dash] & L_2 \arrow[d, dash] \\
& & K_3 \arrow[d, dash] \\
A/\mathfrak{p}_1 \arrow[r] & A/\mathfrak{p}_2 \arrow[r] & A/\mathfrak{p}_3
\end{tikzcd}$$

Dans les anneaux de Prüfer l'inégalité (1) se transforme en égalité. On verra plus loin (nº 4 du Ch. III) des cas où l'inégalité (1) est une inégalité stricte.

Corollaire 1 — Si $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ *et* $\mathfrak{p}_3$ *sont trois idéaux premiers d'un anneau* A *tels que* $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_3$, *on a les inégalités* :

$$\delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) \leqslant \delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3) \quad \text{et} \quad \delta(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) \leqslant \delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3)$$

C'est une conséquence immédiate de la proposition 3.

Corollaire 2 — Pour que l'anneau d'intégrité A *soit sans poids, il faut et il suffit que l'on ait* $\delta((0), \mathfrak{m}) = 0$ *quel que soit l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A.

La nécessité est évidente. Montrons la suffisance :

Soient $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}$ deux idéaux premiers de A tels que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ et soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A contenant $\mathfrak{p}$. Le corollaire 1 montre que l'on a successivement :

$$\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) \leqslant \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{m}) \leqslant \delta(0, \mathfrak{m}) = 0$$

donc $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = 0$, ce qui entraine le corollaire 2.

Proposition 4 — Soient $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{q}$ *deux idéaux premiers d'un anneau* A *tels que* $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ *et S un sous-ensemble multiplicativement clos de* A *ne contenant pas de diviseurs de* 0 *et tel que* $S \cap \mathfrak{p} = \varnothing$. *On a l'égalité* :

$$\delta(\mathfrak{q}_S, \mathfrak{p}_S) = \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) \tag{2}$$

Désignons par $\bar{S}$ l'image de S dans l'anneau $A/\mathfrak{q}$ et par K le corps des fractions de $A/\mathfrak{q}$. D'après le lemme 1 du Chapitre I l'anneau $A_S/\mathfrak{q}_S$ s'identifie canoniquement au sous-anneau $(A/\mathfrak{q})_{\bar{S}}$ de K. En remarquant que pour qu'une spécialisation φ de K induise sur $A/\mathfrak{q}$ l'homomorphisme $A/\mathfrak{q} \to A/\mathfrak{p}$, il faut et il suffit qu'elle induise sur $(A/\mathfrak{q})_S^-$ l'homomorphisme $A_S/\mathfrak{q}_S \to A_S/\mathfrak{p}_S$, on voit que la proposition 4 est conséquence directe de la proposition 1.

Proposition 5 — Soient A′ *un anneau entier sur un anneau* A, $\mathfrak{q}$ *et* $\mathfrak{p}$ *deux idéaux premiers de* A *tels que* $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. *Si* $\mathfrak{q}'$ *et* $\mathfrak{p}'$ *sont deux idéaux premiers de* A′ *tels que* $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{p}'$ *et tels que* $\mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$, *on a* :

$$\delta(\mathfrak{q}', \mathfrak{p}') \leqslant \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$$

De plus, si $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ *est fini et si* $\mathfrak{q}'$ *est un idéal premier de* A′ *tel que* $\mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{q}$, *il existe un idéal premier* $\mathfrak{p}_1'$ *de* A′ *tel que l'on ait en même temps* :

$$\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{p}_1', \quad \mathfrak{p}_1' \cap A = \mathfrak{p} \quad \text{et} \quad \delta(\mathfrak{q}', \mathfrak{p}_1') = \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$$

Comme $A'/\mathfrak{q}'$ est un anneau entier sur $A/\mathfrak{q}$ on peut, en passant au quotient par $\mathfrak{q}'$, supposer que A′ est un anneau intègre et que $\mathfrak{q}' = (0)$.

Soient $d' = \delta((0), \mathfrak{p}')$ et $d = \delta((0), \mathfrak{p})$.

Si n est un entier fini $\leqslant d'$, il existe d'après la proposition 1 une suite :

$$v_0' < v_1' < \ldots\ldots < v_n'$$

de $n+1$ valuations de A′ ayant toutes $\mathfrak{p}'$ comme centre sur A′. Ces valuations induisent sur A une suite de valuations de centre $\mathfrak{p}$ (sur A):

$$v_0 \leqslant v_1 \leqslant \ldots\ldots \leqslant v_n$$

Le corollaire 9 du théorème 2 (Ch. I) montre que l'on a :

$$v_0 < v_1 < \ldots\ldots < v_n$$

et la proposition 1 montre que $n \leqslant d$. On en déduit $d' \leqslant d$, ce qui démontre la première partie de la proposition.

Supposons maintenant $\delta((0), \mathfrak{p}) = d < \infty$. Il existe d'après la proposition 1 une suite :

$$w_0 < w_1 < \ldots\ldots < w_d$$

de $d+1$ valuations de A ayant toutes $\mathfrak{p}$ comme centre sur A.

Soit w_d' une valuation du corps des fractions de A′ prolongeant w_d. Comme A′ est entier sur A, w_d' est une valuation de A′. L'application répétée de la proposition 1 du Chapitre I montre que l'on peut prolonger chaque w_i en une valuation w_i' de A′ $(0 \leqslant i \leqslant d-1)$ de façon que :

$$w_0' < w_1' < \ldots\ldots < w_{d-1}' < w_d'$$

Le corollaire 5 du théorème 2 (Ch. I) montre que les valuations w_i' ont même centre $\mathfrak{p}_1'$ sur A'. La proposition 1 montre que $d \leqslant \delta((0), \mathfrak{p}_1')$. Comme $\mathfrak{p}_1' \cap A = \mathfrak{p}'$ on a $\delta((0), \mathfrak{p}_1') = \delta((0), \mathfrak{p}) = d$, ce qui achève de montrer la proposition 5.

Corollaire — Soit A' *un anneau entier sur un anneau* A. *Pour que* A *soit sans poids, il faut et il suffit que* A' *soit sans poids.*
C'est une conséquence immédiate de la proposition 5.

Proposition 6 — Soient $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{q}$ *deux idéaux premiers de l'anneau* A *tels que* $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. *Pour tout entier fini* $n \geqslant 0$, *on a l'égalité* :

$$\delta(\mathfrak{q}A^{(n)}, \mathfrak{p}A^{(n)}) = \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) \tag{3}$$

Par récurrence sur n on voit qu'il suffit de montrer l'égalité (3) pour $n = 1$. En passant au quotient par $\mathfrak{q}A^{(1)}$, on peut supposer A intègre et $\mathfrak{q} = (0)$. Soit alors m un entier fini $\leqslant \delta((0), \mathfrak{p})$. D'après la proposition 1 on peut trouver une suite de valuations v_i de centres $\mathfrak{p}$ sur A telle que :

$$v_0 < v_1 < \ldots\ldots < v_m$$

Désignons par v_i' le prolongement canonique de v_i à $A^{(1)}$. Les valuations v_i' ont pour centre $\mathfrak{p}A^{(1)}$ sur $A^{(1)}$ et on a :

$$v_0' < v_1' < \ldots\ldots < v_m'$$

ce qui montre que $m \leqslant \delta((0), \mathfrak{p}A^{(1)})$ et entraine $\delta((0), \mathfrak{p}) \leqslant \delta((0), \mathfrak{p}A^{(1)})$. Soit maintenant p un entier fini $\leqslant \delta((0), \mathfrak{p}A^{(1)})$. Désignons par K et k les corps des fractions de A et de $A/\mathfrak{p}$. Posons $A^{(1)} = A[x]$. Il existe une spécialisation φ du corps $K(x)$ sur un corps L qui prolonge l'homomorphisme $A[x] \rightarrow A/\mathfrak{p}[x]$ et telle que $d.t.\,[L:k(x)] \geqslant p$. Désignons par M le corps $\varphi(K)$. Le corollaire 7 du théorème 2 (Ch. I) entraine $d.t.\,[L:M] \leqslant d.t.\,[K(x):K] = 1$. Les égalités :

$$d.t.\,[L:k] = d.t.\,[L:M] + d.t.\,[M:k] = d.t.\,[L:k(x)] + d.t.\,[k(x):k]$$

entrainent alors :

$$d.t.\,[M:k] \geqslant d.t.\,[L:k(x)] \geqslant p$$

(puisque $x = \varphi(x)$ est transcendant sur k).

Par suite $\delta((0), \mathfrak{p}) \geqslant p$ et $\delta((0), \mathfrak{p}) \geqslant \delta((0), \mathfrak{p}A^{(1)})$ ce qui entraine la proposition 6.

3 — Une égalité fondamentale

Pour étudier la dimension de l'anneau de polynomes $A^{(N)}$, on est amené à étudier la longueur maximale des chaines d'idéaux premiers ayant pour extrémités $\mathfrak{q}A^{(N)}$ et $\mathfrak{p}A^{(N)}$, $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}$ désignant deux idéaux premiers de A tels que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$.

Nous ne nous préoccuperons que des chaines de la forme :

$$\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P}_1 \subset \ldots\ldots \subset \mathscr{P}_s \tag{4}$$

telles que :

$$\mathscr{P}_i \cap A = \mathfrak{q} \quad (0 \leqslant i \leqslant s-1) \quad \text{et} \quad \mathscr{P}_s = \mathfrak{p}A^{(N)}.$$

Nous noterons $\lambda(\mathfrak{q}A^{(N)}, \mathfrak{p}A^{(N)})$ la borne supérieure des longueurs de ces chaines particulières. Notons que, quoique tous les idéaux intervenant dans ces chaines reposent sur $\mathfrak{q}$, sauf le dernier qui repose sur $\mathfrak{p}$, l'idéal $\mathfrak{p}$ n'est pas nécessairement un suridéal premier immédiat de $\mathfrak{q}$.

Théorème 1 — On a l'égalité :

$$\lambda(\mathfrak{q}A^{(N)}, \mathfrak{p}A^{(N)}) = 1 + \inf(N, \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})) \tag{5}$$

Remarquons d'abord que l'on peut passer au quotient (dans $A^{(N)}$) par $\mathfrak{q}A^{(N)}$ (dans A par $\mathfrak{q}$) et par suite, pour simplifier l'écriture, on peut supposer A intègre et $\mathfrak{q} = (0)$. Tous les idéaux de la chaine (4) reposant, sauf le dernier, sur (0), le corollaire 1 du théorème 3 (Ch. I) montre que :

$$\lambda((0), \mathfrak{p}A^{(N)}) \leqslant 1 + N$$

Montrons maintenant que :

$$\lambda((0), \mathfrak{p}A^{(N)}) \leqslant 1 + \delta((0), \mathfrak{p})$$

Soit $s = \lambda((0), \mathfrak{p}A^{(N)})$. Par définition il existe une chaine sans répétition d'idéaux premiers de $A^{(N)}$:

$$\mathscr{P}_0 = (0) \subset \mathscr{P}_1 \subset \ldots\ldots \subset \mathscr{P}_s$$

telle que $\mathscr{P}_i \cap A = (0)$ $(0 \leqslant i \leqslant s-1)$ et $\mathscr{P}_s = \mathfrak{p}A^{(N)}$.

Considérons la suite des homomorphismes canoniques :

$$A^{(N)} \to A^{(N)}/\mathscr{P}_1 \to \ldots\ldots \to A^{(N)}/\mathscr{P}_{s-1} \to A^{(N)}/\mathscr{P}_s \tag{6}$$

Les $s-1$ premiers homomorphismes laissent invariants les éléments de A et le dernier induit sur A l'homomorphisme $A \to A/\mathfrak{p}$. Désignons par Ω_i la fermeture algébrique du corps des fractions de $A^{(N)}/\mathscr{P}_i$. En appliquant plusieurs fois le théorème 1 du chapitre I, on voit que la suite (6) peut se prolonger en une suite de spécialisations :

$$(6') \qquad \Omega_0 \to \Omega_1 \to \ldots\ldots \to \Omega_s$$

En effet $A^{(N)}/\mathscr{P}_{s-1} \to A^{(N)}/\mathscr{P}_s$ peut se prolonger en $\Omega_{s-1} \to \Omega_s$ et $A^{(N)}/\mathscr{P}_{s-2} \to A^{(N)}/\mathscr{P}_{s-1}$ qui s'écrit $A^{(N)}/\mathscr{P}_{s-2} \to \Omega_{s-1}$ peut se prolonger en $\Omega_{s-2} \to \Omega_{s-1}$, et ainsi de suite...

Si L est le corps des fractions de $A^{(N)}$, on en déduit une suite de spécialisations :

$$L = L_0 \to L_1 \to \ldots\ldots \to L_{s-1} \to L_s$$

(L_i étant un sous-corps de Ω_i).

Désignons par K le corps des fractions de A. La spécialisation $L_i \to L_{i+1}$ induit la spécialisation triviale $A \to A$ si $i < s-1$, donc elle induit encore sur K la spécialisation triviale $K \to K$. Enfin $L_{s-1} \to L_s$ spécialise K sur un surcorps K′ du corps des fractions k de $A/\mathfrak{p}$.

$$\begin{tikzcd}
\Omega_0 \arrow[r] \arrow[d, dash] & \Omega_1 \arrow[r] \arrow[d, dash] & \cdots \arrow[r] & \Omega_{s-1} \arrow[r] \arrow[d, dash] & \Omega_s \arrow[d, dash] \\
L \arrow[r] \arrow[d, dash] & L_1 \arrow[r] \arrow[d, dash] & \cdots \arrow[r] & L_{s-1} \arrow[r] \arrow[d, dash] & L_s \arrow[d, dash] \\
A^{(N)} \arrow[r] & A^{(N)}/\mathscr{P}_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A^{(N)}/\mathscr{P}_{s-1} \arrow[r] & A^{(N)}/\mathscr{P}_s \\
K \arrow[r] \arrow[d, dash] & K \arrow[r] \arrow[d, dash] & \cdots \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, dash] & K' \arrow[d, dash, "k"] \\
A \arrow[r] & A \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A \arrow[r] & A/\mathfrak{p}
\end{tikzcd}$$

Désignons par :

n' le rang de la spécialisation $L \to L_{s-1}$
m' le rang de la spécialisation induite $K \to K$ $(m' = 0)$
n'' le rang de la spécialisation $L_{s-1} \to L_s$
m'' le rang de la spécialisation induite $K \to K'$.

Le corollaire 6 du théorème 2 (Ch. I) permet d'écrire :

$$d.t.\,[L_{s-1}:K] \leqslant d.t.\,[L:K] - (n' - m')$$

Mais $d.t.\,[L:K] = N$ (d'après la définition de $A^{(N)}$), $n' \geqslant s-1$ (puisqu'aucune des spécialisations $L_i \to L_{i+1}$ n'est triviale en vertu des inégalités $\mathscr{P}_i \neq \mathscr{P}_{i+1}$) et $m' = 0$. Par suite on a :

(7) $$d.t.\,[L_{s-1}:K] \leqslant N - s + 1$$

Le corollaire 6 du théorème 2 (Ch. I) permet d'écrire également :

$$d.t.\,[L_s:K'] \leqslant d.t.\,[L_{s-1}:K] - (n'' - m'')$$

Mais on peut écrire :

$$d.t.\,[L_s:K'] = d.t.\,[L_s:k] - d.t.\,[K':k]$$

d'où

$$d.t.\,[L_s:k] - d.t.\,[K':k] \leqslant d.t.\,[L_{s-1}:K] - (n'' - m'')$$

C'est-à-dire :

(8) $$d.t.\,[K':k] \geqslant d.t.\,[L_s:k] - d.t.\,[L_{s-1}:K] + (n'' - m'')$$

Mais L_s contient l'anneau $A^{(N)}/\mathscr{P}_s = A^{(N)}/\mathfrak{p}A^{(N)}$ qui est isomorphe à l'anneau de polynomes $(A/\mathfrak{p})^{(N)}$. Par suite $d.t.\,[L_s:k] \geqslant N$. En remarquant également que $n'' - m'' \geqslant 0$ et en tenant compte de l'inégalité (7), on voit que (8) entraine :

(9) $$d.t.\,[K':k] \geqslant N - N + s - 1 = s - 1$$

donc $$s \leqslant 1 + d.t.\,[K':k]$$

Mais, par définition

$$d.t.\,[K':k] \leqslant \delta((0), \mathfrak{p})$$

d'où l'inégalité :

$$\lambda((0), \mathfrak{p}A^{(N)}) \leqslant 1 + \delta((0), \mathfrak{p}).$$

Nous avons donc démontré l'inégalité :

$$\lambda((0), \mathfrak{p}A^{(N)}) \leqslant 1 + \inf(N, \delta((0), \mathfrak{p}))$$

Soit maintenant :

$$M = \inf(N, \delta((0), \mathfrak{p})).$$

Désignons encore par K le corps des fractions de A et par k celui de $A/\mathfrak{p}$. Puisque $M \leqslant \delta((0), \mathfrak{p})$ on peut trouver une spécialisation $\varphi : K \to K'$ de K sur un surcorps K' de k tel que $d.t.\,[K':k] = M$ prolongeant l'homomorphisme canonique $A \to A/\mathfrak{p}$.

Soient $x'_1, \ldots\ldots, x'_M$ des éléments de K' algébriquement indépendants sur k et soient $x_1, \ldots\ldots, x_M$ des éléments de K tels que $\varphi(x_i) = x'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant M)$.

Soit $A^{(M)} = A[X_1, \ldots\ldots, X_M]$. Considérons la suite d'homomorphismes :

$$A[X_1, \ldots\ldots, X_M] \to A[x_1, X_2, \ldots\ldots, X_M] \to \ldots\ldots \to A[x_1, x_2, \ldots\ldots, x_M]$$

Aucun de ces homomorphismes n'est trivial, car si on désigne par A_i le sous-anneau de K engendré par A et $x_1, \ldots\ldots, x_i$ ($A_0 = A$), on voit que le i^{me} homomorphisme spécialise $A_{i-1}[X_i, \ldots\ldots X_M]$ sur $A_i[X_{i+1}, \ldots\ldots, X_M]$ et si $x_i = a_i/b_i$ ($a_i, b_i \in A$), l'élément non nul $b_iX_i - a_i$ de $A_{i-1}[X_i \ldots\ldots, X_M]$ a pour image 0 dans cet homomorphisme. Enfin φ induit sur $A[x_1, \ldots\ldots, x_M]$ l'homomorphisme :

$$A[x_1, \ldots\ldots, x_M] \to A/\mathfrak{p}[x'_1, \ldots\ldots, x'_M] \cong A/\mathfrak{p}[X_1, \ldots\ldots, X_M]$$

(Il n'est pas trivial car $\mathfrak{p} \neq 0$))....

Soit la suite des homomorphismes :

$$A[X_1, \ldots, X_M] \to A[x_1, X_2, \ldots, X_M] \to \ldots \to A[x_1, \ldots, x_M] \to A/\mathfrak{p}[X_1, \ldots, X_M]$$

Dans l'anneau $A^{(M)}$ on considère la suite d'idéaux premiers :

$$\mathcal{Q}_0 = (0) \subset \mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{Q}_2 \subset \ldots\ldots\ldots \subset \mathcal{Q}_M \subset \mathcal{Q}_{M+1} = \mathfrak{p}A^{(M)}$$

où $\mathcal{Q}_i$ est le noyau de $A[X_1, \ldots, X_M] \to A[x_1, \ldots, x_i, X_{i+1}, \ldots, X_M]$. On a $\mathcal{Q}_i \cap A = (0)$ si $i \leqslant M$.

Comme $M \leqslant N$, on a dans l'anneau $A^{(N)} = (A^{(M)})^{(N-M)}$ la suite d'idéaux :

$$\mathcal{P}_0 = (0) \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_M \subset \mathcal{P}_{M+1} = \mathfrak{p}A^{(N)}$$

définie par $\mathcal{P}_i = \mathcal{Q}_i A^{(N)}$.

Comme $\mathcal{P}_i \cap A = (0)$ ($0 \leqslant i \leqslant N$) on en déduit l'inégalité :

$$M + 1 \leqslant \lambda((0), \mathfrak{p}A^{(N)})$$

Le théorème 1 est donc complètement démontré.

Du théorème 1 on déduit immédiatement le :

Corollaire — Pour que l'anneau A *soit sans poids* :

Il faut que quel que soit le couple d'idéaux premiers $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ *de* $A^{(N)}$ *l'inégalité* $hr_A(\mathcal{Q}) > 0$ *entraine* $hr_A(\mathcal{P}) > 0$.

Il suffit que ceci soit vrai pour $N = 1$.

4 — Les chaines spéciales

Dans l'anneau de polynomes $A^{(N)}$ appelons *chaine spéciale* toute chaine d'idéaux premiers (sans répétition) de la forme :

$$\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P}_1 \subset \ldots \subset \mathscr{P}_n \tag{10}$$

remplissant les conditions suivantes :

Si $\mathfrak{p} = \mathscr{P}_i \cap A$, il existe un entier $j \leqslant i$ tel que $\mathscr{P}_j = \mathfrak{p}A^{(N)}$. Le théorème 1 permet d'évaluer à partir de A la longueur maximale des chaines spéciales de $A^{(N)}$. Il permettra donc d'évaluer la dimension de $A^{(N)}$ si nous sommes certains de l'existence d'une chaine spéciale de $A^{(N)}$ de longueur dim $A^{(N)}$. C'est cette existence que nous nous proposons de montrer dans ce numéro.

Montrons d'abord le :

Théorème 2 — Soit dans $A^{(N)}$ *une chaine de la forme :*

$$\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P}_1 \subset \ldots\ldots \subset \mathscr{P}_s$$

telle que

$$\begin{aligned} &\mathscr{P}_i \cap A = \mathfrak{q} \qquad \text{si } 0 \leqslant i \leqslant s-1 \\ &\mathscr{P}_s \cap A = \mathfrak{p} \end{aligned}$$

il existe dans $A^{(N)}$ *une chaine de longueur supérieure ou égale à* s, *commençant à* $\mathfrak{q}A^{(N)}$, *finissant à* $\mathscr{P}_s$, *dont tous les termes reposent sur* $\mathfrak{q}$ *ou* $\mathfrak{p}$ *et passant par l'idéal* $\mathfrak{p}A^{(N)}$.

Remarquons d'abord que, les idéaux $\mathscr{P}_0, \ldots\ldots, \mathscr{P}_{s-1}$ reposant sur $\mathfrak{q}$, le corollaire 1 du théorème 3 (Ch. I) entraine :

$$s \leqslant N + 1 \tag{11}$$

Enfin on peut toujours supposer, en ajoutant s'il le faut, le terme $\mathfrak{q}A^{(N)}$ au début de $\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P}_1 \subset \ldots\ldots \subset \mathscr{P}_s$, que $\mathscr{P}_0 = \mathfrak{q}A^{(N)}$. Considérons la suite des homomorphismes :

$$A^{(N)}/\mathscr{P}_0 \to A^{(N)}/\mathscr{P}_1 \to \ldots \to A^{(N)}/\mathscr{P}_{s-1} \to A^{(N)}/\mathscr{P}_s$$

Elle peut se prolonger en une suite de spécialisations :

$$\mathscr{K}_0 \to \mathscr{K}_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_{s-1} \to \mathscr{K}_s$$

où $\mathscr{K}_i$ est un corps extension algébrique du corps des fractions de $A^{(N)}/\mathscr{P}_i$ (procédé utilisé dans la démonstration du théorème 1). Ces spécialisations induisent sur $A/\mathfrak{q}$ la suite de spécialisations :

$$A/\mathfrak{q} \to A/\mathfrak{q} \to \ldots\ldots \to A/\mathfrak{q} \to A/\mathfrak{p}$$

Désignons par k_0 le corps des fractions de $A/\mathfrak{q}$, par k_s le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$ et par k'_s le corps image de k_0 dans la spécialisation

$$\mathcal{K}_{s-1} \rightarrow \mathcal{K}_s$$

ou, ce qui revient au même, $\mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{K}_s$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}_0 \arrow[rr] \arrow[dr, dash] & & \mathcal{K}_{s-1} \arrow[rr] \arrow[dl, dash] & & \mathcal{K}_s \arrow[d, dash] \\
& k_0 \arrow[rrr] \arrow[dd, dash] & & & k'_s \arrow[d, dash] \\
& & & & k_s \arrow[d, dash] \\
& A/\mathfrak{q} \arrow[rrr] & & & A/\mathfrak{p}
\end{tikzcd}$$

D'autre part, désignons par :

n' le rang de la spécialisation $\mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{K}_{s-1}$
n'' le rang de la spécialisation $\mathcal{K}_{s-1} \rightarrow \mathcal{K}_s$
m' le rang de la spécialisation induite sur k_0 par $\mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{K}_{s-1} (m' = 0)$
m'' le rang de la spécialisation induite sur k_0 par $\mathcal{K}_{s-1} \rightarrow \mathcal{K}_s$.

Le corollaire 6 du théorème 2 (Ch. I) permet d'écrire les deux inégalités :

(12) $$d.t.\,[\mathcal{K}'_{s-1}:k_0] \leqslant d.t.\,[\mathcal{K}_0:k_0] - (n' - m')$$

(13) $$d.t.\,[\mathcal{K}_s:k'_s] \leqslant d.t.\,[\mathcal{K}_{s-1}:k_0] - (n'' - m'')$$

Comme $\mathcal{P}_0 = \mathfrak{q}A^{(N)}$, l'anneau $A^{(N)}/\mathcal{P}_0$ est isomorphe à $(A/\mathfrak{q})^{(N)}$ et par suite $d.t.\,[\mathcal{K}_0:k_0] = N$. D'autre part aucune des spécialisations $\mathcal{K}_{t-1} \rightarrow \mathcal{K}_t$ n'étant triviale, on a $n' \geqslant s - 1$. Comme $m' = 0$, l'inégalité (12) permet d'écrire :

$$d.t.\,[\mathcal{K}_{s-1}:k_0] \leqslant N - s + 1$$

D'où, en reportant dans l'inégalité (13) :

$$d.t.\,[\mathcal{K}_s:k'_s] \leqslant N - s + 1 - (n'' - m'')$$

ce qui s'écrit encore :

$$d.t.\,[\mathcal{K}_s:k_s] - d.t.\,[k'_s:k_s] \leqslant N - s + 1 - (n'' - m'')$$

et, en tenant compte de l'inégalité $0 \leqslant n'' - m''$

(14) $$s \leqslant 1 + d.t.\,[k'_s:k_s] + (N - d.t.\,[\mathcal{K}_s:k_s]).$$

D'après le théorème 1, il existe une chaine $\mathscr{C}$ commençant à $\mathscr{P}_0$, finissant à $\mathfrak{p}A^{(N)}$, dont tous les termes sauf le dernier reposent sur $\mathfrak{q}$, et de longueur $1 + \inf(N, \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}))$. Si $N \leqslant \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$, la chaine obtenue en ajoutant $\mathscr{P}_s$ à la fin de $\mathscr{C}$ répond à la question en raison de l'inégalité (11).

Supposons maintenant $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) < N$. La chaine $\mathscr{C}$ a une longueur $1 + \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$, et, par définition, $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ étant supérieur ou égal à $d.t.\, [k'_s : k_s]$, la chaine $\mathscr{C}$ a une longueur supérieure ou égale à $1 + d.t.\, [k'_s : k_s]$.

D'autre part le corollaire 3 du théorème 3 (Ch. I) appliqué à l'anneau A et à l'idéal $\mathscr{P}_s$ montre qu'il existe une chaine $\mathscr{C}'$ commençant à $\mathfrak{p}A^{(N)}$, se terminant à $\mathscr{P}_s$ et de longueur $N - d.t.\, [\mathscr{K}_s : k_s]$.

L'inégalité (14) montre alors que la chaine formée en joignant les chaines $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ répond à la question. D'où le théorème.

Montrons maintenant le :

Théorème 3 — Il existe dans l'anneau $A^{(N)}$ *une chaine spéciale dont la longueur est égale à la dimension de* $A^{(N)}$.

Il suffit de montrer que si on se donne une chaine sans répétitions d'idéaux premiers de $A^{(N)}$:

$$(15) \qquad \mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P}_1 \subset \cdots\cdots \subset \mathscr{P}_s$$

telle que $\mathscr{P}_0 = (\mathscr{P}_0 \cap A)\, A^{(N)}$, il existe une chaine spéciale de longueur au moins égale à s commençant à $\mathscr{P}_0$ et finissant à $\mathscr{P}_s$.

Soit :

$$(16) \qquad \mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{q}_t$$

la chaine sans répétition des idéaux premiers de A définie par la chaine (15).

Montrons le théorème par récurrence sur t.

Si $t = 0$ la chaine (15) est une chaine spéciale et le théorème est dans ce cas trivialement vrai. Supposons le théorème démontré pour tout $t < n$ et supposons $t = n$. Soit a le plus petit indice-x tel que $\mathscr{P}_x \cap A \neq \mathfrak{q}_0$. Considérons la chaine :

$$\mathscr{C} : \mathscr{P}_0 \subset \cdots\cdots\cdots \subset \mathscr{P}_{a-1} \subset \mathscr{P}_a$$

D'après le théorème 2, il existe une chaine de longueur $a' \geqslant a$:

$$\mathscr{P}'_0 = \mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P}'_1 \subset \cdots\cdots \subset \mathscr{P}'_{a'} = \mathscr{P}_a$$

telle que $\mathfrak{q}_1 A^{(N)}$ soit un des idéaux de la chaine, $\mathscr{P}'_b$ par exemple. La chaine :

$$\mathscr{C}' : \mathscr{P}'_b \subset \mathscr{P}'_{b+1} \subset \cdots\cdots \subset \mathscr{P}'_{a'} = \mathscr{P}_a \subset \mathscr{P}_{a+1} \subset \cdots\cdots \subset \mathscr{P}_s$$

définit sur A la chaine sans répétition

$$\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset \cdots\cdots\cdots \subset \mathfrak{q}_t$$

qui est de longueur $t - 1 = n - 1$. D'après les hypothèses de récurrence, il existe une chaine spéciale $\mathscr{C}''$ de longueur supérieure ou égale à celle de $\mathscr{C}'$, commençant à $\mathscr{P}'_b$ et finissant à $\mathscr{P}_s$, soit :

$$\mathscr{C}'' : \mathscr{P}'_b = \mathscr{P}''_1 \subset \cdots\cdots\cdots \subset \mathscr{P}''_c = \mathscr{P}_s$$

On voit alors que la chaine spéciale :

$$\mathscr{P}_0 = \mathscr{P}'_0 \subset \mathscr{P}'_1 \subset \cdots\cdots \subset \mathscr{P}'_b = \mathfrak{q}_1 A^{(N)} = \mathscr{P}''_1 \subset \cdots\cdots \subset \mathscr{P}''_c = \mathscr{P}_s$$

est de longueur supérieure ou égale à s, ce qui démontre le théorème par récurrence.

5 — Propriétés du symbole $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ dans les anneaux de polynomes

Les théorèmes 1 et 2 permettent de donner quelques indications sur la valeur de $\delta(\mathscr{Q}, \mathscr{P})$ lorsque $\mathscr{Q} \subset \mathscr{P}$ est une chaine de l'anneau de polynomes $A^{(N)}$.

Lemme 1 — Si $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{P}$ sont deux idéaux premiers de $A^{(N)}$ *tels que $\mathscr{Q} \subset \mathscr{P}$ on a l'inégalité :*

(17) $$hr_A(\mathscr{Q}) - hr_A(\mathscr{P}) \leqslant \delta(\mathscr{Q} \cap [A; \mathscr{P} \cap A)$$

Le lemme étant trivial si $\mathscr{P} = \mathscr{Q}$, nous supposerons $\mathscr{P} \neq \mathscr{Q}$.
Soient $\mathfrak{p} = \mathscr{P} \cap A$, $\mathfrak{q} = \mathscr{Q} \cap A$, $p = hr_A(\mathscr{P})$ et $q = hr_A(\mathscr{Q})$.
Si $\mathscr{P} = \mathfrak{p}A^{(N)}$, le lemme 1 est une conséquence immédiate du théorème 1. Nous supposerons donc $\mathscr{P} \neq \mathfrak{p}A^{(N)}$. D'après la définition de $hr_A(\mathscr{Q})$, on peut trouver une chaine sans répétitions d'idéaux premiers de $A^{(N)}$ de la forme :

$$\mathfrak{q}A^{(N)} \subset \mathscr{Q}_1 \subset \cdots\cdots \subset \mathscr{Q}_q = \mathscr{Q} \subset \mathscr{P}$$

Le théorème 2 montre alors que l'on peut trouver dans $A^{(N)}$ une chaine sans répétitions d'idéaux premiers de la forme :

$$\mathfrak{q}A^{(N)} \subset \mathscr{E}_1 \supset \cdots\cdots \subset \mathscr{E}_{q+1} = \mathscr{P}$$

avec :

$$\mathscr{E}_i = \mathfrak{p}A^{(N)}$$

(i étant un certain entier compris entre 1 et $q + 1$)

et telle que :

$$\mathcal{T}_j \cap A = \mathfrak{q} \quad \text{si} \quad j < i$$

Le théorème 1 permet donc d'écrire :

$$i \leqslant \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) + 1 \tag{18}$$

La correspondance (conservant l'inclusion) entre idéaux premiers de $A^{(N)}$ reposant sur $\mathfrak{p}$ et idéaux premiers de $k^{(N)}$ (k étant le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$) et le théorème 3 du chapitre I montrent que, puisque $hr_A(\mathcal{P}) = p$, il existe une chaine sans répétitions d'idéaux premiers de $A^{(N)}$ de la forme :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_p \subset \mathcal{P}_{p+1} \subset \ldots\ldots \subset \mathcal{P}_N$$

avec $\mathcal{P}_j \cap A = \mathfrak{p} (p \leqslant j \leqslant N)$.
L'existence de la chaine sans répétitions :

$$\mathcal{T}_i = \mathfrak{p}A^{(N)} \subset \mathcal{T}_{i+1} \subset \ldots\ldots \subset \mathcal{T}_{q+1} = \mathcal{P} = \mathcal{P}_p \subset \mathcal{P}_{p+1} \subset \ldots\ldots \subset \mathcal{P}_n \cdot$$

et le corollaire 1 du théorème 3 (Ch. I) entrainent l'inégalité :

$$q + 1 - i + n - p \leqslant n$$

ou encore :

$$q - p + 1 \leqslant i$$

En comparant à l'inégalité (18) on obtient :

$$q - p \leqslant \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$$

qui est l'inégalité (17) que l'on se proposait de démontrer.

Le lemme 1 se généralise de la façon suivante :

Théorème 4 — Si $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$ sont deux idéaux premiers de $A^{(N)}$ *tels que $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$, on a l'inégalité :*

$$\delta(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) \leqslant \delta(\mathcal{Q} \cap A, \mathcal{P} \cap A) - (hr_A(\mathcal{Q}) - hr_A(\mathcal{P})) \tag{19}$$

Soit t un entier fini inférieur à $\delta(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$. D'après le théorème 1 on peut trouver dans l'anneau $(A^{(N)})^{(t)} = A^{(N+t)}$ une chaine sans répétitions d'idéaux premiers de la forme :

$$\mathcal{Q}A^{(N+t)} \subset \mathcal{Q}_1 \subset \ldots\ldots \subset \mathcal{Q}_t \subset \mathcal{P}A^{(N+t)} \quad \text{avec} \quad \mathcal{Q}_i \cap A^{(N)} = \mathcal{Q} \quad (1 \leqslant i \leqslant t)$$

Le corollaire 4 du théorème 3 (Ch. I) permet d'écrire les égalités :

$$hr_A(\mathcal{Q}_t) = hr_A(\mathcal{Q}) + hr_{A^{(N)}}(\mathcal{Q}_t) = q + t$$

$$hr_A(\mathcal{P}A^{(N+t)}) = hr_A(\mathcal{P}) + hr_{A^{(N)}}(\mathcal{P}A^{(N+t)}) = p + 0 = p$$

Le lemme 1 perméttant d'écrire :

$$hr_A(\mathcal{Q}_t) - hr_A(\mathcal{P} A^{(N+t)}) \leqslant \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$$

et par suite :

$$q + t - p \leqslant \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) \quad \text{ou} \quad t \leqslant \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) - (q - p)$$

on en déduit l'inégalité (19) qu'il fallait démontrer.

Le théorème 1 permet de donner une autre démonstration de la proposition 6 :

Corollaire 1 — Si $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ *est une chaine d'idéaux premiers de l'anneau* A, *on a l'égalité* :

$$\delta(\mathfrak{q}A^{(n)}, \mathfrak{p}A^{(n)}) = \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$$

Le théorème 4 montre que $\delta(\mathfrak{q}A^{(n)}, \mathfrak{p}A^{(n)}) \leqslant \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$.

Montrons que cette inégalité est en fait une égalité. Soit s un entier fini $\leqslant \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$. Considérons l'anneau $A^{(n+s)}$ que nous écrirons $A[x_1, \ldots\ldots, x_n, y_1, \ldots\ldots, y_s]$, les x_i et y_j étant des variables indépendantes sur A. Identifions $A^{(n)}$ à l'anneau $A[x_1, \ldots, x_n] = B$ et posons $C = A[y_1, \ldots, y_s]$. Le théorème 1 montre que l'on peut trouver dans C une chaine sans répétition d'idéaux premiers

$$\mathfrak{q}C \subset \mathcal{Q}_1 \subset \cdots\cdots\cdots \subset \mathcal{Q}_s \subset \mathfrak{p}C \quad \text{telle que} \quad \mathcal{Q}_i \cap A = \mathfrak{q} \;\; (1 \leqslant i \leqslant s)$$

On a dans $A^{(n+s)} = C^{(n)}$ la chaine sans répétitions :

$$\mathfrak{q}A^{(n+s)} \subset \mathcal{Q}_1 A^{(n+s)} \subset \cdots\cdots \subset \mathcal{Q}_s A^{(n+s)} \subset \mathfrak{p}A^{(n+s)}$$

et comme $\mathcal{Q}_i A^{(n+s)} \cap B = \mathfrak{q}B$, le théorème 1 montre que $\delta(\mathfrak{q}A^{(n)}, \mathfrak{p}A^{(n)}) \geqslant s$. D'où le corollaire.

Corollaire 2 — A *étant un anneau sans poids, si* $\mathcal{Q}$ *et* $\mathcal{P}$ *sont deux idéaux premiers de* $A^{(N)}$, *la relation* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ *entraine* $hr_A(\mathcal{Q}) \leqslant hr_A(\mathcal{P})$.

C'est une conséquence immédiate du lemme 1, puisque, par définition des anneaux sans poids, on a $\delta(\mathcal{Q} \cap A, \mathcal{P} \cap A) = 0$.

Corollaire 3 — Si A *est un anneau sans poids, on a pour tout entier* n *l'égalité* :

$$\dim A^{(n)} = n + \dim A$$

Reprenons les notations de l'énoncé et de la démonstration du corollaire 2 du théorème 3 (Ch. I) et considérons la chaine sans répétitions $\mathcal{C}$ définie par la formule (5) et vérifiant les conditions (6) (Ch. I). On a évidemment $hr_A(\mathcal{P}_{i,j+1}) \geqslant 1 + hr_A(\mathcal{P}_{i,j})$ ($\forall\, i, j$). Le corollaire 2 montre d'autre part que, A étant supposé sans poids, $hr_A(\mathscr{P}_{i+1,0}) \geqslant hr_A(\mathscr{P}_{i,\alpha(i)})$ ($\forall i$). Il en résulte les inégalités

$$hr_A(\mathscr{P}_{i+1,0}) \geqslant \alpha(i) + hr_A(\mathscr{P}_{i,0})$$

donc :

$$hr_A(\mathscr{P}_{n,0}) \geqslant \alpha(0) + \alpha(1) + \ldots\ldots + \alpha(k-1)$$

et :

$$hr_A(\mathscr{P}_{k,\alpha(k)}) \geqslant \alpha(0) + \alpha(1) + \ldots\ldots + \alpha(k-1) + \alpha(k)$$

Comme on a $hr_A(\mathscr{P}_{k,\alpha(k)}) \leqslant n$ (Ch. I, corollaire 1 du théorème 3), on en déduit $\alpha(0) + \ldots\ldots + \alpha(k) \leqslant n$ et par suite la chaine $\mathscr{C}$ a une longueur $s \leqslant n+k$. Comme $k \leqslant \dim A$, on a $s \leqslant n + \dim A$, ce qui montre le corollaire, compte tenu de l'inégalité $\dim A^{(n)} \geqslant n + \dim A$ (Ch. I, corollaire 2 du théorème 3).

Corollaire 4 (Théorème de Seidenberg) — Si A *est un anneau de Prüfer on a pour tout entier n l'égalité* :

$$\dim A^{(n)} = n + \dim A$$

C'est une conséquence immédiate du corollaire 3 et du corollaire 2 de la proposition 2.

Le théorème 4 montre que dans le cas où $\mathscr{Q} \cap A = \mathscr{P} \cap A$, on a l'inégalité $\delta(\mathscr{Q}, \mathscr{P}) \leqslant hr_A(\mathscr{P}) - hr_A(\mathscr{Q})$. En fait on a dans ce cas un résultat un peu plus fort :

Proposition 7 — Si $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{P}$ sont deux idéaux premiers distincts dans $A^{(n)}$ *tels que l'on ait $\mathscr{Q} \subset \mathscr{P}$ et $\mathscr{Q} \cap A = \mathscr{P} \cap A$, on a l'inégalité* :

$$\delta(\mathscr{Q}, \mathscr{P}) \leqslant hr_A(\mathscr{P}) - hr_A(\mathscr{Q}) - 1 \tag{20}$$

Soient $p = hr_A(\mathscr{P})$, $q = hr_A(\mathscr{Q})$ et t un entier fini $\leqslant \delta(\mathscr{Q}, \mathscr{P})$. Les considérations du Ch. I, n° 2 montrent qu'il existe dans $A^{(n)}$ une chaine sans répétition d'idéaux premiers :

$$\mathscr{P} \subset \mathscr{P}_1 \subset \ldots\ldots\ldots \subset \mathscr{P}_{n-p} \quad \text{avec} \quad \mathscr{P}_{n-p} \cap A = \mathscr{P} \cap A = \mathfrak{p}$$

D'autre part, la définition de $hr_A\mathscr{Q}$ montre qu'il existe dans $A^{(n)}$ une chaine sans répétition d'idéaux premiers de la forme :

$$\mathfrak{p}A^{(n)} \subset \mathscr{Q}_1 \subset \ldots\ldots \subset \mathscr{Q}_q = \mathscr{Q}$$

Le théorème 1 montre alors que dans l'anneau $(A^{(n)})^{(t)} = A^{(n+t)}$ il existe une chaine sans répétition d'idéaux premiers de la forme :

$$\mathfrak{p}A^{(n+t)} \subset \mathcal{Q}_1 A^{(n+t)} \subset \ldots\ldots \subset \mathcal{Q}_{q-1}A^{(n+t)} \subset \mathcal{Q}A^{(n+t)} \subset \mathcal{Q}'_1 \subset \ldots.$$

$$\ldots \supset \mathcal{Q}'_t \subset \mathcal{P}A^{(n+t)} \subset \mathcal{P}_1 A^{(n+t)} \subset \ldots. \subset \mathcal{P}_{n-p}A^{(n+t)} \subset \mathcal{R}_1 \subset \ldots\ldots \subset \mathcal{R}_t$$

avec $\mathcal{R}_t \cap A^{(n)} = \mathcal{P}_{n-p}$.

Comme tous ces idéaux premiers reposent sur l'idéal $\mathfrak{p}$, le corollaire 1 du théorème 3 (Ch. I) montre que la longueur de cette chaine est inférieure ou égale à $n + t$. On a donc :

$$q + t + 1 + n - p + t \leqslant n + t$$

ou $t \leqslant p - q - 1$. ce qui démontre la proposition.

Corollaire 1 — Si $\mathcal{P}$ est un suridéal premier immédiat de $\mathcal{Q}$ dans $A^{(n)}$ *et si $\mathcal{Q} \cap A = \mathcal{P} \cap A$, on a l'égalité* $\delta(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) = 0$.

Le théorème 3 du Chapitre I et la correspondance canonique entre idéaux premiers de $A^{(n)}$ reposant sur $\mathcal{P} \cap A = \mathfrak{p}$ et idéaux premiers de $k^{(n)}$ si k est le corps des fractions de l'anneau $A/\mathfrak{p}$ montrent que si $\mathcal{P}$ est un suridéal premier immédiat de $\mathcal{Q}$, on a $hr_A(\mathcal{P}) = hr_A(\mathcal{Q}) + 1$. Le corollaire est alors une conséquence immédiate de la proposition 7.

Corollaire 2 — Si A *est un anneau sans poids,* $A^{(1)}$ *est un anneau léger.*

Soit $\mathcal{P}$ un suridéal premier immédiat de l'idéal premier $\mathcal{Q}$ dans $A^{(1)}$. Il faut montrer que $\delta(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) = 0$. Posons $\mathcal{Q} \cap A = \mathfrak{q}$ et $\mathcal{P} \cap A = \mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, le corollaire 1 montre que $\delta(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) = 0$. Supposons $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$. Deux cas sont alors à considérer :

1^er Cas. $\mathcal{Q} = \mathfrak{q}A^{(1)}$. On a nécessairement $\mathcal{P} = \mathfrak{p}A^{(1)}$ et le théorème 4 montre alors que $\delta(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) = 0$.

2^me Cas. $\mathcal{Q} \neq \mathfrak{q}A^{(1)}$. L'égalité $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = 0$ et le théorème 1 montrent que dans ce cas $\mathcal{P} \neq \mathfrak{p}A^{(1)}$. Donc $hr_A(\mathcal{Q}) = hr_A(\mathcal{P}) = 1$. Le théorème 4 montre encore que $\delta(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) = 0$.

Il serait intéressant de savoir si, A étant un anneau sans poids, l'anneau $A^{(n)}$ est léger quel que soit n. Si cela était vrai, le théorème de Seidenberg (Corollaire 4 du théorème 4) serait, comme le théorème de Krull (corollaire 4 du Théorème 6, Ch. III) un cas particulier du corollaire 3 du théorème 6 (Ch. III).

Il semble possible que l'on puisse, dans l'énoncé de la proposition 7, remplacer l'inégalité (20) par l'égalité correspondante. C'est évidemment le cas si $n = 1$.

CHAPITRE III

LA FONCTION $f(n) = \dim A^{(n)}$.

1 — Comportement asymptotique de la fonction $f(n) = \dim A^{(n)}$.

Les théorèmes 1 et 3 du Chapitre II permettent d'exprimer la dimension de $A^{(N)}$ à partir de caractères intrinsèques de l'anneau A. Tous les résultats que nous énoncerons étant triviaux lorsque $\dim A = \infty$, nous supposerons désormais $\dim A < \infty$.

Toute chaîne de $A^{(N)}$ définit une chaîne (sans répétition) de A sur laquelle elle sera dite *reposer*. Nous désignerons par Γ l'ensemble des chaînes de l'anneau A. Si $\mathscr{C} \in \Gamma$ est une chaîne de A et si n est un entier $\geqslant 0$ quelconque, nous désignerons par $\varphi_n(\mathscr{C})$ le nombre de maillons de la chaîne $\mathscr{C}$ dont le poids est supérieur ou égal à n. Enfin nous désignerons par $\Lambda(\mathscr{C},n)$ la longueur maximale des chaînes spéciales de $A^{(n)}$ reposant sur la chaîne $\mathscr{C}$ de A. Le théorème 3 du Chapitre II permet d'écrire :

$$(1) \qquad \dim A^{(n)} = \operatorname*{Sup}_{\mathscr{C}\in\Gamma} \Lambda(\mathscr{C},n)$$

D'autre part :

Théorème 1 — On a l'égalité :

$$(2) \qquad \Lambda(\mathscr{C},n) = \varphi_0(\mathscr{C}) + \varphi_1(\mathscr{C}) + \dots + \varphi_n(\mathscr{C}) + n$$

Désignons par $\psi_n(\mathscr{C})$ le nombre de maillons de la chaîne $\mathscr{C}$ dont le poids est égal à n. On a :

$$\psi_n(\mathscr{C}) = \varphi_n(\mathscr{C}) - \varphi_{n+1}(\mathscr{C}) \quad \text{si} \quad n < \infty$$
$$\psi_\infty(\mathscr{C}) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\mathscr{C}) \quad \text{(limite atteinte pour un nombre fini).}$$

On voit immédiatement à partir du théorème 1 du Chapitre II et des considérations du n° 2 du Chapitre I que l'on a l'égalité :

$$\Lambda(\mathscr{C},n) = \psi_0(\mathscr{C}) + 2\psi_1(\mathscr{C}) + \dots + n\psi_{n-1}(\mathscr{C}) + (n+1) \sum_{n \leqslant i \leqslant \infty} \psi_i(\mathscr{C}) + n$$

On a donc :

$$\Lambda(\mathscr{C},n) = \varphi_0(\mathscr{C}) - \varphi_1(\mathscr{C}) + 2\varphi_1(\mathscr{C}) - 2\varphi_2(\mathscr{C}) + \ldots + n\varphi_{n-1}(\mathscr{C}) - n\varphi_n(\mathscr{C})$$
$$+ (n+1) \sum_{m \leqslant i < \infty} (\varphi_i(\mathscr{C}) - \varphi_{i+1}(\mathscr{C})) + \lim_{n \to \infty} \varphi_n(\mathscr{C}) + n$$
$$= \varphi_0(\mathscr{C}) + \varphi_1(\mathscr{C}) + \ldots + \varphi_{n-1}(\mathscr{C}) + \varphi_n(\mathscr{C}) + n.$$

D'où l'égalité (2) et le théorème.

Les égalités (1) *et* (2) *donnent une expression de la dimension de l'anneau de polynomes* $A^{(n)}$ *en fonction de nombres définis intrinsèquement à partir de l'anneau* A.

Théorème 2 — Si A *est un anneau de dimension finie, il existe un nombre* N *tel que pour tout* $n \geqslant$ N *on ait l'égalité :*

$$\dim A^{(n)} = (1 + \pi)n + \delta$$

π *et* δ *étant des constantes telles que* $0 \leqslant \pi \leqslant \delta$ *et* $\pi \leqslant \dim$ A.

Posons

$$\varphi_n(A) = \sup_{\mathscr{C} \in \Gamma} (\varphi_n(\mathscr{C}))$$

C'est un nombre fini inférieur ou égal à dim A. L'inégalité $\varphi_n(\mathscr{C}) \geqslant \varphi_{n+1}(\mathscr{C})$ entraîne $\sup\limits_{\mathscr{C} \in \Gamma} (\varphi_n(\mathscr{C})) \geqslant \sup\limits_{\mathscr{C} \in \Gamma} (\varphi_{n+1}(\mathscr{C}))$ et par suite :

$$\varphi_n(A) \geqslant \varphi_{n+1}(A) \qquad (\forall n)$$

Donc $\varphi_n(A)$ tend vers une limite π inférieure ou égale à dim A lorsque n augmente indéfiniment. Cette limite est atteinte pour $n = \nu$.

Donc si $n \geqslant \nu$, toute chaîne $\mathscr{C}$ de A n'a pas plus de π maillons de poids $\geqslant n$ et il y a au moins une chaîne ayant exactement π maillons dont le poids est $\geqslant n$ (1).

n étant un entier $\geqslant \nu$, notons Γ_n l'ensemble des chaînes de A ayant exactement π maillons de poids $\geqslant n$. On a alors :

$$\Gamma_n \neq \varnothing \qquad \Gamma_n \supset \Gamma_{n+1} \qquad (n \geqslant \nu)$$

(1) π n'est pas nécessairement égal à $\sup\limits_{\mathscr{C} \in \Gamma} (\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(\mathscr{C}))$: il est possible à priori que, quelle que soit la chaîne $\mathscr{C}$, chacun de ses maillons ait un poids fini, mais qu'il existe des chaînes ayant des maillons de poids aussi grand qu'on le veut.

Posons :

$$d = \sup_{\mathscr{C}\in\Gamma} [\Lambda(\mathscr{C}, n+1) - \Lambda(\mathscr{C}, n)]$$

L'inégalité :

$$\Lambda(\mathscr{C}, n+1) \leqslant \Lambda(\mathscr{C}, n) + d$$

entraîne :

$$\sup_{\mathscr{C}\in\Gamma} \Lambda(\mathscr{C}, n+1) \leqslant \sup_{\mathscr{C}\in\Gamma} \Lambda(\mathscr{C}, n) + d$$

L'égalité (1) permet d'écrire :

(3) $\dim A^{(n+1)} - \dim A^{(n)} \leqslant \sup_{\mathscr{C}\in\Gamma} [\Lambda(\mathscr{C}, n+1) - \Lambda(\mathscr{C}, n)]$ $(\forall n \geqslant 0)$

Or l'égalité (2) entraîne :

$$\Lambda(\mathscr{C}, n+1) - \Lambda(\mathscr{C}, n) = 1 + \varphi_{n+1}(\mathscr{C})$$

Comme $n \geqslant \nu$ entraîne $\varphi_n(\mathscr{C}) \leqslant \pi$, on en déduit :

(4) $$\dim A^{(n+1)} - \dim A^{(n)} \leqslant 1 + \pi \qquad (\nu \leqslant n).$$

Pour tout $n \geqslant \nu$, posons :

$$\rho(n) = \sup_{\mathscr{C}\in\Gamma_n} (\Lambda(\mathscr{C}, \nu))$$

$\rho(n)$ est un entier inférieur ou égal à $\dim A^{(\nu)}$. L'inclusion $\Gamma_{n+1} \subset \Gamma_n$ entraîne $\rho(n+1) \leqslant \rho(n)$. Comme ρ ne peut prendre que des valeurs entières positives ou nulles, on en déduit l'existence d'une limite :

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho(n)$$

Cette limite est atteinte pour un certain nombre $\mu (\mu \geqslant \nu)$. On notera Γ'_n le sous-ensemble de Γ_n défini par la condition :

$$\mathscr{C}\in\Gamma'_n \rightleftarrows \{\mathscr{C}\in\Gamma_n \quad \text{et} \quad \Lambda(\mathscr{C}, \nu) = \rho\}$$

On a $\Gamma'_n \neq \varnothing$ et $\Gamma'_n \supset \Gamma'_{n+1}$.

Soient $n \geqslant \nu$ et $\mathscr{C}\in\Gamma'_n$. On a :

$$\varphi_n(\mathscr{C}) = \varphi_\nu(\mathscr{C}) = \pi$$

Donc, par applications répétées de l'égalité (2) :

$$\Lambda(\mathscr{C}, n) - \Lambda(\mathscr{C}, \nu) = (n - \nu)(1 + \pi)$$

et comme $\mathscr{C} \in \Gamma'_n$ entraîne $\Lambda(\mathscr{C}, \nu) = \rho$ on a l'égalité :

$$\Lambda(\mathscr{C}, n) = (1 + \pi)(n - \nu) + \rho \qquad (n \geqslant \nu;\ \mathscr{C} \in \Gamma'_n) \tag{5}$$

Posons :

$$\Delta(n) = (1 + \pi)(n - \nu) + \rho$$

L'égalité (5) montre que :

$$0 \leqslant \Delta(n) \leqslant \dim A^{(n)} \qquad (n \geqslant \nu)$$

L'inégalité (4) permet alors d'écrire :

$$0 \leqslant \dim A^{(n+1)} - \Delta(n + 1) \leqslant \dim A^{(n)} - \Delta(n) \qquad (\nu \leqslant n)$$

Par suite $\dim A^{(n)} - \Delta(n)$ tend vers une limite $a \geqslant 0$ lorsque $n \to \infty$, cette limite étant atteinte pour un certain nombre N.

On a donc pour tout $n \geqslant N$: $\dim A^{(n)} = \Delta(n) + a$
ou :

$$\dim A^{(n)} = (1 + \pi)n + \delta \qquad (n \geqslant N) \tag{6}$$

en désignant par δ la constante $\rho + a - (1 + \pi)\nu$.

Il nous reste à montrer que $\pi \leqslant \delta$.

On a
$$\rho = \rho(\mu) = \sup_{\mathscr{C} \in \Gamma_\mu} (\Lambda(\mathscr{C}, \nu))$$

Mais $\mathscr{C} \in \Gamma_\mu \rightleftarrows \mathscr{C}$ a exactement π maillons de poids $\geqslant \mu$.

Le théorème 1 du Chapitre II montre alors immédiatement qu'il existe une chaine spéciale de $A^{(\nu)}$ reposant sur $\mathscr{C}$ et de longueur $\geqslant \pi(\nu + 1) + \nu$. Donc

$$\sup_{\mathscr{C} \in \Gamma_\mu} (\Lambda(\mathscr{C}, \nu)) \geqslant (\pi + 1)\nu + \pi,$$

c'est-à-dire $\rho \geqslant (1 + \pi)\nu + \pi$. Comme $0 \leqslant a$, il en résulte bien

$$\delta \geqslant \pi$$

Nous verrons plus loin (n° 4 du Chapitre IV) que π et δ peuvent prendre des valeurs finies arbitraires assujetties à la seule condition $\pi \leqslant \delta$.

2 — Cas des anneaux de dimension 1

Le comportement de la fonction $f(n) = \dim A^{(n)}$ est particulièrement simple dans le cas où A est un anneau de dimension 1. Reprenons les notations du n° 1.

Toutes les chaînes de A ayant pour longueur 0 ou 1, si $\mathscr{C}$ est une chaîne de A on a $\varphi_n(\mathscr{C}) = 0$ ou 1. Pour que $\varphi_n(\mathscr{C}) = 1$ il faut et il suffit que $\mathscr{C}$ s'identifie à un maillon $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ tel que $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) \geqslant n$. Si $\mathscr{C}$ est une chaîne de longueur 1 de la forme $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, on posera $\delta(\mathscr{C}) = \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$.

$\mathscr{C}$ étant une chaîne quelconque de A, on a donc :

Si $\mathscr{C}$ est de longueur 0 :

$$\Lambda(\mathscr{C}, n) = n$$

et si $\mathscr{C}$ est de longueur 1 :

$$\Lambda(\mathscr{C}, n) = \begin{cases} 2n + 1 & \text{si } n \leqslant \delta(\mathscr{C}) \\ \delta(\mathscr{C}) + n + 1 & \text{si } n \geqslant \delta(\mathscr{C}) \end{cases}$$

Posons $\Delta = \sup\limits_{\mathscr{C} \in \Gamma} \delta(\mathscr{C})$. On a donc :

$$\dim A^{(n)} = \sup_{\mathscr{C} \in \Gamma} \Lambda(\mathscr{C}, n) = \begin{cases} 2n + 1 & \text{si } n \geqslant \Delta \\ \Delta + n + 1 & \text{si } n \geqslant \Delta \end{cases}$$

On peut donc énoncer le :

Théorème 3 — A tout anneau A *de dimension 1 on peut associer un entier* $\Delta \geqslant 0$ *qui peut être infini et tel que* :

$$\dim A^{(n)} = \begin{cases} 2n + 1 & \text{si } n \leqslant \Delta \\ \Delta + n + 1 & \text{si } n \geqslant \Delta \end{cases}$$

On donnera au chapitre IV une interprétation importante de Δ (ce sera la dimension valuative de A).

Corollaire – Si A *est un anneau de dimension 1 tel que* $\dim A^{(n)} < 2n + 1$ *on a pour tout entier* $p > 0$:

$$\dim A^{(n+p)} = \dim A^{(n)} + p$$

Dans le cas où $n = 1$, on retrouve un résultat de Seidenberg ([2], Théorème 5).

3 — Cas des anneaux Noethèriens

Notre but dans ce numéro est de redémontrer le théorème de Krull. (Si A est un anneau noethèrien, dim $A^{(n)} = n +$ dim A pour tout entier n), par des moyens très différents de ceux employés par Krull. Montrons d'abord par une méthode due à Chevalley le résultat suivant d'Akizuki.

Proposition 1 — A étant un anneau d'intégrité noethèrien local de dimension 1, tout anneau B entier sur A et contenu dans le corps des fractions de A est noethèrien.

Si M est un B-module, nous désignerons par $L_B(M)$ sa longueur (c'est-à-dire la longueur maximale de ses chaines de sous-modules).

Soit x un élément de B distinct de 0. Si n est un entier > 0, l'application qui à tout y de B fait correspondre l'élément yx^n est un isomorphisme du B-module B sur le B-module Bx^n qui applique le sous-module Bx de B sur le sous-module Bx^{n+1} de Bx^n. On a donc :

$$L_B(Bx^n/Bx^{n+1}) = L_B(B/Bx)$$

On en déduit immédiatement (à partir du théorème de Jordan-Hölder) que :

$$L_B(Bx^n/Bx^{n+m}) = m L_B(B/Bx) \tag{7}$$

Ceci posé, considérons un anneau B′ contenu dans B et fini sur A, c'est-à-dire de la forme $B' = A[x_1, \ldots, x_p]$. Chaque x_i étant entier sur A et contenu dans le corps des fractions de A, il existe un élément non nul d_i de A tel que $d_i x_i^s \in A$ pour tout entier $s \geqslant 0$. On voit donc que si $d = d_1 \ldots\ldots d_p$ on a $d \neq 0$ et $dB' \subset A$.

Désignons par $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de A. Comme $\mathfrak{p}$ est le seul idéal premier non nul de l'anneau noethèrien A il existe un entier $r > 0$ tel que $\mathfrak{p}^r \subset Ad$ ($d \neq 0$ entraîne en effet $Ad = A$ ou dA $\mathfrak{p}$ – primaire).

Soit x un élément non nul de $\mathfrak{p}$. La relation $x^r \in Ad$ entraîne $B'x^r \subset A$.

Tout idéal de B′ contenu dans $B'x^r$ est donc idéal de A et s'il contient $B'x^{r+n}$ il contient Ax^{r+n}. Par suite :

$$L_{B'}(B'x^r/B'x^{r+n}) \leqslant L_A(A/Ax^{r+n}) \tag{8}$$

La formule (7) entraîne :

$$L_{B'}(B'x^r/B'x^{r+n}) = n\, L_{B'}(B'/B'x)$$

et

$$L_A(A/Ax^{r+n}) = (r+n)\, L_A\,(A/Ax)$$

La formule (8) permet donc d'écrire :

$$n\, L_B'(B'/B'x) \leqslant (r+n)\, L_A(A/Ax)$$

Comme ceci est vrai pour tout $n \geqslant 0$ on a donc :

$$L_B'\,(B'/B'x) \leqslant L_A\,(A/Ax) \tag{9}$$

Ceci posé, raisonnons par l'absurde et supposons que B ne soit pas noethèrien. On peut trouver une suite infinie d'idéaux $\mathfrak{a}_i$ de B, soit :

$$\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots\cdots\cdots \subset \mathfrak{a}_n \subset \cdots\cdots$$

telle que $\mathfrak{a}_{n+1} \neq \mathfrak{a}_n$ pour tout n.

Choisissons $x \neq 0$ dans $\mathfrak{a}_1$ ($\mathfrak{a}_1 \neq \mathfrak{a}_0$ entraîne $\mathfrak{a}_1 \neq (0)$) et posons $L_A(A/Ax) = h$. Pour tout n choisissons $y_n \in \mathfrak{a}_{n+1}$ tel que $y_n \notin \mathfrak{a}_n$ et posons $B' = A[y_1, \ldots\ldots, y_h]$. Les idéaux $\mathfrak{a}_i \cap B'$ $(1 \leqslant i \leqslant h+1)$ de B' sont tous distincts et distincts de B'. Comme il contiennent tous $B'x$ on en conclut que :

$L_B'(B'/B'x) \geqslant h + 1 > L_A(A/Ax)$ contrairement à l'inégalité (9). Par suite B est bien noethèrien, ce qui montre la proposition.

Théorème 4 (Krull) — La fermeture intégrale d'un anneau d'intégrité noethèrien local A *de dimension 1 est un anneau de Dedekind* (¹).

B désignant cette fermeture intégrale, la proposition 1 montre que B est noethèrien. D'autre part B est intégralement clos par hypothèse, et de dimension 1 (Proposition 2 du Chapitre I). Le théorème classique d'E. Noether (²) montre alors que B est un anneau de Dedekind, d'où le théorème.

Ceci posé, montrons le :

Théorème 5 — Tout anneau noethèrien est léger.

Soient A un anneau noethèrien et deux idéaux premiers $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}$ de A tels que $\mathfrak{p}$ soit un suridéal premier immédiat de $\mathfrak{q}$. Il faut montrer que $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = 0$. En passant au quotient par $\mathfrak{q}$ on peut supposer que A est intègre et que $\mathfrak{q} = (0)$.

La proposition 4 du Chapitre II montre que l'on peut supposer, en remplaçant au besoin A par $A_{\mathfrak{p}}$, que A est local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

(¹) En fait B est un anneau principal n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux premiers (Cf. KRULL [1] et Northcott [1]).

(²) Cf. E. NOETHER [2] ou VAN DER WAERDEN [2] § 102.

Le théorème 4 montre alors que la fermeture intégrale A' de A est un anneau de Dedekind, donc de Prüfer. D'après la proposition 5 du Chapitre II il existe un idéal premier $\mathfrak{p}'$ de A' tel que $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$ et tel que $\delta((0), \mathfrak{p}) = \delta((0), \mathfrak{p}')$. Comme A' est sans poids, on a $\delta((0), \mathfrak{p}') = (0)$ et par suite $\delta((0), \mathfrak{p}) = (0)$. D'où le théorème.

Le théorème 1 du Chapitre II montre que le théorème 5 est équivalent au :

Corollaire — Si $\mathfrak{p}$ *est un surideal premier immédiat de l'idéal premier* $\mathfrak{q}$ *dans l'anneau noethèrien* A, *l'idéal premier* $\mathfrak{p}A^{(1)}$ *est surideal premier immédiat de* $\mathfrak{q}A^{(1)}$ *dans* $A^{(1)}$.

Ce corollaire est démontré par Krull ([6]) à partir du théorème de l'idéal principal. (Dans un anneau noètherien tout surideal premier minimal d'un idéal principal a pour hauteur 0 ou 1), dont nous n'avons pas eu à nous servir. Par contre Krull ne se sert pas du théorème 4.

$\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}$ étant deux idéaux premiers d'un anneau A tels que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, désignons par $d(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ la borne supérieure des longueurs des chaines d'idéaux premiers de A dont le premier terme est $\mathfrak{q}$ et le dernier $\mathfrak{p}$. (C'est encore la dimension de l'anneau $(A/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}$). C'est un entier positif ou nul, fini ou non.

Ceci posé, on peut énoncer le :

Théorème 6 — Soit A *un anneau tel que l'anneau* $A^{(n)}$ *soit léger quel que soit l'entier n positif ou nul. Si* $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{q}$ *sont deux idéaux premiers de* A *distincts et tels que* $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, *on a la relation* :

$$\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) \leqslant d(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) - 1 \tag{10}$$

L'inégalité à démontrer étant triviale si $d(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \infty$, il suffit de la démontrer pour $d(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ fini, ce que nous allons faire en raisonant par récurrence sur $d(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$. Puisque A est léger, l'inégalité (10) est vraie par définition si $d(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = 1$. Supposons la vraie toutes les fois que $d(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) < n$ et supposons $d(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = n$ $(n \geqslant 2)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'on ait $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) \geqslant n$. Nous considérerons ici $A^{(n)}$ comme anneau de polynomes à une variable sur $A^{(n-1)}$. On aura donc $A \subset A^{(n-1)} \subset A^{(n)}$.

Le théorème 1 du chapitre II montre l'existence d'un idéal premier $\mathcal{Q}_n$ de $A^{(n)}$ tel que $\mathcal{Q}_n \cap A = \mathfrak{q}$, $hr_A(\mathcal{Q}_n) = n$ et $\mathcal{Q}_n \subset \mathfrak{p}A^{(n)}$. Posons $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}_n \cap A^{(n-1)}$.

Le corollaire 4 du théorème III (Ch. I) permet d'écrire :

$$hr_A(\mathcal{Q}_n) = hr_A(\mathcal{Q}') + hr_{A^{(n-1)}}(\mathcal{Q}_n)$$

Les relations $hr_A(\mathcal{Q}') \leqslant n-1$ et $hr_A{}^{(n-1)}(\mathcal{Q}_n) = 0$ ou 1 (corollaire 1 du théorème 3, Ch. I) montrent alors que :

$$hr_A(\mathcal{Q}') = n-1 \qquad \text{et} \qquad hr_A{}^{(n-1)}(\mathcal{Q}_n) = 1.$$

Soit $\mathcal{Q}_{n-1} = \mathcal{Q}'A^{(n)}$. On a :

$$hr_A(\mathcal{Q}_{n-1}) = hr_A{}^{(n-1)}(\mathcal{Q}_{n-1}) + hr_A(\mathcal{Q}') = n-1.$$

Donc $\mathcal{Q}_n$ est un suridéal premier immédiat de $\mathcal{Q}_{n-1}$.

Montrons que $\mathfrak{p}A^{(n-1)}$ est un suridéal premier immédiat de $\mathcal{Q}'$. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'on ait dans $A^{(n-1)}$ une chaîne sans répétitions de la forme :

$$\mathcal{Q}' \subset \mathcal{R} \subset \mathfrak{p}A^{(n-1)}$$

Comme $hr_A(\mathcal{Q}') = n-1$ on a $\mathcal{R} \cap A = \mathfrak{r} \neq \mathfrak{q}, \mathfrak{p}$ (Corollaire 1 du théorème 3, Ch. I).

D'après le théorème 2 du Chapitre II, il existe dans $A^{(n-1)}$ une chaîne sans répétition de la forme :

$$\mathfrak{q}A^{(n-1)} \subset \mathcal{T}_1 \subset \dots\dots\dots \subset \mathcal{T}_n = \mathcal{R}$$

(en tenant compte de $hr_A(\mathcal{Q}') = n-1$)

dont tous les éléments reposent sur $\mathfrak{q}$ ou sur $\mathfrak{r}$ et telle que $\mathfrak{r}A^{(n-1)}$ soit de la forme $\mathcal{T}_i$.

On en déduit alors $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{r}) \geqslant i-1$ et $n-i \leqslant hr_A(\mathcal{R}) = s$. Ces inégalités entraînent $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{r}) \geqslant n-s-1$. L'inclusion $\mathcal{R} \subset \mathfrak{p}A^{(n-1)}$ entraîne $\delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{p}) \geqslant s$. Par suite :

(11) $$\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{r}) + \delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{p}) \geqslant n-1.$$

Mais les hypothèses de récurrence et les inégalités :

$$d(\mathfrak{q}, \mathfrak{r}) + d(\mathfrak{r}, \mathfrak{p}) \leqslant d(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = n$$

entraînent :

$$\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{r}) + \delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{p}) < n-1$$

ce qui contredit l'inégalité (11).

Il en résulte que $\mathfrak{p}A^{(n-1)}$ est un suridéal premier immédiat de $\mathcal{Q}'$. Comme, par hypothèse, $A^{(n-1)}$ est un anneau léger, on a donc : $\delta(\mathcal{Q}', \mathfrak{p}A^{(n-1)}) = 0$, ce qui contredit l'existence de la chaîne sans répétition :

$$\mathcal{Q}'A^{(n)} \subset \mathcal{Q}_n \subset \mathfrak{p}A^{(n)}$$

Cette contradiction montre que $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) < n$ et achève de montrer le théorème 6.

Corollaire 1 — Si $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{q}$ *sont deux idéaux premiers d'un anneau noethèrien, tels que* $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, *on a la relation :*

$$\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) \leqslant d(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) - 1 \quad (^1)$$

Ceci résulte immédiatement des théorèmes 5 et 6 et du fait que tout anneau de polynomes à un nombre fini de variables sur un anneau noethèrien est aussi noethèrien.

Corollaire 2 — Soit A *un anneau tel que l'anneau* $A^{(n)}$ *soit léger quel que soit l'entier n positif ou nul. Si* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}$ *sont deux idéaux premiers de* $A^{(n)}$ *tels que* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P} \cap A \neq \mathcal{Q} \cap A$, *on a la relation :*

$$hr_A(\mathcal{Q}) - hr_A(\mathcal{P}) \leqslant d(\mathcal{Q} \cap A, \mathcal{P} \cap A) - 1$$

C'est une conséquence immédiate du théorème 4 du chapitre II et du théorème 6.

Corollaire 3 — Soit A *un anneau tel que* $A^{(n)}$ *soit léger quel que soit l'entier n positif ou nul. On a pour toute valeur de n :*

$$\dim A^{(n)} = n + \dim A$$

Reprenons les notations du corollaire 2 du théorème 3 (Ch. I) et soit une chaîne sans répétition $\mathscr{C}$ de A de la forme (Ch. I, (5)), les conditions (Ch. I, (6)) étant vérifiées. Le corollaire 2 permet d'écrire :

$$hr_A(\mathcal{P}_{i,\alpha(i)}) - hr_A(\mathcal{P}_{i+1,0}) \leqslant d(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}) - 1 \quad (0 \leqslant i \leqslant k-1)$$

Les relations évidentes :

$$\alpha(i) \leqslant hr_A(\mathcal{P}_{i,\alpha(i)}) - hr_A(\mathcal{P}_{i,0})$$

entraînent alors :

$$\alpha(i) \leqslant hr_A(\mathcal{P}_{i+1,0}) - hr_A(\mathcal{P}_{i,0}) + d(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}) - 1 \qquad (0 \leqslant i \leqslant k-1)$$

En additionnant membres à membres ces k inégalités on trouve :

$$\alpha(0) + \ldots\ldots + \alpha(k-1) \leqslant hr_A(\mathcal{P}_{k,0}) - hr_A(\mathcal{P}_{0,0}) + \sum_{0 \leqslant i \leqslant k-1} d(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}) - k;$$

On en déduit que la longueur s de la chaîne $\mathscr{C}$ vérifie l'inégalité :

$$(12) \quad s \leqslant k + \alpha(k) + hr_A(\mathcal{P}_{k,0}) - hr_A(\mathcal{P}_{0,0}) + \sum_{0 \leqslant i \leqslant k-1} d(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}) - k$$

(1) (Note rajoutée pendant la correction des épreuves). On peut en fait montrer que l'on a une égalité (P. Jaffard [4]).

Mais en remarquant que :

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant k-1} d(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}) \leqslant \dim A$$

et que :

$$hr_A(\mathscr{P}_{k,0}) + \alpha(k) \leqslant n$$

l'inégalité (12) permet d'écrire :

$$s \leqslant n + \dim A.$$

On a donc $\dim A^{(n)} \leqslant n + \dim A$. D'où le corollaire (en tenant compte du corollaire 2 du théorème 3, Ch. I).

Corollaire 4 (Théorème de Krull) — Si A *est un anneau noethèrien, on a pour tout entier* $n \geqslant 0$:

$$\dim A^{(n)} = n + \dim A$$

C'est une conséquence immédiate du corollaire 3 et du théorème 5.

4 — Le lemme de Seidenberg et ses conséquences

Montrons le résultat suivant :

Proposition 2 (Lemme de Seidenberg) — Soient A *un anneau d'intégrité intégralement clos n'ayant qu'un seul idéal maximal* $\mathfrak{p}$ *et* K *le corps des fractions de* A. *Si* α *est un élément de* K *tel que* $\alpha \notin A$, $1/\alpha \notin A$, *l'anneau* $A[\alpha]/\mathfrak{p}A[\alpha]$ *est canoniquement isomorphe à* $(A/\mathfrak{p})^{(1)}$.

$(\alpha, \mathfrak{p})$ étant l'idéal de $A[\alpha]$ engendré par α et $\mathfrak{p}$, on a :

$$(\alpha, \mathfrak{p}) \neq A[\alpha] \tag{13}$$

En effet, si l'inégalité (13) n'était pas réalisée, on aurait une égalité de la forme :

$$1 = a_0 + a_1\alpha + \ldots\ldots + a_n\alpha^n \qquad (a_0 \in \mathfrak{p},\ a_i \in A;\ 1 \leqslant i \leqslant n)$$

L'inclusion $a_0 \in \mathfrak{p}$ entraînerait $1 - a_0 \notin \mathfrak{p}$ et par suite $1 - a_0$ serait inversible dans A, d'où :

$$(1/\alpha)^n + \frac{a_1}{a_0 - 1}(1/\alpha)^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{a_n}{a_0 - 1} = 0$$

Mais alors $1/\alpha$ serait entier sur A et on aurait la contradiction $1/\alpha \in A$.

Soit maintenant $A^{(1)} = A[x]$ et $g(x)$ un élément unitaire de $A^{(1)}$. Montrons la relation :

$$g(\alpha) \notin \mathfrak{p}A[\alpha] \tag{14}$$

Si $g \in A$, on a $g = 1$ et (14) est une conséquence de (13). Supposons donc $g \notin A$.

Comme α n'est pas entier sur A, $g(\alpha) \notin A$. On ne peut avoir non plus $1/g(\alpha) \in A$ car on aurait alors $1/g(\alpha) \in \mathfrak{p}$ et $1 \in \mathfrak{p}A[\alpha]$ contrairement à l'inégalité (13). On peut donc appliquer (13) à $g(\alpha)$ et on a dans l'anneau $A[g(\alpha)]$:

$$(g(\alpha), \mathfrak{p}) \neq A[g(\alpha)] \tag{15}$$

L'égalité (15) montre qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{m}$ de $A[g(\alpha)]$ qui contient $g(\alpha)$ et $\mathfrak{p}$.

Comme α est racine de $g(x) - g(\alpha) = 0$, on voit que $A[\alpha]$ est entier sur $A[g(\alpha)]$ et par suite (¹) il existe un idéal premier $\mathfrak{m}'$ de $A[\alpha]$ tel que $\mathfrak{m}' \cap A[g(\alpha)] = \mathfrak{m}$.

On a donc dans $A[\alpha]$:

$$(g(\alpha), \mathfrak{p}) \neq A[\alpha] \tag{16}$$

De la même manière, en considérant $1 + g$ au lieu de g :

$$(1 + g(\alpha), \mathfrak{p}) \neq A[\alpha] \tag{17}$$

Si on avait l'inclusion $g(\alpha) \in \mathfrak{p}A[\alpha]$, on aurait $1 = 1 + g(\alpha) - g(\alpha) \in (1 + g(\alpha), \mathfrak{p}A[\alpha])$ ce qui contredirait l'inégalité (17). On a donc bien la relation (14).

Ceci posé, considérons l'homomorphisme canonique f de $A[x] = A^{(1)}$ sur $A[\alpha]$ qui laisse invariants les éléments de A et tel que $f(x) = \alpha$. On a évidemment $\mathfrak{p}A[x] \subset f^{-1}(\mathfrak{p}A[\alpha])$.

Soit $g \in A[x]$ tel que $g \notin \mathfrak{p}A[x]$. On peut écrire $g = g_1 + g_2$ avec $g_2 \in \mathfrak{p}A[x]$ et aucun coefficient de g_1 n'appartenant à $\mathfrak{p}$. Soit c le coefficient du terme de plus haut degré de g_1. Comme $c \notin \mathfrak{p}$, c est inversible et g_1/c est unitaire. La relation (14) entraîne alors :

$$g_1(\alpha)/c \notin \mathfrak{p}A[\alpha]$$

Comme c est unitaire, on a donc $g_1(\alpha) \notin \mathfrak{p}A[\alpha]$ et comme $g_2(\alpha) \in \mathfrak{p}A[\alpha]$ on a $g(\alpha) \notin \mathfrak{p}A[\alpha]$. Par suite :

$$\mathfrak{p}A[x] = f^{-1}(\mathfrak{p}A[\alpha]).$$

(¹) Une valuation de $A[g(\alpha)]$ ayant pour centre $\mathfrak{m}$ sur $A[g(\alpha)]$ est une valuation de $A[\alpha]$ dont le centre $\mathfrak{m}'$ sur $A[\alpha]$ répond à la question.

D'où l'homomorphisme canonique :

$$A[\alpha]/\mathfrak{p}A[\alpha] \cong A[x]/\mathfrak{p}A[x] \cong (A/\mathfrak{p})^{(1)}$$

qu'il fallait démontrer.

On en déduit le :

Corollaire 1 — Soit $\mathfrak{p}$ *un idéal premier d'un anneau d'intégrité intégralement clos* A. *Pour que l'anneau* $A_{\mathfrak{p}}$ *soit de valuation, il faut et il suffit que l'on ait l'égalité* $\delta((0), \mathfrak{p}) = 0$.

La proposition du 4 Chapitre II montre que l'on peut toujours supposer $A = A_{\mathfrak{p}}$.

Si A est un anneau de valuation, il n'y a qu'une seule valuation de A ayant $\mathfrak{p}$ pour centre sur A. La proposition 1 du Chapitre II montre alors que $\delta((0), \mathfrak{p}) = 0$.

Si A n'est pas un anneau de valuation, il existe un élément α du corps des fractions K de A tel que $\alpha \notin A$ et $1/\alpha \notin A$. Le lemme de Seidenberg montre alors que l'homomorphisme $A \to A/\mathfrak{p}$ peut se prolonger en un homomorphisme de $A[\alpha]$ sur $(A/\mathfrak{p})^{(1)}$. Cet homomorphisme peut à son tour se prolonger en une spécialisation φ du corps des fractions K de A. Comme $\varphi(K) \supset (A/\mathfrak{p})^{(1)}$, on voit que *d.t.* $[\varphi(K) : A/\mathfrak{p}] \geq 1$, ce qui entraîne $\delta((0), \mathfrak{p}) \geq 1$, d'où le corollaire.

Corollaire 2 — Soit $\mathfrak{p}$ *un idéal premier d'un anneau d'intégrité intégralement clos* A. *Si l'anneau* $A_{\mathfrak{p}}$ *n'est pas de valuation, il existe un couple de valuations* v_1 *et* v_2 *de* A *ayant chacune* $\mathfrak{p}$ *pour centre sur* A *et telles que* $v_1 < v_2$.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 1 du Chapitre II et du corollaire 1.

Corollaire 3 — Pour que la fermeture intégrale A′ *d'un anneau d'intégrité* A *soit un anneau de Prüfer, il faut et il suffit que* A *soit un anneau sans poids.*

Comme A et A′ sont sans poids en même temps (Ch. II, corollaire de la proposition 5) on peut supposer A intégralement clos, c'est-à-dire $A = A'$.

Si A est de Prüfer, nous avons vu qu'il est sans poids (Ch. II, corollaire 2 de la proposition 2).

Si A est sans poids, le corollaire 1 montre que $A_{\mathfrak{p}}$ est de valuation, quel que soit l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. L'anneau A est donc de Prüfer d'où le corollaire.

Corollaire 4 (Seidenberg) — Soit A *un anneau d'intégrité de dimension 1. Pour que l'anneau* $A^{(1)}$ *soit de dimension 2, il faut et il suffit que la fermeture intégrale de* A *soit un anneau de Prüfer.*

Reprenons les notations du théorème 1 et de sa démonstration. La formule :

$$\dim A^{(1)} = \sup_{\mathscr{C} \in \Gamma} \Lambda(\mathscr{C}, 1)$$

montre en effet que si $\dim A = 1$, une condition nécessaire et suffisante pour que $\dim A^{(1)} = 2$ est que A soit sans poids. Le corollaire 4 est alors une conséquence du corollaire 3.

Les corollaires qui précèdent montrent accessoirement que dans l'énoncé de la proposition 3 du Chapitre II on ne peut remplacer l'inégalité (1) par l'égalité correspondante. Si on pouvait le faire on en concluerait sans peine que tout anneau léger de dimension finie serait sans poids, donc en particulier (corollaire 3) que tout anneau noethèrien intégralement clos de dimension finie serait de Prüfer (et donc de Dedekind, puisque noethèrien), ce qui est manifestement inexact comme le montre l'exemple d'un anneau de polynomes à deux variables sur un corps.

CHAPITRE IV

La notion de dimension valuative

1 — Dimension valuative d'un anneau

Si on en excepte la proposition 3 et les corollaires 3, 4 et 5 du théorème 2, le début de ce chapitre (jusqu'au théorème 4) est indépendant des notions et des résultats exposés dans les chapitres II et III.

Etant donné un anneau d'intégrité A, nous appelerons *dimension valuative* de A et nous désignerons par $\dim_v A$ la borne supérieure (finie ou non) des longueurs des chaines sans répétitions de valuations de A :

$$v_0 < v_1 < \ldots\ldots\ldots\ldots < v_s$$

(chaque v_i est une valuation de A strictement plus fine que la valuation v_{i-1} $(1 \leqslant i \leqslant s)$). C'est aussi la borne supérieure des rangs des valuations, de A, c'est-à-dire encore la borne supérieure des rangs des spécialisations φ du corps des fractions de A qui restent finies sur A (c'est-à-dire telles que $\infty \notin \varphi(A)$).

Lemme 1 — Si $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier de l'anneau intègre* A, *on a* :

$$\dim_v A/\mathfrak{p} \leqslant \dim_v A$$

Soit s un entier fini $\leqslant \dim_v A/\mathfrak{p}$. Désignons par K le corps des fractions de A et par k le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$. Par définition il existe une spécialisation φ de k de rang s finie sur $A/\mathfrak{p}$. L'homomorphisme canonique $A \to A/\mathfrak{p}$ peut se prolonger en une spécialisation ψ de K sur un surcorps L de k et la spécialisation φ peut se prolonger en une spécialisation φ' de L sur un surcorps de $\varphi(k)$. On voit alors que $\varphi'\psi$ est une spécialisation de K restant finie sur A et dont le rang est supérieur ou égal à s. On en déduit donc le lemme.

Remarque — Si $\mathfrak{p} \neq (0)$, $\dim_v A/\mathfrak{p} \leqslant \dim_v A + 1$.

En effet dans ce cas ψ n'est pas triviale et $\varphi'\psi$ a un rang $\geqslant s + 1$.

Soient A un anneau quelconque (commutatif avec élément unité) et P l'ensemble des idéaux premiers de A. On considère le nombre s (fini ou non) défini par :

$$s = \operatorname*{Sup}_{\mathfrak{p} \in P} (\dim_v A/\mathfrak{p})$$

D'après le lemme, si A est intègre on a $s = \dim_v A$. Que A soit intègre ou non, nous dirons que s est la *dimension valuative* de l'anneau A et nous écrirons :

$$s = \dim_v A.$$

Théorème 1 — La dimension d'un anneau est toujours inférieure ou égale à sa dimension valuative.

Soit A un anneau d'intégrité. Si n est un nombre fini $\leqslant$ dim A on peut trouver une chaîne sans répétitions de longueur n d'idéaux premiers de A, soit :

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots\cdots\cdots \subset \mathfrak{p}_n$$

D'après le corollaire 2 du théorème 1 (Ch. I), il existe une valuation v_0 de A de centre $\mathfrak{p}_0$ sur A. Le corollaire 3 du théorème I (Ch. I) montre l'existence d'une valuation v_1 de A ayant pour centre $\mathfrak{p}_1$ sur A et telle que $v_0 < v_1$. La répétition de ce procédé montre l'existence d'une chaîne (sans répétitions) de valuations de A :

$$v_0 < v_1 < \cdots\cdots\cdots < v_n$$

Par suite dim A $\leqslant$ $\dim_v$ A, ce qui montre le théorème 1 dans le cas des anneaux d'intégrité.

Soient maintenant A un anneau que nous ne supposerons plus intègre et P l'ensemble des idéaux premiers de A. On a, d'après ce qui précède :

$$\dim A = \operatorname*{Sup}_{\mathfrak{p} \in P} (\dim A/\mathfrak{p}) \leqslant \operatorname*{Sup}_{\mathfrak{p} \in P} (\dim_v A/\mathfrak{p}) = \dim_v A$$

ce qui achève demontrer le théorème 1.

On peut avoir dans certains cas l'égalité dim A = $\dim_v$ A comme le montre le résultat suivant :

Proposition 1 — La dimension d'un anneau de Prüfer est égale à sa dimension valuative.

Soit A un anneau de Prüfer. La correspondance qui à tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A fait correspondre la valuation $v_{\mathfrak{p}}$ de A définie par l'anneau de valuation $A_{\mathfrak{p}}$ est une application biunivoque de l'ensemble des idéaux premiers de A sur l'ensemble des valuations de A telle que :

$$\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p} \rightleftarrows v_{\mathfrak{q}} \leqslant v_{\mathfrak{p}}$$

On en déduit qu'à toute chaîne (sans répétitions) d'idéaux premiers de A correspond une chaîne (sans répétitions) de valuations de A et réciproquement, ce qui entraîne immédiatement la validité de la proposition 1.

Proposition 2 — Si $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier de l'anneau intègre* A, *on a l'inégalité* :

$$\dim_v A_{\mathfrak{p}} + \dim_v A/\mathfrak{p} \leqslant \dim_v A$$

Soient s et t deux entiers finis tels que $s \leqslant \dim_v A_{\mathfrak{p}}$ et $t \leqslant \dim_v A/\mathfrak{p}$. Désignons par K et k les corps des fractions respectifs de A et de $A/\mathfrak{p}$. L'inégalité $t \leqslant \dim_v A/\mathfrak{p}$ montre qu'il existe une spécialisation ψ de k restant finie sur $A/\mathfrak{p}$ et de rang au moins égal à t.

L'inégalité $s \leqslant \dim_v A_{\mathfrak{p}}$ montre qu'il existe une spécialisation φ de K restant finie sur $A_{\mathfrak{p}}$ et de rang au moins égal à s. Comme φ reste finie sur $A_{\mathfrak{p}}$, on en déduit qu'elle reste finie sur A et que son centre $\mathfrak{q}$ sur A est contenu dans $\mathfrak{p}$. L'homomorphisme $A/\mathfrak{q} \to A/\mathfrak{p}$ peut s'étendre en une spécialisation χ de $\varphi(K)$ sur un surcorps de k. La spécialisation ψ peut s'étendre en une spécialisation ψ' de $\chi(\varphi(K))$, On voit que $\psi'\chi\varphi$ est une spécialisation de K restant finie sur A et de rang au moins égal à $s + t \leqslant \dim_v A$, ce qui entraîne la proposition 2.

Proposition 3 — Pour que l'anneau A *ait une dimension valuative finie il faut et il suffit que la dimension de* A *soit finie et que l'ensemble des nombres* $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ *où* $(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ *parcourt l'ensemble des couples d'idéaux premiers de* A *tels que* $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ *soit borné par un nombre fini.*

Supposons $\dim_v A < \infty$. Le théorème 1 montre que la dimension de A est finie. Si $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ est une chaîne d'idéaux premiers de A, la proposition 1 du Chapitre II montre que $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) \leqslant \dim_v A/\mathfrak{q}$. Ceci entraîne $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) \leqslant \dim_v A/\mathfrak{q} \leqslant \dim_v A$ et la condition énoncée dans la proposition 3 est bien nécessaire.

Montrons qu'elle est suffisante et supposons pour cela $\dim A < \infty$ et les $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ bornés par entier fini M.

$\mathfrak{p}$ étant un idéal premier de A, soit :

$$v_0 < v_1 < \ldots\ldots < v_n$$

une chaîne sans répétitions de valuations de $A/\mathfrak{p}$. Cette chaîne peut s'écrire sous la forme :

$$v_{0,0} < v_{0,1} < \ldots. < v_{0,a(0)} < v_{1,0} < \ldots. < v_{i,0} < \ldots. < v_{i,a(i)} < v_{i+1,0} < \ldots.$$
$$\ldots. < v_{k,a(k)}$$

le centre de $v_{i,j}$ sur $A/\mathfrak{p}$ coïncidant avec celui de $v_{i',j'}$ si et seulement si $i = i'$.

On a évidemment $k \leqslant \dim A/\mathfrak{p} \leqslant \dim A$.

D'autre part si $\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}$ est le centre de $v_{i,0}$ sur $A/\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}_i$ étant un idéal premier de A), la proposition 1 du chapitre II montre que

$$\alpha(i) \leqslant \delta((0), \mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}) = \delta(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_i) \leqslant M.$$

En remarquant que si $v_{0,0}$ est la valuation triviale de $A/\mathfrak{p}$, on a $\alpha(0) = 0$, on voit que la longueur n de la chaîne considérée est inférieure ou égale à $(M + 1) \dim A$ et $\dim_v A \leqslant (M + 1) \dim A$, ce qui achève de montrer la proposition 3.

Cette démonstration montre que l'on peut énoncer le :

Corollaire 1 — A étant un anneau quelconque, on a l'inégalité :

$$\dim_v A \leqslant (1 + \sup_{\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}} \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})) \dim A$$

Corollaire 2 — La dimension d'un anneau sans poids est égal à sa dimension valuative.

Si A est sans poids, on a $\sup_{\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}} \delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = 0$. Le corollaire 1 entraîne alors $\dim_v A \leqslant \dim A$ et le corollaire 2 est une conséquence du théorème 1.

Le corollaire 2 contient comme cas particulier la proposition 1.

Proposition 4 — Si A′ est un anneau entier sur un anneau A, la dimension valuative de A′ est égale à celle de A.

Supposons d'abord intègre l'anneau A′ dont nous désignerons par K′ le corps des fractions et soit n un entier fini $\leqslant \dim_v A$. Il existe une chaîne sans répétitions de valuations de A ayant pour longueur n, soit :

$$v_0 < v_1 < \ldots\ldots < v_n$$

La valuation v_n peut se prolonger en une valuation v'_n de K′. La proposition 1 du Chapitre I montre que v_{n-1} peut se prolonger en une valuation v'_{n-1} de K′ telle que $v'_{n-1} < v'_n$. En répétant le procédé on obtient une chaîne de valuations :

$$v'_0 < v'_1 < \ldots\ldots < v'_n$$

de K′, chaque v'_i prolongeant v_i. Comme A′ est entier sur A, v'_i est une valuation de A′ $(0 \leqslant i \leqslant n)$. Donc $n \leqslant \dim_v A'$.

On en déduit $\dim_v A \leqslant \dim_v A'$.

Soit maintenant m un entier fini $\leqslant \dim_v A'$. Il existe une chaîne sans répétitions de valuations A′ ayant pour longueur m :

$$w'_0 < w'_1 < \ldots\ldots < w'_m$$

Chaque w'_i induit une valuation w_i de A et on a :

$$w_0 \leqslant w_1 \leqslant \ldots\ldots\ldots \leqslant w_m$$

Le corollaire 9 du théorème 2 (Ch. I) montre que l'on a les inégalités strictes :

$$w_0 < w_1 < \ldots\ldots\ldots < w_m$$

ce qui entraîne $m \leqslant \dim_v A$ et par suite $\dim_v A' \leqslant \dim_v A$. La proposition 4 est donc vraie si A est intègre.

Soit maintenant A′ quelconque. Désignons par P l'ensemble de idéaux premiers de A et par P′ l'ensemble des idéaux premiers de A′. Si $\mathfrak{p}' \in P'$, on a $\mathfrak{p}' \cap A \in P$. Réciproquement si $\mathfrak{p} \in P$, il existe un $\mathfrak{p}' \in P'$ tel que $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$ (1). L'anneau d'intégrité $A'/\mathfrak{p}'$ étant entier sur l'anneau $A/\mathfrak{p}' \cap A$, la validité de la proposition 4 pour les anneaux intègres entraîne la suite d'égalités :

$$\dim_v A' = \sup_{\mathfrak{p}' \in P'} (\dim_v A'/\mathfrak{p}') = \sup_{\mathfrak{p}' \in P'} (\dim_v A/\mathfrak{p}' \cap A) = \sup_{\mathfrak{p} \in P} (\dim_v A/\mathfrak{p}) =$$
$$= \dim_v A.$$

Ce qui achève de montrer la proposition 4.

Proposition 5 — Soit A *un anneau d'intégrité contenant un corps* k *et soit* K *le corps des fractions de* A. *On a l'inégalité* :

$$\dim_v A \leqslant d.t.\,[K:k]$$

$\dim_v A$ est la borne supérieure des rangs des spécialisations de K qui restent finies sur A. Or toute spécialisation de K restant finie sur A est triviale sur k. La proposition 5 est donc une conséquence immédiate du corollaire 1 du théorème 2 (Ch. I).

Proposition 6 — Soit A *un anneau d'intégrité dont le corps des fractions* K *a un degré de transcendance noté* $d.t.(K)$.

Si K *a une caractéristique non nulle, on a l'inégalité* :

$$\dim_v A \leqslant d.t.(K)$$

(1) Cf. Cohen et Seidenberg [1].

et si K *a une caractéristique nulle* :

$$\dim_v A \leqslant 1 + d.t.\,(K)$$

Si K a une caractéristique non nulle, l'anneau A contient le sous-corps premier P de K. La proposition 5 permet donc d'écrire :

$$\dim_v A \leqslant d.t.\,[K:P].$$

Mais $d.t.(K) = d.t.\,[K:P] + d.t.(P) = d.t.\,[K:P]$, d'où l'inégalité :

$$\dim_v A \leqslant d.t.(K)$$

Lorsque K a une caractéristique nulle son sous-corps premier peut s'identifier au corps **Q** des nombres rationnels. Si φ est une spécialisation de rang n' de K, elle induit sur **Q** une spécialisation de rang n telle que $n' \leqslant n + d.t.\,[K:\mathbf{Q}]$ (théorème 2 du Chapitre I). Or il est classique que $n = 0$ ou 1 (Krull [2]), donc $n' \leqslant 1 + d.t.\,[K:\mathbf{Q}]$ ce qui entraîne

$$\dim_v A \leqslant 1 + d.t.\,[K:\mathbf{Q}] = 1 + d.t.(K)$$

et qui achève de montrer la proposition 6.

2 — Etude de la fonction $f(n) = \dim A^{(n)}$ dans le cas où A est un anneau de dimension valuative finie

Montrons d'abord le :

Théorème 2 — A étant un anneau quelconque et n un entier fini, on a l'égalité :

$$\dim_v A^{(n)} = n + \dim_v A$$

Supposons d'abord A intègre.

Soit d un entier fini $\leqslant \dim_v A$. Il existe une valuation de A de rang $m \geqslant d$. On a vu (Ch. I, démonstration du théorème 2) que cette valuation pouvait se prolonger en une valuation de rang $n + m$ de l'anneau $A^{(n)}$. On a donc $\dim_v A^{(n)} \geqslant n + m$ ce qui entraîne $\dim_v A^{(n)} \geqslant n + \dim_v A$. Soit maintenant d' un entier fini $\leqslant \dim_v A^{(n)}$. Il existe une valuation v' de rang $m' \geqslant d'$ de $A^{(n)}$ qui induit sur A une valuation de rang m. Le théorème 2 du Chapitre I montre que $m' \leqslant m + d.t.\,[A^{(n)}:A] = m + n$. L'inégalité $m \geqslant m' - n$ entraîne $\dim_v A \geqslant m' - n$ et par suite $\dim_v A \geqslant \dim_v A^{(n)} - n$, d'où le théorème lorsque A est intègre.

Supposons maintenant A quelconque.

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, on a l'égalité :

$$\dim_v (A/\mathfrak{p})^{(n)} = n + \dim_v (A/\mathfrak{p})$$

Mais l'anneau $(A/\mathfrak{p})^{(n)}$ étant isomorphe à $A^{(n)}/\mathfrak{p}A^{(n)}$, on en déduit :

$$\dim_v A^{(n)}/\mathfrak{p}A^{(n)} = n + \dim_v (A/\mathfrak{p}) \tag{1}$$

ce qui entraîne immédiatement :

$$\dim_v A^{(n)} \geqslant n + \dim_v A$$

Soit maintenant un entier fini $s \leqslant \dim_v A^{(n)}$. Il existe un idéal premier $\mathscr{P}$ de $A^{(n)}$ tel que $\dim_v A^{(n)}/\mathscr{P} \geqslant s$. Soit $\mathfrak{p} = \mathscr{P} \cap A$.

L'inclusion $\mathfrak{p}A^{(n)} \subset \mathscr{P}$ et le lemme 1 entraînent :

$$\dim_v A^{(n)}/\mathfrak{p}A^{(n)} \geqslant \dim_v A^{(n)}/\mathscr{P}$$

L'égalité (1) entraîne alors :

$$\dim_v A/\mathfrak{p} \geqslant s - n$$

On en déduit :

$$\dim_v A \geqslant s - n$$

et par suite :

$$n + \dim_v A \geqslant \dim A^{(n)}$$

ce qui achève de montrer le théorème 2.

Corollaire 1 — Si A *est un anneau dont la dimension est égale à la dimension valuative, quel que soit l'entier n on a l'égalité* :

$$\dim A^{(n)} = n + \dim A.$$

(C'est une conséquence immédiate des théorème 1 et 2 (compte tenu du corollaire 2 du théorème 3 (Ch. I).)

Corollaire 2 (Théorème de Seidenberg) = Si A *est un anneau d'intégrité dont la fermeture intégrale* B *est un anneau de Prüfer, on a pour tout entier n l'égalité* :

$$\dim A^{(n)} = n + \dim A$$

On a en effet $\dim B = \dim_v B$ (proposition 1). Or $\dim A = \dim B$ (proposition 2 du Chapitre I) et $\dim_v A = \dim_v B$ (proposition 4). L'égalité $\dim A = \dim_v A$ et le corollaire 1 entraînent alors le corollaire 2.

Corollaire 3 — Tout anneau d'intégrité dont la dimension valuative est 1 a pour fermeture intégrale un anneau de Prüfer.

Soit A un anneau d'intégrité dont la dimension valuative est 1. On a $\dim A = 0$ ou 1 (théorème 1). On ne peut avoir $\dim A = 0$, car alors A serait un corps et on aurait $\dim_v A = 0$. Donc $\dim_v A = \dim A = 1$. On a par suite $\dim A^{(n)} = n + 1$ quel que soit n (corollaire 1).

Le corollaire 3 est alors une conséquence du corollaire 4 de la proposition 2 du Chapitre III.

Appelons *anneau de nombres algébriques* tout anneau d'intégrité A dont le corps des fractions est une extension algébrique du corps des nombres rationnels. La proposition 6 montre que l'on a $\dim_v A \leqslant 1$. Si $\dim_v A = 0$, A est un corps. Si $\dim_v A = 1$, on peut appliquer le corollaire 3 du théorème 2 et énoncer dans tous les cas :

Corollaire 4 — Tout anneau intégralement clos de nombres algébriques est un anneau de Prüfer.

A étant un anneau d'intégrité contenant un corps k, nous dirons que A est un *anneau de fonctions algébriques à une variable sur le corps k* si le corps des fractions de A est une extension de degré transcendance 1 de k. La proposition 5 montre que l'on a dans ce cas $\dim_v A \leqslant 1$. On peut donc énoncer le :

Corollaire 5 — Tout anneau intégralement clos de fonctions algébriques à une variable sur un corps k est un anneau de Prüfer.

Théorème 3 — Si A *est un anneau de dimension valuative finie, il existe un entier fini* N *et un entier* δ *inférieur ou égal à* $\dim_v A$ *tel que pour tout* $n \geqslant N$ *on ait l'égalité :*

$$\dim A^{(n)} = n + \delta \tag{2}$$

Considérons la fonction $g(n) = \dim_v A^{(n)} - \dim A^{(n)}$.

$g(n+1) - g(n) = (\dim_v A^{(n+1)} - \dim_v A^{(n)}) - (\dim A^{(n+1)} - \dim A^{(n)})$.

Le théorème 2 entraîne :

$$g(n+1) - g(n) = 1 - (\dim A^{(n+1)} - \dim A^{(n)})$$

et le corollaire 2 du théorème 3 (Ch. I) entraîne $g(n+1) - g(n) \leqslant 0$. $g(n)$ est donc une fonction décroissante bornée inférieurement par 0 (théorème 1). Elle admet donc une borne inférieure α qu'elle atteint pour $n = N$. Par suite $n \geqslant N$ entraîne $g(n) = \alpha$ ou $\dim A^{(n)} = \dim_v A^{(n)} - \alpha$ et d'après le théorème 2, $n \geqslant N$ entraîne donc :

$$\dim A^{(n)} = n + \dim_v A - \alpha$$

On voit de plus que $\delta = \dim_v A - \alpha \leqslant \dim_v A$, ce qui achève de démonter le théorème.

Cette démonstration ne fait pas intervenir les considérations des chapitres II et III. Il est toutefois possible d'en donner une démonstration partielle qui s'y rattache directement :

Reprenons les notations employées dans la démonstration du théorème 2 du Chapitre III. $\dim_v A$ étant finie, on en déduit l'existence d'un nombre fini M tel que $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) \leqslant M$ quelle que soit la chaîne $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ de A (proposition 3). $\mathscr{C}$ étant une chaîne de A, on a donc : $\varphi_n(\mathscr{C}) = 0$ si $n > M$. Le théorème 1 du Chapitre III montre donc que $n \geqslant M$ entraîne :

$$\Lambda(\mathscr{C}, n) = \varphi_0(\mathscr{C}) + \ldots\ldots + \varphi_M(\mathscr{C}) + n \leqslant n + (M+1) \dim A.$$

et par suite $\dim A^{(n)} \leqslant n + (M+1) \dim A \quad (n \geqslant M)$.

Le théorème 2 du Chapitre III montre alors que pour n suffisamment grand on a :

$$\dim A^{(n)} = n + \delta \qquad \text{avec} \qquad \delta \leqslant (M+1) \dim. A$$

Dans cette deuxième démonstration le théorème 3 a été déduit de la proposition 3. Nous laissons au lecteur le soin de voir que réciproquement le théorème 3 et le théorème 1 (Ch. III) auraient permis de démontrer à nouveau la proposition 3.

Théorème 4 — Soit un anneau A *de dimension finie quelconque et soient* π *et* δ *les entiers tels que pour toute valeur suffisamment grande de* n *on ait l'égalité* :

$$\dim A^{(n)} = (1 + \pi) n + \delta$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\pi = 0$ *est que la dimension valuative de* A *soit finie.*

Le théorème 3 montre la suffisance.

Supposons maintenant $\pi = 0$ et reprenons la démonstration et les notations du théorème 2 du Chapitre III. Il existe un entier ν tel que pour $n \geqslant \nu$ on ait l'égalité $\varphi_n(A) = 0$. Ceci montre que si $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ est une chaîne de A, on a toujours $\delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) < \nu$. La proposition 3 entraîne alors $\dim_v A < \infty$. D'où le théorème.

Si on reprend le cas d'un anneau A de dimension 1 étudié au n° 2 du Chapitre III et si on garde les notations qui avaient été définies alors, la proposition 1 du Chapitre II montre immédiatement que $\Delta = \dim_v A$. Par suite si A est un anneau de dimension 1 et de dimension valuative finie, le nombre δ tel que l'on ait pour n assez grand l'égalité :

(3) $$\dim A^{(n)} = n + \delta$$

est $\delta = \dim_v A$.

En outre l'égalité (2) (ou (3)) est vérifiée dès que $n \geqslant \dim_v A$. Le théorème suivant va généraliser ces résultats :

Théorème 5 — Soit A *un anneau dont la dimension valuative est finie. Pour tout entier n supérieur ou égal à* $\dim_v A$, *on a l'égalité* :

$$\dim A^{(n)} = n + \dim_v A$$

Soit A un anneau intègre de dimension valuative finie égale à s et soit une chaîne de valuations de A ayant pour longueur s :

(4) $$v_0 < v_1 < \ldots\ldots < v_s$$

Si on désigne par $\mathfrak{q}_i$ le centre de v_i sur A, on a les inclusions :

(5) $$\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \ldots\ldots \subset \mathfrak{q}_s$$

Dans la chaîne (4) ne gardons que les valuations v_i telles que $\mathfrak{q}_{i-1} \neq \mathfrak{q}_i$. On en déduit une nouvelle chaîne :

(4′) $$w_0 < w_1 < \ldots\ldots < w_m$$

dont les centres forment maintenant une chaîne sans répétitions :

(5′) $$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots\ldots \subset \mathfrak{p}_m$$

La valuation w_i définit une spécialisation ψ_i du corps des fractions K de A sur un corps K_i (ψ_i induit sur A l'homomorphisme $A \to A/\mathfrak{p}_i$). Comme w_i est plus fine que w_{i-1}, on voit que ψ_i est le produit de ψ_{i-1} par une spécialisation $\varphi_i : K_{i-1} \to K_i$.

Comme la chaîne (4) est maximale, $v_0 = w_0$ est la valuation nulle, donc $\mathfrak{p}_0 = (0)$ et φ_0 est l'application identique de K sur lui-même ($K = K_0$). Désignons par r_i le rang de la spécialisation φ_i (c'est la différence : rang de w_i moins rang de w_{i-1}).

Désignons par k_i le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}_i$ et par k'_i le corps image de k_{i-1} par la spécialisation φ_i. (On a $A/\mathfrak{p}_i \subset k_i \subset k'_i \subset K_i$). On notera d_i le degré de transcendance $d.t.\,[k'_i : k_i]$ et on posera :

$$d = d_1 + \ldots\ldots\ldots + d_m$$

La spécialisation $\varphi_i : K_{i-1} \to K_i$ est le produit d'une certaine spécialisation de rang 1 (d'un corps K'_{i-1}) par une spécialisation de rang $r_i - 1$ de K_{i-1} sur K'_{i-1} (d'une manière plus précise, si $w_i = v_{\alpha_i}$, K'_{i-1} est l'image de K par la spécialisation définie par $v_{\alpha_i -1}$). La spécialisation $K_{i-1} \to K'_{i-1}$ laisse invariant le sous-anneau $A/\mathfrak{p}_{i-1}$ de K_{i-1}, donc également son corps de fractions k_{i-1}

$$\begin{array}{ccccc}
K_{i-1} & \longrightarrow & K'_{i-1} & \longrightarrow & K_i \\
| & & | & & | \\
k_{i-1} & \longrightarrow & k_{i-1} & \longrightarrow & k'_i \\
| & & | & & | \\
| & & | & & k_i \\
| & & | & & | \\
A/\mathfrak{p}_{i-1} & \longrightarrow & A/\mathfrak{p}_{i-1} & \longrightarrow & A/\mathfrak{p}_i
\end{array}$$

La spécialisation $K_{i-1} \to K'_{i-1}$ étant de rang $r_i - 1$, le corollaire 6 du théorème 2 (Ch. II) montre que :

$$r_i - 1 + d.t.\,[K'_{i-1} : k_{i-1}] \leqslant d.t.\,[K_{i-1} : k_{i-1}]$$

Le corollaire 7 du théorème 2 (Ch. I), appliqué à $K'_{i-1} \to K_i$, montre que

$$d.t.\,[K_i : k'_i] \leqslant d.t.\,[K'_{i-1} : k_{i-1}]$$

D'où, en tenant compte de ces deux inégalités :

$$r_i - 1 + d.t.\,[K_i : k'_i] \leqslant d.t.\,[K_{i-1} : k_{i-1}]$$

Soit, en tenant compte de :

$$d.t.\,[K_i : k'_i] = d.t.\,[K_i : k_i] - d.t.\,[k'_i : k_i]$$
$$r_i - 1 \leqslant d.t.\,[K_{i-1} : k_{i-1}] + d.t.\,[k'_i : k_i] - d.t.\,[K_i : k_i]$$

ou

(6) $$r_i - 1 \leqslant d.t.\,[K_{i-1} : k_{i-1}] - d.t.\,[K_i : k_i] + d_i$$

Les inégalités (6) sont valables pour $1 \leqslant i \leqslant m$.

Si nous les additionnons, ceci donne :

(7) $$\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} r_i - m \leqslant d.t.\,[K_0 : k_0] - d.t.\,[K_m : k_m] + d$$

Comme $\mathfrak{p}_0 = (0)$, on a $A/\mathfrak{p}_0 = A$ et $k_0 = K_0 = K$. Donc $d.t.\,[K_0 : k_0] = 0$. Posons $r' = d.t.\,[K_m : k_m]$ et supposons $w_m = v_{s-h}$. La valuation v_s est la composée de la valuation w_m et d'une valuation de rang h. Par suite elle définit une spécialisation produit de ψ_m par une spécialisation

ψ' de rang h. Cette dernière laisse k_m invariant (puisque v_s et v_{s-h} ont même centre $\mathfrak{p}_m$ sur A). On a donc (Ch. I : Corollaire 1 du théorème 2) :

$$h \leqslant d.t.\,[\mathrm{K}_m:k_m]$$

et l'inégalité (7) permet d'écrire :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} r_i - m \leqslant d - h$$

Il résulte immédiatement des définitions que $s = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} r_i + h.$

On en conclut donc :

(7′) $$s = \dim_v \mathrm{A} \leqslant d + m$$

Mais les définitions de d_i et de $\delta(\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i)$ montrent que :

$$d_i \leqslant \delta(\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i)$$

et par suite :

(8) $$\dim_v \mathrm{A} \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} (1 + \delta(\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i)).$$

Soit un entier $\mathrm{N} \geqslant \dim_v \mathrm{A}$. La proposition 1 du Chapitre II et le lemme 1 montrent que :

$$\mathrm{N} \geqslant \delta(\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i) \qquad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

Le théorème 1 du Chapitre II montre alors que :

$$\lambda(\mathfrak{p}_{i-1}\mathrm{A}^{(\mathrm{N})}, \mathfrak{p}_i\mathrm{A}^{(\mathrm{N})}) = 1 + \delta(\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i)$$

Il existe donc une chaîne d'idéaux premiers de $\mathrm{A}^{(N)}$, soit :

$$(0) = \mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P}_1 \subset \cdots\cdots \subset \mathscr{P}_{s'} = \mathfrak{p}_m \mathrm{A}^{(N)}$$

de longueur $s' = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} (1 + \delta(\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i)).$

Si $\mathrm{A}^{(\mathrm{N})} = \mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \ldots\ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}]$ on peut considérer la chaîne d'idéaux premiers de longueur N :

$$\mathfrak{p}_m\mathrm{A}^{(\mathrm{N})} \subset (\mathfrak{p}_m\mathrm{A}^{(\mathrm{N})}, \mathrm{X}_1) \subset (\mathfrak{p}_m\mathrm{A}^{(\mathrm{N})}, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) \subset \ldots \subset (\mathfrak{p}_m\mathrm{A}^{(\mathrm{N})}, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N})$$

On en déduit donc l'existence dans $\mathrm{A}^{(\mathrm{N})}$ d'une chaîne de longueur

$$s' + \mathrm{N} \geqslant s + \mathrm{N} = \mathrm{N} + \dim_v \mathrm{A}$$

Les théorèmes 1 et 2 montrant que $\dim A^{(N)} \leqslant N + \dim_v A$, on a donc:

$$\dim A^{(N)} = \dim_v A^{(N)} = N + \dim_v A$$

ceci implique en outre $s = s'$, c'est-à-dire que l'inégalité (8) est en fait une égalité.

Le théorème 5 est donc démontré dans le cas où A est intègre.

Ne supposons plus A intègre. La condition $\dim_v A < \infty$ entraîne l'existence d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A tel que $\dim_v A = \dim_v A/\mathfrak{p}$. D'après ce qu'on vient de voir, pour tout entier N tel que $N \geqslant \dim_v A$, on a :

$$\dim (A/\mathfrak{p})^{(N)} = N + \dim_v A$$

et comme :

$$\dim (A/\mathfrak{p})^{(N)} = \dim A/\mathfrak{p}\, A^{(N)} \leqslant \dim A^{(N)}$$

on a l'égalité :

$$\dim A^{(N)} = N + \dim_v A$$

compte tenu du corollaire 2 du théorème 3 (Ch. I).

Le théorème 5 est complètement démontré.

Corollaire 1 — Pour que l'anneau A *soit tel que, quel que soit l'entier* $n \geqslant 0$ *on ait l'égalité* :

$$\dim A^{(n)} = n + \dim A$$

il faut et il suffit que l'on ait l'égalité $\dim_v A = \dim A$.

Le corollaire 1 du théorème 2 montre que l'égalité $\dim A = \dim_v A$ entraîne $\dim A^{(n)} = n + \dim A$ pour tout n.

Soit maintenant un anneau A tel que $\dim A^{(n)} = n + \dim A$ pour tout n. Si $\dim A = \infty$, on a aussi $\dim_v A = \infty$. Si $\dim A < \infty$, le théorème 4 montre que $\dim_v A < \infty$ et le théorème 5 montre que $\dim A = \dim_v A$. D'où le corollaire.

Corollaire 2 — La dimension d'un anneau noethèrien est égal à sa dimension valuative.

C'est une conséquence du corollaire 4 du théorème 6 (Ch. III) et du corollaire 1 du théorème 5. [1]

[1] (Note rajoutée pendant la correction des épreuves). Le corollaire 2 peut se démontrer directement à partir d'un théorème du à Abbyankar et Zariski, ce qui permet alors de considérer le théorême de Krull comme une conséquence du corollaire 1 du théorème 2 (Cf. P. Jaffard [4].

3 — Sur les anneaux A tels que $\dim_v A = \dim A$

Le corollaire 1 du théorème 5 montre une propriété très remarquable qui caractérise les anneaux dont la dimension est égale à la dimension valuative. Appelons P cette dernière propriété. Nous avons vu des exemples très divers d'anneaux ayant cette propriété. Citons :

Les anneaux de Prüfer et, plus généralement, les anneaux d'intégrité dont la fermeture intégrale est un anneau sans poids (corollaire 2 de la proposition 3).

Les anneaux noethèriens.

Les anneaux de la forme $A^{(m)}$ dans lequel A est un anneau d'intégrité dont on note K le corps des fractions et m un entier supérieur ou égal à $d.t.$ (K) si K a une caractéristique non nulle, et supérieur ou égal à $1 + d.t.$ (K) si K a pour caractéristique 0 (proposition 6 et théorème 5).

Plus généralement, les anneaux de polynomes à un nombre suffisamment grand de variables sur un anneau dont la dimension valuative est finie.

On peut conjecturer que les anneaux totalement clos (total ganz abgeschlossen) ont également la propriété P.

Indiquons maintenant quelques théorèmes de permanence de la propriété P d'un caractère assez élémentaire :

Proposition 7 — Si l'anneau A *a la propriété* P, *il en est de même de l'anneau de polynomes* $A^{(n)}$, *quel que soit l'entier n.*

C'est une conséquence immédiate du corollaire 1 du théorème 5.

Proposition 8 — Si A′ *est un anneau entier sur l'anneau* A, *une condition nécessaire et suffisante pour que* A′ *ait la propriété* P *est que* A *ait cette propriété.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 du Chapitre I et de la proposition 4.

Il semble possible que, même dans le cas d'un anneau A de dimension finie, la propriété P ne se transmette pas de A à un anneau quotient $A/\mathfrak{a}$. Toutefois :

Proposition 9 — Soient A *un anneau d'intégrité de dimension finie ayant la propriété* P *et* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* A *tel que :*

$$ht(\mathfrak{p}) + pf(\mathfrak{p}) = \dim A \tag{9}$$

Les anneaux $A/\mathfrak{p}$ *et* $A_{\mathfrak{p}}$ *ont alors la propriété* P.

L'égalité (9) peut encore s'écrire :

$$\dim A_{\mathfrak{p}} + \dim A/\mathfrak{p} = \dim A$$

Si on avait $\dim_v A_{\mathfrak{p}} > \dim A$ ou $\dim_v A/\mathfrak{p} > \dim A/\mathfrak{p}$ on aurait donc:

$$\dim_v A + \dim_v A/\mathfrak{p} > \dim A$$

et par suite (proposition 2) :

$$\dim_v A > \dim A$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur l'anneau A.

Corollaire — Soient A *un anneau d'intégrité équidimensionnel de dimension finie ayant la propriété* P *et* $\mathfrak{a}$ *un idéal quelconque de* A. *L'anneau* $A/\mathfrak{a}$ *a encore la propriété* P.

Comme A a une dimension valuative finie, il en est de même de $A/\mathfrak{a}$ et il existe un suridéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{a}$ tel que $\dim_v A/\mathfrak{a} = \dim_v A/\mathfrak{p}$. Le lemme 1 montre que $\mathfrak{p}$ est un suridéal premier immédiat de $\mathfrak{a}$ et, l'anneau A étant équidimensionnel, on voit facilement que $\dim A/\mathfrak{a} = \dim A/\mathfrak{p}$. Il suffit donc de montrer le corollaire dans le cas où $\mathfrak{a}$ est un idéal premier $\mathfrak{p}$, ce qui est alors une conséquence immédiate de la proposition 9.

Dans le corollaire précédent on peut laisser tomber l'hypothèse que A est intègre :

Proposition 10 — Soient A *un anneau équidimensionnel de dimension finie ayant la propriété* P *et* $\mathfrak{a}$ *un idéal quelconque de* A. *L'anneau* $A/\mathfrak{a}$ *a encore la propriété* P.

Montrons-le d'abord dans le cas où $\mathfrak{a}$ est un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. Soient $\dim A = d$, $ht(\mathfrak{p}) = t$ et $pf(\mathfrak{p}) = p$. Comme A est équidimensionnel on a l'égalité $t + p = d$. Soit enfin n un entier positif quelconque. Il nous faut montrer l'égalité $\dim (A/\mathfrak{p})^{(n)} = n + \dim A/\mathfrak{p}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'on ait :

$$\dim (A/\mathfrak{p})^{(n)} = s > n + \dim A/\mathfrak{p} = n + p$$

L'anneau $(A/\mathfrak{p})^{(n)}$ s'identifiant canoniquement à $A^{(n)}/\mathfrak{p}A^{(n)}$, il existe dans $A^{(n)}$ une chaîne sans répétition d'idéaux premiers de la forme :

$$\mathfrak{p}A^{(n)} \subset \mathscr{P}_1 \subset \cdots\cdots\cdots \subset \mathscr{P}_s$$

Comme $ht(\mathfrak{p}) = t$, il existe dans A une chaîne sans répétition d'idéaux premiers de la forme :

$$\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{q}_t = \mathfrak{p}$$

on en déduit dans $A^{(n)}$ la chaîne sans répétition :

$$\mathfrak{q}_0 A^{(n)} \subset \mathfrak{q}_1 A^{(n)} \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{q}_t A^{(n)} = \mathfrak{p} A^{(n)} \subset \mathscr{P}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{P}_s$$

Elle a pour longueur $t + s > t + p + n = n + \dim A$.

L'inégalité $\dim A^{(n)} > n + \dim A$ contredit l'hypothèse suivant laquelle A a la propriété P. Donc $\dim (A/\mathfrak{p})^{(n)} = n + p$ pour tout n et $A/\mathfrak{p}$ a encore la propriété P.

Supposons maintenant que $\mathfrak{a}$ soit un idéal quelconque de A, et soit n un entier positif quelconque. L'anneau $(A/\mathfrak{a})^{(n)}$ s'identifiant canoniquement à $A^{(n)}/\mathfrak{a} A^{(n)}$, on a :

$$\dim (A/\mathfrak{a})^{(n)} = \sup_{\mathscr{P} \in \Pi} (\dim A^{(n)}/\mathscr{P}) \tag{10}$$

Π désignant l'ensemble des surideaux premiers de $\mathfrak{a} A^{(n)}$ dans $A^{(n)}$. $\mathscr{P}$ étant un élément de Π, posons $\mathscr{P} \cap A = \mathfrak{p}$. On a :

$$\dim A^{(n)}/\mathscr{P} \leqslant \dim A^{(n)}/\mathfrak{p} A^{(n)} = \dim (A/\mathfrak{p})^{(n)}$$

Or, comme $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de l'anneau équidimensionnel A, on a, d'après ce qu'on vient de voir :

$$\dim (A/\mathfrak{p})^{(n)} = n + \dim A/\mathfrak{p} \leqslant n + \dim A/\mathfrak{a}$$

L'égalité (10) entraîne donc :

$$\dim (A/\mathfrak{a})^{(n)} \leqslant n + \dim A/\mathfrak{a}$$

et par suite :

$$\dim (A/\mathfrak{a})^{(n)} = n + \dim A/\mathfrak{a}$$

ce qui montre bien que $A/\mathfrak{a}$ a la propriété P.

On peut se demander si un anneau léger a la propriété P.

Ce problème est lié de près au problème suivant qui nous semble de première importance parmi ceux qui restent à élucider dans ce domaine :

Etant donnée une chaîne $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_3$ *d'idéaux premiers d'un anneau* A, *donner une majoration de* $\delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3)$ *qui soit fonction des nombres* $\delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ *et* $\delta(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)$.

Une telle recherche peut s'envisager soit directement en considérant intrinsèquement l'anneau A, soit indirectement en considérant les anneaux $A^{(n)}$ et en utilisant de façon systématique les théorèmes 1 et 2 du Chapitre II. Il va sans dire que des résultats obtenus par une étude directe seraient plus satisfaisants pour l'esprit.

4 — Sur les nombres π et δ

Nous nous proposons dans ce numéro de montrer que les nombres δ et π définis dans l'énoncé du théorème 2 du Chapitre III peuvent prendre des valeurs finies (arbitraires) telles que $\pi \leqslant \delta$.

Nous allons d'abord décrire un procédé (inspiré d'un contre-exemple construit par Krull et Seidenberg) permettant de construire un anneau A^* à partir d'un anneau d'intégrité A.

Soient A un anneau intègre, k son corps des fractions, K une extension de k et $\sum$ une extension transcendante simple de K. On peut trouver sans difficulté une valuation v de $\sum$ ayant pour groupe de valeurs le groupe ordonné additif **Z** des entiers ordinaires (valuation discrète de rang 1) qui définit une spécialisation φ de $\sum$ sur K laissant invariants les éléments de K.

Désignons par V l'anneau de la valuation v et par P l'idéal premier de la valuation (c'est-à-dire le centre de v sur A). Considérons d'autre part les sous-anneaux A^* et $\widehat{A}$ de $\sum$ définis par les relations :

$$x \in A^* \rightleftharpoons \varphi(x) \in A$$

$$x \in \widehat{A} \rightleftharpoons \varphi(x) \in k$$

On a les inclusions évidentes :

$$P \subset A^* \subset \widehat{A} \subset V$$

Comme tout élément de $\sum$ peut se mettre sous la forme d'un quotient de deux éléments de P, on voit que les anneaux d'intégrité A^* et $\widehat{A}$ ont $\sum$ pour corps des fractions (ce sont des ordres de $\sum$). De plus :

$$(11) \qquad A^*/P = A$$

et P est un idéal premier de $\widehat{A}$ et de A^* tel que :

$$12) \qquad \widehat{A} = A^*_P$$

Lemme 2 — Tout idéal premier non nul de A^* *contient* P.

Soit P′ un idéal premier non nul de A^* et p' un élément non nul de P′. Soit p un élément non nul quelconque de P. L'inégalité $v(p)>0$ et l'hypothèse faite sur v entraînent l'existence d'un entier $n>0$ tel que $nv(p)>v(p')$. Il en résulte une égalité de la forme $p^n = p' p_1$ avec $p_1 \in P$. Donc $p^n \in P'$ et, comme P′ est premier, $p \in P'$. Par suite $P \subset P'$ ce qui montre le lemme 1.

Lemme 3 — P *est le seul idéal premier non nul de* $\widehat{A}$.

C'est une conséquence immédiate du lemme 2 et de l'égalité (12).

De l'égalité (11) et du lemme 2 résulte l'égalité :

$$\dim A^* = 1 + \dim A \tag{13}$$

Calculons maintenant $\delta(0, P)$ dans l'anneau A^*. La proposition 4 du Chapitre II montre que ce nombre est égal à $\delta(0, PA^*_P)$, c'est-à-dire à $\delta((0), P)$ dans $\widehat{A}$. La proposition 1 du Chapitre II et le lemme 3 montrent que ce dernier nombre est égal à la dimension valuative de $\widehat{A}$.

Le théorème 2 du Chapitre I montre qu'il existe une spécialisation ψ de K ayant pour rang $d.t.\,[K:k]$ et laissant k invariant. La spécialisation $\psi\varphi$ de $\sum$ a alors pour rang $1 + d.t.\,[K:k]$ et elle est finie sur $\widehat{A}$. On a donc l'inégalité :

$$\dim_v \widehat{A} \geqslant 1 + d.t.\,[K:k]$$

Mais, $\widehat{A}$ contenant le corps k, la proposition 5 montre que l'on a l'inégalité :

$$\dim_v \widehat{A} \leqslant d.t.\,[\textstyle\sum:k] = 1 + d.t.\,[K:k]$$

On a donc $\dim_v \widehat{A} = 1 + d.t.\,[K:k]$ et on peut écrire les égalités :

$$\delta((0), P) \text{ dans } A^* = \dim_v \widehat{A} = 1 + d.t.\,[K:k] \tag{14}$$

Comme K est une extension arbitraire de k, on voit donc qu'à partir de A on peut construire un anneau d'intégrité A^* ayant un idéal premier P tel que tout idéal premier non nul de A^* contienne P, tel que $A^*/P = A$ et tel que $\delta((0), P)$ ait n'importe quelle valeur donnée à l'avance finie ou non, supérieure ou égale à 1.

Donnons-nous maintenant deux entiers finis π et δ tels que l'on ait les inégalités $0 \leqslant \pi \leqslant \delta$ et montrons qu'il existe un anneau A tel que $\dim A^{(n)} = (1 + \pi)n + \delta$ pour n suffisamment grand. Envisageons séparément deux cas :

1er Cas. $\delta = \pi$

Construisons un anneau d'intégrité A de dimension $d = \pi$ ayant exactement d idéaux premiers distincts différents de (0), soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_d$ tels que l'on ait :

(15) $$\mathfrak{p}_0 = (0) \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{p}_d$$

et

(16) $$\delta(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}) = \infty \qquad (0 \leqslant i \leqslant d-1)$$

On opère ainsi : On part de l'anneau $A_0(A = A/\mathfrak{p}_d)$ pour lequel on prend n'importe quel corps, puis, par récurrence sur i, en supposant construit l'anneau $A_i\,(= A/\mathfrak{p}_{d-i})$, on construit $A_{i+1} = A_i^*$ muni d'un idéal premier P_{i+1} contenu dans tous les autres, tel que $A_{i+1}/P_{i+1} = A_i$ et tel que $\delta((0), P_{i+1}) = \infty$. L'anneau A_d sera l'anneau A cherché. Ceci posé, désignons par $\mathscr{C}$ la chaîne définie par (15). En employant les notations employées dans les démonstrations des théorèmes 1 et 2 du Chapitre III, on voit que :

$$\varphi_n(\mathscr{C}) = d \qquad \text{pour tout entier } n.$$

Par suite :

$$\Lambda(\mathscr{C}, n) = (n+1)d + n = (1+d)n + d$$

La structure de l'anneau A montre que toute autre chaîne $\mathscr{C}'$ (sans répétitions) d'idéaux premiers de A est obtenue en retanchant certains éléments à la chaîne $\mathscr{C}$. On en déduit immédiatement que l'on a toujours :

$$\Lambda(\mathscr{C}', n) \leqslant \Lambda(\mathscr{C}, n)$$

L'égalité (1) du Chapitre III montre alors que :

$$\dim A^{(n)} = \Lambda(\mathscr{C}, n) = (1+d)n + d = (1+\pi)n + \delta.$$

2me Cas. $\delta > \pi$

Posons $f = \delta - \pi - 1 \,(\geqslant 0)$.

Par un procédé analogue à celui décrit dans le premier cas on peut construire un anneau d'intégrité A de dimension $d = \pi + 1$ ayant exactement d idéaux distincts de (0), soient $\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_d$ tels que l'on ait:

(17) $$\mathfrak{p}_0 = (0) \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots\cdots\cdots \subset \mathfrak{p}_d$$

et

$$\delta(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant d-2 \\ f & \text{si } i = d-1 \end{cases} \tag{18}$$

En conservant les notations du cas 1, si $f = 0$, on prendra pour anneau $A_1 (= A/\mathfrak{p}_{d-1})$ un anneau de valuation de dimension 1. Si $f > 0$ le procédé décrit plus haut s'applique sans difficulté.

Si on désigne par $\mathscr{C}$ la chaîne définie par (17) et si on reprend les notations employées dans les démonstrations des théorèmes 1 et 2 du Chapitre III, on voit que :

$$\varphi_n(\mathscr{C}) = d \text{ si } n \leqslant f$$

$$\varphi_n(\mathscr{C}) = d - 1 \text{ si } n > f$$

On en déduit que pour $n > f$, on a :

$$\Lambda(\mathscr{C}, n) = (f+1)d + (n-f)(d-1) + n = dn + d + f$$

On verrait encore que pour tout autre chaîne $\mathscr{C}'$ d'idéaux premiers de A, on a $\Lambda(\mathscr{C}', n) \leqslant \Lambda(\mathscr{C}, n)$. Par suite :

$$\dim A^{(n)} = \Lambda(\mathscr{C}, n) = dn + d + f = (1 + \pi)n + \delta \qquad \text{si } n \geqslant f$$

On peut donc énoncer le :

Théorème 6 = Etant donnée deux entiers finis π et δ tels que $0 \leqslant \pi \leqslant \delta$ il existe un anneau A tel que pour n suffisamment grand on ait l'égalité :

$$\dim A^{(n)} = (1 + \pi)n + \delta$$

Nos connaissances insuffisantes sur les relations qui lient $\delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3)$ à $\delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ et $\delta(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)$ dans le cas où $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_3$ est une chaîne d'idéaux premiers d'un anneau A ne nous permettent pas de renforcer l'énoncé du théorème 18 en imposant à la dimension d de l'anneau A d'avoir une valeur donnée à l'avance compatible avec l'énoncé du théorème 2 du chapitre III et celui du théorème 5 (c'est-à-dire $\pi \leqslant d$ dans le cas général et $d \leqslant \delta$ dans le cas particulier $\pi = 0$). Toutefois on peut le faire dans le cas où $\pi = 0$ comme le montre le :

Théorème 7 — Etant donnés deux entiers d et δ tels que $1 \leqslant d \leqslant \delta \leqslant \infty$ il existe un anneau dont la dimension est égale à d et la dimension valuative est égale à δ.

Le théorème est trivial si $d = \infty$: il suffit de prendre dans ce cas pour anneau A un anneau de dimension infinie. Nous pouvons donc supposer $d < \infty$.

L'exemple de l'anneau $\widehat{A}$ montre le résultat cherché lorsqu'on a $d = 1$ (voir le lemme 3 et l'égalité (14)). Nous pouvons donc supposer $d \geqslant 2$. Reprenons la construction développée au début de ce numéro.

Supposons le corps k de caractéristique 0. La proposition 6 montre que, $\sum$ étant le corps des fractions de A^*, on a l'inégalité :

(19) $\dim_v A^* \leqslant 1 + d.t.(\sum) = 2 + d.t.(K) = 2 + d.t.[K:k] + d.t.(k)$

Si $\dim A = d'$, le lemme 2 et l'égalité (11) montre qu'il existe une chaîne sans répétitions d'idéaux premiers de A^* de la forme :

$$P \subset P_1 \subset \ldots\ldots \subset P_{d'}$$

Soit w une valuation non triviale de rang r de $\widehat{A}$. Le lemme 3 montre que w a pour centre P sur $\widehat{A}$, donc aussi P pour centre sur A^*. En appliquant plusieurs fois le corollaire 3 du théorème 1 (Ch. I), on voit qu'il existe une chaîne de valuations de A^* de la forme :

$$w < w_1 < \ldots\ldots < w_{d'}$$

où w_i a P_i pour centre sur A^*. $(1 \leqslant i \leqslant d')$.

Par suite : rang de $w_{d'} \geqslant d' +$ rang de w. D'où l'on déduit :

$$\dim_v A^* \geqslant \dim_v \widehat{A} + \dim A$$

Ou, en tenant compte de (14) :

$$1 + d.t.[K:k] + \dim A \leqslant \dim_v A^*$$

La comparaison de cette inégalité avec l'inégalité (19) montre que : $\dim A = 1 + d.t.(k)$ entraînerait $\dim_v A^* = 2 + d.t.[K:k] + d.t.(k)$. Mais si A est de la forme $Z^{(m)}$, c'est-à-dire est anneau de polynomes à m variables à coefficients dans l'anneau des entiers ordinaires, on aura bien $\dim A = (m+1) = 1 + d.t.(k)$. On posera donc $A = Z^{(d-2)}$ (ce qui a un sens puisqu'on a supposé $d \geqslant 2$) et on choisira K de telle sorte que $d.t.\,[K:k] = \delta - d$ (ce qui est possible puisque par hypothèse $d \leqslant \delta$). On aura alors $\dim A\mathfrak{a} = 1 + \dim A = d$ (égalité (13)) et

$$\begin{aligned}\dim_v A^* &= 2 + d.t.\,[K:k] + d.t.\,(k)\\ &= 2 + \delta - d + d - 2 = \delta\end{aligned}$$

Ce qui achève de démontrer le théorème 7.

BIBLIOGRAPHIE

Y. AKIZUKI [1] — *Einige Bemerkungen über primäre Integritätsbereiche mit Teilerkettensatz.* Proc. Phys. Math. Soc. Japan. Vol. 17, (1.935), pp. 327-336.

C. CHEVALLEY [1] — *La notion d'anneau de décomposition* - Nagoya Math. J. Vol. 7(1.954), pp. 21-33.

I.S. COHEN [1] — *Lengths of prime ideal chains* - Amer. J. Math. Vol. 76 (1.954), pp. 654-668.

I.S. COHEN et A. SEIDENBERG [1] — *Prime ideals and integral dependance.* Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 52 (1.946), pp. 252-261.

P. JAFFARD [1] — *Dimension des anneaux de polynomes - Comportement asymptotique de la dimension.* C.R. Acad. Sci. Paris. Vol. 246 (1.958), pp. 3.199-3.201.

[2] — *Dimension des anneaux de polynomes - La notion de dimension valuative.* C.R. Acad. Sci. Paris. Vol. 246 (1.958), pp. 3.306-3.307.

[3] — *Les systèmes d'idéaux* - Dunod, Paris (1.960).

[4] *Valuations d'un anneau nœthérien et théorie de la dimension.* Sem. Algèbre (Dubreil) - Fac. Sc. Paris (Février 1.960).

W. KRULL [1] — *Ein Satz über primäre Integritätsbereiche.* Math. Ann. Vol. 103 (1.930), pp. 450-465.

[2] — *Allgemeine Bewertungstheorie* - J. reine ang. Math. Vol. 167 (1.931), pp. 160-196.

[3] — *Idealtheorie* - Ergebnisse der Math. Springer, Berlin (1.935).

[4] — *Beitrage zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche I - Multiplikationsringe, ausgezeichnete Idealsysteme, Kroneckersche Funktionalringe* - Math. Zeit. Vol. 41 (1.936), pp. 544-577.

[5] — *Beitrage zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche III - Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie.* Math. Zeit. Vol. 42 (1.937), pp. 745-766.

[6] — *Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie.* Math. Zeit. Vol. 54 (1.951), pp. 354-387.

S. LANG [1] — *Introduction to algebraical geometry* - Interscience Publishers, New-York (1.958).

E. NOETHER [1] — *Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie*– Math. Ann. Vol. 90 (1.923), pp. 223-261.

[2] — *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörper*. Math. Ann. Vol. 96 (1.927), pp. 26-61.

D.G. NORTHCOTT [1] — *A general theory of one-dimensional local rings*. – Proc. Glasgow Math. Assoc. Vol. 2, part 4 (1.956), pp. 159-169.

O.F.G. SCHILLING [1] — *The theory of valuations* – Math. Surveys, New-York (1.950).

A. SEIDENBERG [1] — *A note on the dimension theory of rings* – Pacific J. Math. Vol. 3 (1.953), pp. 505-512.

[2] — *On the dimension theory of rings II* – Pacific J. Math. Vol. 4 (1.954), pp. 603-614.

B.L. VAN DER WAERDEN [1] — *Zur Nullstellentheorie der Polynomideale* – Math. Ann. Vol. 96 (1.926), pp. 183-208.

[2] — *Moderne Algebra* – 2me édition, Springer, Berlin (1.940).

TABLE DES MATIÈRES