GIUSEPPE BELARDINELLI

Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et résolution analytique des équations algébriques générales

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 145 (1960)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1960__145__1_0>

Giuseppe BELARDINELLI
Correspondant de l'*Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*
Membre de l'*Istituto Marchigiano di Scienze, Lettere ed Arti*

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES
DE PLUSIEURS VARIABLES
ET
RÉSOLUTION ANALYTIQUE
DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES GÉNÉRALES

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
Directeur : H. VILLAT
FASCICULE CXLV

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

1960

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES
DE PLUSIEURS VARIABLES
ET
RÉSOLUTION ANALYTIQUE
DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES GÉNÉRALES

Par M. Giuseppe BELARDINELLI.

INTRODUCTION.

Les problèmes les plus importants de la théorie des équations algébriques sont au nombre de deux : celui de la résolution *numérique* et celui de la résolution *analytique* des équations algébriques; ce sont précisément ceux qui se sont imposés les premiers aux recherches des géomètres.

Nous ne nous occuperons pas de la résolution numérique qui comprend la *séparation* et le calcul *numérique* des racines, c'est-à-dire la détermination des valeurs exactes ou approchées des racines lorsque les coefficients des équations sont des nombres fixes donnés. Nous parlerons, au contraire, de la résolution analytique des équations algébriques.

Il faut préciser tout de suite que nous entendons par résolution analytique, la recherche des expressions analytiques, en forme finie ou non, des racines en fonction des coefficients de l'équation, considérés comme variables indépendantes. Ce fascicule est précisément consacré à la résolution analytique des équations algébriques générales par des séries procédant selon les puissances des coefficients, et par des intégrales multiples.

Nous donnerons en abrégé le développement historique de la résolution des équations algébriques.

La solution de ce problème a été donnée d'abord pour les premiers degrés, pour les équations du troisième et du quatrième degré, par des géomètres italiens du XVI^e siècle : Scipione dal Ferro [22], Tartaglia [62], Cardano [14], Ferrari [21] : la formule qui représente les trois racines de l'équation du troisième degré est ordinairement appelée *formule de Cardan*. Il y a eu par la suite des recherches pour quelques classes d'équations algébriques qui ont des relations déterminées entre les racines.

On essaya de résoudre une équation algébrique générale par des radicaux et des fonctions circulaires et hyperboliques, mais ces efforts furent naturellement insuffisants.

La détermination des racines par un *nombre fini* de radicaux qui portent sur les coefficients de l'équation est exactement appelée *résolution algébrique*.

Nous ne voulons pas exposer ici les belles recherches sur l'impossibilité de la résolution par radicaux des équations algébriques générales au-delà du quatrième degré, dues à Abel [1], Ruffini [59], ou parler de la découverte de Galois [23], du groupe d'une équation algébrique, recherches qui furent poursuivies par Betti [6, (*b*)], Jordan [39], car ce fascicule est dédié à la résolution analytique des équations tout à fait générales. Après la démonstration de l'impossibilité dont on vient de parler, et la découverte des fonctions elliptiques, et hyperelliptiques d'autres savants abordèrent le problème au moyen de ces fonctions. Hermite [33], Betti [6, (*a*)], Brioschi [11], Kronecker [43] donnèrent la résolution de l'équation du cinquième degré par les fonctions elliptiques; Brioschi [11, (*e*), (*f*), (*g*); *voir* 49] celle de l'équation du sixième degré, Betti [6, (*a*)] et Lindemann [47] celle des équations de degré n par des fonctions trascendantes liées aux fonctions hyperelliptiques. Dans ces recherches qui se sont déroulées pendant la seconde moitié du siècle dernier, le mot résolution n'a pas la même signification lorsque, par exemple, on dit résolution par radicaux. Ces résolutions analytiques dépendent de variables auxiliaires particulières et différentes et ne donnent pas l'intime nature de la dépendance des racines en fonction des coefficients de l'équation donnée. Pour cela, et étant donné le but de ce fascicule, nous ne pouvons guère parler ici de ces importantes recherches.

Nous ne nous occuperons pas non plus des profondes études de Klein sur la réduction des équations algébriques à certaines équations normales : en ce sens il a obtenu la réduction de l'équation du cinquième degré à sa forme la plus simple par l'introduction de l'équation de l'icosaèdre. Dans les conférences de Chicago (1898) sur les mathémathiques, et précisément dans la IX[e] Conférence : *De la résolution des équations algébriques de degré supérieur*, Klein [42, (*b*)] dit que par résolution d'une équation, on entendra sa réduction à certaines équations algébriques normales. Dans plusieurs publications il a considéré une généralisation qui embrasse la résolution dans ce sens des équations de dégré supérieur [42]. Ces recherches très profondes de Klein sont loin de notre point de vue, qui est placé dans la théorie des fonctions et précisément de la détermination de la nature analytique de la dépendance explicite entre les coefficients variables indépendants et les racines correspondantes.

La découverte des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et celle de l'inversion des intégrales définies ont permis de donner une réponse simple au problème de la résolution dans le sens que nous employons et précisément par des séries hypergéométriques et par des intégrales hypergéométriques multiples.

Après les recherches de Riemann (1857) [58] la notion de fonction hypergéométrique d'une variable se précise et nous avons eu les recherches de Pochhammer (1870) [56] sur les *fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur d'une variable*, de Goursat (1883) [29], de Pincherle (1888) [55], de Mellin (1893) [51], sur les *fonctions hypergéométriques généralisées d'une variable*.

La découverte des *fonctions hypergéométriques de plusieurs variables* par Appell (1880) [2], Picard (1881) [54], Horn (1889) [37], Lauricella (1893) [46], Mellin (1896) [51], Kampé de Fériet (1921) [40] a donné la solution du problème.

La résolution d'une équation algébrique générale de degré n a été obtenue en deux formes analytiques et précisément par un *système hypergéométrique de n équations linéaires aux dérivées partielles* vérifié par les racines représentées par des *intégrales multiples* hypergéométriques, Mellin (1915) [51, (*n*), (*o*)], ou bien par des séries multiples de Lagrange où les coefficients sont des particulières fonctions hypergéométriques de Pochhammer d'ordre n [*voir* 5, (a)]. Indépendamment de cette propriété des coefficients et par une voie élémentaire, Birkeland (1920) [7] a donné ce résultat intéressant : « les séries, racines d'une équation algébrique peuvent s'exprimer par des sommes de séries hypergéométriques générales de plusieurs variables ». Ce résultat et d'autres propriétés de la même sorte peuvent être obtenus de la propriété des coefficients énoncée plus haut. Par conséquent, la résolution analytique est complètement déterminée par les fonctions hypergéométriques.

Dans la V[e] Conférence de Chicago : *La théorie des fonctions et la géométrie*, Klein [42, (b)] dit : « Après les fonctions transcendantes élémentaires on regarde habituellement les fonctions elliptiques comme les plus importantes. Il existe cependant une autre classe de fonctions pour lesquelles on peut réclamer une importance au moins égale à cause de leurs nombreuses applications en astronomie et en physique-mathématique. Ce sont les *fonctions hypergéométriques....* » Cette importance est aujourd'hui non seulement complètement justifiée mais augmentée, car nous pouvons ajouter que les intégrales multiples hypergéométriques de Mellin, les fonctions hypergéométriques de Pochhammer et les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur de plusieurs variables, permettent de représenter les racines des équations algébriques.

Nous devons remarquer que les résultats que nous exposons dans ce fascicule sont simples et presque élémentaires par rapport aux grandes découvertes que nous avons d'abord rappelées : d'autre recherches seraient en effet nécessaires sur ce sujet.

Nous avons néanmoins la hardiesse d'espérer que ce *Mémorial* servira à montrer encore davantage le rôle important que jouent les fonctions hypergéométriques dans la théorie des fonctions.

Dans la première partie de ce fascicule nous donnerons sur les fonctions hypergéométriques des renseignements qui seront nécessaires pour la deuxième partie où nous parlerons, en particulier, de la résolution analytique des équations algébriques générales par les fonctions hypergéométriques.

PREMIÈRE PARTIE.

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES.

CHAPITRE I.

LA SÉRIE ET LA FONCTION DE GAUSS.

1. **Série de Gauss.** — La série hypergéométrique de Gauss

$$\text{(1)} \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} x^n,$$

où

$$(\lambda, n) = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1), \qquad (\lambda, 0) = 1,$$

dépend de trois *paramètres* α, β, γ et de la variable x. C'est une série entière en x et aussi une série de polynomes d'interpolation de Newton en α et β, et encore une série de facultés en γ. Ces quantités α, β, γ, x sont réelles ou complexes ; on ne doit exclure pour γ que les valeurs entières et négatives ; les deux éléments α et β jouent le même rôle. Pour déterminer le rayon de convergence on forme le rapport d'un coefficient au précédent et l'on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(1+n)} = 1 + \frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et pour cela la série aura pour *cercle de convergence* (c_0) : $|x| < 1$, et le *rayon de convergence* de la série de Gauss est égal à l'unité.

On pourra prolonger analytiquement la série $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, convergente à l'intérieur de (c_0), au dehors de (c_0), prolongement qu'on désigne par $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

Nous ne donnons ici que les renseignements nécessaires pour la deuxième partie et nous renvoyons pour d'autres détails au livre : P. APPELL et J. KAMPÉ DE FÉRIET, *Fonctions hypergéométriques* ..., 1926 [3] et au fascicule de Kampé de Fériet, cette collection, fasc. LXXXV, 1937 [40, (n)].

Les expressions analytiques et l'équation différentielle qu'elle vérifie, conduisent à déterminer les points singuliers et à définir une fonction multiforme de la variable x dont les seuls points singuliers sont $x=0$, $x=1$, $x=\infty$ [40, (n)]. Dans le fascicule de Kampé de Fériet on trouvera expliqué en détail tout ce qui concerne la fonction hypergéométrique d'une variable proprement dite, c'est-à-dire la fonction $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss.

Le prolongement de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sans franchir la coupure de l'axe réel positif $(+1, \infty)$ définit la branche principale qu'on désigne par $\overline{\mathfrak{F}}(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

2. Équation différentielle de Gauss. — La série hypergéométrique de Gauss $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ vérifie l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(1) \qquad x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{dF}{dx}-\alpha\beta F=0,$$

qui possède les points singuliers réguliers (au sens de Fuchs) : $0, 1, \infty$; par rapport au point 0 on obtient deux séries vérifiant l'équation (1) et précisément

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) \quad \text{et} \quad x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x),$$

on obtient de même par rapport au point 1 deux séries procédant selon les puissances de $1-x$, convergentes à l'intérieur du cercle $|x-1|=1$ et par rapport au point ∞, deux séries procédant selon les puissances de $\frac{1}{x}$ convergentes à l'extérieur du cercle $|x|=1$.

3. Intégrale hypergéométrique d'Euler. — Une fonctionnelle importante de l'analyse est la fonctionnelle d'Euler, c'est-à-dire la correspondance entre les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$

$$(1) \qquad f(x)=\int_{(l)}\varphi(t)\,(t-x)^{\sigma}\,dt,$$

avec des hypothèses sur la ligne (l) et les fonctions $\varphi(t)$.

Pour la fonction hypergéométrique de Gauss, on a l'expression sous forme d'une intégrale définie

$$(2) \qquad \overline{\mathfrak{F}}(\alpha, \beta, \gamma, x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-\alpha}\,du$$

qui donne une représentation de cette fonction valable dans tout le plan, lorsque $R(\gamma)>R(\beta)>0$ en y traçant la coupure de l'axe réel positif $(+1, \infty)$.

(Le symbole $R(\xi)$ désigne la partie réelle de la quantité complexe $\xi = \xi_1 + i\xi_2$).

On peut développer à l'intérieur du cercle $|x| = 1$ l'intégrale en série uniformément convergente et l'on trouvera la série de Gauss.

Nous avons le résultat général :

« L'intégrale définie d'Euler

$$f(x) = \int_g^h u^{\alpha-\gamma}(u-1)^{\gamma-\beta-1}(u-x)^{-\alpha}\,du,$$

où g et h désignent l'une des quatre quantités 0, 1, x, ∞, est une intégrale particulière de l'équation différentielle de Gauss. »

4. Intégrale de Pincherle, Mellin et Barnes. — Pincherle [55, (*d*), (*i*) : vol. 1, p. 234] a donné une représentation de $\overline{\mathcal{F}}$ par une intégrale prise le long d'un contour complexe. Mellin dans les Mémoires [51, (*c*), p. 3; (*f*), p. 37; (*n*), p. 6] reconnaît la priorité de Pincherle pour cette représentation dans le cas d'une fonction hypergéométrique d'une variable.

Nous devons rappeler ensuite les recherches de Pincherle pour les fonctions hypergéométriques générales d'une variable et de Mellin sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. Ici nous écrivons seulement pour la fonction $\overline{\mathcal{F}}$ la formule

$$(1)\quad \overline{\mathcal{F}}(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(\gamma+s)}\Gamma(-s)(-x)^s\,ds.$$

Plus tard, Barnes [4, (*b*)] a donné cette formule qui est appelée aujourd'hui *formule de Barnes*.

Pour la démonstration, *voir* le livre de Appell et Kampé de Fériet [3, p. 12].

CHAPITRE II.

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES D'ORDRE SUPÉRIEUR D'UNE VARIABLE.

5. Fonctions hypergéométriques de Pochhammer. — Riemann dans un Mémoire classique [58, p. 67], [54, (*c*) : t. III, p. 291] a défini la fonction hypergéométrique de Gauss par ses trois points critiques o, 1, ∞ et les exposants relatifs à cès points liés par une relation adjointe.

Pochhammer [56, (a)] a posé un problème analogue généralisant l'équation différentielle de Gauss et considérant précisément l'équation différentielle d'ordre n [3, p. 74, p. 136].

$$(1)\quad P_n(x)\frac{d^n\psi}{dx^n}-\left[\frac{\lambda-n}{1}P'_n(x)+P_{n-1}(x)\right]\frac{d^{n-1}\psi}{dx^{n-1}}+$$
$$+\frac{\lambda-n+1}{1}\left[\frac{\lambda-n}{2}P''_n(x)+P'_{n-1}(x)\right]\frac{d^{n-2}\psi}{dx^{n-2}}+\ldots$$
$$+(-1)^n\frac{(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{1.2.\ldots.(n-1)}\left[\frac{\lambda-n}{n}P_n^{(n)}(x)+P_{n-1}^{(n-1)}(x)\right]\psi=0,$$

où

$$P_n(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n),$$
$$P_{n-1}(x)=P_n(x)\left[\frac{b_1}{x-a_1}+\frac{b_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{b_n}{x-a_n}\right],$$

se réduisant à l'équation différentielle de Gauss pour

$$n=2,\qquad a_1=0,\qquad a_2=1,$$
$$b_1=\beta+1-\gamma,\qquad b_2=\gamma-\alpha,\qquad \lambda=1-\beta$$

Tissot [64] et Hermite [33, (d) : t. III, p. 194] aussi ont considéré cette équation.

Pochhammer a montré que cette équation admet comme solution la fonction

$$(2)\quad \psi(x)=\int_g^h(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

où g et h désignent deux des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n, \infty, x$.
Il a désigné cette fonction $\psi(x)$ par

$$(3)\qquad H_n\begin{pmatrix}a_1, a_2, \ldots, a_n, x\\ b_1, b_2, \ldots, b_n, \lambda\end{pmatrix}$$

et il a, en outre. donné plusieurs propriétés de ces importantes fonctions, fonctions qui sont fondamentales encore aujourd'hui. (*voir*, par exemple, les recherches de Erdélyi [19 (c)] et de Höfinger [36]). Nous rappelerons au n° 7 une classe générale de fonctions hypergéométriques de Pochhammer étudiée par Pincherle.

6. Fonctions hypergéométriques de Goursat. — Un autre point de vue qui généralise les considérations sur la fonction de Gauss, c'est la considération de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{1}$$

où le rapport de deux coefficients consécutifs est une fonction rationnelle quelconque de n

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{(\alpha_1+n)(\alpha_2+n)\ldots(\alpha_p+n)}{(\beta_1+n)(\beta_2+n)\ldots(\beta_q+n)(1+n)}, \tag{2}$$

le dénominateur contient le facteur $n+1$ qu'on peut toujours introduire [3, p. 139] et la série sera

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1, n)(\alpha_2, n)\ldots(\alpha_p, n)}{(\beta_1, n)(\beta_2, n)\ldots(\beta_q, n)} \frac{x^n}{(1, n)}, \tag{3}$$

faisant $c_0 = 1$, et où $p \leqq q+1$.

On peut alors former l'équation différentielle linéaire d'ordre $q+1$ vérifiée par la série (1) [3, p. 138 et 139].

Clausen même [18] a envisagé ce second point de vue, et Mellin aussi dans ses recherches (*voir*, par exemple, sa résolution de l'équation trinome [51, (m)].)

Cette équation différentielle prend la forme

$$(a_{q+1} + b_{q+1}x)\, x^q y^{(q+1)} + (a_q + b_q x)\, x^{q-1} y^{(q)} + \ldots + b_0 y = 0, \tag{4}$$

qui a les points singuliers : $-a_{q+1} : b_{q+1}$, ∞, 0. Mellin considère comme fonction hypergéométrique chaque solution de l'équation

$$(A_q + B_q t^r)\, t^q y^{(q)} + (A_{q-1} + B_{q-1} t^r)\, t^{q-1} y^{(q-1)} + \ldots + (A_0 + B_0 t^r) y = 0 \tag{5}$$

qui peut prendre la forme (4) par la substitution $t^r = x$. Une fonction définie par la série (1) et par son prolongement analytique est appelée *fonction hypergéométrique* de Goursat, *d'ordre* q [29, (a), (b), (c)] et elle est désignée par

$$F\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q \end{pmatrix}.$$

Fonction *complète* si

$$p = q + 1$$

et si $p < q+1$, de *classe*

$$\theta = q + 1 - p.$$

Par exemple, pour $q = 1$, on a la fonction de Gauss, comme fonction complète

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{pmatrix} x \Big),$$

et la fonction de Kummer

$$G(\alpha, \gamma, x) = F\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} x \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)} \frac{x^n}{(1, n)}$$

comme fonction de classe 1, et la fonction de Bessel

$$J(\gamma, x) = F\begin{pmatrix} \cdot \\ \gamma \end{pmatrix} x \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma, n)} \frac{x^n}{(1, n)}$$

comme fonction de classe 2.

Toutes les fonctions d'ordre q et de classe θ peuvent se déduire par passage à la limite : on dit par *confluence*, d'une fonction complète d'ordre q; et les propriétés d'une fonction de classe θ se déduisent ainsi de celles des fonctions complètes d'ordre q, [3, p. 141].

Naturellement une fonction complète d'ordre q est alors représentée par l'intégrale q-$^{\text{uple}}$

$$(6)\quad \mathcal{F}\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q+1} \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q \end{pmatrix} x \Big)$$
$$= c\int_0^1 \cdots \int_0^1 u_1^{\alpha_1-1}(1-u_1)^{\beta_1-\alpha_1-1} \cdots$$
$$\times\, u_q^{\alpha_q-1}(1-u_q)^{\beta_q-\alpha_q-1}(1-u_1u_2\ldots u_q x)^{-\alpha_{q+1}}du_1\ldots du_q,$$
$$c = \frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\ldots\Gamma(\beta_q)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1-\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_q)\Gamma(\beta_q-\alpha_q)},$$

fonction uniforme dans tout le plan dès qu'on y a tracé comme coupure le segment $(+1, \infty)$ de l'axe réel positif.

Ainsi avons-nous la formule généralisée

$$(7)\quad \mathcal{F}\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q+1} \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q \end{pmatrix} x \Big)$$
$$= \frac{\Gamma(\beta_1)\ldots\Gamma(\beta_q)}{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_{q+1})} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1+s)\ldots\Gamma(\alpha_{q+1}+s)}{\Gamma(\beta_1+s)\ldots\Gamma(\beta_q+s)}\Gamma(-s)(-x)^s ds,$$

où le chemin d'intégration se compose de l'axe des quantités purement imaginaires depuis $-i\infty$ jusqu'à $+i\infty$ et de lacets combinés de manière à laisser à sa gauche les pôles de $\Gamma(\alpha_1+s)$,

$\Gamma(\alpha_2+s)$, ..., $\Gamma(\alpha_{q+1}+s)$ et à sa droite les pôles de $\Gamma(-s)$: $0, 1, \ldots, n, \ldots$ (*voir* Nörlund [52]; *voir* [3, p. 142]).

7. Recherches de Pincherle. — Nous avons parlé de la fonctionnelle d'Euler

$$f(x)=\int_{(l)}\varphi(t)\,(t-x)^{\sigma}\,dt$$

qui peut représenter la fonction hypergéométrique de Gauss et de Pochhammer.

Pincherle, pour la première fois [55, (*a*), (*b*), (*h*), (*i*) : vol. I, p. 53], a considéré un opérateur de la forme

$$f(x)=\int_{(l)}\mathrm{A}(x,y)\,\varphi(y)\,dy, \tag{1}$$

entre les classes des fonctions $\varphi(y)$ et $f(x)$; il a appelé cette opération « *operazione funzionale* » et $\mathrm{A}(x, y)$ *fonction caractéristique* (depuis : noyau, Kern).

Précisément, Pochhammer [56] dans ses travaux sur la généralisation des équations hypergéométriques, a considéré la fonctionnelle où $\mathrm{A}(x, y)=(y-x)^{\lambda-1}$. Dans ce cas, si la fonctionnelle est appliquée à une fonction qui est une intégrale de l'équation différentielle linéaire régulière au sens de Fuchs

$$\Delta\varphi=\mathrm{P}_n\,\varphi^{(n)}+\mathrm{P}_{n-1}\,\varphi^{(n-1)}+\ldots+\mathrm{P}_0\,\varphi=0 \tag{2}$$

à des coefficients polynomes, la fonction obtenue est une intégrale d'une équation différentielle linéaire transformée de l'équation (2). [55, (*e*), (*i*) : vol. I, p. 254].

Si l'équation (2) est du premier ordre on a alors une équation différentielle qu'on peut nommer transformée de Pochhammer (*voir* Pincherle [55, (*c*), (*d*), (*e*), (*f*), (*i*) : vol. I, p. 263 et 332]).

La même fonctionnelle d'Euler appliquée à la fonction hypergéométrique de Goursat d'ordre $q-1$ permet de représenter la fonction de Goursat d'ordre q et, par conséquent, on obtient l'intégration de l'équation hypergéométrique de Goursat par des intégrales multiples, (*voir* Pochhammer [56], Pincherle [55, (*e*), (*i*) : vol. I, p. 263], Goursat [29, (*a*), (*e*)], [3, p. 142]).

Pincherle a formé les équations transformées de Pochhammer par deux opérations exécutées sur une forme différentielle du type (2), opérations qu'il nomme $D^n\Delta$ et $S_\sigma\Delta$. Ces opérations sont définies par

$$(3) \qquad D^k\Delta = P_n^{(k)}\varphi^{(n-k)} + \ldots + P_k^{(k)}\varphi, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où P_r indique un polynome de degré r, et par

$$(4) \qquad S_\sigma\Delta = \Delta + \sigma D\Delta + \binom{\sigma}{2} D^2\Delta + \ldots + \binom{\sigma}{n} D^n\Delta.$$

(*voir* Pincherle [55, (f), (i) : vol. I, p. 328]).

Pincherle posant

$$(5) \qquad \psi(x) = \int_{(l)} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{\sigma+1}}\, dt,$$

avec des conditions pour (l), et $\varphi(t)$, montre que si

$$\Delta\varphi = 0,$$

alors

$$S_\sigma\Delta\psi = 0.$$

Si Δ est

$$\Delta = P_n\varphi^{(n)} + P_{n-1}\varphi^{(n-1)} = 0,$$
$$P_n = (t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n)$$

et

$$-\frac{P_{n-1}}{P_n} = \frac{b_1}{t-a_1} + \frac{b_2}{t-a_2} + \ldots + \frac{b_n}{(t-a_n)},$$

on a

$$(6) \qquad \psi(x) = \frac{1}{\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-n+1)} \int_{(l)} \frac{\varphi^{(n-1)}(t)}{(t-x)^{\sigma-n+2}}\, dt,$$

alors

$$(7) \qquad S_\sigma\Delta\psi = 0$$

est une équation différentielle transformée de Pochhammer et ψ sera une *fonction hypergéométrique d'ordre supérieur* de Pochhammer.

Pincherle a même établi une correspondance entre les fonctions hypergéométriques de Pochhammer et les fonctions hypergéométriques de Goursat et leurs propriétés, c'est-à-dire entre les deux généralisations de la fonction de Gauss. Cette correspondance a été donnée, par une autre fonctionnelle classique, précisément par l'intégrale de Laplace [55, (c), (d), (i) : vol. I, p. 223].

$$(8) \qquad f(x) = \int_{(l)} e^{-tx}\,\psi(t)\, dt)$$

et

$$(9) \qquad \psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\lambda)} e^{xt} f(x)\, dx.$$

Par exemple, si $f(x)$ est une intégrale d'une équation aux différences finies du premier ordre dont les coefficients sont rationnels en x de degré m, la $\psi(t)$ est une intégrale d'une équation différentielle d'ordre m réductible à l'équation de Goursat.

Si $\psi(t)$ est une intégrale d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients rationnels en e^{-t} de degré p, la $f(x)$ est une intégrale d'une équation aux différences d'ordre p dont les coefficients sont du premier degré : c'est une fonction de Pochhammer de chacun des p paramètres dont elle dépend.

Précisément, dans le cas

$$f(x+1) = \frac{P(x)}{Q(x)} f(x),$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynomes de degré m, il a alors obtenu une équation différentielle transformée vérifiée par

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\lambda)} e^{xt} f(x)\, dx,$$

où

$$f(x) = \int_{(l)} e^{-tx}\psi(t)\, dt.$$

En particulier, si

$$P(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_n)$$

et

$$Q(x) = (x-\sigma_1)(x-\sigma_2)\ldots(x-\sigma_{n-1}),$$

alors, avec des conditions pour a,

$$(10) \qquad \psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{xt} \frac{\Gamma(x-\rho_1)\Gamma(x-\rho_2)\ldots\Gamma(x-\rho_n)}{\Gamma(x-\sigma_1)\Gamma(x-\sigma_2)\ldots\Gamma(x-\sigma_{n-1})}\, dx$$

et $\psi(t)$ est donnée par l'intégrale (10) à limites imaginaires dont nous avons parlé au n° 4 qui exprime une remarquable formule d'inversion d'une intégrale définie.

Dans le cas $p = 3$ et un paramètre égal à l'unité, on retrouve la fonction hypergéométrique à deux variables F_1, d'Appell [2, (*a*), (*b*)] dont nous parlerons dans la suite. On peut voir à ce sujet le Mémoire de Goursat [29, (*e*)] où les fonctions représentées par des intégrales définies contenant deux paramètres arbitraires vérifient un système d'équations linéaires aux dérivées partielles d'Appell et les intégrales à deux paramètres arbitraires étudiées aussi par Picard [54, (*a*), (*b*)].

Garnier a aussi étudié des systèmes d'équations aux dérivées partielles de ce type, dont il a indiqué plusieurs propriétés intéressantes [24].

CHAPITRE III.

Fonctions hypergeométriques de plusieurs variables.

8. **Les quatre séries hypergéométriques d'Appell.** — Appell [2] a généralisé la série de Gauss en considérant quatre séries de deux variables

$$(1) \qquad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum_{m,n} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$(2) \qquad F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = \sum_{m,n} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$(3) \qquad F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum_{m,n} \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$(4) \qquad F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum_{m,n} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

où la sommation doit s'étendre à toutes les valeurs entières positives où nulles de m, n et le symbole (λ, k) où λ désigne un nombre quelconque et k un entier positif ou nul, signifie, comme nous avons rappelé au nº 1,

$$(\lambda, k) = \frac{\Gamma(\lambda + k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1); \qquad (\lambda, 0) = 1, \quad (1, k) = k!$$

Les α, α', β, β', γ, γ' sont considérés comme des paramètres et x et y comme des variables en analogie avec la série simple de Gauss.

Ces séries se réduisent naturellement, pour des particulières valeurs des paramètres, à des développements bien connus, par exemple :

$$(1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'} = F_1(\alpha, \beta, \beta', \alpha, x, y),$$

$$(1-x-y)^{-\alpha} = F_2(\alpha, \beta, \beta', \beta, \beta', x, y),$$

$$\log \frac{1}{1-x-y} = x\, F_2(1, 1, \beta', 2, \beta', x, y) + y\, F_2(1, \beta, 1, \beta, 2, x, y).$$

En ordonnant ces séries d'Appell par rapport à x, nous avons par exemple, pour la fonction F_1,

$$(5)\quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha + m, \beta', \gamma + m, y) x^m,$$

dont les éléments sont des fonctions hypergéométriques de Gauss de y.

En ordonnant ces séries d'Appell par rapport à y, nous avons, par exemple, pour la fonction F_1,

$$(6)\quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta', n)}{(\gamma, n)(1, n)} F(\alpha + n, \beta, \gamma + n, x) y^n,$$

où les éléments sont des fonctions hypergéométriques de Gauss de x. Ainsi pour les autres fonctions d'Appell : F_2, F_3, F_4. Pour la convergence de ces quatre séries, nous avons : F_1 convergent pour $|x| < 1$, $|y| < 1$ et divergent si $|x|$ ou $|y|$ est plus grand que l'unité ; F_2 convergent pour $|x| + |y| < 1$ et divergent pour $|x| + |y| > 1$; F_3 convergent pour $|x| < 1$, $|y| < 1$ et divergent si $|x|$ ou $|y|$ est plus grand que l'unité ; F_4 convergent pour $|\sqrt{x}| + |\sqrt{y}| < 1$. De même que la série de Gauss a été prolongée en dehors du cercle de convergence, de même on peut prolonger les quatre séries doubles hypergéométriques en dehors des cercles de convergence associés et nous avons alors quatre fonctions hypergéométriques d'Appell de deux variables. Pour ces fonctions, ainsi que pour les fonctions hypergéométriques d'une variable, nous avons des expressions analytiques valables dans leurs domaines d'existence : nous donnons tout de suite ces expressions.

9. Représentation des fonctions hypergéométriques d'Appell par des intégrales définies. — Pour représenter les fonctions hypergéométriques dans tout leur domaine d'existence et non seulement dans les cercles associés, nous avons pour les séries F_1, F_2, F_3 des intégrales doubles, par exemple, pour F_1

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta-\beta')}{\Gamma(\gamma)} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) \\ &= \iint u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1} (1-ux-vy)^{-\alpha}\, du\, dv, \\ &\qquad (u \geqq 0,\ v \geqq 0,\ 1-u-v \geqq 0) \end{aligned} \right.$$

et

$$R(\beta) > 0, \qquad R(\beta') > 0, \qquad R(\gamma - \beta - \beta') > 0$$

et de même pour les autres fonctions F_2, F_3 [3, p. 28]. Il est intéressant que Picard [54, (a)] ait exprimé la fonction F_1 par une intégrale simple

$$(2) \qquad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$$
$$= \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'} du,$$
$$R(\alpha) > 0, \qquad R(\gamma - \alpha) > 0.$$

Pour avoir des expressions pour toutes les fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 et valables dans des conditions plus larges, nous rappelons ici les expressions des quatre fonctions hypergéométriques par des intégrales prises le long de contours complexes.

Ces expressions sont la généralisation de la formule de Barnes pour les fonctions hypergéométriques d'une variable. On considère la fonction

$$(3) \quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha+m, \beta', \gamma+m, y) x^m,$$
$$|x| < 1, \qquad |y| < 1$$

et en exprimant les fonctions F qui figurent dans la série par la formule

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(\gamma+s)} \Gamma(-s)(-x)^s \, ds,$$

on obtient aisément [(3), p. 40]

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma)} F_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} F(\alpha+t, \beta, \gamma+t, x) \frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\gamma+t)} \Gamma(-t)(-y)^t \, dt$$

et l'on a la formule finale

$$(4) \qquad \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma)} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$$
$$= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(\alpha+s+t)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\gamma+s+t)}$$
$$\times \Gamma(-s)\Gamma(-t)(-x)^s(-y)^t \, ds \, dt.$$

On obtient des formules analogues pour F_2, F_3, F_4. Ces formules ont été condensées par Kampé de Fériet dans une expression unique qui fait voir le lien existant, entre les quatre fonctions hypergéométriques d'Appell [2, (*c*), p. 12; 3, p. 40].

10. Systèmes d'équations aux dérivées partielles pour les fonctions hypergéométriques d'Appell. — Les quatre fonctions d'Appell satisfont à des systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles; on a :

— pour F_1,

$$(1)\quad \begin{cases} x(1-x)r + y(1-x)s + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)p - \beta yq - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t + x(1-y)s + (\gamma - (\alpha+\beta'+1)y)q - \beta' xp - \alpha\beta' z = 0; \end{cases}$$

— pour F_2,

$$(2)\quad \begin{cases} x(1-x)r - xys + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)p - \beta yq - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t - xys + (\gamma' - (\alpha+\beta'+1)y)q - \beta' xp - \alpha\beta' z = 0; \end{cases}$$

— pour F_3,

$$(3)\quad \begin{cases} x(1-x)r + ys + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)p - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t + xs + (\gamma - (\alpha'+\beta'+1)y)q - \alpha'\beta' z = 0; \end{cases}$$

— pour F_4,

$$(4)\quad \begin{cases} x(1-x)r - y^2t - 2xys + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)p - (\alpha+\beta+1)yq - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t - x^2r - 2xys + (\gamma' - (\alpha+\beta+1)y)q - (\alpha+\beta+1)xp - \alpha\beta z = 0; \end{cases}$$

où p, q, r, s, t ont l'ordinaire signification.

Ces systèmes sont de la forme

$$(5)\quad \begin{cases} r = a_1(x, y)s + a_2(x, y)p + a_3(x, y)q + a_4(x, y), \\ t = b_1(x, y)s + b_2(x, y)p + b_3(x, y)q + b_4(x, y) \end{cases}$$

et l'on peut étendre à ces systèmes un théorème de Bouquet sur des systèmes d'équations aux différentielles totales. Nous renvoyons pour la question d'existence et pour d'autres encore au livre [3, p. 45-65] et au fascicule d'Appell [2, (*c*), p. 12-17] et à l'intéressant Mémoire d'Erdélyi [19, (*e*)], où l'on trouve toutes les références sur les recherches de Méray, Riquier, Janet, Thomas [63], sur cette importante question.

Dans son Mémoire, Erdélyi prépare très magistralement le terrain pour édifier une théorie pour les systèmes des équations différentielles partielles, similaire à celle de Riemann et de Fuchs pour les équations différentielles linéaires homogènes.

Comme l'équation différentielle de Gauss admet 24 intégrales, ainsi on peut trouver 60 fonctions qui vérifient le système de F_1. (*voir* [3, p. 62-65], pour le tableau des 60 intégrales).

Nous ne pouvons ni rappeler ici les recherches de Le Vavasseur sur le système d'équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles satisfait la série hypergéométrique à deux variables $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$, ni parler des relations qui lient quatre à quatre les intégrales de ces équations [3, p. 65 et suiv.].

Récemment, Erdélyi [19, (*c*)] a montré que le tableau des 60 solutions n'est pas complet et il a indiqué, en outre, des systèmes qui peuvent être ramenés au système de F_1.

11. Équations différentielles des fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 considérées comme fonctions d'une seule variable. — Nous rappelons ici qu'on peut déduire très aisément du système vérifié par F_1, supposant la F_1 fonction d'une seule variable, une équation différentielle linéaire du troisième ordre homogène, à laquelle F_1 satisfait [3, p. 73].

Pour les fonctions F_2, F_3, F_4 considérées fonctions d'une seule variable, on a des équations différentielles linéaires homogènes du quatrième ordre [3, p. 71].

12. Séries hypergéométriques de *n* variables de Lauricella. — Nous avons brièvement rappelé les propriétés essentielles des fonctions d'Appell, c'est-à-dire les propriétés qui sont à la base du développement de la résolution des équations algébriques par des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. Dans ce numéro nous parlerons en abrégé des recherches de Lauricella, et dans les numéros suivants de cette première partie, de celles de Mellin, Horn, Kampé de Fériet, Birkeland, Ore, Erdélyi, qui forment le cadre où se place la résolution des équations algébriques générales.

Lauricella [46] a étendu l'idée d'Appell, et a formé des séries hypergéométriques de *n* variables et il a obtenu précisément les quatre séries :

$$(1)\quad F_A(\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_n} \frac{(\alpha, m_1+m_2+\ldots+m_n)(\beta_1, m_1)(\beta_2, m_2)\ldots(\beta_n, m_n)}{(\gamma_1, m_1)(\gamma_2, m_2)\ldots(\gamma_n, m_n)(1, m_1)(1, m_2)\ldots(1, m_n)} \times x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

et

$$(2)\quad F_B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \gamma, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_n} \frac{(\alpha_1, m_1)(\alpha_2, m_2)\ldots(\alpha_n, m_n)(\beta_1, m_1)(\beta_2, m_2)\ldots(\beta_n, m_n)}{(\gamma, m_1+m_2+\ldots+m_n)(1, m_1)(1, m_2)\ldots(1, m_n)} \times x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

et

$$(3)\quad F_C(\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_n} \frac{(\alpha, m_1+m_2+\ldots+m_n)(\beta, m_1+m_2+\ldots+m_n)}{(\gamma_1, m_1)(\gamma_2, m_2)\ldots(\gamma_n, m_n)(1, m_1)(1, m_2)\ldots(1, m_n)} \times x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

et

$$(4)\quad F_D(\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \gamma, x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_n} \frac{(\alpha, m_1+m_2+\ldots+m_n)(\beta_1, m_1)(\beta_2, m_2)\ldots(\beta_n, m_n)}{(\gamma, m_1+m_2+\ldots+m_n)(1, m_1)(1, m_2)\ldots(1, m_n)} \times x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}.$$

Par des calculs semblables à ceux faits pour les séries d'Appell, Lauricella obtient pour le domaine de convergence :

— pour F_A,

$$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| < 1;$$

— pour F_B,

$$|x_1| < 1, \qquad |x_2| < 1, \qquad \ldots, \qquad |x_n| < 1;$$

— pour F_C,

$$|\sqrt{x_1}| + |\sqrt{x_2}| + \ldots + |\sqrt{x_n}| < 1;$$

et pour F_D,

$$|x_1| < 1, \qquad |x_2| < 1, \qquad \ldots, \qquad |x_n| < 1.$$

Ces séries de Lauricella vérifient des systèmes de n équations aux dérivées partielles du second ordre du type

$$(5)\quad \sum_{r,s} a_{r,s}^{(i)} \frac{\partial^2 F}{\partial x_r \partial x_s} + \sum_t a_t^{(i)} \frac{\partial F}{\partial x_t} + a_0^{(i)} F = 0, \qquad (i, r, s, t = 1, 2, \ldots, n).$$

Il peut donner grâce aux recherches de Bourlet l'intégrale générale pour les systèmes relatifs aux fonctions F_A, F_B, F_C, [46, p. 122]; [3, p. 117]; [2, (c), p. 35].

Naturellement Lauricella a donné pour F_A, F_B, F_D des représentations par des intégrales définies multiples qui sont la généralisation de la formule (2), n° 3, pour $n = 1$, de la fonction de Gauss et pour $n = 2$ des intégrales représentant les F_1, F_2, F_3 d'Appell.

Nous ne pouvons pas donner ici des renseignements ultérieurs bien que les séries donnant les solutions des équations algébriques aient une intéressante analogie avec ces séries de Lauricella. Dans un récent Mémoire Feldheim [20] a donné une équation intégrale pour les fonctions hypergéométriques F_A et F_D de Lauricella et même pour les fonctions Φ_2 et Ψ_2 de Humbert [38].

13. Intégrales hypergéométriques de Mellin. — Mellin dans des Mémoires classiques [51] a considéré les transformations des équations différentielles partielles avec des coefficients rationnels en équations aux différences partielles avec des coefficients de la même espèce, et *vice versa*. Cette recherche est la généralisation de la transformation des équations différentielles linéaires en des équations aux différences et *vice versa* : Pincherle s'est occupé du cas d'une variable, nous en avons parlé au n° 7; Mellin aussi cite dans ses Ouvrages, les travaux de Pincherle. Pour cette transformation, Mellin fait usage d'une intégrale multiple.

Ce problème est fondamental, soit pour l'introduction des plus générales fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, soit pour la résolution des équations algébriques par inversion d'une intégrale définie.

Pour cette raison, nous parlerons d'abord du théorème d'inversion de Mellin [51, (*f*), p. 31].

Soit

$$(1) \qquad F(u_1, u_2, \ldots, u_n), \qquad u_p = u'_p + i u''_p, \quad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

une fonction holomorphe dans

$$a'_p \leq u'_p \leq a''_p, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

et limitée par

$$(2) \qquad |F(u_1, u_2, \ldots, u_n)| < \chi\, e^{-\gamma_1 |u''_1| - \gamma_2 |u''_2| - \ldots - \gamma_n |u''_n|},$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ sont des constantes positives et χ une variable qui tend vers zéro, au moins après une multiplication par de convenables puissances, si la valeur absolue d'une des variables u''_1, $u''_2, \ldots, u''_n$ ou de plusieurs, tend en même temps vers l'infini.

Considérons maintenant, avec Mellin, l'intégrale

$$(3) \quad \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{a_1 - i\infty}^{a_1 + i\infty} \cdots \int_{a_n - i\infty}^{a_n + i\infty} F(u_1, u_2, \ldots, u_n) x_1^{-u_1} x_2^{-u_2} \ldots x_n^{-u_n} du_1 \, du_2 \ldots du_n,$$

où

$$a'_p \leqq a_p \leqq a''_p, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$x_p = |x_p| e^{i\theta_p}, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

avec les conditions

$$(4) \qquad -\gamma_p + \delta \leqq \theta_p \leqq +\gamma_p - \delta, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

où δ est positif déterminé, arbitrairement petit.

Alors $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est fonction holomorphe des variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$ dans les domaines (4).

Pour la fonction $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on a la limitation

$$(5) \qquad |\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)| < c\, |x_1|^{-a_1} |x_2|^{-a_2} \ldots |x_n|^{-a_n},$$

où

$$a'_p \leqq a_p \leqq a''_p, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

et c constante indépendante de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Considérons maintenant, avec Mellin, l'intégrale

$$(6) \quad F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$
$$= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) x_1^{u_1 - 1} x_2^{u_2 - 1} \ldots x_n^{u_n - 1} dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n,$$

où Φ est holomorphe dans les domaines

$$-\gamma_p \leqq \theta_p \leqq +\gamma_p,$$
$$x_p = |x_p| e^{i\theta_p}, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

avec les limitations (5) : $F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ sera holomorphe dans

$$a'_p + \varepsilon \leqq u'_p \leqq a''_p - \varepsilon,$$

où ε est positif déterminé, arbitrairement petit, on aura

$$(7) \qquad |F(u_1, u_2, \ldots, u_n)| \leqq \chi\, e^{-\gamma_1|u_1''|-\gamma_2|u_2''|-\ldots-\gamma_n|u_n''|}.$$

Mellin appelle la fonction F de *première classe* et Φ de *deuxième classe*. Chaque fonction F est transformée par l'intégrale (3) dans une fonction Φ et *vice versa* chaque fonction Φ est transformée par l'intégrale (6) dans une fonction F. Si F est transformée par (3) dans Φ et Φ par (6) transformée dans F_1, on aura $F = F_1$ et, d'une manière analogue, pour la fonction Φ.

Mellin fait usage de cette inversion pour la définition des fonctions hypergéométriques et pour leurs applications. Il examine le système

$$(8) \quad \begin{cases} F(u_1, u_2, \ldots, u_s+1, \ldots, u_n) = \dfrac{f_s(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{g_s(u_1, u_2, \ldots, u_n)} F(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

où les fonctions f_s et g_s sont des polynomes se décomposant en facteurs du premier degré de la forme

$$p_1 u_1 + p_2 u_2 + \ldots + p_n u_n + c.$$

où les p_r sont des nombres entiers. Les fonctions f_s et g_s ne sont pas indépendantes : par exemple, pour $n = 2$, nous avons

$$\frac{f_1(u, v)}{g_1(u, v)} \frac{f_2(u+1, v)}{g_2(u+1, v)} = \frac{f_2(u, v)}{g_2(u, v)} \frac{f_1(u, v+1)}{g_1(u, v+1)}.$$

Dans les conditions précédentes et dans d'autres, la fonction

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{a_1-i\infty}^{a_1+i\infty} \cdots \int_{a_n-i\infty}^{a_n+i\infty} F(u_1, u_2, \ldots, u_n) x_1^{-u_1} x_2^{-u_2} \ldots x_n^{-u_n}\, du_1\, du_2 \ldots du_n$$

vérifie le système des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles hypergéométrique

$$(9) \quad \begin{cases} f_s\left(-x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}, -x_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, -x_n\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)\Phi \\ = g_s\left(-x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}, -x_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, -x_n\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)x_s\Phi, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Mellin appelle [51, (*f*), p. 44; (*j*), p. 145] fonctions hypergéométriques de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les fonctions qui vérifient un système (9) de n équations différentielles linéaires aux dérivées partielles, où $f_s(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $g_s(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ sont des polynomes qui se décomposent en produit de facteurs du premier degré de la forme

$$p_1 u_1 + p_2 u_2 + \ldots + p_n u_n + c,$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des nombres entiers (positifs, négatifs ou nuls).

Il considère [51, (n), p. 11] le système

$$(10)\quad \begin{cases} F(u_1, u_2, \ldots, u_s + k, \ldots, u_n) = \dfrac{f_s(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{g_s(u_1, u_2, \ldots, u_n)} F(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ (s = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

où f_s et g_s ont la même propriété indiquée et où k est entier positif, et il obtient du système (9) par une simple transformation, u_s en $\frac{u_s}{k}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ et pour la fonction Φ, dans ce cas, le système

$$(11)\quad \begin{cases} f_s\left(-x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1}, -x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, -x_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)\Phi \\ = g_s\left(-x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1}, -x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, -x_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right) x_s^k \Phi, \\ (s = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

système qu'il appelle alors aussi hypergéométrique.

Ce système sera utile pour la résolution d'une équation algébrique générale de degré k. (*voir* deuxième partie, n° 20).

Les intégrales Φ, solutions des systèmes (9) et (11), ont été appelées intégrales multiples hypergéométriques de Mellin.

Pour les quatre fonctions d'Appell, en considérant des fonctions

$$F(u, v) = \prod_{r=1}^{n} \Gamma(p_r u + q_r v + c_r),$$

où p_r, q_r sont des nombres entiers, Mellin obtient les quatre systèmes suivants aux différences partielles. Par exemple, pour la fonction $z = F_1$ d'Appell, le système

$$\begin{cases} x(1-x)r + y(1-x)s + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)p - \beta yq - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t + x(1-y)s + (\gamma - (\alpha + \beta' + 1)y)q - \beta' yp - \alpha\beta' z = 0 \end{cases}$$

correspond au système

$$\left\{\begin{aligned} F(u+1, v) &= \frac{u(u+v-\gamma+1)}{(u-\beta+1)(u+v-\alpha+1)} F(u, v), \\ F(u, v+1) &= \frac{v(u+v-\gamma+1)}{(v-\beta'+1)(u+v-\alpha+1)} F(u, v) \end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite de manière analogue pour les autres fonctions F_2, F_3, F_4, [51 (*f*), p. 46; (*j*), p. 146].

La fonction F est une fonction de première classe et la fonction correspondante F_1 de deuxième classe, et ainsi pour F_2, F_3, F_4.

14. **Séries hypergéométriques de Horn.** — La définition de la série hypergéométrique à deux variables la plus générale [3, p. 396]

$$(1) \qquad \sum_{m,n} a_{m,n} x^m y^n$$

a été donnée par Horn [37, (*a*)] et c'est précisément la série où

$$(2) \qquad \frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}} = \frac{P(m, n)}{R(m, n)}, \qquad \frac{a_{m\, n+1}}{a_{m,n}} = \frac{Q(m, n)}{S(m, n)},$$

P, Q, R, S, désignent quatre polynomes *fixes* en m et n (les degrés de P et Q sont au plus égaux respectivement à ceux de R et S, et R et S ne s'annulent pour aucune valeur des entiers positifs m et n).

Les polynomes P, Q, R, S vérifient la condition de compatibilité

$$(3) \qquad \frac{P(m, n+1)}{R(m, n+1)} \frac{Q(m, n)}{S(m, n)} = \frac{P(m, n)}{R(m, n)} \frac{Q(m+1, n)}{S(m+1, n)}.$$

La définition s'étend naturellement aux séries de plusieurs variables.

Horn considère des systèmes de n équations linéaires aux dérivées partielles à coefficients rationnels vérifiés par ces séries.

Les séries de Lauricella rentrent dans cette classe très générale, de même que les séries d'Appell.

Pour les séries doubles, Horn [37, (*a*)] obtient un théorème très intéressant sur les domaines de convergence des séries doubles hypergéométriques en considérant m et n comme les coordonnées d'un point d'un plan : il donne une forme géométrique aux conditions de convergence et même pour les séries triples.

Il considère en d'autres Mémoires, plus récents, plusieurs séries de deux variables, où [37, (d)], $\left((\lambda, k) = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)},\ k \gtreqless 0\right)$,

$$(4)\qquad \frac{P(m, n)}{R(m, n)} = \prod_{i}(a_i + u_i m + v_i n,\ u_i),$$

$$\frac{Q(m, n)}{S(m, n)} = \prod_{i}(a_i + u_i m + v_i n,\ v_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

u_i, v_i sont des nombres entiers (positifs, négatifs ou nuls).

Le coefficient général est alors [37, (a), p. 557]

$$a_{m,n} = \prod_{i}(a_i,\ u_i m + v_i n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

le denominateur R contenant le facteur $(1 + m)$ et le dénominateur S contenant le facteur $(1 + n)$, (*voir* n° 15).

Si p est la somme des nombres u positifs et q la somme des nombres v positifs, p' la somme des valeurs absolues des nombres u négatifs et q la somme des valeurs absolues des nombres v négatifs, il considère des séries où

$$p \leqq p' \leqq 2, \qquad q \leqq q' \leqq 2.$$

Alors, pour $p = p' = 2$, $q = q' = 2$, on obtient, par exemple, les quatre séries d'Appell et d'autres.

Les séries confluentes de deux variables ont été obtenues par Humbert [38, (a)] en étendant à ces séries la méthode qui permet de déduire les fonctions $G(\alpha, \gamma, x)$, et $J(\gamma, x)$ de la série $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Horn pour

$$p \leqq p' = 2, \qquad q \leqq q' = 2$$

(où tous les deux ne sont pas égaux à 2) obtient des séries classiques de Humbert et d'autres et ainsi pour

$$p \leqq p' = 2, \qquad q = q' = 1.$$

Les séries confluentes ne sont pas nécessaires pour la deuxième partie et pour cela nous limitons les notices sur ces séries. Dans ces Mémoires, Horn fait une étude intéressante sur le comportement de ces séries dans le voisinage des points singuliers [37, (f)].

Erdélyi [19, (*c*)], à l'égard des solutions des systèmes d'équations différentielles partielles, pour ces séries de Horn, apporte des contributions profondes aux recherches de Horn et de Borngässer [9].

15. **Séries hypergéométriques d'ordre supérieur de Kampé de Fériet.** — Une étude systématique des fonctions hypergéométriques les plus générales à deux variables et des équations aux dérivées partielles vérifiées par ces fonctions a été faite par Kampé de Fériet [40]. Il a même étendu [40, (*c*); 41, p. 147] cette méthode aux séries même les plus générales, par exemple, pour les séries à deux variables telles que les coefficients vérifient un système de deux équations linéaires aux différences finies, mais d'ordre quelconque

$$(1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=0,\ s=0}^{r=p,\ s=q} \mathrm{P}_{r,s}(m,\ n)\, a_{m+r,\,n+s} = 0, \\ \displaystyle\sum_{r=0,\ s=0}^{r=p',\ s=q'} \mathrm{Q}_{r,s}(m,\ n)\, a_{m+r,\,n+s} = 0, \end{cases}$$

$\mathrm{P}_{r,s}$, $\mathrm{Q}_{r,s}$ désignant des polynomes en m et n.

Les systèmes de deux équations linéaires aux dérivées partielles vérifiées par les fonctions hypergéométriques les plus générales à deux variables, c'est-à-dire pour les séries où

$$(2)\qquad \frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}} = \frac{\mathrm{P}(m,\ n)}{\mathrm{R}(m,\ n)}, \qquad \frac{a_{m\,n+1}}{a_{m\,n}} = \frac{\mathrm{Q}(m,\ n)}{\mathrm{S}(m,\ n)},$$

P, Q, R, S, polynomes en m et n, fixes, sont déterminés par la connaissance de ces quatre polynomes. Kampé de Fériet èn appliquant la formule d'interpolation de Newton pour deux variables, forme précisément le système de deux équations linéaires aux dérivées partielles vérifiées par ces séries [40, (*b*); 41, p. 145].

Mais les polynomes à deux ou plusieurs variables ne peuvent pas, en général, se décomposer dans le produit de facteurs linéaires. Kampé de Fériet a considéré [40, (*d*); 41, p. 149] une classe de fonctions hypergéométriques contenue dans les fonctions hypergéométriques les plus générales et qui est naturellement la généralisation des séries d'Appell. Cette classe de fonctions précisément est telle que les polynomes P, Q, R, S (dans le cas de deux variables) se décomposent dans le produit de facteurs linéaires, dont nous expliquerons tout de suite les formes particulières.

Nous appellerons *séries (fonctions) hypergéométriques d'ordre supérieur de deux variables* toutes les séries où P, Q, R, S se décomposent en facteurs linéaires de la forme

$$am + bn + c,$$

où a, b sont des nombres entiers (positifs, négatifs ou nuls) et c réels ou complexes avec des exclusions : R et S non nuls.

De même pour les séries de plusieurs variables.

On peut même considérer le système (1), où $P_{r,s}$ $Q_{r,s}$ se décomposent dans le produit de facteurs linéaires.

En particulier, dans ce cas, si nous considérons le système

$$(3)\qquad \begin{cases} P_{k,0}(m, n)\, a_{m+k\, n} + P_{0\,0}(m, n)\, a_{m,n} = 0, \\ Q_{0\,k}(m, n)\, a_{n\, n+k} + Q_{0\,0}(m, n)\, a_{m,n} = 0, \end{cases}$$

le système correspondant des deux équations linéaires aux dérivées partielles est déterminé, en forme simple, par la connaissance de ces quatre polynomes $P_{k,0}$, $P_{0,0}$, $Q_{0,k}$, $Q_{0,0}$.

Kampé de Fériet a introduit les séries où les polynomes P, Q, R, S, dans les équations (2) sont de la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} P(m, n) = \prod_{i=1}^{i=\mu}(\alpha_i + m + n)\prod_{i=1}^{i=\nu}(\beta_i + m), \\ Q(m, n) = \prod_{i=1}^{i=\mu}(\alpha_i + m + n)\prod_{i=1}^{i=\nu}(\beta'_i + n), \\ R(m, n) = (m+1)\prod_{i=1}^{i=\rho}(\gamma_i + m + n)\prod_{i=1}^{i=\sigma}(\delta_i + m), \\ S(m, n) = (n+1)\prod_{i=1}^{i=\rho}(\gamma_i + m + n)\prod_{i=1}^{i=\sigma}(\delta'_i + n) \end{cases}$$

et il obtient la série hypergéométrique ($a_{0,0} = 1$)

$$(5)\qquad F(x, y) = \sum_{m\, n} \frac{\prod_{i=1}^{i=\mu}(\alpha_i, m + n)\prod_{i=1}^{i=\nu}(\beta_i, m)\,(\beta'_i, n)}{\prod_{i=1}^{i=\rho}(\gamma_i, m + n)\prod_{i=1}^{i=\sigma}(\delta_i, m)\,(\delta'_i, n)}\, \frac{x^m}{(1, m)}\, \frac{y^n}{(1, n)}$$

représentée par le symbole

$$(6)\qquad F\left(\begin{array}{c|llll|c} \mu & \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_\mu & & \\ \nu & \beta_1, & \beta'_1, & \ldots, & \beta_\nu, & \beta'_\nu & x, y \\ \rho & \gamma_1, & \gamma_2, & \ldots, & \gamma_\rho & & \\ \sigma & \delta_1, & \delta'_1, & \ldots, & \delta_\sigma, & \delta'_\sigma & \end{array}\right),$$

μ, ν, ρ, σ sont appelés *indices caractéristiques.*

Les conditions imposées sont

$$\mu + \nu \leqq \rho + \sigma + 1$$

et que γ, δ et δ' ne soient pas égaux à des entiers négatifs.

Kampé de Fériet a fait une étude systématique de ces séries particulières qu'il a nommées fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables [40, (*e*); 41, p. 149 et suiv.].

L'entier

$$(7)\qquad \omega = \rho + \sigma$$

est *l'ordre* et si

$$\mu + \nu = \omega + 1,$$

la fonction est appelée complète d'ordre ω.

La différence

$$(8)\qquad \theta = \omega + 1 - (\mu + \nu)$$

est la *classe* de la fonction qui pourra être o (fonction complète) jusqu'à $\omega + 1$. Nous ne pouvons pas ici entrer en détail (*voir* [41, p. 150]), nous rappelons que ces séries seront représentées par des intégrales multiples et par des intégrales doubles complexes analogues à celles pour les fonctions d'Appell (form. (2) et (4) du n° 9). On pourra immédiatement écrire le système de deux équations linéaires aux dérivées partielles, système vérifié par les fonctions de Kampé de Fériet et qui rentre dans les systèmes généraux. Kampé de Fériet dans des Notes publiées dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* [40, (*d*), (*f*); 41, p. 155 et suiv.] a étudié l'intégration de ces systèmes d'équations aux dérivées partielles. Il démontre trois théorèmes fondamentaux pour ces systèmes, après avoir introduit la définition de *système fondamental d'intégrales.*

Ces théorèmes montrent la possibilité d'exprimer les dérivées $p_{j,k}$ d'une intégrale de ce système en fonction des $(\omega + 1)^2$ premières dérivées, l'unicité d'une intégrale holomorphe, et la formation de l'intégrale générale en faisant une combination linéaire à coefficients constants de $(\omega+1)^2$ intégrales particulières formant un système fondamental. Il considère même le cas où le nombre des intégrales indépendantes du système est inférieur à $(\omega+1)^2$ et il donne une règle générale pour déterminer ceci dès qu'on connaît les polynomes P, Q, R, S [41, p. 172].

Les séries d'Appell, de Lauricella, les séries de Horn (*voir* n° 14, formules (4)) et les séries (6) de Kampé de Fériet sont donc des séries *hypergéométriques d'ordre supérieur de plusieurs variables*, c'est-à-dire, de la forme

$$\sum_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n} A_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

avec

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{A_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p+1, \ldots, \alpha_n}}{A_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_n}} = \dfrac{f_p(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{g_p(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)} = R_p(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n), \\ \qquad\qquad (p = 0, 1, \ldots, n), \end{cases}$$

où f_p, g_p se décomposent en produit de facteurs linéaires avec les coefficients de $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ entiers, (positifs, négatifs ou nuls).

Nous trouverons ces séries dans la résolution des équations algébriques générales (*voir* deuxième partie, nos 24 et 25).

Une étude sur la forme des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables a été faite par Ore [53, (*a*), (*b*)]. Ore a considéré les séries hypergéométriques générales de deux variables, et les résultats obtenus pourront être generalisés sans difficulté pour les fonctions de plusieurs variables.

Pour une série de deux variables on a la condition de compatibilité

$$(10)\qquad R_1(m, n)\, R_2(m+1, n) = R_2(m, n)\, R_1(m, n+1)$$

et Ore a précisement donné une méthode pour trouver les solutions de cette équation aux différences partielles. Cette étude a été faite pour apporter une correction à un théorème de Birkeland. Birkeland a énoncé [7, (*i*)] le théorème suivant : *Si les fonctions rationnelles* R_1, R_2 *satisfont à l'équation* (10), *les numérateurs* $f(m, n)$, *et les dénominateurs* $g(m, n)$ *sont des produits de facteurs linéaires en m et n.*

Ore a donné dans ce Mémoire des théorèmes sur les solutions possibles pour R_1 et R_2. Il conclut par le VIII^e théorème que les dénominateurs et les numérateurs de la solution générale de cette équation (10) en fonctions rationnelles, sont des produits de facteurs de trois types : les uns de la forme $am+bn+c$, a et b des nombres entiers, (facteurs linéaires), et les autres contenant m seulement (R_1) et n seulement (R_2) et polynomes en m et n; facteurs étudiés par Ore [53, (b) : formules (39) et (40)]. Il résulte néanmoins de l'étude de Ore que le théorème de Birkeland n'est pas vrai en des cas spéciaux.

Erdélyi a également étudié ces questions [19, (d)] regardant les coefficients d'une fonction hypergéométrique générale de plusieurs variables.

DEUXIÈME PARTIE.

RÉSOLUTION ANALYTIQUE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES GÉNÉRALES.

CHAPITRE IV.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION TRINOME.

16. Notices historiques sur la résolution de l'équation du cinquième degré. — Jerrard a ramené l'équation générale du cinquième degré à l'équation trinome [60, vol. I : p. 429]

$$y^5 - y - a = 0, \tag{1}$$

par une substitution qui ne renferme d'autres irrationnalités que des radicaux carrés et cubiques, cette réduction a permis à Hermite une méthode classique de résolution analytique de l'équation du cinquième degré. Par résolution d'une équation algébrique du cinquième degré, Hermite [33 (a), (b), (d)] entend la possibilité de représenter séparément les racines par des fonctions uniformes relatives à ces nouvelles variables en introduisant des variables auxiliaires. Et par l'introduction des fonctions elliptiques, il est arrivé à représenter les cinq valeurs des racines séparément par des fonctions uniformes des variables auxiliaires liées aux transcendantes elliptiques. Nous rappellerons aussi que Kronecker [43] par une autre méthode a réussi à représenter les racines des équations du cinquième degré par des expressions explicites par rapport à différentes variables auxiliaires liées aussi aux transcendantes elliptiques.

Hermite a, en outre et par conséquent, fait une longue étude sur ces deux méthodes [33, (*b*)] en prenant pour base, pour la seconde méthode, un remarquable travail de Brioschi [11, (*b*)]. A ce propos nous devons nous rappeler que même Betti a donné une résolution de l'équation trinome du cinquième degré

$$y^5 + 5y^3 - x = 0, \tag{2}$$

résolution qui dérive d'une proposition plus générale donnée par Betti [6, (*a*)].

Betti a démontré que les racines d'une équation algébrique générale

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_1 y + a_0 = 0,$$

où les coefficients sont des fonctions du *premier* degré d'une variable x sont des intégrales d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{\theta(y)\,dy}{\sqrt{\psi(y)}}, \tag{3}$$

où $\varphi(x)$ est la fonction rationnelle qui doit s'annuler afin que l'équation donnée ait des racines égales (discriminant) et $\theta(y)$ et $\psi(y)$ sont des fonctions rationnelles seulement de y. Pour l'équation trinome (2) il obtient, en posant $y^2 = z$,

$$\frac{2\,dx}{5\sqrt{x^2 + 108}} = \frac{z\,dz}{\sqrt{z^4 + 4z^3 - 8z^2 + 12z}} \tag{4}$$

qui s'intègre par les fonctions elliptiques.

Mais ces méthodes des variables auxiliaires sont des méthodes tout à fait particulières : dans les numéros suivants nous exposerons pour cela la résolution des équations algébriques trinomes générales par des méthodes générales, et précisément par des intégrales définies et par des fonctions hypergéométriques des coefficients de l'équation.

17. Résolution de Heymann de l'équation trinome générale par des intégrales définies. — Dans un Mémoire, Heymann [34, (*a*), (*b*)] a donné des formules intégrales pour représenter les racines des équations trinomes générales.

Capelli [13, (*a*)] a perfectionné et présenté d'une manière élégante ces résultats et même les formules de Heymann pour la résolution par intégrales définies des équations trinomes générales. Nous parlerons brièvement de ces recherches de Capelli, où il a donné la source des résultats de Heymann. Considérons avec Capelli l'équation

$$\varphi(y, x) = 0, \tag{1}$$

où y et x sont des variables complexes et $\varphi(y, x)$ est une fonction holomorphe de y et de x respectivement dans les deux domaines A et B.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les racines de l'équation (1) à l'*intérieur* de A pour x à l'*intérieur* de B.

Soit C la frontière de A, formée par une courbe analytique et sans racines y_r sur elle.

On a

$$\frac{dy_i}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial\varphi(y_i, x)}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi(y_i, x)}{\partial y_i}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

et par une intégrale définie, qui a pour limite inférieure un point arbitraire α à l'intérieur de B et pour limite supérieure un point x, intégrale prise le long d'une ligne l toute comprise en B et telle que les n valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont sur elle toujours différentes, on obtient

$$y_i = -\int_\alpha^x \frac{\dfrac{\partial\varphi(y_i, x)}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi(y_i, x)}{\partial y_i}} dx + (y_i)_{x=\alpha} \tag{3}$$

Considérons tout de suite une petite circonférence (c_i) ayant pour centre y_i et toute intérieure au domaine A. Capelli obtient

$$y_i = -\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^x dx \int_{(c_i)} \frac{\dfrac{\partial\varphi(v, x)}{\partial x}}{\varphi(v, x)} dv + (y_i)_{x=\alpha}, \tag{4}$$

donc

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} y_i = -\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^x dx \int_{(C)} \frac{\dfrac{\partial\varphi(v, x)}{\partial x}}{\varphi(v, x)}\, dv + \sum_{i=1}^{i=n} (y_i)_{x=\alpha}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \log\frac{\varphi(v, x)}{\varphi(v, \alpha)}\, dv + \sum_{i=1}^{i=n} (y_i)_{x=\alpha}.$$

Dans le cas d'une équation

$$\varphi(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

avec plusieurs variables x, Capelli obtient simplement et de manière analogue

$$(6)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} y_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \log\frac{\varphi(v, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\varphi(v, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}\, dv + \sum_{i=1}^{i=n} y_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Pour une équation algébrique,

$$(7)\qquad x_0 y^n + x_1 y^{n-1} + \ldots + x_{n-1} y + x_n = 0,$$

en considérant variable un seul coefficient, par exemple x_p, Capelli obtient la formule

$$(8)\qquad y = -\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^{x_p} dx_p \int_{(c)} \frac{v^{n-p}\, dv}{x_0 v^n + x_1 v^{n-1} + \ldots + x_{n-1} v + x_n} + (y)_{x_p=\alpha},$$

si les autres $n-1$ racines sont à l'extérieur de (c).

Capelli applique ces formules aux recherches de Heymann. Par exemple, pour l'équation trinome,

$$(9)\qquad y^n + y^{n-s} + x = 0,$$

s entier positif, $n > n - s > 0$, on a

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} y_k = -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_0^x dx \int_{(c_k)} \frac{dv}{v^n + v^{n-s} + x} + e^{\frac{(2k+1)\pi i}{s}}, \\ \qquad (k = 0, 1, \ldots, s-1), \end{array}\right.$$

où la circonférence est suffisamment petite de manière que les autres racines soient à l'extérieur de (c_k), qui est la formule de Heymann, comme nous allons le rappeler tout de suite.

Heymann prend en considération les deux formes fondamentales

$$(11)\qquad y^n + y^{n-s} + x = 0$$

et

$$(12)\qquad y^n + \xi y^{n-s} + 1 = 0$$

(qui peuvent se ramener l'une à l'autre par la substitution $z = ky$ et qui dépendent de l'unique paramètre x (ou ξ)), parce qu'elles sont complémentaires l'une de l'autre par rapport au domaine de validité des formules résolutives respectives.

En bref, pour la première (11) on a la formule (10). Par la substitution $v = e^{\frac{2k\pi i}{s}} v'$ on peut remplacer aux différents chemins (c_k) la même courbe (c_0), et l'on a

$$(13)\qquad \left\{ \begin{aligned} & y_k = -\frac{\varepsilon_k^{n-1}}{2\pi i}\int_0^x dx \int_{(c_0)} \frac{dv}{v^n + v^{n-s} + \varepsilon_k^n x} + e^{\frac{(2k+1)\pi i}{s}}, \\ & \qquad (k = 0, 1, \ldots, s-1), \\ & \qquad \varepsilon_k = e^{-\frac{2k\pi i}{s}}. \end{aligned} \right.$$

Pour obtenir la formule de Heymann, Capelli remplace la circonférence (c_0) par un autre chemin d'intégration qui s'étend à l'infini et l'on a

$$(14)\qquad y_k = -\frac{\varepsilon_k^{n-1}}{2\pi i}\int_0^x dx \int_{v'}^{v''} \frac{dv}{v^n + v^{n-s} + \varepsilon_k^n x} + e^{\frac{(2k+1)\pi i}{s}},$$

où

$$v' = \left(-\frac{1}{2} - i\infty\right)^{\frac{1}{s}}, \qquad v'' = \left(-\frac{1}{2} + i\infty\right)^{\frac{1}{s}}, \qquad (k = 0, 1, \ldots, s-1),$$
$$\varepsilon_k = e^{-\frac{2k\pi i}{s}}$$

pour $|x|$ suffisamment petit; nous avons ainsi la formule de Heymann [34, (b), p. 227].

Pour déterminer les autres $n-s$ racines qui sont nulles pour $x = 0$, Capelli, par le changement $z = \dfrac{x^{\frac{1}{n-s}}}{y}$ ramène l'équation (11) à

$$(15)\qquad z^n + z^s + \xi = 0,$$

où

$$(16)\qquad \xi = x^{\frac{s}{n-s}}.$$

Par la formule (14) il obtient pour les $n-s$ racines de (11) qui sont nulles pour $x=0$, les expressions suivantes : si $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-s-1}$ sont ces racines,

$$(17)\quad \begin{cases} Y_k = \dfrac{x^{\frac{1}{n-s}}}{e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n-s}} - \dfrac{\eta_k^{n-1}}{2\pi i}\displaystyle\int_0^{x^{\frac{1}{n-s}}} dx \int_{(\gamma_0)} \dfrac{dv}{v^n + v^{n-s} + \eta_k^n x}}, \\ \eta_k = e^{-\frac{2k\pi i}{n-s}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-s-1) \end{cases}$$

et où la circonférence (γ_0) a le centre dans le point $e^{\frac{\pi i}{n-s}}$ et où pour $x^{\frac{1}{n-s}}$ au numérateur et ainsi à la limite supérieure de l'intégrale, et dans (16) on doit prendre la même valeur.

Soit l'équation trinome (12)

$$y^n + \xi y^{n-s} + 1 = 0$$

qui pour $\xi = 0$ a les n racines $e^{\frac{\pi i}{n}}, e^{\frac{3\pi i}{n}}, \ldots, e^{\frac{(2n-1)\pi}{n}}$ représentées par n points $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ sommets d'un polygone régulier, de centre O, point zéro. Capelli, par la formule (8) obtient

$$y_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\xi} d\xi \int_{(c_k)} \frac{v^{n-s}\, dv}{v^n + \xi v^{n-s} + 1} + e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}},$$

où (c_k) est une petite circonférence avec le centre dans le point P_k. Par la substitution $v = e^{\frac{2k\pi i}{n}} v'$ on remplace aux différents chemins d'intégration le même chemin (c_0) et l'on a la formule

$$(18)\quad \begin{cases} y_k = -\dfrac{\varepsilon_k^{s-1}}{2\pi i}\displaystyle\int_0^{\xi} d\xi \int_{(c_0)} \dfrac{v^{n-s}\, dv}{v^n + \varepsilon_k^s \xi v^{n-s} + 1} + e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}, \\ (k = 0, 1, \ldots, n-1), \\ \varepsilon_k = e^{-\frac{2k\pi i}{n}}. \end{cases}$$

Par la substitution d'un autre chemin d'intégration la formule (18) se ramène à une intégrale de Heymann. Capelli considère les points $Q = \rho$ (réel positif) et $Q' = \rho e^{\frac{2\pi i}{n}}$ le triangle OQQ' contient alors le point P_0 et pas d'autres racines de l'équation binome

$y^n + 1 = 0$. Au chemin (c_0) Capelli remplace d'abord le contour du triangle OQQ' et puis, par un passage à la limite, quand ρ tend vers l'infini, il obtient

$$(19) \qquad y_k = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\xi d\xi \int_0^\infty \Phi(\xi,\ \rho)\,\rho^{n-s}\,d\rho + e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}} + \mathrm{E},$$

où

$$\Phi(\xi,\ \rho) = \frac{\varepsilon_{k+1}^{s-1}}{\rho^n + \varepsilon_{k+1}^s\,\xi\rho^{n-s} + 1} - \frac{\varepsilon_k^{s-1}}{\rho^n + \varepsilon_k^s\,\xi\rho^{n-s} + 1},$$

$\varepsilon_k = e^{\frac{-2k\pi i}{n}}$ et $\mathrm{E} = 0$ pour $s > 1$, $\mathrm{E} = -\frac{\xi}{n}$ pour $s = 1$ et c'est encore la formule de Heymann [34, (*a*), p. 69; (*b*), p. 235].

Nous nous sommes arrêté davantage sur les recherches de Heymann-Capelli, car Heymann, en dérivant les intégrales représentant les racines des équations trinomes, a été le premier à montrer que ces racines sont des fonctions hypergéométriques [34, (*a*), p. 78].

18. Équation différentielle résolvante. — Harley a déterminé [30, p. 337; 8, p. 199] l'équation différentielle vérifiée par la puissance μ des racines de l'équation trinome

$$(1) \qquad y^n - xy^{n-r} + a = 0.$$

Cette équation différentielle est du type

$$(2) \qquad \frac{d^n\eta}{dx^n} = c_n x^n \frac{d^n\eta}{dx^n} + c_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}} + \ldots + c_1 x\frac{d\eta}{dx} + c_0\eta,$$

où

$$\eta = y^\mu.$$

Heymann [34, (*a*), p. 78] a retrouvé cette équation différentielle, et il a fait connaître pour la première fois que cette équation différentielle, qu'il nomme *résolvante* (Differentialresolvente) est de la classe des *équations différentielles hypergéométriques*. On peut voir à ce sujet dans le livre de Boole [8, p. 190-199] la formation de cette équation différentielle et l'on peut même observer qu'on avait constaté que le rapport

$$(3) \qquad \frac{a_{\alpha+n}}{a_\alpha}$$

des coefficients a_α des séries racines de l'équation trinome de degré n

sont fonctions rationnelles *fixes* de α [8, p. 192]. Et cela sans que ces géomètres aient donné aucune importance ni relief à cette propriété. L'équation *différentielle résolvante* de Harley a été retrouvée aussi par Mellin [51, (m)] dans sa résolution de l'équation trinome, en se plaçant au point de vue de l'inversion d'une intégrale définie.

Nous allons parler immédiatement des recherches de Mellin sur la résolution de l'équation trinome et donner la formation de l'équation différentielle résolvante correspondante.

19. Résolution de Mellin de l'équation trinome. — Soit l'équation trinome générale [51, (m)],

$$\varphi(y, x) = y^n + xy^p - 1 = 0, \qquad (n > p). \tag{1}$$

Les points singuliers au fini de l'équation (1) sont donnés par

$$x^n = (-1)^p \frac{n^n}{p^p q^q}, \qquad (q = n - p)$$

auxquels correspondent des racines doubles pour l'équation. Au point singulier $x = \infty$ correspondent p racines égales à zéro, et $n - p$ infinies.

Si $y(x)$ est une racine de (1) et $\varepsilon^n = 1$,

$$z = \varepsilon y(\varepsilon^p x) \tag{2}$$

est aussi racine de (1). Donc, étant ε une des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, la formule (2) représente toutes les racines de l'équation trinome qui, pour $x = 0$, prennent des valeurs initiales différentes. Mellin appelle *solution principale* (Hauptlösung) de l'équation trinome (1) la solution qui prend pour $x = 0$ la valeur $y = 1$. Le point de départ de ces recherches de Mellin, c'est l'intégrale

$$\int_0^\infty y^\mu x^{z-1}\, dx \tag{3}$$

qui a un sens déterminé pour μ réel positif et la variable complexe z prise entre

$$0 < R(z) < \frac{\mu}{p}.$$

Par la substitution

$$x = \frac{1-y^n}{y^p}, \qquad dx = -(py^{-p-1} + (n-p)y^{n-p-1})\,dy$$

et par la formule d'Euler

$$(4) \qquad \int_0^1 (1-y^n)^{p-1} y^{q-1}\,dy = \frac{1}{n}\,\frac{\Gamma(p)\,\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{q}{n}\right)},$$

pour la racine de l'équation trinome (1), prenant pour $x=0$ la valeur $y=1$, on a

$$(5) \qquad \int_0^\infty (y(x))^{\mu} x^{z-1}\,dx = \frac{\mu}{n}\,\frac{\Gamma(z)\,\Gamma\left(\frac{\mu-pz}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+(n-p)z}{n}+1\right)}.$$

Par cette formule on peut obtenir plusieurs intégrales définies représentées par la fonction Γ, ainsi pour $n=2$, $p=1$,

$$(6) \qquad \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2}\right)^{\mu} x^{z-1}\,dx = \frac{\mu}{2}\,\frac{\Gamma(z)\,\Gamma\left(\frac{\mu-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+z}{2}+1\right)},$$

$$0 < R(z) < \mu$$

et pour $n=3$, $p=1$,

$$(7) \qquad \int_0^\infty \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\left(\frac{x}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\left(\frac{x}{3}\right)^3}}\right)^{\mu} x^{z-1}\,dx$$
$$= \frac{\mu}{3}\,\frac{\Gamma(z)\,\Gamma\left(\frac{\mu-z}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+2z}{3}+1\right)},$$

$$0 < R(z) < \mu.$$

De la même façon, si $y=y(x)$ est la solution principale de l'équation trinome, Mellin obtient

$$(8) \qquad \int_0^\infty (y(-x))^{-\eta} x^{z-1}\,dx = \frac{\eta}{n}\,\frac{\Gamma(z)\,\Gamma\left(\frac{\eta-qz}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta+pz}{n}+1\right)},$$

$$p+q=n, \qquad 0 < R(z) < \frac{\eta}{q}.$$

On a ainsi transformé l'équation trinome en deux équations intégrales (5) et (8).

Par le théorème d'inversion, Mellin obtient alors

$$(9)\quad (y(x))^{\mu} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\mu}{n}\,\frac{\Gamma(z)\,\Gamma\left(\frac{\mu - pz}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu + qz}{n} + 1\right)}\,x^{-z}\,dz, \qquad \left(0 < c < \frac{\mu}{p}\right)$$

et

$$(10)\quad (y(-x))^{-\eta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\eta}{n}\,\frac{\Gamma(z)\,\Gamma\left(\frac{\eta - qz}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta + qz}{n} + 1\right)}\,x^{-z}\,dz, \qquad \left(0 < c < \frac{\eta}{q}\right).$$

Les domaines de convergence de ces intégrales sont déterminés (b), par la formule ($z = s + it$)[51, (b); (n), p. 17].

$$(11)\quad |\Gamma(s + it)| = e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\,|s + it|^{s-\frac{1}{2}}\,|\sqrt{2\pi} + \varepsilon|, \qquad (\varepsilon \to 0,\ |t| \to \infty),$$

($\Gamma(s + it) \to 0$ pour $t \to \infty$, dans la direction de l'axe imaginaire établit par Pincherle [55, (d), (i) : vol. I, p. 238]; Mellin a reconnu la priorité de Pincherle [55, (h), (i) : vol. I, p. 56]).

Soient

$$x = |x|\,e^{-i\theta}, \qquad |x^{-z}| = |x|^{-s}\,e^{-\theta t},$$

l'intégrale (9) dans des domaines finis intérieurs à l'angle

$$-\frac{p}{n}\pi \leqq \theta \leqq +\frac{p}{n}\pi$$

et l'intégrale (10) dans des domaines finis intérieurs à l'angle

$$-\frac{q}{n}\pi \leqq \theta \leqq +\frac{q}{n}$$

sont uniformément convergentes (*voir* au n° 13). Mellin a ensuite montré que la solution principale est holomorphe dans tout le plan complexe une fois qu'on y a tracé comme coupures les segments partants des points singuliers

$$\frac{n}{\sqrt[n]{p^p q^q}}\,e^{\frac{p\pi i}{n}} \quad \text{et} \quad \frac{n}{\sqrt[n]{p^p q^q}}\,e^{-\frac{p\pi i}{n}},$$

c'est-à-dire

$$(12)\qquad \left(\frac{n\,e^{\frac{p\pi i}{n}}}{\sqrt[n]{p^p q^q}},\ \infty\,e^{\frac{p\pi i}{n}}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{n\,e^{-\frac{p\pi i}{n}}}{\sqrt[n]{p^p q^q}},\ \infty\,e^{-\frac{p\pi i}{n}}.\right).$$

Le plan x avec ces coupures est appelé *domaine fondamental* (Fundamentalbereich).

Si l'on prolonge les coupures jusqu'à $x=0$ on a deux angles A et B qui ont respectivement l'axe réel positif et l'axe réel négatif comme bissectrices. Dans l'angle A, $(y(x))^\mu$ est représentée par la formule (9); Mellin donne aussi l'expression de cette puissance dans l'angle B.

Par rotation du domaine fondamental d'un angle égal à l'argument de ε^{-p}, $\varepsilon^n=1$, on obtient le domaine pour la racine $z(x)$ prenant pour $x=0$ la valeur initiale ε. Par rotation on obtient les domaines pour les racines $y=y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ de l'équation trinome où y_k prend pour $x=0$ la valeur initiale $e^{-\frac{2k\pi i}{n}}$. Mellin a obtenu ainsi la résolution de l'équation trinome générale par des intégrales définies.

Par application de la théorie des résidus, Mellin obtient le développement

$$(13)\qquad (y(x))^\mu = \frac{\mu}{n}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{(-1)^\alpha\,\Gamma\left(\frac{\mu+p\alpha}{n}\right)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(1+\frac{\mu-q\alpha}{n}\right)}x^\alpha,$$

convergent dans le cercle

$$|x| < \frac{n}{\sqrt[n]{p^p q^q}}.$$

Nous avons ainsi le développement en série des racines de l'équation trinome.

Nous retrouverons cette série dans les numéros suivants.

Dans ce développement on peut vérifier la propriété du rapport $c_{\alpha+n} : c_\alpha$ dont nous avons parlé au n° **18**. Les recherches de Pincherle et de Mellin sur la transformation des équations différentielles linéaires en équations aux différences et *vice versa* (*voir* au n° 7) permettent de former *l'équation différentielle résolvante*.

Considérons l'intégrale

$$(14)\qquad (y(x))^\mu = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\mu}{n}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(z)\,\Gamma\left(\frac{\mu-pz}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\mu+qz}{n}\right)}x^{-z}\,dz,$$

posant

$$F(z) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma\left(\frac{\mu-pz}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\mu+qz}{n}\right)},$$

nous avons

$$F(z+n) = \frac{f(z)}{g(z)} F(z),$$

où $f(z)$ et $g(z)$ sont fonctions rationnelles de z (*voir* au n° 7). On peut alors simplement déterminer par les résultats de Pincherle et Mellin l'équation différentielle résolvante pour $(y(x))^{\mu}$ et l'on a

$$\frac{d^n y^{\mu}}{dx^n} = (-1)^p \frac{p^p q^q}{n^n} \prod_{k=0}^{p-1} \left(x \frac{d}{dx} + \frac{\mu + nk}{p} \right) \prod_{k=0}^{q-1} \left(x \frac{d}{dx} - \frac{\mu - nk}{q} \right) y^{\mu}$$

qui est précisément l'équation différentielle résolvante de Harley-Heymann-Mellin.

Cette équation différentielle est du type

$$(A_0 + B_0 t^r) y + (A_1 + B_1 t^r) t \frac{dy}{dt} + \ldots + (A_n + B_n t^r) t^n \frac{d^n y}{dt^n} = 0$$

qui se ramène à une équation différentielle hypergéométrique de Goursat, par la substitution $t^r = x$ (*voir* au n° 6).

Nous parlerons encore de la résolution de l'équation trinome par la formule classique de Lagrange dans les numéros suivants.

CHAPITRE V.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION ALGÉBRIQUE GÉNÉRALE.

20. Résolution de Mellin. — Nous avons parlé au n° 13 des intégrales multiples hypergéométriques de Mellin et du théorème d'inversion. Mellin appliques ces résultats à la résolution de l'équation algébrique générale, [51, (n)],

Il est nécessaire de fixer les définitions que nous adopterons dans ce numéro et dans les numéros suivants.

Nous écrirons l'équation algébrique générale dans la forme

$$(1) \qquad \theta(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_1 y + a_0 = 0.$$

Par des translations $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_0$ respectivement des coefficients $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ nous obtenons l'équation

$$(2) \quad \gamma(y) = (a_n + p_n) y^n + (a_{n-1} + p_{n-1}) y^{n-1} + \ldots + (a_1 + p_1) y + a_0 + p_0 = 0$$

que nous appelons *équation transformée* et l'équation $\theta(y) = 0$ *équation initiale*.

Si l'équation initiale est l'équation binone

$$\theta(y) = a_n y^n + a_0, \tag{3}$$

l'équation transformée sera

$$\gamma(y) = (a_n + p_n) y^n + p_{n-1} y^{n-1} + \ldots + p_1 y + a_0 p_0 = 0 \tag{4}$$

et si $p_n = 0$, $p_0 = 0$ et s'il y a même d'autres $p_r = 0$ l'équation transformée sera

$$\gamma(y) = a_n y^n + p_{n_1} y^{n_1} + \ldots + p_{n_p} y^{n_p} + a_0 = 0. \tag{5}$$

En écrivant simplement $p_{n_k} = x_k$, on aura

$$\gamma(y) = a_n y^n + x_1 y^{n_1} + x_2 y^{n_2} + \ldots + x_p y^{n_p} + a_0 = 0. \tag{6}$$

Alors nous prenons, en général, l'équation initiale binome

$$\theta(y) = y^n - 1 = 0 \tag{7}$$

et l'équation transformée, dans la forme de Mellin,

$$\gamma(y) = y^n + x_1 y^{n_1} + x_2 y^{n_2} + \ldots + x_p y^{n_p} - 1 = 0, \tag{8}$$
$$n > n_s \geqq 1, \ (s = 1, 2, \ldots, p).$$

La solution

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

prenant la valeur 1 pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$ est appelée par Mellin *solution principale* (Hauptlösung). On obtient toutes les racines de l'équation (8) par la solution principale : si $y(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est cette solution

$$\varepsilon y(\varepsilon^{n_1} x_1, \varepsilon^{n_2} x_2, \ldots, \varepsilon^{n_p} x_p)$$

est aussi solution, où $\varepsilon^n = 1$ parce que

$$(\varepsilon y)^n + \varepsilon^{-n_1} x_1 (\varepsilon y)^{n_1} + \varepsilon^{-n_2} x_2 (\varepsilon y)^{n_2} + \ldots + \varepsilon^{-n_p} x_p (\varepsilon y)^{n_p} - 1 = 0;$$

Mellin prend la représentation paramétrique suivante de l'équation

$$\begin{cases} y = W^{-\frac{1}{n}}, & W = 1 + \xi_1 + \ldots + \xi_p, \\ x_s = \xi_s W^{\frac{n_s}{n} - 1}, & s = 1, 2, \ldots, p, \end{cases} \tag{9}$$

et il a

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)} = \left(1 + \frac{n_1}{n}\xi_1 + \frac{n_2}{n}\xi_2 + \ldots + \frac{n_p}{n}\xi_p\right) W^{\frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}{n} - p - 1}.$$

Cette représentation paramétrique est très importante pour les développements suivants de Mellin; en effet, on a, μ réel positif,

$$(10)\quad \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty y^\mu x_1^{u_1-1} x_2^{u_2-1} \ldots x_p^{u_p-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty y^\mu x_1^{u_1-1} x_2^{u_2-1} \ldots x_p^{u_p-1} \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_p,$$
$$R(u_1) > 0, \quad R(u_2) > 0, \quad \ldots, \quad R(u_p) > 0,$$
$$R(\mu - n_1 u_1 - n_2 u_2 - \ldots - n_p u_p) > 0$$

et en posant

$$u = \frac{\mu - n_1 u_1 - n_2 u_2 - \ldots - n_p u_p}{n},$$

on a que l'intégrale (10) est égale à

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \Phi\, \xi_1^{u_1-1} \xi_2^{u_2-1} \ldots \xi_p^{u_p-1}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_p,$$

où

$$\Phi = \frac{1 + \frac{n_1}{n}\xi_1 + \frac{n_2}{n}\xi_2 + \ldots + \frac{n_p}{n}\xi_p}{W^{u+u_1+u_2+\quad+u_p+1}}.$$

Par la formule

$$(11)\quad \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{\xi_1^{u_1-1} \xi_2^{u_2-1} \ldots \xi_p^{u_p-1}}{W^w}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_p$$
$$= \frac{\Gamma(u_1)\Gamma(u_2) \ldots \Gamma(u_p)\Gamma(w - u_1 - u_2 - \ldots - u_p)}{\Gamma(w)}$$

on obtient

$$(12)\quad \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty y^\mu x_1^{u_1-1} x_2^{u_2-1} \ldots x_p^{u_p-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p$$
$$= \frac{\mu}{n} \frac{\Gamma(u)\Gamma(u_1)\Gamma(u_2) \ldots \Gamma(u_p)}{\Gamma(u + u_1 + u_2 + \ldots + u_p + 1)},$$

où y est la solution principale, pour

$$\mu > 0, \quad R(u) > 0, \quad R(u_1) > 0, \quad R(u_2) > 0, \quad \ldots, \quad R(u_p) > 0,$$

on obtient de même

$$(13)\quad \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{x_1^{u_1-1} x_2^{u_2-1} \ldots x_p^{u_p-1}}{y(-x_1, -x_2, \ldots, -x_p)^\mu}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p$$
$$= \frac{\mu}{n} \frac{\Gamma(u)\Gamma(u_1)\Gamma(u_2) \ldots \Gamma(u_p)}{\Gamma(u + u_1 + u_2 + \ldots + u_p + 1)},$$

où ici,

$$u = \frac{\mu - (n - n_1)u_1 - (n - n_2)u_2 - \ldots - (n - n_p)u_p}{n}.$$

On a ainsi transformé l'équation algébrique (8) en deux équations intégrales (12) et (13). Par le théorème d'inversion pour l'intégrale (12), on a (*voir* n° **13**) l'intégrale multiple hypergéométrique

$$(14) \quad (y(x_1, x_2, \ldots, x_p))^{\mu}$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^p \int_{a_1 - i\infty}^{a_1 + i\infty} \int_{a_2 - i\infty}^{a_2 + i\infty} \cdots \int_{a_p - i\infty}^{a_p + i\infty} \mathrm{F}.x_1^{-u_1} x_2^{-u_2} \ldots x_p^{-u_p} du_1 du_2 \ldots du_p,$$

où

$$\mathrm{F} = \frac{\mu}{n} \frac{\Gamma(u)\Gamma(u_1)\Gamma(u_2)\ldots\Gamma(u_p)}{\Gamma(u + u_1 + u_2 + \ldots + u_p + 1)},$$

avec des conditions pour les droites d'intégration.

Cette intégrale est uniformément convergente dans des domaines finis intérieurs aux angles

$$-\frac{n_s \pi}{2n} \leqq \arg(x_s) \leqq +\frac{n_s \pi}{2n}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

Mellin étends ces domaines de validité par des considérations analogues à cèlles faites pour l'inversion d'une intégrale simple.

Nous avons ici

$$\mathrm{F}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \frac{\mu}{n} \frac{\Gamma(u)\Gamma(u_1)\Gamma(u_2)\ldots\Gamma(u_p)}{\Gamma(u + u_1 + u_2 + \ldots + u_p + 1)},$$
$$u = \frac{\mu - n_1 u_1 - \ldots - n_p u_p}{n},$$

c'est-à-dire

$$u + u_1 + u_2 + \ldots + u_p = \frac{\mu + n'_1 u_1 + \ldots + n'_p u_p}{n},$$
$$n'_s = n - n_s$$

et le système aux différences finies

$$(15) \quad \begin{cases} \mathrm{F}(u_1, u_2, \ldots, u_s + n, \ldots, u_p) = \dfrac{f_s(u_1, u_2, \ldots, u_p)}{g_s(u_1, u_2, \ldots, u_p)} \mathrm{F}(u_1, u_2, \ldots, u_p), \\ (s = 1, 2, \ldots, p), \end{cases}$$

où $f_s(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, $g_s(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ sont fonctions rationnelles de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ (*voir* n° **13**, (10)).

Pour un système qui se réduit à une seule équation nous avons précisé ceci au numéro précédent.

Mais ici nous devons faire la remarque fondamentale que ces fonctions f_s et g_s rationnelles se décomposent dans le produit de facteurs linéaires de la forme

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_p u_p + c,$$

où $c_1, c_2, \ldots, c_p$ sont des nombres entiers.

Précisément

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} f_s &= \prod_{k=0}^{n-1} (u_s + k), \\ g_s &= \frac{(-1)^{n_s}}{n^n} \prod_{k=1}^{n_s} (n_1 u_1 + n_2 u_2 + \ldots + n_p u_p - \mu + nk) \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{n'_s} (n'_1 u_1 + n'_2 u_2 + \ldots + n'_p u_p + \mu + nk), \\ &\qquad (s = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned}\right.$$

Alors le système différentiel pour y^μ est un système hypergéométrique selon la définition de Mellin (*voir* au n° 13).

Le système différentiel pour $(y(x_1, x_2, \ldots, x_p))^\mu$ est de la forme (*voir* au n° 13, form. (11), $k = n$)

$$\left\{\begin{aligned} & f_s\left(-x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, -x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, -x_p \frac{\partial}{\partial x_p}\right) y^\mu \\ & \quad = g_s\left(-x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, -x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, -x_p \frac{\partial}{\partial x_p}\right) x_s^n y^\mu, \\ & \qquad (s = 1, 2, \ldots, p) \end{aligned}\right.$$

qu'on peut écrire

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} & (-1)^{n_s} n^n \frac{\partial^n y^\mu}{\partial x_s^n} \\ & = \prod_{k=0}^{n_s - 1} \left(n_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + n_p x_p \frac{\partial}{\partial x_p} + \mu + nk\right) \\ & \times \prod_{k=0}^{n'_s - 1} \left(n'_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n'_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + n'_p x_p \frac{\partial}{\partial x_p} - \mu + nk\right) y^\mu \\ & \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, p). \end{aligned}\right.$$

Ce système est défini *hypergéométrique* par Mellin et il l'appelle *système différentiel résolvant* d'une équation algébrique.

Sur le système des équations aux dérivées partielles, *voir* aussi Raabe [57]. Mellin donne le théorème :

Les racines d'une équation algébrique générale et leurs puissances, peuvent être représentées par des intégrales multiples hypergéométriques, qui portent sur la fonction Γ;
ou, plus simplement :

Chaque équation algébrique dont les coefficients sont considérés variables indépendantes, admet une résolution transcendante par la fonction Γ.

Pour l'équation quadrinome

$$y^n + x_1 y^{n_1} + x_2 y^{n_2} - 1 = 0, \tag{18}$$

on a la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x_1 = \xi(1+\xi+\eta)^{\frac{n_1}{n}-1}, \\ x_2 = \eta(1+\xi+\eta)^{\frac{n_2}{n}-1}, \\ y = (1+\xi+\eta)^{-\frac{1}{n}} \end{cases}$$

Mellin obtient

$$\left\{\begin{aligned} &(y(x_1, x_2))^\mu \\ &\quad = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(u, v)\, x_1^{-u} x_2^{-v}\, du\, dv, \\ &\text{où} \\ &\qquad F(u, v) = \frac{\mu}{n}\,\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)\Gamma(w)}{\Gamma(u+v+w+1)} \\ &a>0, \quad b>0, \quad \mu - n_1 a - n_2 b > 0 \quad \text{et} \quad w = \frac{\mu - n_1 u - n_2 v}{n}, \\ &\qquad u+v+w = \frac{\mu + (n-n_1)u + (n-n_2)v}{n}. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Nous avons ici

$$F(u, v) = \frac{\mu}{n}\,\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)\Gamma(w)}{\Gamma(u+v+w+1)},$$

et le système aux différences finies

$$\left\{\begin{aligned} F(u+n, v) &= \frac{f_1(u, v)}{g_1(u, v)} F(u, v), \\ F(u, v+n) &= \frac{f_2(u, v)}{g_2(u, v)} F(u, v), \end{aligned}\right. \tag{20}$$

et le système hypergéométrique correspondant de deux équations différentielles linéaires aux dérivées partielles pour y^μ. Ces systèmes différentiels hypergéométriques (17) ont été obtenus pour la puissance μ suffisamment grande. Mellin fait voir qu'ils sont valables pour d'autres valeurs de μ. Mellin exprime même ces racines par des intégrales simples et par des séries.

Il a ainsi obtenu pour la solution principale de l'équation (8) la série

$$(21) \qquad y^\mu = 1 + \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n^k} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p=k} \mathrm{A}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p},$$

où

$$\mathrm{A}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p} = \frac{\displaystyle\prod_{h=1}^{k-1} (\mu + n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_p\alpha_p - nh)}{\Gamma(\alpha_1+1)\,\Gamma(\alpha_2+1)\ldots\Gamma(\alpha_p+1)}$$

et il a démontré, par la formule de Stirling, la convergence de cette série au moins tant que $|x_\nu|$ sont inférieurs au plus petit des deux nombres

$$\frac{n}{p\sqrt[n]{n_1^{n_1}(n-n_1)^{n-n_1}}}, \quad \frac{n}{p\sqrt[n]{n_p^{n_p}(n-n_p)^{n-n_p}}},$$

où n_1 et n_p sont le plus petit et le plus grand entre les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_p$.

Nous retrouverons dans les numéros suivants ce développement en série, par la série classique de Lagrange.

Nous parlerons en détail de ce développement classique et nous remarquons ici seulement que Heegmann dès 1865 [**31**, (a), (b)] a fait un essai d'une méthode de résolution des équations algébriques au moyen des séries pour trouver la forme générale des coefficients de ces séries en fonction des coefficients de l'équation algébrique, problème résolu complètement par Capelli, n° **22**.

Nous avons même récemment d'autres méthodes pour la représentation des racines des équations algébriques [**35**], [**45**].

21. Série de Lagrange. — Nous n'avons pas parlé jusqu'à présent de la série de Lagrange parce que les propriétés particulières de ces séries se rapportant aux racines des équations algébriques ont été découvertes plus récemment.

Le développement classique de Lagrange [44] donne le développement en série entière en x d'une racine de l'équation

$$y - \omega + x f(y) = 0,$$

prenant la valeur ω pour $x = 0$, et où $f(y)$ est holomorphe dans un domaine du plan complexe y qui contient ω, et $f(\omega) \neq 0$. Cette résolution a été généralisée pour les cas de plusieurs variables [*voir* Capelli [13, (*b*)], Kampé de Fériet [40, (*a*)] Belardinelli [5, (*e*), (*f*)], Germany [26, (*a*), (*b*)], Bruwier [12], Schmidt [61], etc.

Pour l'équation

$$(1) \qquad (y-\omega) f(y) + x_0 f_0(y) + \ldots + x_n f_n(y) = 0,$$

où $f(y)$, $f_0(y)$, $\ldots$, $f_n(y)$ sont des séries entières convergentes dans un cercle commun qui contient ω, et $f(\omega) \neq 0$, $f_p(\omega) \neq 0$ $(p = 0, 1, \ldots, n)$, on a, pour la racine y prenant la valeur ω pour $x_0 = x_1 = \ldots = x_n = 0$, le développement suivant :

$$(2) \quad y = \omega + \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha_0! \, \alpha_1! \ldots \alpha_n!} D^{\alpha-1} \left(\frac{f_0^{\alpha_0} f_1^{\alpha_1} \ldots f_n^{\alpha_n}}{f^\alpha} \right)_\omega x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},$$
$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

et la sommation est effectuée en donnant à α_0, α_1, $\ldots$, α_n toutes les valeurs entières, positives ou nulles, excepté

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

On peut même écrire

$$(3) \qquad y = \omega + \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n} A_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

où

$$A_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n} = \frac{(\alpha-1)!}{\alpha_0! \, \alpha_1! \ldots \alpha_n!} \frac{(-1)^\alpha}{2\pi i} \int_{(\omega)} \frac{f_0^{\alpha_0} f_1^{\alpha_1} \ldots f_n^{\alpha_n} f^{-\alpha}}{(y-\omega)^\alpha} dy,$$
$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$

où l'intégrale est prise le long d'une petite circonférence (ω) avec le centre dans le point ω.

Soit $\omega = \omega_0$, et

$$f(y) = (y - \omega_1)(y - \omega_2) \ldots (y - \omega_{n-1}),$$
$$f_0(y) = 1, \qquad f_1(y) = y, \qquad \ldots, \qquad f_p(y) = y^p, \qquad \ldots, \qquad f_n(y) = y^n$$

la série (3) peut alors représenter le développement de la racine de l'équation algébrique de degré n

$$(4)\qquad \gamma(y) = (y-\omega_0)(y-\omega_1)\dots(y-\omega_{n-1}) + x_0 + x_1 y + \dots + x_p y^p + \dots + x_n y^n = 0,$$

prenant la valeur ω_0 pour

$$x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0,$$

on a donc

$$(5)\qquad y = \omega_0 + \sum_{\alpha_1, \alpha_1, \quad, \alpha_n} A_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

où

$$A_{\alpha_0, \alpha_1, \quad, \alpha_n} = \frac{(\alpha-1)!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\,\dots\,\alpha_n!} \frac{(-1)^\alpha}{2\pi i} \int_{(\omega_0)} \frac{y^\beta (f(y))^{-\alpha}}{(y-\omega_0)^\alpha} dy$$

et

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \qquad \beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n.$$

L'équation (4) peut s'écrire ainsi

$$\gamma(y) = (a_n + x_n) y^n + (a_{n-1} + x_{n-1}) y^{n-1} + \dots + a_0 + x_0 = 0,$$

équation obtenue par des translations des coefficients a_r de l'équation

$$(6)\quad \theta(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_0 = (y-\omega_0)(y-\omega_1)\dots(y-\omega_{n-1}) = 0.$$

L'équation $\theta(y) = 0$ est l'équation initiale et la $\gamma(y) = 0$ l'équation transformée et ω_0 racine simple de $\theta(y) = 0$. C'est précisément dans cette forme que Capelli [**13**, (b), (c), (d)] a considéré le développement de la racine y de l'équation (4) prenant la valeur ω_0 pour

$$x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0$$

En particulier, en posant

$$(7)\qquad \psi(\alpha, \beta) = \int_{(\omega_0)} y^\beta (\theta(y))^{-\alpha} dy,$$

Capelli a trouvé, par une voie élémentaire, la relation

$$(8)\qquad \sum_{r=0}^{n} (\beta + 1 - r(\alpha-1))\, a_r\, \psi(\alpha, \beta + r) = 0, \quad [\mathbf{13}, (c)].$$

Le développement de la puissance y^μ d'une racine est donné par la série

$$(9)\qquad y^\mu = \omega_0^\mu + \mu \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n} A_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

où

$$A_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n} = \frac{1}{2\pi i} \frac{(-1)^\alpha (\alpha-1)!}{\alpha_0!\, \alpha_1! \ldots \alpha_n!} \psi(\alpha, \beta+\mu-1),$$

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \qquad \beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n.$$

Nous pouvons naturellement retrouver la série (21) de Mellin rapportée au n° 20.

En effet, si

$$\theta(y) = y^n - 1,$$

on a

$$y^\mu = 1 + \mu \sum_{\alpha > 0} \frac{(\alpha-1)!}{\alpha_0!\, \alpha_1! \ldots \alpha_n!} \frac{(-1)^\alpha}{2\pi i} \int_{(1)} y^{\beta+\mu-1} (y^n - 1)^{-\alpha}\, dy\, x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

où

$$(10)\qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} y^{\beta+\mu-1} (y^n-1)^{-\alpha}\, dy = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \frac{\beta+\mu}{n} - 1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

et, par conséquent,

$$(11)\qquad y^\mu = 1 + \frac{\mu}{n} \sum_{\alpha > 0} \frac{(-1)^\alpha (\alpha-1)!}{\alpha_0!\, \alpha_1! \ldots \alpha_n!} \begin{pmatrix} \frac{\beta+\mu}{n} - 1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

La série (5) pour l'équation (8) du n° 20 :

$$y^n + x_1 y^{n_1} + x_2 y^{n_2} + \ldots + x_p y^{n_p} - 1 = 0,$$

peut prendre effectivement la forme (21) du n° 20 (ici $x_r = p_{n_r}$),

$$(12)\qquad y^\mu = 1 + \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n^k} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = k} A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p}$$

où

$$A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} = \frac{\prod_{h=1}^{k-1} (\mu + n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_p\alpha_p - nh)}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_p!}.$$

On peut représenter les coefficients de cette série par la fonction Γ et c'est pour cela que Mellin a donné des conditions suffisantes de convergence de la série par la formule de Stirling.

Pour des séries de Lagrange générales, c'est-à-dire pour des équations analytiques, nous avons donné des conditions suffisantes de convergence; pour des équations algébriques ces conditions ont été données par Capelli [13, (c)]. En effet, soit l'équation (1):

$$(y-\omega_0)f(y)+x_0 f_0(y)+\ldots+x_n f_n(y)=0,$$

où $f(y)$ sont des séries entières convergentes dans un cercle commun qui contient ω_0. Posons $(y-\omega_0)f(y)=g(y)$ et

$$V(y)=x_0 f_0(y)+x_1 f_1(y)+\ldots+x_n f_n(y),$$

nous avons

$$y=\omega_0+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^\alpha}{2\pi i\alpha}\int_{(\omega_0)}V(y)^\alpha g(y)^{-\alpha}\,dy.$$

Si F est la valeur minimum de $|g(y)|$ sur la circonférence (ω_0) et $F_r(r=0, 1, \ldots, n)$ la valeur maximum des $|f_r(y)|$ sur la circonférence (ω_0), la série est convergente pour

$$W=|x_0|F_0+|x_1|F_1+\ldots+|x_n|F_n<F.$$

Si ρ est le rayon de la circonférence (ω_0), on a

$$|y-\omega_0|\leqq\rho\log\frac{F}{F-W},$$

cètte formule montre la continuité de y en fonction de $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Si par X nous indiquons le maximum des x_i $(i=0, 1, \ldots, n)$, nous savons que la série est absolument convergente pour

$$|x_i|<X<\frac{F}{\sum_{r=1}^{n}F_r}. \tag{13}$$

Cette limitation est très satisfaisante, Belardinelli [5, (f), p. 756].

Nous devons remarquer, en outre, qu'il y a des études récentes sur la validité du développement classique de Lagrange par Chazy [17], Valiron [66], et d'autres.

22. **Série de Capelli.** — Capelli [13, (e)] a étudié le cas d'une équation algébrique initiale

$$\theta(y)=a_n y^n+a_{n-1}y^{n-1}+\ldots+a_1 y+a_0=0$$

et de l'équation transformée

$$\gamma(y) = (a_n + x_n)\,y^n + (a_{n-1} + x_{n-1})\,y^{n-1} + \ldots + (a_1 + x_1)\,y + a_0 + x_0 = 0,$$

pour donner les expressions des coefficients des séries de Lagrange, représentant les racines de $\gamma(y) = 0$ en fonction des coefficients de l'équation initiale $\theta(y) = 0$.

Dans la série (5) au n° 21 en posant

$$a_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n} = \frac{(-1)^\alpha}{2\pi i \alpha} \int_{(\omega_0)} y^\beta (\theta(y))^{-\alpha}\, dy,$$

Capelli obtient

$$(1) \qquad a_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n} = \sum_{\lambda < \alpha} \frac{\lambda\,!}{\lambda_0\,!\,\lambda_1\,!\,\ldots\,\lambda_n\,!}\, B_{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n}\, a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n},$$

où la sommation est effectuée en donnant à $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ toutes les valeurs entières positives ou nulles des $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ avec la condition

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n < \alpha,$$

c'est-à-dire en fonction des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$, où

$$(2) \qquad B_{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n} = (-1)^{\alpha+\lambda} \frac{\omega_0^{\beta+\mu-\alpha-\lambda+1}}{(\theta'(\omega_0))^{\alpha+\lambda}} \times \binom{\beta+\mu}{\alpha+\lambda-1} \binom{\alpha+\lambda-1}{\lambda-1} \binom{2\alpha-1}{\alpha-\lambda-1} \frac{1}{\lambda},$$

avec

$$\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n$$

et

$$\mu = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n.$$

Ces séries de Capelli d'une racine d'équation algébrique, où les coefficients sont représentés sous une forme polynomiale de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ a permis à Capelli [13, (f)] de donner un complément très intéressant au théorème de Eisenstein-Heine.

En effet, soit la série

$$y = \sum_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu} M_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu}\, x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_\nu^{\mu_\nu},$$

dont $M_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu}$ sont des nombres rationnels, le développement d'une fonction algébrique

$$f_0 y^n + f_1 y^{n-1} + \ldots + f_{n-1}\, y + f_n = 0,$$

dans laquelle $f_0, f_1, \ldots, f_n$ sont les polynomes

$$f_i = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} a^{(i)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_\nu^{\alpha_\nu} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

où $a^{(i)}_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu}$ sont des nombres rationnels, $(a^{(i)}_{0,0, \ldots, 0} = a_{n-i})$.

Dans ces séries à coefficients rationnels, racines de cette équation algébrique, les dénominateurs des coefficients ne peuvent contenir qu'un nombre fini de facteurs premiers; Heine [32, (*a*), (*b*)], Hermite [33, (*c*)].

Capelli peut alors préciser les facteurs premiers qui se trouvent effectivement dans les dénominateurs. Il démontre le théorème [13, (*f*), p. 162] :

Dans les dénominateurs des infinis coefficients $M_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu}$ *peut se présenter* seulement *un nombre fini de facteurs premiers distincts, et précisément peuvent se présenter* seulement *les facteurs premiers diviseurs de* a_1. *Un coefficient quelconque* $M_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu}$ *est de la forme*

$$M_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu} = \frac{j_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu}}{a_1^{2(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\nu) - 1}},$$

où $j_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu}$ *sont des nombres entiers.*

23. Propriété des coefficients. — Nous avons considéré particulièrement dans le développement de Lagrange le coefficient de la série (5), n° 21, racine d'une équation algébrique et précisément l'intégrale (7), n° 21, Belardinelli [5, (*a*), (*d*)].

Si nous envisageons la correspondance fonctionnelle entre les coefficients de l'équation algébrique et les racines, correspondance qui est notre inconnue, nous trouvons que les coefficients de la série de Lagrange présentent un aspect simple invariable dans cette correspondance fonctionnelle.

En effet, si nous posons

$$P_n = y(y - \omega_1) \ldots (y - \omega_{n-1})$$

et

$$-\frac{P_{n-1}}{P_n} = \frac{\beta}{y} - \frac{\alpha}{y - \omega_1} - \ldots - \frac{\alpha}{y - \omega_{n-1}},$$

nous avons

$$(1) \qquad \Delta f = P_n f' + P_{n-1} f = 0$$

et

$$f = y^{\beta}(y-\omega_1)^{-\alpha} \dots (y-\omega_{n-1})^{-\alpha}.$$

Alors l'intégrale

$$\psi(\alpha, \beta) = \int_{(\omega_0)} \frac{y^{\beta}(y-\omega_1)^{-\alpha} \dots (y-\omega_{n-1})^{-\alpha}}{(y-\omega_0)^{\alpha}} dy,$$

considérée en fonction de ω_0, sera intégrale d'une équation différentielle transformée de Pochhammer d'ordre n (*voir* au n° 7).

Nous savons alors que les coefficients des séries de Lagrange pour une équation algébrique sont des fonctions particulières rationnelles hypergéométriques de Pochhammer d'ordre n si n est le degré de l'équation algébrique (*voir* Belardinelli [5, (*a*)]).

24. Théorème de Birkeland. — Si l'équation initiale est

$$\theta(y) = y^n - 1 = 0,$$

nous avons

$$\frac{1}{2\pi i} \psi(\alpha, \beta) = \frac{1}{n} \binom{\frac{\beta+1}{n} - 1}{\alpha - 1}$$

(*voir* la formule (10) au n° 21).

Birkeland a décomposé [7, (*a*), (*c*), (*e*), (*g*)] la série multiple (11) du n° 21, qui représente la puissance μ des racines d'une équation algébrique dans la somme des autres séries multiples en général n^k si n est le degré de l'équation algébrique et si k est le nombre des variables. Il pose (*voir* [3, p. 400]; *voir* [5, (*d*)]),

$$\alpha_s = m_s n + r_s, \qquad \xi_s = x_s^n,$$
$$\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n, \qquad \alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

et la série (11), au n° 21, peut s'ordonner ainsi (μ arbitraire)

$$y^{\mu} = 1 + \frac{\mu}{n} \sum_{r_0, r_1, \dots, r_n} x_0^{r_0} x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} \sum_{m_0, m_1, \dots, m_n} c_{m_0, m_1, \dots, m_n} \xi_0^{m_0} \xi_1^{m_1} \dots \xi_n^{m_n},$$

où

$$c_{m_0, m_1, \dots, m_n} = \frac{(\alpha-1)!\,(-1)^{\alpha}}{\alpha_0!\,\alpha_1! \dots \alpha_n!} \binom{\frac{\beta+\mu}{n} - 1}{\alpha - 1}$$

où la première sommation est étendue à toutes les valeurs

$$r_i = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

et la seconde à toutes les valeurs $m_0, m_1, \ldots, m_n$ entières, positives ou nulles, excepté $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Posons

$$(1) \qquad \sum_{m_0, m_1, \ldots, m_n} c_{m_0, m_1, \ldots, m_n} \xi_0^{m_0} \xi_1^{m_1} \ldots \xi_n^{m_n} = F_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n);$$

Birkeland a énoncé le théorème :

Les rapports

$$(2) \qquad \frac{M_p}{N_p} = \frac{c_{m_0, m_1, \ldots, m_p+1, \ldots, m_n}}{c_{m_0, m_1, \ldots, m_p, \ldots, m_n}}, \qquad (p = 0, 1, \ldots, n)$$

sont des fonctions rationnelles de $m_0, m_1, \ldots, m_n$, *les dénominateurs et les numérateurs sont de degré fixe* n.

Les séries $F_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ sont donc des séries hypergéométriques de plusieurs variables selon la définition de Horn, etc. (*voir* aux n$^{\text{os}}$ 14 et 15).

Nous pouvons même préciser que ces séries $F_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ sont des *séries hypergéométriques d'ordre supérieur de plusieurs variables* parce que le numérateur et le dénominateur des rapports se décomposent dans le produit de facteurs linéaires dont les coefficients des variables $m_0, m_1, \ldots, m_n$ sont des nombres entiers.

En effet, nous avons

$$(3) \quad \frac{M_p}{N_p} = \frac{(-1)^n}{n^n} \frac{\prod_{k=1}^{k=p}(\beta + \mu + n(p-k)) \prod_{k=1}^{k=q}(\beta + \mu - n(\alpha + k - 1))}{(\alpha_p + 1)(\alpha_p + 2)\ldots(\alpha_p + n)}$$
$$(p + q = n);$$

pour $p = 0$ $(q = n)$, au numérateur nous avons

$$\prod_{k=1}^{k=n}(\beta + \mu - n(\alpha + k - 1))$$

et pour $q = 0 (p = n)$, au numérateur nous avons

$$\prod_{k=1}^{k=n}(\beta + \mu + n(n-k)).$$

Les séries $F_{r_0, r_1, \ldots, r_n}(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ sont donc des séries hypergéométriques d'ordre supérieur de plusieurs variables dont nous avons parlé au n° 15 de la première partie et qu'on pourra appeler, par analogie, d'ordre $n-1$ et complètes, c'est-à-dire de classe o. On peut même former les systèmes d'équations différentielles par la méthode de Kampé de Fériet, qui a fait une étude profonde dans le cas que nous avons rappelé au n° 15.

Les puissances des racines des équations algébriques générales sont donc des sommes de ces fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur de plusieurs variables.

Par conséquent, les fonctions rationnelles entières des racines d'une équation algébrique de degré n sont même des sommes des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur de plusieurs variables d'ordre $n-1$ et complètes, c'est'à-dire de classe o.

Mayr [50] a récemment étudié la résolution des systèmes des équations algébriques par les fonctions hypergéométriques.

Pour l'équation trinome, nous savons que les séries racines sont des séries entières d'une variable, et se décomposent, dans la somme de n fonctions hypergéométriques de Goursat. Considérons donc l'équation

$$y^n + xy^p - 1 = 0$$

dont nous avons les développements de Mellin

$$(4) \qquad (y(x))^\mu = \frac{\mu}{n}\sum_{\alpha=0}^{\infty}(-1)^\alpha \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+p\alpha}{n}\right)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(1+\frac{\mu-q\alpha}{n}\right)} x^\alpha,$$

formule (13) au n° 19, et la série obtenue par le développement de Lagrange

$$(5) \qquad (y(x))^\mu = 1 + \frac{\mu}{n}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^\alpha}{\alpha}\binom{\frac{p\alpha+\mu}{n}-1}{\alpha-1}x^\alpha,$$

formule (11) au n° 21.

On peut constater immédiatement l'identité des deux séries.

On obtient donc, $(mn+r>0)$,

$$(y(x))^\mu = 1 + \frac{\mu}{n}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty} c_{mn+r}x^{mn+r},$$

posons $x^n = \xi$, et

$$F_r(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{mn+r} x^{mn} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{mn+r} \xi^m,$$

nous avons

$$(y(x))^\mu = 1 + \frac{\mu}{n} \sum_{r=0}^{n-1} x^r F_r(\xi),$$

où

$$(6) \quad \frac{c_{(m+1)n+r}}{c_{mn+r}} = (-1)^n \frac{\prod_{k=1}^{k=p}\left(\frac{p\alpha+\mu}{n} + k - 1\right)\prod_{k=1}^{k=q}\left(\frac{p\alpha+\mu}{n} - \alpha - k + 1\right)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}.$$

Ces rapports peuvent s'écrire, $(p+q=n)$,

$$c\frac{\prod_{\iota=0}^{\iota=p-1}\left(m+\frac{r}{n}+\frac{\mu+n\nu}{pn}\right)\prod_{\iota=0}^{\nu=q-1}\left(m+\frac{r}{n}-\frac{\mu-n\nu}{qn}\right)}{\left(m+\frac{r+1}{n}\right)\cdots\left(m+\frac{n-1}{n}\right)(m+1)\left(m+\frac{n+1}{n}\right)\cdots\left(m+\frac{n+r}{n}\right)},$$

avec

$$c = \frac{(-1)^p p^p q^q}{n^n}, \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Si nous posons

$$\frac{(-1)^p p^p q^q}{n^n}\xi = t,$$

il en résulte que nous pouvons écrire (*voir* n° 6)

$$F_r(t) = F\left(\begin{matrix} \frac{r}{n}+\frac{\mu}{pn}, \ldots, \frac{r}{n}+\frac{\mu+n(p-1)}{pn}, \frac{r}{n}-\frac{\mu}{qn}, \ldots, \frac{r}{n}-\frac{\mu-n(q-1)}{qn} \\ \frac{r+1}{n}, \frac{r+2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}, \ldots, \frac{n+r}{n} \end{matrix}\; t\right)$$

où $c_0 = 1$ et c_r $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$ sont déterminés.

Nous avons alors pour ces séries la représentation par des intégrales multiples et par des integrales définies à limites imaginaires, comme nous l'avons exposé aux nos 4, 6, 7 pour les fonctions complètes. Les fonctions $F_r(t)$ sont précisément des fonctions hypergéométriques de Goursat d'ordre $n-1$, complètes, c'est-à-dire de classe 0.

Nous pouvons ainsi représenter la solution principale de l'équation trinome dans tout le plan une fois qu'on y a tracé comme coupure le segment $(+1, \infty)$ de l'axe réel positif.

On peut déduire de cette solution les autres racines comme nous avons dit au n° 19.

On peut naturellement prendre d'autres équations pour point de départ et au moyen de la formule générale (3) au n° 21, on peut trouver les développements relatifs. Ainsi, Birkeland [7, (*g*)] a considéré l'équation genérale

$$y^r = y^s + x_1 y^{n_1} + \ldots + x_p y^{n_p},$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_p$ sont des nombres entiers même plus grands de $r > s$, r et s entiers positifs.

Alors

$$y^{r-s} = 1 + y^{-s}(x_1 y^{n_1} + x_2 y^{n_2} + \ldots + x_p y^{n_p}),$$

et dans l'équation générale,

$$(y - \omega) f(y) + x_0 f_0(y) + \ldots + x_p f_p(y) = 0,$$

nous avons alors

$$(y-\omega) f(y) = y^{r-s} - 1, \qquad f_0 = -y^{n_1-s}, \qquad \ldots, \qquad f_p(y) = -y^{n_p-s},$$

et il obtient les r-s séries pour les racines. Il détermine aussi les degrés des numérateurs et des dénominateurs des rapports $\frac{M_p}{N_p}$ dans les différents cas qui peuvent se présenter. Et il fait l'application à l'équation trinome et, en particulier, à l'équation du cinquième degré.

25. Relations entre les coefficients. — On peut approfondir davantage l'etude des propriétés des séries de Lagrange dont nous venons de parler.

Les coefficients des séries sont formés par les intégrales

$$\psi(\alpha, \beta) = \int_{(\omega_0)} y^\beta (\theta(y))^{-\alpha} dy, \tag{1}$$

pour lesquelles Capelli a déterminé la relation, formule (8), n° 21,

$$\sum_{r=0}^{n} (\beta + 1 - r(\alpha - 1)) a_r \psi(\alpha, \beta + r) = 0 \tag{2}$$

en rapport avec l'équation algébrique initiale

$$(3) \qquad \theta(y) = a_n y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1 y + a_0 = 0.$$

La propriété démontrée, pour ces intégrales (1), au n° 23, permet de retrouver cette relation et même la propriété découverte par Birkeland (*voir* Belardinelli [5, (m)]). En intégrant par parties la fonction hypergéométrique générale de Pochhammer

$$\int_{(\lambda)} (y-a_1)^{b_1-1}(y-a_2)^{b_2-1}\ldots(y-a_n)^{b_n-1}(y-x)^{\lambda-1}\,dy,$$

on peut obtenir en rapport à chacun des $b_1, b_2, \ldots, b_n$, considérés comme paramètres, des relations récurrentes linéaires.

Cette propriété générale peut être démontrée de façon analogue au cas particulier suivant.

En effet, si nous appliquons à l'intégrale

$$(4) \qquad \psi(\alpha, \beta+r) = \int_{(\omega_0)} y^r(y^\beta(\theta(y))^{-\alpha})\,dy = \int_{(\omega_0)} y^r g(y)\,dy, \qquad (r \geqq 0),$$

l'intégration par parties, nous avons

$$(5) \qquad \psi(\alpha, \beta+r) = \frac{-1}{r+1}\int_{(\omega_0)} y^{r+1} g'(y)\,dy$$

et tout de suite, de l'équation différentielle [5, (m)]

$$(6) \qquad y\,\theta(y)\,g'(y) - (\beta\,\theta(y) - \alpha\,y\,\theta'(y))\,g(y) = 0,$$

par application de l'intégrale de Pochhammer, on obtient la relation

$$\begin{aligned} a_0(\beta+1)\psi(\alpha,\beta) + \ldots + a_r(\beta+1-r(\alpha-1))\,\psi(\alpha,\beta+r) + \ldots \\ + a_n(\beta+1-n(\alpha-1))\,\psi(\alpha,\beta+n) = 0 \end{aligned}$$

donnée par Capelli.

Nous appelons (R) cette relation entre $n+1$ intégrales dépendantes du même α, c'est-à-dire relatives aux monomes $x_0^{\alpha_0}x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$ de la même puissance

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Dans les intégrales, l'exposant β représente le poids du monome $x_0^{\alpha_0}x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$, c'est-à-dire

$$\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n.$$

Nous pouvons écrire immédiatement une autre relation. Considérons l'intégrale $\psi(\alpha, \beta)$, intégrant par parties ($\beta \neq -1$), on a

$$\psi(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta+1}\int_{(\omega_0)} y^{\beta+1}(\theta(y)^{-\alpha-1}\theta'(y))\,dy$$

et, par conséquent,

$$(\beta+1)\psi(\alpha, \beta) = \sum_{r=1}^{n} r a_r \alpha\, \psi(\alpha+1, \beta+r), \tag{7}$$

relation que nous appelons (R_1).

Cette dernière relation (R_1) pose une liaison entre l'intégrale $\psi(\alpha, \beta)$ et les intégrales relatives à $\alpha+1$. Précisément :

Dans le développement en série de Lagrange d'une racine d'une équation algébrique de degré n, les intégrales $\psi(\alpha, \beta)$, avec lesquelles sont formés les coefficients, sont des fonctions particulières rationnelles hypergéométriques de Pochhammer, qui vérifient les deux relations suivantes :

$$(R),\ (8) \qquad \sum_{r=0}^{n} a_r(\beta+1-r(\alpha-1))\,\psi(\alpha, \beta+r) = 0,$$

$$(R_1),\ (9) \qquad \sum_{r=1}^{n} r\alpha a_r\,\psi(\alpha+1, \beta+r) = (\beta+1)\,\psi(\alpha, \beta).$$

Pour une équation initiale binome, comme dans le cas de Mellin et Birkeland,

$$\theta(y) = y^n - 1,$$

nous avons les deux relations

$$(R) \qquad (\beta+1)\psi(\alpha, \beta) - (\beta+1-n(\alpha-1))\,\psi(\alpha, \beta+n) = 0,$$

$$(R_1) \qquad (\beta+1)\psi(\alpha, \beta) - \alpha n\,\psi(\alpha+1, \beta+n) = 0.$$

On a tout de suite, dans ce cas, par ces deux relations (R) et (R_1), que les rapports

$$\frac{\psi(\alpha+n, \beta+pn)}{\psi(\alpha, \beta)} \qquad (p = 0, 1, \ldots, n)$$

sont des fonctions rationnelles.

Les séries sont pour cela des sommes des séries hypergéométriques d'ordre supérieur de plusieurs variables (Belardinelli [5, (m)]), résultat obtenu par une autre voie par Birkeland, n° 24 [7, (e)]. Les relations (R) et (R_1) sont donc bien des équations essentielles. La première (R) est une propriété qu'on peut dire *locale*, elle est relative au degré α, l'ensemble des deux relations (R) et (R_1) donne une liaison générale entre tous les coefficients de la série.

Les séries correspondantes aux racines de l'équation (4) au n° 21 peuvent être considérées comme la continuation analytique des séries (11) au n° 21 obtenues d'une équation initiale binome.

La série de Lagrange d'une racine d'une équation algébrique est ainsi complètement déterminée par les fonctions hypergéométriques de Pochhammer et par les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur de plusieurs variables.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

[1] Abel (N. H.), *Œuvres*, Cristiania, 1881.

[2] Appell (P.) :

a. *Sur les séries hypergéométriques de deux variables et sur des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 90, 1880, p. 296 et 731).

b. *Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables* [*J. Math. pures et appl.* (*Liouville*), 3e série, t. 8, 1882, p. 173].

c. *Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables* (*Mém. Sc. math.*, fasc. III, Gauthier-Villars, Paris, 1925).

[3] Appell (P.) et Kampé de Fériet (J.), *Fonctions hypergéométriques ...* (*voir* Kampé de Fériet [41]), Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[4] Barnes (E. W.) :

a. *On functions defined by simple types of hypergeometric series* (*Trans. Camb. Phil. Soc.*, t. 20, 1907, p. 253).

b. *A new developpement of the theory of the hypergeometric functions* (*Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. 6, 1908, p. 141).

c. *A transformation of generalised hypergeometric series* (*Quart. J. Math.*, t. 41, 1910, p. 136).

[5] BELARDINELLI (G.) :

a. Sulla risoluzione delle equazioni algebriche mediante sviluppi in serie (*Thèse*, Bologna, 1919; *Ann. Mat.*, 3e série, t. 29, 1920, p. 251).

b. Sulla risoluzione delle equazioni algebriche mediante le funzioni ipergeometriche (*Rend. Accad. Lincei*, 5e série, t. 30, 1921, p. 208).

c. L'equazione differenziale risolvente della equazione trinomia (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 46, 1922, p. 463).

d. Sur la résolution des équations algébriques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 179, 1924, p. 432).

e. Sulla risoluzione delle equazioni mediante sviluppi in serie (*Rend. Ist. Lombardo*, t. 63, fasc. VI-X, 1930, p. 483).

f. Sulla risoluzione delle equazioni analitiche mediante sviluppi in serie (*Rend. Ist. Lombardo*, t. 64, fasc. XI-XV 1931, p. 751).

g. Funzioni associate ad una equazione analitica (*Rend. Ist. Lombardo*, t. 65, fasc. XI, 1932, p. 907).

h. Sulle equazioni algebriche (*Rend. Congrès Intern. Math. Zurich*, t. II, 1932, p. 30).

i. Sulle funzioni di Legendre (*Rend. Ist. Lombardo*, t. 65, fasc. XVI-XVIII, 1932, p. 1029).

j. Sulle funzioni ipergeometriche (*Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, t. 7, 1933, p. 77).

k. Rappresentazione delle funzioni algebriche mediante le funzioni ipergeometriche (*Rend. Ist. Lombardo*, t. 67, fasc. I-V, 1934, p. 129).

l. Una rappresentazione analitica delle funzioni algebriche (*Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, t. 15, 1941, p. 70).

m. Sulla risoluzione analitica delle equazioni algebriche generali (*Rend. Ist. Lombardo*, t. 92, fasc. I, 1957, p. 75).

[6] BETTI (E.) :

a. Un teorema sulla risoluzione analitica delle equazioni algebriche (*Ann. Sc. Mat. Fis. Pisa*, t. 5, 1854, p. 10; *Opere*, t. 1, p. 96).

b. Opere, Hoepli, Milano, 1913.

[7] BIRKELAND (R.) :

a. Résolution de l'équation algébrique trinome par des fonctions hypergéométriques supérieures (*C. R. Acad. Sc.*, t. 171, 1920, p. 728).

b. Résolution de l'équation générale du cinquième degré (*C. R. Acad. Sc.*, t. 171, 1920, p. 1047).

c. *Résolution de l'équation algébrique générale par des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 171, 1920, p. 1370 et t. 172, 1921, p. 309).

d. *Résolution des équations trinomes par une somme de fonctions hypergéométriques supérieures* (*Videnskapsselskapets Skrifter*, Oslo, Mat. Naturv. Klasse, n° 3, 1921).

e. *Sur la résolution des équations algébriques générales par une somme de fonctions hypergéométriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 177, 1923, p. 231 et 436).

f. *On the solution of quintic equations* (*Proc. Intern. Congr. Toronto*, vol. I, 1924 p. 387).

g. *Ueber die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen* (*Math. Z.*, t. 26, 1927, p. 566).

h. *Les équations algébriques et les fonctions hypergéométriques* (*Avhandlinger utgitt af det norske videnskapsakademi*, Oslo, Mat. Naturv. Klasse, n° 8, 1927).

i. *Une proposition générale sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 185, 1927, p. 923).

[8] Boole (G.), *Treatise on differential equations*, Supplementary Volume, Mac Millan, Cambridge and London, 1865.

[9] Borngässer (L.), *Ueber hypergeometrische Funktionen zweier Veranderlichen*, Darmstadt, *Dissertation*, 1933.

[10] Bortolotti (E.), *Studi e ricerche sulla storia della matematica in Italia nei secoli* XVI *e* XVII, Zanichelli, Bologna, 1928.

[11] Brioschi (F.) :

a. *Intorno ad alcune formule per la risoluzione delle equazioni algebriche* (*Ann. Sc. Mat. Fis. Pisa*, t. 5, 1854 p. 416; *Opere*, t. 1, p. 156).

b. *Sul metodo di Kronecker per la risoluzione della equazione di* 5° *grado* (*Rend. Ist. Lombardo*, t. 1, 1858, p. 275; *Opere*, t. 3, p. 177).

c. *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 85, 1877, p. 1000; *Opere*, t. 5, p. 407).

d. *Ueber die Auflösung der Gleichungen von fünften Graden* (*Math. Ann.*, t. 13, 1879, p. 109; *Opere*, t. 5, p. 253 et t. 4, p. 260).

e. *Osservazioni sulla comunicazione di Maschke riguardante la risoluzione della equazione di sesto grado* (*Rend. Accad. Lincei*, 4e série, t. 4, 1888, p. 181; *Opere*, t. 4, p. 41).

f. *Sur l'équation du sixième degré* (*Acta Mat.*, t. 12, 1889, p. 83; *Opere*, t. 5, p. 313).

g. *Sur l'équation du sixième degré* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 12, 1895, p. 343; *Opere*, t. 5, p. 175).

h. *Opere*, Hoepli, Milano, 1909.

[12] Bruwier (L.), *Sur une extension de la série de Lagrange* (*Bull. Soc. Roy. Liège*, t. 5, 1936, p. 79).

[13] Capelli (A.) :

a. *Sulla risoluzione delle equazioni ed in ispecie delle trinomie per mezzo di integrali definiti* (*Rend. Accad. Sc. Fis. Mat. Napoli*, 2e série, t. 6, 1892, p. 39).

b. *Sulla risoluzione generale delle equazioni algebriche per mezzo di sviluppi in serie* (Nota I) (*Rend. Accad. Sc. Fis. Mat. Napoli*, 3e série, t. 13, 1907, p. 192).

c. *Id.* (Nota II) (*Ibid.*, 3e série, t. 13, 1907, p. 289).

d. *Id.* (Nota III) (*Ibid.*, 3e série, t. 13, 1907, p. 342).

e. *Determinazione del coefficiente generale nello sviluppo in serie della radice di una equazione algebrica* (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 26, 1908, p. 363).

f. *Sui coefficienti degli sviluppi in serie di potenze delle funzioni algebriche di più variabili* (*Atti Congr. Intern. Math. Roma*, vol. II, 1908, p. 156).

[14] Cardano (G.) (*voir* Bortolotti [10]; Cassina [15]; Loria [48], p. 292).

[15] Cassina (U.), *Su due quesiti proposti da Cardano a Tartaglia* (*Periodico di Matem.*, 4e série, t. 9, 1929, p. 117; *Atti Congr. Math. Bologna*, t. VI, 1928, p. 443).

[16] Chaundy (T. W.), *The validy of Lagrange' s expansion* (*Quart. J. Math. Oxford*, t. 2, 1931, p. 155).

[17] Chazy (J.), *Sur le rayon de convergence de la série de Lagrange* (*Bull. Sc. Math.*, t. 73, 1949, p. 116).

[18] Clausen (Th.), *Ueber die Fälle wenn die Reihe...* [*J. r. Ang. Math.* (*Crelle*), t. 3, 1828, p. 89].

[19] Erdélyi (A.) :

a. *Beitrag zur theorie der Konfluenten hypergeometrischen Funktionen von mehreren Veränderlichen* (*Sitz. Akad. Wiss. Wien*, t. 146, 1937, p. 431).

b. *Integraldarstellungen hypergeometrischen Funktionen* (*Quart. J. Math. Oxford*, 1937, p. 267).

c. *Hypergeometric functions of two variables* (*Acta Math.*, t. 83, 1950, p. 131).

d. *The general form of hypergeometric series of two variables* (*Proc. Int. Congr. Math.*, t. I, 1950, p. 413).

e. *The analytic theory of systems of partials differential equations* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 57, 1951, p. 339).

[20] Feldheim (E.), *Équations intégrales pour les polynomes d'Hermite* (*Ann. Sc. Norm. Pisa*, t. 9, 1940, p. 225).

[21] Ferrari (L.) (*voir* Bortolotti [10]; Loria [48], p. 291).

[22] Ferro (dal) (Sc.) (*voir* Bortolotti [10]; Loria [48], p. 290).

[23] Galois (E.), *Œuvres Mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1897.

[24] Garnier (R.) :

a. *Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme ...* (*Thèse*, Paris, 1911).

b. *Sur les équations différentielles à points critiques fixes et les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 132, 1911, p. 755).

[25] Gauss (C. F.), Werke, Gottingen, 1876.

[26] Germany (R. H.) :

a. *Application de la méthode des résidus à la généralisation de la formule de Lagrange* (*Bull. Soc. Roy. Liège*, t. 3, 1934, p. 8 et 26*; voir Ibid.*, 1928 et suiv.).

b. *Sur la série de Lagrange-Burmann et sa généralisation* (*Bull. Soc. Roy. Liège*, 5, 1936, p. 40 et 70)

[27] Ghosh (N.), *On a generalization of Lagrange's inversion formule* (*Bull. Calcutta Math. Soc.*, t. 19, 1928, p. 21).

[28] Gordan (P.), *Ueber Gleichungen funften Grades* (*Math. Ann.*, t. 28, 1887, p. 152).

[29] Goursat (E.) :

a. *Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique* (*Ann. Éc. Norm. Sup.* 2e série, t. 10, 1881, p. 3).

b. *Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables* (*C. R. Acad. Sc.* t. 95, 1882, p. 717).

c. *Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur* (*Ann. Éc. Norm. Sup.* 2e série, t. 12, 1883, p. 261 et 395).

d. *Extension du problème de Riemann à des fonctions hypergéométriques de deux variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 95, 1882, p. 903 et 1044).

e. *Sur une classe de fonctions représentées par des intégrales définies* (*Acta Math.*, t. 2, 1883, p. 1).

[30] Harley (R.), *On the theory of the transcendental Solution of algebraic Equations* (*Quart. J. Math.*, t. 5, 1862, p. 337).

[31] Heegmann (A.) :

a. *Essai d'une nouvelle méthode de résolution des équations algébriques au moyen des séries infinies* (1er Mémoire) (*Soc. Imp. Sc. Lille*, 1861; Mallet-Bachelier, Paris, 1861).

b. *Résolution générale des équations* (2e Mémoire) (*Soc. Imp. Sc. Lille*, 1864; Gauthier-Villars, Paris, 1865).

[32] HEINE (E.) :

a. *Lagrange's Umkerungsformel* [*J. r. Ang. Math.* (*Crelle*), t. 54, 1857, p. 388].

b. *Handbuch der Kugelfunktionen*, Reimer, Berlin, 2e éd., t. I, 1878, p. 16.

[33] HERMITE (Ch.) :

a. *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 46, 1858, p. 508; *Opere*, t. 2, p. 4).

b. *Sur l'équation du cinquième degré* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 61, 1865, p. 877, 965 et 1073; t. 62, 1866, p. 65, 157, 245, 715, 919, 959, 1054, 1161 et 1213; *Opere*, t. 2, p. 347).

c. *Sur un théorème de Eisenstein* (*Proc. London Math. Soc.*, t. 7, 1876, p. 173; *Opere*, t. 3, p. 232).

d. *Œuvres*, Gauthier-Villars, Paris, 1917.

[34] HEYMANN (W.) :

a. *Theorie der trinomische Gleichungen* (*Math. Ann.*, t. 28, 1887, p. 61).

b. *Studien uber die Transformation und integration der Differential und Differenzengleichungen*, Teubner, Leipzig, 1891.

[35] HIBBERT (L.), *Résolution des equations* $z^n = z - a$ (*Bull. Sc. Math.*, t. 65, 1941, p. 21).

[36] HÖFINGER (E.), *Zur theorie der Verallgemeinerten Pochhammerschen Differentialgleichungen* (*Monatsh. Math.*, t. 57, 1954, p. 317).

[37] HORN (J.) :

a. *Ueber die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veranderlichen* (*Math. Ann.*, t. 34, 1889, p. 544).

b. *Ueber ein System linearer partieller Differentialgleichungen* (*Acta Math.*, t. 12, 1889, p. 113).

c. *Zur integration der system totaler linearer Differentialgleichungen mit zwei unabhändigen Veränderlichen* (*Math. Ann.*, t. 42, 1893, p. 215).

d. *Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen* (*Math. Ann.*, t. 105, 1931, p. 381; t. 111, 1935, p. 638; t. 113, 1936, p. 242).

e. *Ueber eine hypergeometrische Funktion zweier Veränderlichen* (*Monatsh. Math.*, t. 47, 1938, p. 186).

f. *Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen im Shnittpunkt dreier Singularitäten* (*Math. Ann.*, t. 115, 1938, p. 435).

g. *Ueber eine hypergeometrische Funktion zweier Veränderlichen* (*Monatsh. Math.*, t. 47, 1939, p. 359).

[38] HUMBERT (P.) :

a. *The confluent hypergeometric functions of two variables* (*Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, t. 41, nº 9, 1920-1921, p. 73).

b. *Sur les séries hypergéométriques* (*Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, t. 43, 1923-1924, p. 75).

[39] JORDAN (C.) :

a. *Traité des substitutions*, Gauthier-Villars, Paris, 1870.

b. *Traité d'analyse*, Gauthier-Villars, Paris, 1893.

[40] KAMPÉ DE FÉRIET (J.) :

a. *Sur la généralisation des séries de Lagrange et de Laplace* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 160, 1915, p. 591).

b. *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques les plus générales* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 172, 1921, p. 1634).

c. *Sur certains systèmes associés d'équations aux différences finies et d'équations aux dérivées partielles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 173, 1921, p. 285).

d. *Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 173, 1921, p. 401).

e. *Quelques propriétés des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 173, 1921, p. 489).

f. *Sur l'intégrale générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 173, 1921, p. 900).

g. *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 177, 1923, p. 546).

h. *Sur une classe particulière de fonctions hypergéométriques d'une variable* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 178, 1924, p. 1949).

i. *Une propriété générale des fonctions hypergéométriques d'une variable* (*C. R. Congrès Sociétés Savantes*, Paris, 1925, p. 88).

j. *Sur les fonctions définies par des séries dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de l'indice* (*C. R. Congrès Assoc. franç. Avanc. Sc.*, Grenoble, 1925, p. 64).

k. *Sur l'uniformisation d'une classe de fonctions définies par des séries entières à coefficients méromorphes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 182, 1926, p. 113).

l. Sur l'uniformisation des fonctions hypergéométriques de deux variables (*C. R. Congr. Math. Bologne*, t. 3, 1928, p. 323).

m. Sur l'uniformisation des fonctions hypergéométriques de M. Appell par les fonctions modulaires de M. Picard [*J. Math. pures et appl.* (*Liouville*), 9e série, t. 8, 1929, p. 381].

n. La fonction hypergéométrique de Gauss (*Mém. Sc. Math.*, fasc. 85, Gauthier-Villars, Paris, 1937).

[41] Kampé de Fériet (J.) et Appell (P.), *Fonctions hypergéométriques* (*voir* Appell [3] Gauthier-Villars, Paris, 1926).

[42] Klein (F.) :

a. Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade, Teubner, Leipzig, 1884.

b. Conférences sur les mathématiques (Recueillies par A. Ziwet, traduites par L. Laugel, Chicago, 1893; éd. Hermann, Paris, 1898).

c. Ueber die hypergeometrische Funktion (*Vorlesungen*, Göttingen, 1896; Springer, Berlin 1933).

[43] Kronecker (L.), *Sur la résolution de l'équation du cinquième degre* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 47, 1858, p. 1150).

[44] Lagrange (J. L.), *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1768.

[45] Lahaye (E.), *Sur la représentation des racines des équations algébriques* (*Bull. Soc. Roy. Belgique*, t. 27, 1941, p. 418).

[46] Lauricella (G.), *Sulle funzioni ipergeometriche a più variabili* (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 7, 1893, p. 111).

[47] Lindemann (F.) :

a. Ueber die auflösungen algebraische Gleichungen durch trascendente Functionen (*Nach. K. G. W. Göttingen*, 1884, p. 245).

b. Id. (*Ibid.*, 1892, p. 292).

[48] Loria (G.), *Storia delle matematiche, Hoepli, Milano*, 2e ed., 1950.

[49] Maschke (H.), *La risoluzione della equazione di sesto grado* (*Rend. Accad. Lincei*, 4e serie, t. 4, 1888, p. 181).

[50] Mayr (K.), *Ueber die Lösung algebraischer Gleichungsysteme durch hypergeometrische Funktionen* (*Mh. Math. Phys.*, t. 45, 1937, p. 280. p. 435).

[51] Mellin (Hj.) :

a. Ueber einen Zusammenhang zwischen Gewissen linearen Differential und Differenzengleichungen (*Acta Mat.*, t. 9, 1887, p. 137).

b. Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung (*Acta Mat.*, t. 15, 1891, p. 317).

c. *Om definita integraler ...* (*Acta Soc. Sc. Fenn.*, t. 20, n° 7, 1893).

d. *Ueber die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der* Γ *und der hypergeometrischen Funktionen* (*Acta Soc. Sc. Fenn.*, t. 21, n° 1, 1896).

e. *Ueber Gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten* (*Acta Soc. Sc. Fenn.*, t. 21, n° 6, 1896).

f. *Zur Theorie zweier allgemeiner Klassen Bestimmter Integrale* (*Acta Soc. Sc. Fenn.*, t. 22, n° 2, 1896).

g. *Ueber hypergeometrischen Reihen Höherer Ordnung* (*Acta Soc. Sc. Fenn.*, t. 23, n° 7, 1897).

h. *Ueber die Integration partieller linearer Differentialgleichungen durch vielfache Integrale* (*Acta Mat.*, t. 22, 1899, p. 19).

i. *Ueber die Integration simultaner Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale* (*Acta Mat.*, t. 22, 1899, p. 41).

j. *Ueber die Zusammenhang zwischen den linearen Differential und Differenzengleichungen* (*Acta Mat.*, t. 25, 1902, p. 139).

k. *Grundzüge einer einheitlichen Theorie der* Γ *und hypergeometrischen Funktionen* (*Ann. Ac. Sc. Fenn.*, t. 1, n° 3, 1909).

l. *Abriss ein heitlichen Theorie der* Γ *und hypergeometrischen Funktionen* (*Math. Ann.*, t. 68, 1910, p. 305).

m. *Zur Theorie der trinomischen Gleichungen* (*Ann. Ac. Sc. Fenn.*, t. 7, n° 7, 1915).

n. *Ein Allgemeiner Satz über algebraische Gleichungen* (*Ann. Ac. Sc. Fenn.*, t. 7, n° 8, 1915).

o. *Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction* Γ (*C. R. Acad. Sc.*, t. 172, 1921, p. 658).

p. *Die Theorie der Asymptotischen Reihen ...* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, t. 18, n° 4, 1922).

[52] Nörlund (N. E.) :

a. *Sur les fonctions hypergéométriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 1371 et 1466).

b. *Ueber hypergeometrische Funktionen* (*Arch. Math.*, t. 5, 1954, p. 258).

c. *Hypergeometric Functions* (*Acta Math.*, t. 94, 1955, p. 289).

d. *Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur* (*Mat. Fys. Skriften Dan. Vid. Selsk.*, t. 1, n° 2, 1956).

[53] Ore (O.) :

a. *Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 189, 1929, p. 1238).

b. Sur la forme des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables [*J. Math. pures et appl.* (*Liouville*), 9e série, t. 9, 1930, p. 311].

[54] PICARD (E.) :

a. Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 90, 1880, p. 1119 et 1267; *Ann. Éc. Norm. Sup.* 2e série, t. 10, 1881, p. 305).

b. Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires (*Acta Math.*, t. 2, 1883, p. 114).

c. Traité d'analyse, Gauthier-Villars, t. I, II, III, 1891-93-96, Paris.

[55] PINCHERLE (S.) :

a. Studi sopra alcune operazioni funzionali (*Mem. Acad. Bologna*, 4e série, t. 7, 1886, p. 391; *Op. Scelte*, t. I, p. 92).

b. Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies (*Acta Mat.*, t. 10, 1887, p. 153; *Op. Scelte*, t. I, p. 142).

c. Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate (Nota I) (*Rend. Accad. Lincei*, 4e série, t. 4, 1888, p. 694; *Op. Scelte*, t. I, p. 223).

d. Id. (Nota II) (*Ibid.*, t. 4, 1888, p. 792; *Op. Scelte*, t. I, p. 231).

e. Contributo alla integrazione delle equazioni differenziali lineari mediante integrali definiti (*Mem. Accad. Bologna*, 5e série, t. 2, 1892, p. 523; *Op. Scelte*, t. I, p. 246).

f. Delle funzioni ipergeometriche e di varie questioni ad esse attinenti [*Giornale Mat.* (*Battaglini*), t. 32, 1894, p. 209; *Op. Scelte*, t. I, p. 273].

g. Sulla inversione degli integrali definiti [*Mem. Soc. It. Sc.* (XL), 3e série, t. 15, 1907, p. 3; *Op. Scelte*, t. II, p. 302].

h. Notice sur les travaux (*Acta Math.*, t. 46, 1925, p. 341); *Op. Scelte*, t. 1, p 45).

i. Opere Scelte, Cremonese, Roma, 1954.

[56] POCHHAMMER (L.) :

a. Ueber hypergeometrische Funktionen hoherer Ordnungen [*J. r. ang. Math.* (*Crelle*), t. 71, 1870, p. 216].

b. Ueber eine Classe von integral mit geschlossener Integrationscurve (*Math. Ann.*, t. 37, 1890, p. 500).

c. Ueber Tissot'sche Differentialgleichungen (*Math. Ann.*, t. 37, 1890, p. 512).

d. Ueber die Differentialgleichungen der allgemeineren hypergeometrischen Reihen [*J. r. ang. Math.* (*Crelle*), t. 102, p. 76].

[57] RAABE (J. L.), *Zurukfuhrung der Wurzelform einer algebraischen Gleichungen auf die Integration linearer partieller, oder eines systemes simultaner gemeiner Differentialgleichungen erster Ordnung* [*J. r. ang. Math.* (*Crelle*), t. 48, 1854, p. 167].

[58] RIEMANN (B.), *Gesammelte Werke*, Teubner, Leipzig, 1876.

[59] RUFFINI (P.) :

a. *Teoria generale delle equazioni*, *Bologna*, 1798.

b. *Della insolubilità delle equazioni algebriche generali di grado superiore al* 4° *qualunque metodo algebraico esso siasi* o *trascendentale* (*Mem. Ist. Naz. Ital.*, t. I, Bologna, 1806).

c. *Opere Matematiche*, Cremonese, Roma, 1954.

[60] SERRET (J. A.), *Cours d'Algèbre supérieure*, Gauthier-Villars, 4e éd., Paris, 1877.

[61] SCHMIDT (H.), *Ueber die Reihendarstellung implizit gegebener Funktionen von endlich oder unendlich vielen Veränderlichen* (*Math. Z.*, t. 40, 1936, p. 266).

[62] TARTAGLIA (N.) (*voir* Bortolotti [10], Cassina [15], Loria [48]; p. 291).

[63] THOMAS (J. M.) :

a. *Differential systems* (*Amer. Math. Soc. Colloquium Publications*, t. 21, New York, 1937).

b. *Ordely differential systems* (*Duke Math. J.*, t. 7, 1940, p. 249).

[64] TISSOT (A.), *Sur un déterminant d'intégrales définies* [*J. Math. pures et appl.* (*Liouville*), t. 17, 1852, p. 177].

[65] TRICOMI (F. G.), *Funzioni ipergeometriche confluenti* (*Monografie Matematiche*, *Consiglio delle ricerche*, Cremonese, Roma, 1954).

[66] VALIRON (G.), *Sur le rayon de convergence de la série de Lagrange* (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. 73, 1949, p. 116).

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME PARTIE.

RÉSOLUTION ANALYTIQUE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES GÉNÉRALES.

CHAPITRE IV. — *Résolution de l'équation trinome.*

CHAPITRE V. — *Résolution de l'équation algébrique générale.*