MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

KING-LAÏ HIONG

Sur les fonctions méromorphes et les fonctions algébroïdes, extensions d'un théorème de M. R. Nevanlinna

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 139 (1957)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1957__139__1_0>

M. King-Laï HIONG
Docteur ès Sciences Mathématiques.
Ancien professeur à l'Université Nationale Tsing-Hua, à Pékin
et à l'Université Nationale du Yunnan à Kunming

SUR
LES FONCTIONS MÉROMORPHES
ET
LES FONCTIONS ALGÉBROÏDES
EXTENSIONS D'UN THÉORÈME DE M. R. NEVANLINNA

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CXXXIX

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

1957

SUR LES FONCTIONS MÉROMORPHES ET LES FONCTIONS ALGÉBROÏDES

EXTENSIONS D'UN THÉORÈME DE M. R. NEVANLINNA

Par M. King-Laï HIONG,

Docteur ès Sciences Mathématiques,
Ancien professeur à l'Université Nationale Tsing Hua, à Pékin
et à l'Université Nationale du Yunnan à Kunming.

INTRODUCTION.

On sait combien est important le rôle que joue la méthode logarithmique due à M. R. Nevanlinna, dans la théorie moderne des fonctions méromorphes. Le second théorème fondamental, qui constitue un instrument puissant, a donné lieu à des extensions nombreuses suivies d'applications diverses. Dans le présent fascicule, nous ne nous occupons pas du résultat de M. T. Shimuzu, ni de la théorie de M. L. Ahlfors qui ont pour base des considérations géométriques ([1]). Nous nous bornons aux extensions plus directes et seulement pour les fonctions méromorphes dans tout le plan ouvert ou dans un cercle ([2]); mais nous réservons une place importante à ce

([1]) On en trouve un exposé dans l'Ouvrage de M. R. Nevanlinna [18, *e*]. On peut signaler ici la Thèse de M. J. Dufresnoy [9, *d*] et un travail de M. M. Tsuji [25, *a*].

([2]) Il existe aussi une extension, faite par M. R. Nevanlinna lui même, aux fonctions méromorphes dans un angle [18, *b*]. Et concernant les fonctions définies dans un domaine arbitraire, M. K. Kunugui a fait une généralisation des théorèmes de M. R. Nevanlinna en utilisant la notion des ensembles de valeurs d'agglomération introduite par M. W. Gross [13, *a*].

qui concerne la théorie des fonctions algébroïdes et celle des systèmes de fonctions.

Nous commençons par exposer des extensions obtenues en faisant intervenir des dérivées. Une idée féconde de M. P. Montel se trouve à l'origine de ce genre de recherches. Ce fut sur sa suggestion que M. C. Miranda est arrivé, après des résultats partiels trouvés par M. F. Bureau, à établir le théorème connu sous son nom; et dans le même ordre d'idées, M. H. Milloux, en cherchant une base pour la théorie des fonctions méromorphes en rapport avec leurs dérivées, a obtenu différentes inégalités fondamentales. Mais il convient de mentionner un résultat à part de M. E. Ullrich dans lequel est intervenue également la dérivée de la fonction considérée. Les premiers résultats de M. Milloux se trouvent déjà dans un exposé fait par lui-même; nous ne donnons ici que ceux qu'il a obtenus ultérieurement ainsi que des résultats dus à d'autres auteurs.

Par l'introduction d'une primitive supposée méromorphe, nous avons pu établir une inégalité simple qui étend aussi la seconde inégalité fondamentale et qui est susceptible d'applications. Nous pensons qu'il n'est pas inutile de donner également ce résultat ici.

Ensuite, nous abordons l'extension de la méthode logarithmique aux fonctions algébroïdes. Quoique les premiers résultats aient été obtenus par M. H. L. Selberg et par G. Valiron il y a plus de 20 ans, il n'existe encore, à notre connaissance, aucun recueil contenant cette théorie déjà bien développée. Nous exposons particulièrement la méthode de Valiron; pour compléter ce qui concerne son second théorème fondamental, nous effectuons la démonstration, pour laquelle il a indiqué seulement l'identité qui peut être utilisée comme point de départ. Nous y ajoutons, en outre, une nouvelle extension.

En ce qui concerne la théorie des systèmes de fonctions, une extension du second théorème fondamental a été donnée en premier lieu par M. R. Nevanlinna lui-même avec des conséquences intéressantes, et par la même méthode, M. H. Cartan en a fait une autre suivie d'applications du point de vue *finitiste*. Puis, au moyen d'une autre méthode due à M. L. Ahlfors, MM. H. et J. Weyl ont développé une théorie de courbes méromorphes et, conservant la dénomination de ces deux auteurs, mais employant une méthode différente, M. Ahlfors est arrivé à constituer, pour les systèmes de fonctions, une théorie plus complète, qui toutefois n'a pas reçu d'applications.

Nous n'exposons pas ces deux dernières théories et nous donnons brièvement les principaux résultats fournis par la méthode de M. R. Nevanlinna. Nous consacrons la dernière partie de notre exposé surtout à une autre théorie, celle de M. H. Cartan sur les combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes. On y trouvera plusieurs applications; notamment, pour une classe importante d'algébroïdes, on déduit de cette théorie une inégalité fondamentale plus précise que celle qui a été précédemment établie.

Pour les principaux théorèmes contenus dans le présent exposé, nous nous efforçons de donner les indications suffisantes pour que le lecteur puisse reconstituer sans grandes difficultés les démonstrations complètes.

En terminant, je tiens à exprimer ma vive gratitude à M. Henri Villat qui a bien voulu me proposer de rédiger ce fascicule pour sa belle collection le *Mémorial des Sciences Mathématiques*.

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES. EXTENSIONS PAR INTERVENTION DES DÉRIVÉES; CAS DE TROIS INDICES DE DENSITÉ.

I. — Préliminaires.

1. Considérations géométriques. — Nous utiliserons la sphère de Riemann S tangente au plan complexe en O et de rayon $\frac{1}{2}$. Désignons par N son pôle nord et soit x un nombre complexe. m étant le point d'affixe x, le point M de S, situé sur la droite Nm est l'image sphérique de x. On appelle distance sphérique de deux nombres complexes x et x' d'images sphériques M et M$'$ le plus petit arc de grand cercle de S, joignant M et M$'$ et on la désigne par $|\mathrm{M}, \mathrm{M}'|$ ou $|x, x'|$. On voit de suite que $\mathrm{O}m = \operatorname{cotg} u$ en posant $u = |\mathrm{N}, \mathrm{M}|$.

Soit v une constante comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$; désignons par (C) le cercle lieu des points P sur S tels que $|\mathrm{M}, \mathrm{P}| = v$ et par (c) son cercle homologue dans le plan des x; il est facile de montrer [**14**, d] que : 1° dans le cas où $v < u$, pour un point quelconque i intérieur à (c) et pour un point quelconque e extérieur à (c), on a

$$im < \frac{1 + \mathrm{O}m^2}{\operatorname{cotg} v - \mathrm{O}m} \qquad \text{et} \qquad em > \frac{1 + \mathrm{O}m^2}{\operatorname{cotg} v + \mathrm{O}m};$$

2° dans le cas où $v > u$, on a, pour tout point i intérieur à (c),

$$\frac{1 + O m^2}{\cot g\, v + O m} < im < \frac{1 + O m^2}{\cot g\, v - O m}.$$

Comme dans le premier cas l'extérieur de (c) dans le plan complexe correspond à l'extérieur de (C) sur S et que c'est le contraire qui a lieu dans le second cas, il résulte de ce qui précède que si P est un point de S tel que $|P, M| \geqq v \left(0 < v < \frac{\pi}{2}\right)$, on a

$$pm \geqq \frac{1 + O m^2}{\cot g\, v + O m},$$

p étant le point homologue de P dans le plan complexe.

2. Lemme de M. R. Nevanlinna et sa généralisation. — Avec une inégalité un peu améliorée par Valiron et M. Milloux, cet important lemme s'énonce comme suit : *soit $f(x)$ une fonction méromorphe pour $|x| < R \leqq \infty$, en supposant que $f(0) \neq 0, \infty$, on a pour $r < \rho < R$,*

$$(1) \qquad m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 16 + 4 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{f(0)}\right| + \overset{+}{\log} \frac{1}{\rho} + 2 \log \frac{\rho}{r} + 3 \log \frac{\rho}{\rho - r} + 4 \overset{+}{\log} T(\rho, f).$$

Dans les mêmes conditions, on peut établir l'inégalité générale

$$(2) \qquad m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < a_k + a'_k \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{f(0)}\right| + b_k \overset{+}{\log} \frac{1}{r} + b'_k \log \frac{\rho}{r} + b''_k \log \frac{\rho}{\rho - r} + c_k \overset{+}{\log} T(\rho, f),$$

a_k, a'_k, ... et c_k étant des constantes numériques qui ne dépendent que de k [12, d].

Dans le cas où $f(0) = c_0 = 0$ ou ∞, l'inégalité (1) reste valable, si on la modifie légèrement en introduisant à la place de c_0 le premier coefficient non nul $C(f)$ du développement en série de Laurent de f autour de O [18, d]; il en est de même de (2).

3. Une forme précise de la seconde inégalité fondamentale. —

f étant défini comme au n° **2**, écrivons avec M. R. Nevanlinna

$$\frac{1}{f} = 1 - \frac{f-1}{f'}\frac{f'}{f};$$

en supposant $f(0) \neq 0,\ 1,\ \infty$ et $f'(0) \neq 0$, on en déduit

$$(3)\quad m\left(r, \frac{1}{f}\right) < m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + \left[N\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) - N\left(r, \frac{f-1}{f'}\right)\right] + \log\left|\frac{f(0)-1}{f'(0)}\right| + \log 2.$$

D'après une propriété connue de l'expression

$$(4)\qquad \nu(r, f) = N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \quad [18, d],$$

le crochet peut se mettre sous la forme

$$N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) - N_1(r),$$

où l'on désigne par $N_1(r)$ l'indice des points multiples de f.

A l'aide de la formule de Jensen et du lemme du n° **2**, on arrive à ce résultat précis [**12**, f] : *En supposant* $f(0) \neq 0,\ \infty$ *et* $f'(0) \neq 0$, *on a, pour* $r < \rho < R$,

$$(5)\qquad T(r) < N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) - N_1(r) + S(r, f).$$

avec

$$(6)\qquad S(r, f) = 42 + 2\overset{+}{\log}|f(0)| + \log\left|\frac{1}{f'(0)}\right| + 2\overset{+}{\log}\frac{1}{\rho} + 4\log\frac{\rho}{r} + 6\log\frac{\rho}{\rho - r} + 8\overset{+}{\log} T(\rho, f),$$

Si $f(0) = 0$ ou ∞, l'inégalité (5) est encore valable pourvu que l'on introduise $C(f)$ défini au n° **2**; et si $f'(0) = 0$, on procède de la même façon en introduisant $C(f')$.

4. Relation entre $T(r)$ **et** $N(r, a)$ **de M. H. Cartan.** — Soit $f(x)$ une fonction méromorphe pour $|x| < R$; en supposant la valeur $f(0)$ finie, la formule de Jensen appliquée à $f(x) - e^{i\theta}$ donne l'égalité

$$(7)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi}) - e^{i\theta}|\,d\varphi + N(r, \infty) = N(r, e^{i\theta}) + \log|f(0) - e^{i\theta}|.$$

Après l'avoir multipliée par $\frac{1}{2\pi}\,d\theta$ et intégrée de o à 2π, intervertissons l'ordre des intégrations du premier terme. En vertu de la formule de Jensen, on trouve $\overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|$ pour la seconde intégrale du premier membre et $\overset{+}{\log}|f(o)|$ pour le dernier terme. Donc on a la relation suivante due à M. H. Cartan [6, *b*] :

$$T(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}\,d\theta) + \overset{+}{\log}|f(o)|. \tag{8}$$

Pour $f(o) = \infty$, ceci est encore valable à condition de remplacer $f(o)$ par $C(f)$.

$N(r, a)$ étant une fonction croissante, convexe en $\log r$, la relation (8) montre que $T(r)$ jouit de ces mêmes propriétés.

5. **Un théorème de M. P. Montel sur les fonctions sous-harmoniques.** — *Soit u une fonction sous-harmonique de deux variables; si elle est fonction de la fonction harmonique* U, *c'est une fonction convexe de* U.

Pour la démonstration, *voir* le Mémoire de M. P. Montel [16, *b*]. En ce qui concerne la sous-harmonicité, rappelons en particulier que : *a*. la fonction égale en chaque point à la plus grande des valeurs, en ce point, d'un nombre fini de fonctions sous-harmoniques est sous-harmonique; *b*. si une suite infinie de fonctions sous-harmoniques u_n converge uniformément vers une fonction u dans le domaine considéré, cette fonction est sous-harmonique.

II. — Inégalités fondamentales avec un indice de densité relatif à une dérivée ou à une forme linéaire des dérivées.

6. D'abord M. H. Milloux a fait du second théorème fondamental deux extensions intéressantes qu'il a exposées dans un fascicule des *Actualités Scientifiques et Industrielles* [14, *a*]. Plus tard, cet auteur a obtenu un résultat de même genre dans un cas plus général et a amélioré en particulier sa première extension en réduisant à 1 le coefficient de l'indice $N(r, f)$ de l'inégalité qui s'y rattache. Récemment de nouveaux résultats ont été obtenus. En particulier la seconde extension de M. Milloux se trouve démontrée par différentes méthodes et dans des conditions élargies; de plus, une amélioration souhaitable

est apportée à son inégalité fondamentale [**12**, e, f]. Nous allons exposer quelques-uns de ces résultats.

7. Soit $f(x)$ une fonction méromorphe pour $|x| < R \leqq \infty$; a et b étant deux nombres finis $(b \neq 0)$ écrivons

$$\frac{1}{f-a} \equiv \frac{1}{b}\left(\frac{f^{(k)}}{f-a} - \frac{f^{(k)}-b}{f^{(k+1)}}\,\frac{f^{(k+1)}}{f-a}\right). \tag{9}$$

De cette identité qui généralise celle de M. Bureau, on déduit

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) < m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f-a}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k)}-b}{f^{(k+1)}}\right) \\ + m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f-a}\right) + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{b}\right| + \log 2. \end{aligned} \tag{10}$$

Mais en appliquant la formule de Jensen, on a

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f^{(k)}-b}{f^{(k+1)}}\right) = m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-b}\right) \\ + \left[N\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-b}\right) - N\left(r, \frac{f^{(k)}-b}{f^{(k+1)}}\right)\right] + \log\left|\frac{f^{(k)}(0)-b}{f^{(k+1)}(0)}\right|, \end{aligned}$$

et le crochet développé comme au n° **3** peut s'écrire

$$N(r, f^{(k)}) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b}\right) - N_1(r, f^{(k)}) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right),$$

si l'on pose

$$N_1(r, f) = 2\,N(r, f) - N(r, f')$$

qui désigne l'indice des pôles multiples de f. L'inégalité (10) peut donc se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) < N(r, f^{(k)}) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b}\right) \\ - \left[N_1(r, f^{(k)}) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)\right] + Q_1(r), \end{aligned} \tag{11}$$

$Q_1(r)$ est une expression qui entrera dans le terme complémentaire.

Comme nous avons prouvé [**12**, e] que

$$N(r, f^{(k)}) = N(r, f) + k\overline{N}(r, f), \qquad N_1(r, f^{(k)}) = N_1(r, f) + k\overline{N}(r, f,), \tag{12}$$

la différence $N(r, f^{(k)}) - N_1(r, f^{(k)})$ peut s'écrire $N(r, f) - N_1(r, f)$.

D'autre part, en écrivant $f = (f - a) + a$, on trouve

$$(13) \qquad m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) > T(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) - \log|f(0) - a| - \overset{+}{\log}|a| - \log 2.$$

De (11) et (13) résulte l'inégalité

$$(14) \qquad T(r, f) < N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - b}\right) - \left[N_1(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)\right] + Q(r),$$

avec

$$(15) \quad Q(r) = m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f-a}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f-a}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)} - b}\right) + \log|f(0)| - a| + \log\left|\frac{f^{(k)}(0) - b}{f^{(k+1)}(0)}\right| + \overset{+}{\log}|a| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{b}\right| + 2\log 2.$$

Enfin, après avoir majoré $Q(r)$ au moyen de (1) et de (2), on fait des simplifications en observant que $\lambda \overset{+}{\log} U < U + \lambda(\log\lambda - 1)$ (U étant une quantité positive et λ un nombre $> e$) et en introduisant des distances sphériques. On arrive alors au théorème [12, e] :

I. *Soit* $f(x)$ *une fonction méromorphe pour* $|x| < R \leqq \infty$, *et soient* a *et* b *deux nombres finis* ($b \neq 0$) *tels que les distances sphériques* $|\infty, a|$, $|\infty, b|$ et $|0, b|$ *soient au moins égales à une quantité positive* d. *En supposant que* $f(0) \neq a, \infty$; $f^{(k)}(0) \neq b$ *et* $f^{(k+1)}(0) \neq 0$, *on a pour* $0 < r < \rho < R$ *l'inégalité*

$$(16) \qquad T(r, f) < N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - b}\right) - \left[N_1(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)\right] + S_k(r, f),$$

où $N_1(r, f)$ *désigne l'indice des pôles multiples de* f *et*

$$(17) \quad S_k(r,f) = 6\log\frac{1}{d} + \overset{+}{\log}|f(0)| + \overset{+}{\log}|f^{(k)}(0)| + \log\left|\frac{1}{f^{(k+1)}(0)}\right| + R_k(r,f),$$

avec

$$(18) \quad R_k(r,f) = A_k + B_k \overset{+}{\log}\frac{1}{r} + B'_k \log\frac{\rho}{r} + B''_k \log\frac{\rho}{\rho - r} + C_k \overset{+}{\log} T(\rho, f) \quad (^1).$$

(1) Nous avons légèrement amélioré le résultat antérieur [12, e] en ce qui concerne les conditions initiales et l'expression de $S_k(r, f)$.

A_k, B_k, ..., C_k *étant des constantes numériques qui ne dépendent que de* k.

Dans le cas où $k = 1$, on trouve que $A_1 = 462$, $B_1 = 10$, $B'_1 = 22$, $B''_1 = 21$ et $C_1 = 28$.

$S_k(r, f)$, terme complémentaire ou reste, jouit des propriétés énoncées par M. R. Nevanlinna dans son second théorème fondamental [1]. Supposons, par exemple, $R = \infty$; on peut montrer que pour une fonction d'ordre fini $S_k(r, f) = O(\log r)$ et dans le cas de l'ordre infini

$$S_k(r, f) < O[\log(r\,T(r, f))].$$

Ordinairement ces limitations suffisent pour l'application de l'inégalité (16), mais quelquefois, on a besoin de connaître l'expression explicite (17), surtout sa partie dépendant des valeurs initiales de f et de ses dérivées.

Remarque. — Les restrictions relatives à l'origine ont été faites pour simplifier; on peut les lever au besoin, en procédant comme aux nos 2 et 3 [2].

8. f étant définie comme précédemment, soient α_i ($i = 0, 1, \ldots, l$) l fonctions holomorphes pour $|x| < R$ et l'on pose

$$f_l = \alpha_0 f + \alpha_1 f' + \ldots + \alpha_l f^{(l)}.$$

En procédant de la même façon que pour le théorème I, on peut encore trouver une inégalité de la forme [**12**, *e*],

$$(19) \qquad T(r, f) < N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f_l - 1}\right) - N_1(r, f) + M(r, \rho) + S_l(r, f),$$

où $M(r, \rho)$ désigne une certaine expression ne dépendant que des modules maxima des α_i sur les circonférences $|x| = r$ et $|x| = \rho$.

Et dans le cas où $\alpha_0 \equiv 0$, la même méthode permet d'obtenir l'iné-

[1] Tout ce qui est dit ici sera valable pour le reste de toute inégalité fondamentale qui se trouvera dans la suite.

[2] Pour chaque inégalité fondamentale que l'on obtiendra, il y aura lieu de faire cette remarque et nous ne la répéterons pas.

galité de la forme plus générale [**12**, e]

$$\text{(20)} \qquad T(r,f) < N(r,f) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f_l - b}\right) - N_1(r,f) + M(r,\rho) + S_l(r,f).$$

Mais utilisant une autre méthode, nous sommes parvenus à établir une inégalité de la même forme tout en conservant le terme $\alpha_0(x)f(x)$ dans f_l [**12**, f]. C'est ce que nous exposerons succinctement dans ce qui suit.

Par application de l'inégalité (5), on démontre d'abord, en prenant $f = \frac{G}{\Psi}$, la proposition préliminaire :

A. *Soient* $G(x)$ *une fonction méromorphe pour* $|x| < R \leqq \infty$ *et* $\Psi(x)$ *une fonction holomorphe pour* $|x| < R$, *qui ne s'annule pas identiquement. En supposant que* $\psi(0) \neq 0$; $G(0) \neq 0, \infty, \Psi(0)$; *et* $D(0) \neq 0$ *avec*

$$D(x) = \Psi(x)\,G'(x) - \Psi'(x)\,G(x),$$

on a pour $r < \rho < R$ *l'inégalité*

$$\text{(21)} \quad T(r,G) < N(r,G) + N\left(r, \frac{1}{G}\right) + N\left(r, \frac{1}{G-\Psi}\right) - N_1(r,G) + 3\,m(r,\Psi) + 8\,\overset{+}{\log}\, m(\rho,\Psi) + S(r,G,\Psi),$$

avec

$$\text{(22)} \qquad S(r,G,\Psi) = 3\,\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{\Psi(0)}\right| + 2\,\overset{+}{\log}\,|G(0)| + \log\left|\frac{1}{D(0)}\right| + R_1(r,G).$$

Les coefficients de différents termes de $R_1(r,G)$ sont des nombres et se calculent facilement.

Considérons ensuite une fonction $g(x)$ méromorphe pour $|x| < R \leqq \infty$ et posons

$$g_l = \sum_{i=0}^{l} \alpha_i g^{(i)}, \qquad \text{avec} \quad g^{(0)} = g.$$

En prenant g_l pour G, l'application du théorème précédent permet de démontrer le suivant qui nous sert de base pour établir le théorème en vue et d'autres plus généraux.

B. *Les fonctions* g *et* g_l *étant définies comme dans ce qui* *précède, soit* $\Psi(x)$ *une fonction holomorphe pour* $|x| < \mathrm{R}$, *qui ne s'annule pas identiquement. En supposant que*

$$\Psi(0) \neq 0; \qquad g(0) \neq 0, \infty; \qquad g_l(0) \neq 0, \Psi(0)$$

et

$$\mathrm{D}_1(0) \neq 0, \qquad \textit{avec} \quad \mathrm{D}_1(x) = \Psi g_l' - \Psi' g_l,$$

on a pour $r < \rho < \mathrm{R}$ *l'inégalité*

$$\begin{aligned}(23) \qquad \mathrm{T}(r, g) < \mathrm{N}(r, g) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{g_l - \Psi}\right) \\ - \mathrm{N}_1(r, g) + m(r, \rho. \Psi) + \mathrm{S}_l(r, g, \Psi),\end{aligned}$$

où

$$(24) \quad m(r, \rho, \Psi) = \sum_{i=0}^{l} m(r, \alpha_i) + 3\, m(r, \Psi) + 8 \sum_{i=0}^{l} \overset{+}{\log}\, m(\rho, \alpha_i) + 8 \overset{+}{\log}\, m(\rho, \Psi),$$

$$\begin{aligned}(25) \quad \mathrm{S}_l(r, g, \Psi) = 3 \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{\Psi(0)}\right| + \overset{+}{\log}\,|g(0)| + \overset{+}{\log}\,|g_l(0)| \\ + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{g_l(0)}\right| + \log\left|\frac{1}{\mathrm{D}_1(0)}\right| + \mathrm{R}_l(r, f).\end{aligned}$$

Reprenons maintenant la fonction f et appliquons à elle le théorème B en posant $g = f - a$, par suite $g_l = f_l - a\alpha_0$.

Choisissons la fonction Ψ telle que $\Psi(x) \equiv b - a\,\alpha_0(x)$, ce qui est toujours possible si $b \neq 0$. Alors, on est conduit aussitôt au théorème suivant [**12**, *g*] qui généralise et précise celui indiqué par M. Milloux [**14**, *a*].

II. *Soient* f et f_l *des fonctions définies comme au* n° **8***; soient ensuite deux nombres finis* a *et* b $(b \neq 0)$ *telles que les distances sphériques* $|a, \infty|$ *et* $|b, \infty|$ *soient au moins égales à un nombre* $d > 0$. *Alors, en supposant que*

$$f(0) \neq 0, a, \infty; \qquad f_l(0) \neq a\alpha_0(0), b; \qquad b - a\alpha_0(0) \neq 0$$

et $\Delta(0) \neq 0$, *avec*

$$\Delta(x) = (b - a\alpha_0)(f_l' - a\alpha_0') + a\alpha_0'(f_l - a\alpha_0),$$

on a pour $r < \rho < \mathrm{R}$ *l'inégalité*

$$\begin{aligned}(26) \qquad \mathrm{T}(r, f) < \mathrm{N}(r, f) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f - a}\right) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f_l - b}\right) \\ - \mathrm{N}_1(r, f) + \mathrm{M}(r, \rho) + \mathrm{S}_l(r, f; a, b),\end{aligned}$$

où N_1 *est l'indice des pôles multiples de* f *et*

$$(27)\qquad M(r,\rho)=4\overset{+}{\log}M(r,\alpha_0)+\sum_{i=1}^{l}\overset{+}{\log}M(r,\alpha_i)$$
$$+16\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}M(\rho,\alpha_0)+8\sum_{i=1}^{l}\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}M(\rho,\alpha_i),$$

$$(28)\qquad S_l(r,f;a,b)=12\log\frac{1}{d}+\overset{+}{\log}|\alpha_0(0)|+3\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{b-a\alpha_0(0)}\right|$$
$$+\overset{+}{\log}|f(0)|+\overset{+}{\log}|f_l(0)|+\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f_l(0)-a\alpha_0(0)}\right|$$
$$+\log\left|\frac{1}{\Delta(0)}\right|+R_l(r,f)\quad(^1).$$

III. — Limitation de $T(r,f)$ sans intervention des pôles.

9. Dans chacune des inégalités fondamentales précédentes figure l'indice des pôles; au moyen des fonctions auxiliaires particulières, M. Milloux est parvenu à obtenir des inégalités fondamentales dans lesquelles cet indice ne figure pas [**14**, *e*].

On associe à f la fonction $\varphi=\frac{1-f'}{f^2}$ et l'on cherche à appliquer à φ la seconde inégalité fondamentale. Observons d'abord que, $N_1(r,f)$ ayant la signification indiquée plus haut, on a

$$(29)\qquad N\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)\leqq N\left(r,\frac{1}{f'-1}\right)+N_1(r,f);$$

en majorant $N_1(r,f)$ au moyen de $N\left(r,\frac{1}{f}\right)$ et de $N\left(r,\frac{1}{f-1}\right)$, on trouve pour $N\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)$ une expression ne contenant que des quantités qui nous intéressent.

Ensuite, on compare les zéros de $\varphi-1$ à ceux de la fonction

$$\psi\equiv(\varphi-1)\frac{f}{f-1};$$

il vient

$$(30)\qquad N\left(r,\frac{1}{\varphi-1}\right)\leqq N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)+N_0<T\left(r,\frac{1}{\psi}\right)+N_0,$$

---

(1) Nous désignons souvent par une lettre affectée d'un indice telle que A_l une constante qui dépend de l, mais qui n'est pas nécessairement partout la même.

N_0 désignant l'indice de densité affecté aux zéros communs à $\varphi - 1$ et à $f - 1$; de plus, on trouve facilement une inégalité qui limite $m(r, \psi)$ et l'inégalité

$$N(r, \psi) \leqq N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) - N_0, \tag{31}$$

ce qui donne avec (30) une limitation pour $N\left(r, \frac{1}{\varphi - 1}\right)$.

Enfin, il est aisé d'obtenir une majorante pour $T(r, \varphi)$ et une minorante pour $m(r, \varphi)$.

Alors l'application du second théorème fondamental à φ est immédiate et l'on a le résultat :

III. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe pour $|x| < R \leqq \infty$. En posant $\varphi = \frac{1-f'}{f^2}$ et en supposant que $f(0) \neq 0, 1, \infty$; $f'(0) \neq 0$; $\varphi(0) \neq 0, 1$ et $\varphi'(0) \neq 0$, on a pour $r < \rho < R$ l'inégalité*

$$T(r, f) < 3N\left(r, \frac{1}{f}\right) + 2N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-1}\right) + S(r), \tag{32}$$

avec

$$S(r) = 3\overset{+}{\log}|f(0)| + \log\left|\frac{1}{f'(0)}\right| + 2\overset{+}{\log}|\varphi(0)| + \log\left|\frac{1}{[\varphi(0)-1]\varphi'(0)}\right| + R_1(r, f). \tag{33}$$

10. En associant ensuite à f_l la fonction $\psi = \frac{(1-f_l)}{(1-\alpha_0)f^{(l+1)}}$, on démontre par le même procédé le théorème plus général :

IV. *On définit f, α_i et f_l comme au n° 8 et l'on suppose que $\alpha_0 - 1$ et α_l ne s'annulent jamais. Alors en supposant que $f(0) \neq 0, 1, \infty$; $f'(0) \neq 0$, $f_l(0) \neq 1$; $\psi(0) \neq 1$ et $\psi'(0) \neq 0$, on a, pour $r < \rho < R$, l'inégalité*

$$T(r, f) < (2l+1)N\left(r, \frac{1}{f}\right) + (l+1)N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + N\left(r, \frac{1}{f_l - 1}\right) + S(r), \tag{34}$$

$S(r)$ étant une expression analogue à (33).

Remarque. — La condition $\alpha_0 \not\equiv 1$ est essentielle comme M. Milloux l'a montré sur un exemple.

Dans certaines conditions on peut ramener au cas précédent le cas plus général où les indices de densité en jeu sont relatifs aux zéros de $f-a$, $f-b$ et $f_l - c$.

11. Si nous remplaçons un second indice de densité relatif à f par celui concernant la dérivée considérée, nous pouvons trouver une inégalité fondamentale dont les coefficients des indices de densité se réduisent tous à l'unité.

a étant un nombre fini, écrivons

$$f-a=f^{(k)}\frac{f-a}{f^{(k)}},$$

d'où, en supposant $f(0)\neq a, \infty$ et $f^{(k)}(0)\neq 0$,

$$m(r, f-a) < m(r, f^{(k)}) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f-a}\right) + \left[N\left(r, \frac{f^{(k)}}{f-a}\right) - N\left(r, \frac{f-a}{f^{(k)}}\right)\right] + \log\left|\frac{f(0)-a}{f^{(k)}(0)}\right|$$

et l'on trouve

$$(35)\qquad T(r, f-a) < T(r, f^{(k)}) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f-a}\right) + \log\left|\frac{f(0)-a}{f^{(k)}(0)}\right|.$$

Puis, en prenant deux nombres b et c distincts entre eux et différents de zéro, et en supposant à part $f^{(k)}(0)\neq 0$ encore $f^{(k+1)}(0)\neq 0$, le second théorème fondamental donne

$$(36)\qquad T(r, f^{(k)}) < N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-c}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right) + S(r, f^{(k)}).$$

De (35) et (36) résulte une inégalité de la forme

$$T(r, f-a) < N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-c}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right) + Q(r),$$

ce qui conduira au théorème :

V. *$f(x)$ étant défini comme dans ce qui précède, soient a un nombre fini et b, c deux nombres non nuls distincts entre eux ; on* *suppose que les distances sphériques* $|\infty, a|$, $|0, b|$, $|0, c|$ *et* $|b, c|$ *sont toutes au moins égales à une quantité positive d. Alors si* $f(0) \neq a, \infty$; $f^{(k)}(0) \neq 0$ *et* $f^{(k+1)}(0) \neq 0$, *on a l'inégalité*

$$(37)\quad T(r, f) < N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-c}\right) - \left[N_1(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)\right] + S_k(r, f),$$

avec

$$S_k(r, f) = 30 \log\frac{1}{d} + \overset{+}{\log}|f(0)| + 2\overset{+}{\log}|f^{(k)}(0)| + \log\left|\frac{1}{f^{(k+1)}(0)}\right| + R_k(r, f).$$

Ce théorème peut aussi s'étendre au cas où l'on considère f_l au lieu de $f^{(k)}$.

IV. — Généralisations.

12. Pour le théorème de Picard et son théorème, Borel a eu l'idée de les généraliser en substituant dans l'équation $f(x) - a = 0$ à la constante a une fonction $\varphi(x)$ d'ordre inférieur à celui de $f(x)$. Suivant cette idée, M. R. Nevanlinna a donné à son inégalité fondamentale pour $q = 3$ une forme plus générale qui est

$$(38)\quad (1-\varepsilon)T(r, f) < \sum_1^3 N\left(r, \frac{1}{f-\varphi_i}\right) - S(r) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

φ_i étant trois fonctions distinctes telles que

$$T(r, \varphi_i) = \varepsilon(r)T(r, f).$$

On trouve une démonstration succincte dans son livre de la collection Borel [**18**, *d*].

Dans le cas où interviennent des dérivées, nous avons d'abord obtenu une inégalité de la forme

$$[1 - o(1)]\,T(r, f) < N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f-\varphi}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-\psi}\right) + S(r, f),$$

φ et ψ étant des fonctions entières d'ordre inférieur à celui de f[**12**, *c*]; nous l'avons ensuite étendue au cas où φ et ψ sont méromorphes, puis, au cas où f_l entre en jeu [**12**, *e*, *f*].

13. Soient $f(x)$, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ trois fonctions méromorphes dans tout le plan ouvert ([1]); supposons

$$T(r, \varphi) = o[T(r, f^{(k)})] \quad \text{et} \quad T(r, \psi) = o[T(r, f^{(k)})].$$

Posons $F(x) = f(x) - \varphi(x)$; on trouve, d'une part,

$$(39) \qquad m(r, F) \geqq m(r, f) - m(r, \varphi) - \log 2$$

et, d'autre part,

$$(40) \qquad m(r, F) \leqq T(r, F^{(k)}) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) - N\left(r, \frac{1}{F^{(k)}}\right) - N(r, F) + m\left(r, \frac{F^{(k)}}{F}\right) + \log\left|\frac{F(0)}{F^{(k)}(0)}\right|.$$

De ces deux inégalités, on déduit la suivante :

$$(41) \qquad [1 - o(1)]\,T(r, f) < T(r, f^{(k)}) + N\left(r, \frac{1}{f - \varphi}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - \varphi^{(k)}}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k)} - \varphi^{(k)}}{f - \varphi}\right) + \log\left|\frac{f(0) - \varphi(0)}{f^{(k)}(0) - \varphi^{(k)}(0)}\right|.$$

Ensuite, en généralisant un peu le théorème A du n° **8** et en l'appliquant aux fonctions $G = f^{(k)} - \varphi^{(k)}$ et $\Psi = \psi - \varphi^{(k)}$, il vient

$$(42) \qquad T(r, f^{(k)}) < N(r, f^{(k)}) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - \varphi^{(k)}}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - \psi}\right) + 2T(r, \varphi^{(k)}) - N_1(r, G) + Q_1(r),$$

$Q_1(r)$ étant une expression qui entrera dans le terme complémentaire.

Alors, à partir de (41) et (42), on trouvera facilement l'inégalité en vue.

VI. *Étant donnée une fonction $f(x)$ méromorphe, soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux autres fonctions méromorphes dont $\varphi \not\equiv \infty$ et $\psi \not\equiv 0, \infty, \varphi^{(k)}$, telles que*

$$T(r, \varphi) = o[T(r, f^{(k)})], \qquad T(r, \psi) = o[T(r, f^{(k)})].$$

En posant

$$F(x) = f(x) - \varphi(x) \quad \text{et} \quad \Psi(x) = \psi(x) - \varphi^{(k)}(x),$$

([1]) Dans la suite, pour une fonction méromorphe à distance finie ou dans tout le plan ouvert, nous dirons simplement fonction méromorphe.

on suppose que $F(0) \not\equiv 0, \infty$; $F^{(k)}(0) \neq 0$, $\Psi(0)$; *et*

$$\Delta(0) = \Psi(0)F^{(k+1)}(0) - \Psi'(0)F^{(k)}(0) \neq 0.$$

Dans ces conditions, en excluant éventuellement, dans le cas où φ *est d'ordre infini, une suite d'intervalles dont la longueur totale est finie, on a*

$$(43) \qquad [1-o(1)]T(r,f) < \bar{N}(r,f) + N\left(r, \frac{1}{f-\varphi}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-\psi}\right) + S_k(r,f,\varphi,\psi)$$

dont

$$(44) \qquad S_k = \overset{+}{\log}|F(0)| + \overset{+}{\log}|F^{(k)}(0)| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{F^{(k)}(0)}\right| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{\Psi(0)}\right| + \log\left|\frac{1}{\Delta(0)}\right| + R_k^0(r,f).$$

$R_k^0(r,f)$ *est une expression obtenue de* (18) *en remplaçant le dernier coefficient par* $C_k + o(1)$.

14. Au lieu de $f^{(k)}$, prenons la forme linéaire f_l du n° **8**, mais nous supposons ici que les α_i sont des fonctions méromorphes telles que $T(r,\alpha_i) = o[T(r,f)]$. Soient ensuite $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions définies comme dans le théorème précédent. En utilisant la méthode par laquelle on a démontré le théorème VI, nous obtenons le suivant [**12**, f] (¹) :

VII. *Soient* $f(x)$ *et* $\alpha_i (i = 0, 1, \ldots, l)$ *des fonctions méromorphes telles que pour* $r \to \infty$

$$(45) \qquad T(r,\alpha_i) = o[T(r,f)] \qquad (i = 0, 1, \ldots, l);$$

soient ensuite $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$ *deux fonctions méromorphes dont* $\varphi \not\equiv \infty$ *et* $\psi \not\equiv 0, \infty$, φ_l *telles que*

$$(46) \qquad T(r,\varphi^{(l)}) = o[T(r,f^{(l)})] \qquad \text{et} \qquad T(r,\psi) = o[T(r,f^{(l)})]$$

pour $r \to \infty$ *et l'on pose*

$$f_l = \sum_{i=0}^{l} \alpha_i f^{(i)} \qquad \text{et} \qquad \varphi_l = \sum_{i=0}^{l} \alpha_i \varphi^{(i)}.$$

(¹) On peut aussi conserver l'hypothèse du n° 8 sur les α_i; *voir* Hiong [12, f]

Alors si $\varphi(0) \neq \infty$; $\psi(0) \neq \infty$, $\varphi_l(0)$; $f(0) \neq \varphi(0)$, ∞; $f_l(0) \neq \varphi_l(0)$, $\psi(0)$ *et* $\Delta^*(0) \neq 0$, *avec*

$$\Delta^*(x) = (\psi - \varphi_l)(f_l' - \varphi_l') - (\psi' - \varphi_l')(f_l - \varphi_l),$$

l'inégalité

$$(47) \quad [1 - o(1)]\,T(r, f) < N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f - \varphi}\right) + N\left(r, \frac{1}{f_l - \psi}\right) - N_1(r, f) + S_l(r, f;\, \varphi, \psi)$$

est vérifiée pour $r < \rho$, *sauf peut-être dans le cas où* φ *est d'ordre infini, pour une suite d'intervalles de* r *dont la longueur totale est finie. Le reste a pour expression*

$$(48) \quad S_l = \overset{+}{\log}|\varphi(0)| + \overset{+}{\log}|\varphi_l(0)| + \overset{+}{\log}|f(0)| + \overset{+}{\log}|f_l(0)| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{\psi(0) - \varphi_l(0)}\right| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f_l(0) - \varphi_l(0)}\right| + \log\left|\frac{1}{\Delta^*(0)}\right| + R_l^{\rho}(r, f).$$

V. — Conséquences des extensions précédentes.

15. Valeurs exceptionnelles. — D'abord concernant les valeurs lacunaires, on a la proposition simple :

VIII. *Si* $f(x)$ *est une fonction entière ne se réduisant pas à une constante, il n'existe pas à la fois deux valeurs finies* a *et* b $(b \neq 0)$ *qui ne sont pas prises respectivement par* f *et* $f^{(k)}$.

En effet, si le contraire avait lieu, l'application du théorème (I) nous conduirait à l'inégalité

$$(49) \quad \varliminf_{r \to \infty} \frac{T(r, f)}{\log r} < \infty.$$

On en conclut que f devrait être un polynome ainsi que $f^{(k)}$, ce qui est impossible d'après l'hypothèse.

Ensuite pour les valeurs exceptionnelles au sens de Borel, on peut démontrer le théorème :

IX. *Soit* $f(x)$ *une fonction méromorphe d'ordre fini* λ *qui ne se réduit pas à une constante; si elle admet l'infini comme valeur exceptionnelle au sens de Borel, il n'existe pas en même temps deux nombres finis* a *et* b $(b \neq 0)$ *qui sont des valeurs exceptionnelles au sens de Borel pour* f *et* $f^{(k)}$ *respectivement.*

Admettons que le contraire a lieu et appliquons le théorème I. D'après un résultat de Valiron [27, b], la dérivée f' est de même ordre que f; il en est donc de même de $f^{(k)}$. En vertu de la définition de la valeur exceptionnelle au sens de Borel et, d'après un résultat de M. R. Nevanlinna, on peut alors avoir un nombre positif $\mu < \lambda$ tel que les trois intégrales

$$\int^{\infty} \frac{N(r, \infty)}{r^{\mu+1}}\, dr, \quad \int^{\infty} \frac{N(r, a)}{r^{\mu+1}}\, dr \quad \text{et} \quad \int^{\infty} \frac{N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - b}\right)}{r^{\mu+1}}\, dr$$

convergent en même temps. Par conséquent,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{N(r, \infty)}{r^{\mu}} = 0, \qquad \lim_{r \to \infty} \frac{N(r, a)}{r^{\mu}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{r \to \infty} \frac{N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - b}\right)}{r^{\mu}} = 0.$$

En remarquant que $T(r, f) > r^{\mu}$ pour une infinité de valeurs r, on déduit de l'inégalité (16) l'inégalité (49) et l'on arrive à une contradiction.

Puis on a le théorème suivant sur les valeurs exceptionnelles au sens de M. R. Nevanlinna :

X. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe non constante qui admet l'infini comme valeur déficiente de défaut* 1 *; il n'existe pas à la fois pour f une valeur déficiente finie a de défaut $\delta(a)$ et pour $f^{(k)}$ une valeur déficiente finie et non nulle b de défaut $\delta^{(k)}(b)$ telles que la somme $\delta(a) + \delta^{(k)}(b)$ dépasse un nombre $l >$* 1.

Admettons que le contraire a lieu; d'après la définition du défaut et l'hypothèse, on a $N(r, f) = o[T(r, f)]$ et

$$(50) \qquad \begin{cases} N\left(r, \dfrac{1}{f - a}\right) < [1 - \delta(a) + o(1)]\, T(r, f), \\ N\left(r, \dfrac{1}{f^{(k)} - b}\right) = [1 - \delta^{(k)}(b) + o(1)]\, T(r, f^{(k)}). \end{cases}$$

Et, en tenant compte de l'hypothèse,

$$(51) \quad T(r, f^{(k)}) < T(r, f) + k\overline{N}(r, f) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < [1 + o(1)]\, T(r, f),$$

sauf peut-être pour une suite d'intervalles de longueur totale finie.

L'application du théorème I nous conduira alors à l'inégalité (49).

Le théorème I permet de démontrer encore le suivant qui est plus général :

XI. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe ne se réduisant pas à une constante; si f admet l'infini et un autre nombre a comme valeurs exceptionnelles dont on désigne les défauts par $\delta(\infty)$ et $\delta(a)$, respectivement, et si $f^{(k)}$ admet un nombre fini non nul comme valeur exceptionnelle dont le défaut est $\delta^{(k)}(b)$, alors on a*

$$\delta(\infty)+\delta(a)+(k+1)\,\delta^{(k)}(b)<k+2. \tag{52}$$

Ce résultat est plus précis que celui donné par M. Milloux [14, a].

En s'appuyant sur le théorème VI, on peut démontrer des propositions plus générales; et en appliquant III ou V, on obtiendra des résultats analogues sans intervention des pôles.

Il est facile d'obtenir enfin, pour les indices $N(r, a)$, des propositions concernant leur type au sens de Pringsheim et leur classe au sens de Valiron.

Tous ces résultats s'étendent aux fonctions méromorphes pour $|x|<1$ dans le cas où le rapport $T(r, f) : \log \frac{1}{1-r}$ ne soit pas fini pour $r \to 1$.

16. Défaut relatif d'une valeur α pour $f^{(k)}$. — Il y a intérêt de comparer la croissance de $N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-\alpha}\right)$ non seulement à $T(r, f^{(k)})$, mais encore à $T(r, f)$. Pour f', M. Milloux a introduit la notion du défaut relatif et en même temps celle du défaut absolu [14, d]. Appelons d'une façon plus générale *défaut relatif* d'une valeur α pour $f^{(k)}$ l'expression

$$\delta_r^{(k)}(\alpha, f)=1-\overline{\lim}\,\frac{N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-\alpha}\right)}{T(r, f)}. \tag{53}$$

Par comparaison, on appelle *défaut absolu* de α pour $f^{(k)}$, le défaut ordinaire de α pour $f^{(k)}$; et on le désigne par $\delta_a^{(k)}(\alpha, f)$ ou par $\delta(\alpha, f^{(k)})$.

Il résulte de la définition que $\delta_r^{(k)}(\alpha, f) \leqq 1$. Pour la classe importante des fonctions dont $T(r)$ est dépourvu d'intervalles extraordinaires, au moyen de l'inégalité

$$T(r, f^{(k)})<(k+1)\,T(r, f)+m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right), \tag{54}$$

on prouve que

$$\delta_r^{(k)}(\alpha, f) \geqq -k+(k+1)\,\delta_a^{(k)}(\alpha, f). \tag{55}$$

Donc, dans ce cas, tout défaut relatif pour $f^{(k)}$ est supérieur ou égal à $-k$. M. Milloux a montré sur un exemple pour $k=1$ que cette limite inférieure peut être effectivement atteinte.

Supposons que $R=\infty$ et que f ne se réduise pas à une constante, le théorème I montre de suite qu'on a

$$\delta(\infty, f)+\delta(a, f)+\delta_r^{(k)}(b, f) \leqq 2. \tag{56}$$

Dans le cas où $R=1$, si le rapport $T(r, f) : \log \frac{1}{1-r}$ croît indéfiniment, l'inégalité (56) est encore valable. Considérons le cas contraire et prenons $k=1$ pour avoir un résultat explicite. Supposons que la somme des $\delta(\infty, f)$, $\delta(0, f)$ et $\delta'_r(1, f)$ dépasse un nombre $p>2$. En appliquant le théorème I, on trouve une inégalité de la forme

$$(p-2) T(r, f)<C+21 \log \frac{1}{\rho-r}+28 \overset{+}{\log} T(\rho, f)$$

et un procédé de M. R. Nevanlinna conduit au résultat :

XII. *Si $f(x)$ est une fonction méromorphe dans le cercle unité telle que la somme des défauts $\delta(\infty, f)$, $\delta(0, f)$ et de $\delta'_r(1, f)$ dépasse $p>2$, on a l'inégalité*

$$\varlimsup_{r \succ 1} \frac{T(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}} \leqq \frac{21}{p-2}. \tag{57}$$

17. Extension du théorème de Landau. — Comme applications des théorèmes fondamentaux établis précédemment, on peut encore étendre le théorème bien connu de Landau. Un résultat se trouve déjà dans l'exposé de M. Milloux [14, *a*].

CHAPITRE II.

EXTENSIONS PAR INTERVENTION DES DÉRIVÉES. CAS GÉNÉRAL.

I. — Inégalités fondamentales.

18. Nous commençons par exposer un résultat de M. Ullrich. C'est une double inégalité limitant $T(r, f')$ supérieurement et inférieurement.

En écrivant $f' = f\frac{f'}{f}$, on obtient immédiatement une limitation supérieure

$$(58)\qquad T(r, f') \leqq N(r, f) + \overline{N}(r, f) + m(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right).$$

Pour limiter $T(r, f')$ inférieurement, on a, d'après le premier théorème fondamental,

$$T(r, f') = N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + h(r);$$

il suffit de limiter inférieurement $m\left(r, \frac{1}{f'}\right)$.

Soient $a_i (i = 1, \ldots, p)$ p nombres complexes finis distincts et considérons

$$F(x) = (f - a_1)(f - a_2)\ldots(f - a_p).$$

On a

$$(59)\quad m\left(r, \frac{1}{f'}\right) \geqq m\left(r, \frac{1}{F}\right) - m\left(r, \frac{f'}{F}\right)$$
$$\geqq N(r, F) - N\left(r, \frac{1}{F}\right) + m(r, F) - m\left(r, \frac{f'}{F}\right) + \log\left|\frac{1}{F(0)}\right|;$$

il s'agit donc de minorer $m(r, F)$ et majorer $m\left(r, \frac{f'}{F}\right)$. Pour avoir une minorante de $m(r, F)$, prenons un nombre positif a tel que $|a_i| \leqq a$; en écrivant

$$(60)\qquad f^p \prod_{i=1}^{p}\left(1 - \frac{a_i}{f}\right) \equiv F,$$

il vient, pour les valeurs de x telles que $|f(x)| > 2a$,

$$(61)\qquad |f(x)|^p < 2^p\,|F|;$$

l'égalité

$$\frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \frac{p}{2\pi}\int_{|f|\leqq 2a} \overset{+}{\log}|f|\,d\varphi + \frac{p}{2\pi}\int_{|f|>2a} \overset{+}{\log}|f|\,d\varphi,$$

donne

$$(62)\qquad pm(r, f) < p\overset{+}{\log} 2a + p\log 2 + m(r, F).$$

Maintenant si l'on décompose $\frac{1}{F}$ en fractions partielles, on a

$$(63)\quad \frac{f'}{F} \equiv \sum_1^p A_i \frac{f'}{f - a_i}, \quad \text{avec } A_i = \prod \frac{1}{a_j - a_i} \quad (j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, p);$$

en appliquant l'inégalité (1), on trouvera une limitation pour $m\left(r, \frac{f'}{F}\right)$.

On obtient finalement le théorème de M. Ullrich [**26**, *a*] :

I. *Soit* $f(x)$ *une fonction méromorphe et soient* $a_i (i = 1, \ldots, p)$ $p (\geqq 1)$ *nombres complexes finis distincts; pour la fonction caractéristique* $T(r, f')$, *les inégalités*

$$(64) \qquad N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \sum_{i=1}^{p} m(r, a_i) - O[\log r\, T(r, f)] \leqq T(r, f') \leqq N(r, f') + m(r, \infty) + O[\log r\, T(r, f)]$$

sont vérifiées, sauf peut-être pour une suite d'intervalles dont la longueur totale est finie.

19. Dans le théorème précédent, c'est $T(r, f')$ que l'on limite et parmi les indices de densité relatifs à f' il n'y a que $N(r, f')$ et $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ qui interviennent. Après les résultats exposés dans son recueil des *Actualités*, M. Milloux établit encore, dans le même ordre d'idées, un théorème général [**14**, *d*] qui étend le théorème fondamental de MM. R. Nevanlinna-Littlewood-Cowllingwood [**18**, *a*, *d*; **7**].

Soient $f(x)$ une fonction méromorphe pour $|x| < R \leqq \infty$, et $a_i (i = 1, \ldots, p)$, p nombres complexes distincts et finis. On les représente sur la sphère de Riemann; d étant une quantité telle que $d \leqq |\infty, a_i|$ et $d \leqq |a_h, a_k|$ $(h \neq k)$, on pose

$$F(x) = \prod_{i=1}^{p} [f(x) - a_i]$$

et l'on cherche pour $m(r, F)$ $(|x| = r < R)$ une minorante et une majorante.

Une telle minorante peut s'obtenir déjà de (62), mais nous allons encore indiquer le procédé de M. Milloux, qui fournit un résultat précisé par des considérations géométriques. On désigne par (γ_i) les arcs de la circonférence (C_r) $|x| = r$, sur lesquels on a $|f(x), a_i| \leqq \frac{d}{2}$. Par suite de la définition de d, ces arcs (γ_i) $(i = 1, \ldots, p)$ ne chevauchent pas les uns sur les autres. On désigne par (Γ) l'ensemble des arcs (γ_i) et par (Γ') l'ensemble complémentaire de (Γ) sur (C_r).

Lorsque x est sur (Γ'), on a $|f(x), a_i| > \frac{d}{2}$ quel que soit i, et d'après les propriétés du n° 1,

$$|f(x) - a_i| > \frac{1 + |f(x)|^2}{|f(x)| + \operatorname{cotg}\frac{d}{2}};$$

en posant $|f(x)| = \operatorname{cotg} u \left(0 < u < \frac{\pi}{2}\right)$, on trouve

$$\frac{|f(x) - a_i|}{|f(x)|} > \frac{2 \sin\frac{d}{2}}{1 + \sin\frac{d}{2}} > \frac{d}{2}$$

et, d'après ce résultat, on obtient l'inégalité

$$\overset{+}{\log}|F(x)| > p\,\overset{+}{\log}|f(x)| - p \log\frac{2}{d}. \tag{65}$$

En désignant par $2\pi\alpha r$ la mesure de (Γ), on en déduit alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(\Gamma)} \overset{+}{\log}|F(re^{i\theta})|\,d\theta > \frac{p}{2\pi}\int_{(\Gamma')} \overset{+}{\log}|f(re^{i\theta})|\,d\theta - (1-\alpha)p\log\frac{2}{d}. \tag{66}$$

Maintenant si x est sur un arc (γ_i), on a $|\infty, a_i| \geqq d$, tandis que $|f(x), a_i| \leqq \frac{d}{2}$. On peut appliquer les résultats du premier cas du n° 1; en prenant respectivement a_i, une quantité $\geqq d$ et $\frac{d}{2}$ pour m, u et v, et l'on a

$$|f(x) - a_i| < \frac{1 + |a_i|^2}{\operatorname{cotg}\frac{d}{2} - |a_i|},$$

par suite

$$|f(x)| < \frac{1 + |a_i|\operatorname{cotg}\frac{d}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{d}{2} - |a_i|}.$$

Le second membre de la dernière inégalité est une fonction croissante de $|a_i|$, lorsque $|a_i|$ croît de 0 jusqu'à $\operatorname{cotg} d$; on en déduit

$$|f(x)| < \operatorname{cotg}\frac{d}{2} < \frac{2}{d},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(\Gamma)} \overset{+}{\log}|f(re^{i\theta})|\,d\theta < \alpha\log\frac{2}{d}.$$

Il en résulte donc

$$(67)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{(\Gamma)} \overset{+}{\log} |F(re^{i\theta})|\,d\theta > \frac{p}{2\pi}\int_{(\Gamma)} \overset{+}{\log} |f(re^{i\theta})|\,d\theta - p\alpha\log\frac{2}{d}.$$

En ajoutant (66) et (67), on obtient l'inégalité

$$(68)\qquad m(r, F) > p\,m(r, f) - p\log\frac{2}{d}.$$

Pour majorer $m(r, F)$, on écrit $F = \frac{F}{f'}f'$; en supposant que $f(0) \neq a_i, \infty$; et $f'(0) \neq 0$, on en déduit, à l'aide de la formule de Jensen, l'inégalité

$$(69)\qquad m(r, F) \leqq T(r, f') + \left[N\left(r, \frac{f'}{F}\right) - N\left(r, \frac{F}{f'}\right) - N(r, f')\right] + m\left(r, \frac{f'}{F}\right) + \log\left|\frac{F(0)}{f'(0)}\right|$$

et l'on trouve sans difficulté la suivante :

$$(70)\qquad m(r, F) \leqq T(r, f') + \sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) - p\,N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f'}{F}\right) + \log\left|\frac{F(0)}{f'(0)}\right|.$$

La comparaison de (68) et (70) fournit alors l'inégalité préliminaire

$$(71)\qquad p\,T(r, f) < T(r, f') + \sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f'}{F}\right) + \log\left|\frac{F(0)}{f'(0)}\right| + p\log\frac{2}{d}.$$

Soient maintenant $q\,(\geqq 1)$ nombres complexes $b_j\,(j = 1, \ldots, q)$ finis et différents de zéro et distincts entre eux. Appliquons la seconde inégalité fondamentale à f' pour les $q + 2$ valeurs $b_1, \ldots, b_q$, 0 et ∞; il vient, en désignant par $S(r, f)$ son reste,

$$(72)\qquad q\,T(r, f') < \bar{N}(r, f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f' - b_j}\right) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r, f').$$

A partir de (71) et (72), on arrive à

$$(73)\quad pq\,T(r,f) < \overline{N}(r,f') + q\sum_{i=1}^{p} N\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^{q} N\left(r,\frac{1}{f'-b_j}\right) - \left[(q-1)N\left(r,\frac{1}{f'}\right) + N\left(r,\frac{1}{f''}\right)\right] + Q(r).$$

On remarque que $|A_i| \leq \frac{1}{d^{p-1}}$ et l'on utilise pour $S(r,f)$ l'expression précisée par M. Milloux [**14**, *d*]. Après la majoration de $Q(r)$, on obtient le théorème dû à cet auteur.

II. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe pour $|x| < R \leq \infty$ et soient p nombres complexes a_i distincts et finis et q nombres complexes b_j distincts, finis et différents de zéro. On désigne par d un nombre positif quelconque inférieur ou égal à la plus petite des distances sphériques de $a_1, \ldots, a_p$ pris deux à deux et par d' un nombre positif inférieur ou égal à la plus petite des distances de $b_1, \ldots, b_q$, 0, ∞ pris deux à deux. Alors en supposant que $f(0) \neq 0, \infty, a_i$; $f'(0) \neq 0, b_j$ et $f''(0) \neq 0$, on a pour $r < r < R$ l'inégalité*

$$(74)\quad pq\,T(r,f) < \overline{N}(r,f) + q\sum_{i=1}^{p} N\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^{q} N\left(r,\frac{1}{f'-b_j}\right) - \left[(q-1)N\left(r,\frac{1}{f'}\right) + N\left(r,\frac{1}{f''}\right)\right] + S_1(r,f),$$

avec

$$(75)\quad S_1(r,f) = 4pq\log\frac{1}{d} + 9(q+2)\log\frac{4}{d'} + pq\overset{+}{\log}|f(0)| + 8\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(0)|} + 2\log|f'(0)| + q\overset{+}{\log}\frac{1}{|f'(0)|} + \log\frac{1}{|f''(0)|} + R_1(r,f,p,q),$$

$R_1(r,f;p,q)$ *étant une expression de forme (18) avec des coefficients numériques ne dépendant que de p et de q.*

20. Il est facile d'eliminer l'indice $\overline{N}(r,f)$ de (74) à l'aide de l'inégalité fondamentale de M. Nevanlinna avec $q = 3$ ou de l'inégalité du théorème I appliquée a f'.

21. Dans l'inégalité (74) les indices de densité relatifs aux zéros de $f - a_i$ sont tous affectés du coefficient q, ce qui présente un inconvénient pour certaines applications. Nous pouvons donner une autre inégalité où un seul indice de densité a un coefficient supérieur à 1.

Soit $f(x)$ une fonction définie comme précédemment et considérons d'une façon plus générale $f^{(k)}$ au lieu de f'. En procédant comme au n° **11**, on trouve l'inégalité

$$(76)\qquad \mathrm{T}(r, f) < \mathrm{T}(r, f^{(k)}) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + \log\left|\frac{f(0)}{f^{(k)}(0)}\right|.$$

Appliquons le second théorème fondamental à la fonction $f^{(k)}$ pour 0, ∞ et les $q\ (\geqq 1)$ nombres $b_j\ (j = 1, \ldots, q)$ supposés finis distincts et différents de zéro; de l'inégalité ainsi obtenue et de (76) résulte la suivante :

$$(77)\qquad q\,\mathrm{T}(r, f) < q\,\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \mathrm{N}(r, f^{(k)}) + \sum_{j=1}^{q} \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - b_j}\right) - \left[\mathrm{N}_1(r, f^{(k)}) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)\right] + \mathrm{Q}_1(r),$$

$\mathrm{Q}_1(r)$ étant une expression qui entrera dans le terme complémentaire. Grâce aux relations (11), cette inégalité peut se simplifier et être mise sous la forme

$$(78)\qquad q\,\mathrm{T}(r, f) < \bar{\mathrm{N}}(r, f) + q\,\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \sum_{j=1}^{q} \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - b_j}\right) - \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right) + \mathrm{Q}_1(r).$$

Ensuite appliquons le second théorème fondamental à f pour les $p + 2\ (p \geqq 1)$ nombres 0, ∞ et $a_i\ (i = 1, \ldots, p)$, supposés distincts finis et différents de zéro; il vient

$$(79)\qquad p\,\mathrm{T}(r, f) < \mathrm{N}(r, f) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \sum_{i=1}^{p} \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) - \left[\mathrm{N}_1(r, f) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right] + \mathrm{S}(r, f)$$

ou

$$(80)\qquad p\,\mathrm{T}(r, f) < \bar{\mathrm{N}}(r, f) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \sum_{i=1}^{p} \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) - \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \mathrm{S}(r, f).$$

A partir de (78) et de (80), on arrivera facilement à ce résultat.

III. *Étant donnée une fonction méromorphe pour* $|x| < \mathrm{R} \leqq \infty$, *soient* $a_i (i = 1, \ldots, p)$ *et* $b_j (j = 1, \ldots, q)$ *des nombres finis et différents de zéro, les p premiers distincts entre eux ainsi que les q derniers, on désigne par d une quantité inférieure ou égale à la plus petite des distances sphériques des points* 0, ∞ *et des* a_i *pris deux à deux et par d' une quantité analogue relative aux points* 0, ∞ *et* b_j. *En supposant que* $f(0) = 0, \infty, a_i$; $f'(0) \neq 0$; $f^{(k)}(0) \neq 0, b_j$ *et* $f^{(k+1)}(0) \neq 0$, *on a pour* $r < \rho < \mathrm{R}$ *l'inégalité*

$$(81)\quad (p+q)\mathrm{T}(r, f) < 2\overline{\mathrm{N}}(r, f) + (q+1)\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \sum_{i=1}^{p}\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^{q}\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_j}\right) - \left[\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)\right] + \mathrm{S}_k(r, f),$$

avec

$$(82)\quad \mathrm{S}_k(r, f) = 9(p+2)\log\frac{4}{d} + 9(q+2)\log\frac{4}{d'} + (p+q+2)\overset{+}{\log}|f(0)| + \log\left|\frac{1}{f'(0)}\right| + 2\overset{+}{\log}|f^{(k)}(0)| + 2\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f^{(k)}(0)}\right| + \log\left|\frac{1}{f^{(k+1)}(0)}\right| + \mathrm{R}_k(r, f);$$

les coefficients de l'expression R_k *ne dépendent que de q à part k.*

Remarque. — Le premier terme du second membre de (81) peut être remplacé par une des quantités $\mathrm{N}(r, f')$ ou $\mathrm{N}(r, f^{(k)})$ qui lui est supérieure. On voit donc que dans cette inégalité, parmi les indices de densité, il n'y a que $\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)$ qui est affecté d'un coefficient plus grand que 1.

On désigne par b_{q+1} l'infini ou un nombre fini différent de $b_j (i = 1, \ldots, q)$; en observant que $\mathrm{N}_1(r, f^{(k)}) \geqq \mathrm{N}_1(r, f') > \overline{\mathrm{N}}(r, f)$, on peut remplacer *a fortiori* l'inégalité (81) par la suivante :

$$(81)'\quad (p+q)\mathrm{T}(r, f) < (q+1)\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \sum_{i=1}^{p}\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^{q+1}\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_j}\right) - \left[\mathrm{N}_1(r) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)\right] + \mathrm{S}_k(r, f).$$

22. Supposons que f admet o comme valeur exceptionnelle de défaut 1 ; alors en tenant compte de ce que $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ est l'indice des zéros multiples de $f-c$ et $N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)$, celui de $f^{(k)}-c$, c étant une constante arbitraire, l'inégalité (81) prend une forme remarquable et l'on obtient le corollaire :

III'. *Dans les conditions du théorème précédent, si l'on suppose de plus que la fonction f admet* o *et* ∞ *comme valeurs exceptionnelles de défaut* 1, *on a pour* $r < \rho < R$

$$(83)\qquad [p+q-o(1)]\,T(r,f) < \sum_{i=1}^{p} \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^{q} \bar{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_j}\right) + S_k(r,f),$$

$S_k(r,f)$ *est l'expression* (82).

II. — Généralisations.

23. L'inégalité (38) qui généralise la seconde inégalité fondamentale pour $q=3$ ne s'étend pas facilement au cas où q est quelconque. Dans le cas où les $\varphi_i (i=1, \ldots, q)$ sont des polynomes, M. R. Nevanlinna a fait observer que la généralisation peut se faire en procédant comme dans la démonstration du théorème habituel. Si l'on essaie la même méthode pour le cas général, on voit qu'il est encore facile de trouver une minorante pour $m(r, F)$ de la fonction auxiliaire $F = \Sigma (f-\varphi_i)^{-1}$. Mais la difficulté réside dans l'obtention d'une majorante de $m(r, F)$.

Dans une note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [9 *a*], M. Dufresnoy a donné un résultat qui précise ce qu'à signalé M. R. Nevanlinna, et en a fait une application intéressante. On peut énoncer son résultat comme suit :

IV. *Soient* $f(x)$ *une fonction méromorphe non rationnelle et* $P_i(x)$ $(i=1, \ldots, p)$, p *polynomes de degré* d; *on a l'inégalité*

$$(84)\qquad (p-d-2)\,T(r,f) < \sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f-P_i}\right) + S(r),$$

$S(r)$ *étant le reste.*

D'après l'auteur la démonstration, analogue à celle du second théorème fondamental habituel, se déduit de l'identité

$$(85)\qquad \prod_{i=1}^{p}[f(x)-P_i(x)] \equiv \frac{f^{(d+1)}(x)}{\prod_{i=1}^{p}\frac{f^{(d+1)}(x)}{[f(x)-P_i(x)]}} \equiv \frac{f^{(d+1)}(x)}{\sum_{i=1}^{p} b_i \frac{f^{d+1}(x)}{[f(x)-P_i(x)]}};$$

on obtient

$$(86)\qquad S(r) = p\log[2(d+1)\,\mathrm{A}r^d] + \log p - \mathrm{C}$$
$$+\,2\sum m\left[r, \frac{1}{P_i - P_j}\right] + m\left[r, \frac{f^{(d+1)}}{f}\right] + \sum m\left[r, \frac{f^{(d+1)}}{f - P_i}\right],$$

A étant la borne supérieure des coefficients des polynomes et C dépendant du comportement à l'origine de f et des P_i. Les limitations de $m\left[r, \frac{f^{(d+1)}}{f}\right]$ et de $m\left[r, \frac{f^{(d+1)}}{f-P_i}\right]$ se déduisent de l'inégalité (1) (1).

24. Sans avoir eu connaissance du résultat de M. Dufresnoy, nous avons aussi trouvé une inégalité pour le même cas et en avons fait une extension; ces résultats ont été énoncés dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Nous pouvons donner ici dans un cas plus général un résultat plus simple que voici :

Soit $f(x)$ une fonction méromorphe et $\varphi_i (i = 1, \ldots, p)$ p fonctions également méromorphes et distinctes entre elles, telles que $T(r, \varphi_i) = o[T(r, f)]$; supposons qu'il existe une fonction méromorphe $\Phi(x)$ telle que, k étant un certain entier,

$$(\alpha)\qquad T(r, \Phi) \leqq o[T(r, f)] \qquad \text{et} \qquad m\left(r, \frac{f^{(k)} - \Phi}{f^{(k-1)} - \varphi_i^{k-1}}\right) = o[T(r, f)];$$

pour la dernière relation, on peut exclure de l'axe des r une suite d'intervalles de longueur finie.

Pour donner un exemple de ce cas, prenons pour f une fonction telle que $T(r, f) > O(r)$ et $\varphi_i(x) = \sin x + a_i x + b_i$, a_i et b_i étant des constantes qui dépendent de i. On voit de suite qu'en choi-

(1) L'emploi de l'inégalité (2) pourra donner un résultat d'une façon plus simple.

sissant $\Phi = -\sin x$,

$$m\left(r, \frac{f'' - \Phi}{f' - \varphi_i'}\right) = m\left(r, \frac{f'' + \sin x}{f' - \cos x - a_i}\right) = O[\log T(r)],$$

et les conditions (α) sont bien vérifiées.

Pour avoir une majorante de $m(r, F)$ où $F = \Pi(f - \varphi_i)^{-1}$, il suffit d'écrire

$$F = \frac{1}{f^{(k)} - \Phi} \sum_{i}^{p} \frac{f^{(k-1)} - \varphi_i^{(k-1)}}{f - \varphi_i} \frac{f^{(k)} - \Phi}{f^{(k-1)} - \varphi_i^{(k-1)}}$$

et d'utiliser (2) pour limiter $m\left(r, \frac{f^{(k-1)} - \varphi_i^{(k-1)}}{f - \varphi_i}\right)$.

On obtient ainsi le théorème :

V. *Soient* $f(x)$ *une fonction méromorphe et* $\varphi_i(x)$ $(i = 1, \ldots, p)$ p *autres fonctions méromorphes distinctes et ne se réduisant pas à la constante infinie, telles que* $T(r, \varphi_i) = o[T(r, f)]$. *On suppose que* $|\varphi_h, \varphi_k| \geqq \delta(r)$ $(h \neq k)$, $\delta(r)$ *étant une fonction positive telle que* $\delta(r)^{-1} \leqq o[T(r, f)]$; *on suppose ensuite qu'il existe une fonction méromorphe* $\Phi(x)$ *telles que les conditions* (α) *soient vérifiées en excluant au besoin, pour la seconde condition une suite d'intervalles* $\mathfrak{I}$ *de longueur totale finie. Alors si*

$$f(0) \neq 0, \infty, \varphi_i(0) (i = 1, \ldots, p); \quad \varphi_i(0) \neq \infty; \quad \text{et} \quad f^{(k)}(0) - \Phi(0) \neq 0, \infty,$$

on a, en excluant éventuellement $\mathfrak{I}$, *l'inégalité*

$$(87) \qquad [p - 1 - o(1)] T(r, f) < k\overline{N}(r, f) + \sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f - \varphi_i}\right) + S(r),$$

$S(r)$ *jouissant des propriétés essentielles du reste habituel.*

En particulier, pour le cas où les $\varphi_i(x)$, sont des polynomes $P_i(x)$, il suffit de prendre pour Φ un polynome $\overline{P}(x)$ avec des coefficients indépendants de i pour avoir immédiatement une inégalité fondamentale.

En s'appuyant sur le théorème précédent, on peut obtenir une extension analogue à II ou à III. On a en particulier le théorème suivant :

VI. *Étant donnée une fonction méromorphe transcendante* $f(x)$, *soient* $P_i(x)$ $(i = 1, \ldots, p)$ p *polynomes distincts entre eux et* $Q_j(x)$ $(j = 1, \ldots, q)$ q *polynomes non identiquement nuls distincts entre eux. On désigne par* m *le plus grand des degrés des* P_i *et par* n *celui des degrés des* Q_j; *et l'on suppose que* $|P_h, P_k| \geqq d(r)$ *et* $|Q_h, Q_k| \geqq d_1(r)$, $d(r)$ *et* $d_1(r)$ *étant deux fonctions positives telles que* $d(r)^{-1}$ *et* $d_1(r)^{-1}$ *soient* $\leqq o[T(r, f)]$. *Alors, en prenant un polynome auxiliaire* $\overline{Q}(x)$ *et en supposant que*

$$f(0) \neq 0, \infty, P_i(0); \quad f'(0) \neq 0, Q_j(0); \quad f^{(m+1)}(0) \neq 0; \quad f^{(n)}(0) \neq Q_j^{(n-1)}(0)$$

et $f^{(n+2)}(0) \neq \overline{Q}(0)$, *on a l'inégalité*

$$(88) \quad [pq - o(1)]T(r,f) < (m+1)\,\overline{N}(r,f) + [q - o(1)]\sum_1^p N\left(r, \frac{1}{f - P_i}\right)$$
$$+ \sum_1^q N\left(r, \frac{1}{f' - Q_j}\right) - [q - 1 - o(1)]N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r),$$

$S(r)$ *jouissant des propriétés du reste habituel.*

III. — Propositions sur les valeurs exceptionnelles. Étude des défauts absolus et des défauts relatifs.

25. En utilisant ses inégalités et les deux théorèmes fondamentaux, M. Ullrich a démontré, parmi d'autres, les propositions suivantes :

VII. *Si une fonction méromorphe admet un ensemble de valeurs finies exceptionnelles au sens de M. R. Nevanlinna* a_i, *alors sa dérivée a zéro comme valeur exceptionnelle avec un défaut*

$$(89) \qquad \delta'(0) \geqq \frac{1}{2 - \theta(\infty)} \sum_1^{\infty} \delta(a_i),$$

où l'on pose

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\overline{N}(r, f)}{T(r, f)} = 1 - \theta(\infty).$$

De (64), on déduit

$$\sum_{i=1}^{p} m(r, a_i) - O[\log r\, T(r, f)] \leqq m\left(r, \frac{1}{f'}\right)$$

et l'on a, d'autre part,

$$T(r, f) + \overline{N}(r, f) + O[\log r\, T(r, f)] \geqq T(r, f').$$

Ces deux inégalités donnent tout de suite (89).

VIII. *Si une fonction méromorphe d'ordre fini admet deux valeurs exceptionnelles au sens de Borel a_1 et a_2, alors sa dérivée a zéro comme valeur exceptionnelle au sens de Borel. Dans le cas où l'une des deux valeurs exceptionnelles de la fonction est l'infini, alors sa dérivée a aussi deux valeurs exceptionnelles au sens de Borel, savoir zéro et l'infini.*

Du second théorème fondamental et de

$$N\left(r, \frac{1}{f'}\right) = N_1(r) - N_1(r, f)$$

on déduit

$$N\left(r, \frac{1}{f'}\right) < N(r, a_1) + N(r, a_2) + O[\log r\, T(r, f)]. \tag{90}$$

Cette inégalité à laquelle on joint $N(r, f') < 2N(r, f)$ permet de démontrer la proposition, si l'on tient compte de ce que f et f' sont du même ordre d'après le résultat de Valiron déjà cité [27, b].

Dans le cas de l'ordre infini, M. Ullrich a indiqué aussi un résultat; on peut le préciser en utilisant la notion d'ordre que nous avons introduite [12, a].

Nous appelons ordre d'une fonction f d'ordre infini ou ordre de $T(r, f)$ toute fonction positive non décroissante $\rho(r)$ telle que, en posant $U(r) = r^{\rho(r)}$, $U(r)$ vérifie la condition de la croissance normale

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log U(r')}{\log U(r)} = 1, \qquad \text{avec} \quad r' = r + \frac{1}{\log U(r)} \tag{α}$$

et l'on ait

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log T(r, f)}{\rho(r) \log r} = 1. \tag{91}$$

Les ordres de $N(r, a)$ se définissent comme ceux de $T(r, f)$. On démontre que $\rho(r)$ étant un ordre de f, c'est-à-dire de $T(r, f)$, $N(r, a)$ a aussi $\rho(r)$ pour ordre sauf au plus pour deux valeurs de a. Si a_1 est une telle valeur, on a

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log N(r, a_1)}{\rho(r) \log r} < 1.$$

Nous dirons que a_1 est une *valeur exceptionnelle au sens de Borel.*

IX. *Étant donnée une fonction méromorphe $f(x)$ d'ordre infini et dépourvue d'intervalles extraordinaires, soit $\rho(r)$ un de ses ordres. Si elle admet par rapport à cet ordre, deux valeurs exceptionnelles au sens de Borel a_1 et a_2, alors sa dérivée a zéro comme valeur exceptionnelle au sens de Borel par rapport à $\rho(r)$. Si $a_1 = \infty$, alors f' a aussi ∞ comme valeur exceptionnelle de Borel.*

D'après ce que nous avons déjà établi [12, *b*], f' a aussi $\rho(r)$ comme ordre et la démonstration se fait de la même façon que pour le théorème précédent en observant que l'ordre du dernier terme de (90) est inférieur à celui de $T(r, f)$.

26. Valiron a démontré [27, *b*; 18, *d*] que pour une fonction méromorphe f, on a, en excluant éventuellement dans le cas de l'ordre infini une suite d'intervalles de longueur totale finie,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{N(r, a)}{T(r, f)} = 1, \tag{92}$$

sauf pour un ensemble V de valeurs exceptionnelles a dont la mesure linéaire est nulle. Il a, d'autre part, construit des exemples où l'ensemble V a la puissance du continu, ce qui prouve que V est plus large que l'ensemble des valeurs déficientes [27, *a*].

Au moyen de l'inégalité (84), M. Dufresnoy est arrivé à montrer que l'ensemble V est presque toujours vide [9, *a*]. On considère toutes les fonctions $F(x) + a_d x^d + \ldots + a_1 x$, où $F(x)$ est une fonction méromorphe non rationnelle et où d est un entier fixe. En s'inspirant de la démonstration du théorème de Valiron, on prouve que l'on a, en désignant par P un polynome de degré d et en excluant éventuellement une suite d'intervalles de longueur totale finie,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{N(r, F - P - \alpha)}{T(r, F - P)} = 1 \quad (^1), \tag{93}$$

sauf pour les fonctions $F - P$ ayant un coefficient a_d appartenant à un ensemble dont la mesure de dimension ε est nulle.

(1) On suppose comme il est loisible de le faire, que l'infini n'est pas une valeur exceptionnelle pour F.

Plaçons-nous dans le cas de l'ordre fini et définissons la suite des r_ν satisfaisant à $T(r_\nu) = \nu$. A chaque valeur de ν, on fait correspondre un champ de polynomes P de degré d défini par :

1° Modules des coefficients des polynomes P inférieurs à $\log r_\nu$;

2° $C(F^{(\lambda)} - P^{(\lambda)}) < \log r_\nu$ pour $\lambda = 0, 1, \ldots, d$; $C(\varphi)$ dépendant du comportement à l'origine de φ.

Les fonctions P de ce champ satisfont à

$$N(r_\nu, F - P) \geqq T(r_\nu, F)(1 - \varepsilon_\nu),$$

ε_ν tendant vers zéro avec $\frac{1}{\nu}$, si l'on excepte celles appartenant à p_ν sous-domaines définis par

$$m\left(r_\nu, \frac{1}{P - P_i}\right) > \frac{T(r_\nu, F)}{p_\nu^2}.$$

On en déduit que

$$\lim_{r \to \infty} \frac{N(r, F - P)}{T(r, F)} = 1, \tag{94}$$

sauf pour les polynomes P appartenant à une infinité de ces sous-domaines. En choisissant pour p_ν une fonction de $T(r_\nu)$ qui croît assez lentement, on pourra démontrer que (94) est vérifié pour les P dont le premier coefficient n'appartient pas à un ensemble exceptionnel dont la mesure de dimension ε est nulle. Il en est de même de (93) dans les mêmes conditions [1].

Dans le cas de l'ordre infini, on applique le lemme de Borel sur les fonctions croissantes et l'on trouve encore (93) à condition d'exclure de l'axe des r les intervalles extraordinaires.

27. Comme consequence du théorème II du n° 19, M. Milloux a développé une théorie des défauts absolus et des défauts relatifs [14, d]. D'abord en appliquant l'inégalité (71) il prouve cette proposition simple :

X. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dépourvue d'intervalles extraordinaires; si l'infini a pour défaut* 1 *et s'il existe une suite*

---

(1) On trouve plus d'indications dans la Note de M. Dufresnoy.

de valeurs finies à somme de défauts égale à 1, *alors le défaut absolu et le défaut relatif de f' sont identiques.*

Puis il fait deux applications spéciales :

28. Étude des défauts absolus. — Soient $b_j (j = 1, \ldots, q)$ q constantes, finies et différentes de zéro; désignons par δ'_a la somme de leurs défauts absolus pour f'. De la définition, il résulte

$$\sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f'-b_j}\right) < [q - \delta'_a + \varepsilon'(r)]\, T(r, f'), \qquad \lim_{r\to\infty} \varepsilon'(r) = 0.$$

Portons cette borne dans l'inégalité (72) dont on majore $S(r, f')$ par une certaine expression $S'(r, f)$. On obtient *a fortiori*

$$(95) \qquad [\delta'_a - \varepsilon'(r)]\, T(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) < \overline{N}(r, f) + S'(r, f).$$

En désignant par $\delta'_a(0)$ le défaut absolu de 0 pour f', on a

$$(96) \qquad N\left(r, \frac{1}{f'}\right) < [1 - \delta'_a(0) + \varepsilon_0(r)]\, T(r, f'), \qquad \lim_{r\to\infty} \varepsilon_0(r) = 0.$$

On introduit un paramètre λ tel que $0 < \lambda \leqq 1$. Dans (95) on sépare $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ en $\lambda N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + (1-\lambda) N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ et l'on applique à la dernière partie de cette somme l'inégalité (96). Il vient

$$(97) \qquad [\delta'_a - (1-\lambda)(1 - \delta'_a(0)) - \varepsilon'(r) - (1-\lambda)\,\varepsilon_0(r)]\, T(r, f') - \lambda\, N\left(r, \frac{1}{f'}\right) < \overline{N}(r, f) + S'(r, f).$$

Si

$$(98) \qquad \delta'_a \leqq 1 \quad \text{et} \quad \delta'_a + \delta'_a(0) > 1,$$

on prend

$$(99) \qquad \lambda = \frac{\delta'_a + \delta'_a(0) - 1}{\delta'_a(0)}$$

et l'inégalité (97) s'écrit

$$\lambda \left[T(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right] < [\varepsilon'(r) + (1-\lambda)\,\varepsilon_0(r)]\, T(r, f') + \overline{N}(r, f) + S'(r, f).$$

En minorant le crochet au moyen de (71) et en introduisant le défaut $\delta(\infty_{\prime})$ et le défaut total δ' des a_{ι} pour f, on trouve

$$\begin{aligned}[\lambda\,\delta+\delta(\infty)-1]\,T(r,f) < {} & S'(r,f)+[\varepsilon'(r)+(1-\lambda)\,\varepsilon_0(r)]\,T(r,f') \\ & +[\lambda\,\varepsilon(r)+\varepsilon(r)]\,T(r,f) \\ & +\lambda\left[m\left(r,\frac{f'}{F}\right)+\log\left|\frac{F(0)}{f'(0)}\right|+p\log\frac{2}{d}\right].\end{aligned}$$

Divisons les deux nombres par $T(r, f)$ et faisons tendre r vers l'infini par des valeurs en dehors des *intervalles extraordinaires*, si ceux-ci existent. On obtient ainsi une inégalité qui donne lieu à l'énoncé :

XI. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe et possédant des valeurs finies déficientes dont on désigne par δ la somme de leurs défauts et par $\delta(\infty)$ le défaut (éventuel) de l'infini. On suppose que la dérivée $f'(x)$ admet zéro et d'autres valeurs finies comme valeurs déficientes, on désigne par $\delta'_a(0)$ le défaut absolu de zéro et par δ'_a la somme de ceux des autres valeurs finies. Alors si $\delta'_a \leqq 1$ et si $\delta'_a+\delta'_a(0)>1$, on a l'inégalité*

$$(100)\qquad \delta\,[\delta'_a+\delta'_a(0)-1] \leqq [1-\delta(\infty)]\,\delta'_a(0).$$

Dans le cas particulier où $\delta(\infty)=1$, de ce qui précède résulte la proposition :

XII. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe telle que $\delta(\infty)=1$, l'une au moins des circonstances suivantes se présente : ou bien la fonction f n'a aucune valeur déficiente finie; ou bien f' n'admet pas* 0 *comme valeur déficiente absolue; enfin ou bien le défaut total absolu des valeurs déficientes finies de f' ne surpasse pas* 1.

29. Considérons maintenant le cas où $\delta'_a \geqq 1$. En remplaçant dans (95) $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ par $\delta'_a N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ et $\overline{N}(r,f)$ par $[1-\delta(\infty)+\bar{\varepsilon}(r)]\,T(r,f)$, il vient

$$\begin{aligned}\delta'_a\left[T(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f_1}\right)\right]-[1-\delta(\infty)]\,T(r,f) \\ < \varepsilon'(r)\,T(r,f')+\bar{\varepsilon}(r)\,T(r,f)+S'(r,f);\end{aligned}$$

et en procédant ensuite comme dans le cas précédent, on trouve le résultat :

XIII. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe telle qu'il existe des* *valeurs déficientes finies avec δ comme somme de leurs défauts. On suppose en outre que la dérivée f' possède des valeurs déficientes absolues finies et différentes de zéro dont la somme de leurs défauts absolus $\delta'_a \geqq 1$. Alors on a*

$$\delta\,\delta'_a + \delta(\infty) \leqq 1. \tag{101}$$

En particulier :

XIV. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe telle que $\delta(\infty) = 1$; l'une au moins des circonstances suivantes se présente : ou bien f n'a pas de valeur déficiente finie; ou bien en considérant les valeurs déficientes pour f' qui sont finies et différentes de zéro, la somme de leurs défauts absolus δ'_a est inférieure à 1.*

30. **Étude des défauts relatifs.** — Conservons les notations précédentes et désignons par δ'_r la somme des défauts relatifs des valeurs b_j (supposées finies et différentes de zéro) pour f'.

L'inégalité (74) dont on néglige le crochet donne

$$[\delta(\infty) - 1 + q\delta - q + \delta'_r]\,T(r, f) < \varepsilon(r)\,T(r, f) + S_1(r, f), \tag{102}$$

où $\lim_{r=\infty} \varepsilon(r) = 0$. En faisant tendre r vers l'infini en dehors des intervalles extraordinaires, on obtient une inégalité qui permet d'énoncer le théorème :

XV. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe et possédant des valeurs déficientes finies; on désigne par δ la somme de leurs défauts, par $\delta(\infty)$ le défaut (qui peut être nul) de l'infini. Si l'on considère q quantités finies et différentes de zéro, la somme δ'_r de leurs défauts relatifs pour f' satisfait à l'inégalité*

$$\delta'_r \leqq q(1 - \delta) + 1 - \delta(\infty). \tag{103}$$

En particulier, *tout défaut relatif pour f' est majoré par* $2 - \delta(\infty)$.

Cas particulier. — Supposons que $\delta(\infty) = 1$ et $\delta = 1$. Alors tout défaut relatif pour f' est négatif ou nul. En vertu de IX, on a donc l'énoncé :

XVI. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe et dépourvue d'intervalles extraordinaires. On suppose que $\delta(\infty) = 1$ et qu'elle admet un ensemble de valeurs déficientes finies dont la somme des* *défauts est égale à* 1. *Dans ces conditions, la dérivée f' ne peut avoir de valeur finie que zéro comme valeur déficiente (absolue ou relative).*

C'est, par exemple, le cas de la fonction exponentielle.

Remarque. — Dans l'application de l'inégalité (74) on peut aussi conserver le crochet, lorsque q surpasse 1. Il est également possible d'obtenir d'autres propriétés en utilisant directement (71) et (72). On peut encore appliquer l'inégalité obtenue de (72) par l'élimination de $\overline{N}(r, f)$ et arriver à un résultat sans introduire $\delta(\infty)$.

IV. — Détermination des fonctions méromorphes par des ensembles de points $\overline{E}(a_i)$ et $\overline{E}^{(k)}(b_j)$.

31. Désignons par $E(c)$ l'ensemble des points en lesquels f prend la valeur c, chacun des points étant compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité. Si chaque point n'est compté qu'une seule fois, l'ensemble correspondant sera désigné par $\overline{E}(c)$. Pour $f^{(k)}$, on désignera les ensembles analogues par $E^{(k)}(c)$ et $\overline{E}^{(k)}(c)$.

Des problèmes d'unicité ont été étudiés par MM. G. Pólya, R. Nevanlinna et H. Cartan, au moyen des ensembles $E(c)$ ou $\overline{E}(c)$ [20, *a*; 18, *c*, *d*; 6, *a*]. M. W. Gontcharoff a obtenu un nouveau résultat par considération des ensembles $E'(0)$ et $E''(0)$ à part $E(0)$ et $E(\infty)$ [10, *a*, *b*]. En appliquant le théorème III et l'inégalité (78) et en nous inspirant d'une méthode de M. R. Nevanlinna, nous sommes parvenu à des théorèmes d'unicité dans lesquels sont entrés en jeu des ensembles $\overline{E}^{(k)}(c)$ (1).

Désignons par $\overline{n}_0(r, a)$ le nombre des racines communes des deux équations

$$f_1(x) = a, \qquad f_2(x) = a \tag{104}$$

comprises dans le cercle $|x| \leqq 1$, chaque racine étant comptée une

(1) Nous exposons ici avec une rectification les résultats annoncés dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 241, 1955.

seule fois (il s'agit des pôles, si $a = \infty$); et posons ensuite

$$(105) \qquad \bar{N}_0(r, a) = \int_0^r \frac{\bar{n}_0(t, a) - \bar{n}_0(0, a)}{t}\, dt + \bar{n}_0(0, a)\log r,$$

$$(106) \qquad \bar{N}_{1,2}(r, a) = \bar{N}\left(r, \frac{1}{f_1 - a}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f_2 - a}\right) - 2\bar{N}_0(r, a).$$

Désignons de plus par $\bar{n}_0^{(k)}(r, b)$, $\bar{N}_0^{(k)}(r, b)$, $\bar{N}_{1,2}^{(k)}(r, b)$ les quantités analogues pour $f_1^{(k)}$ et $f_2^{(k)}$.

Si chaque racine est comptée autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité, on supprime dans ces notations la barre qui est sur n ou N.

En s'appuyant sur le théorème III', on démontre d'abord le suivant :

XVII. *Soient $f_1(x)$ et $f_2(x)$ deux fonctions méromorphes admettant* 0 *et* ∞ *comme valeurs déficientes de défaut* 1; *soient ensuite a_i et b_j des nombres définis comme dans le théorème* III. *Si f_1 et f_2 ne sont pas identiques, on a l'inégalité*

$$(107) \qquad [p + q - 4 - o(1)][T(r, f_1) + T(r, f_2)]$$
$$< \sum_{i=1}^{p} \bar{N}_{12}(r, a_\mu) + \sum_{j=1}^{q} \bar{N}_{12}^{(k)}(r, b_\nu) + O[\log(r\, T(r, f_1)\, T(r, f_2))]$$

en excluant éventuellement, dans le cas où une des fonctions est d'ordre infini, une suite d'intervalles dont la longueur totale est finie.

32. Considérons maintenant deux fonctions non constantes $f_1(x)$ et $f_2(x)$ qui admettent 0 et ∞ comme valeurs déficientes à défaut 1. Supposons que pour $p + q = 5$ valeurs les équations $f_1(x) = a_i$ et $f_2(x) = a_i$ sont vérifiées aux mêmes points ainsi que les équations $f_1^{(k)}(x) = b_j$ et $f_2^{(k)}(x) = b_j$,

Appliquons le théorème précédent pour ces valeurs; il vient

$$(108) \qquad [1 - o(1)][T(r, f_1) + T(r, f_2)] < O[\log(r\, T(r, f_1)\, T(r, f_2))],$$

inégalité qui est valable pour toute valeur r en dehors des intervalles extraordinaire éventuels.

On en déduit

$$\lim_{r \to \infty} \frac{T(r, f_1)}{\log r} < \infty, \qquad \lim_{r \to \infty} \frac{T(r, f_2)}{\log r} < \infty$$

et l'on conclut que f_1 et f_2 devraient être des fonctions rationnelles. Mais ceci est en contradiction avec l'hypothèse, car une telle fonction n'admet au plus qu'une valeur ayant un défaut égal à 1 à moins qu'elle ne se réduise à une constante.

Donc, si $p \geqq 1$, f_1 et f_2 sont identiques.

XVIII. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe non constante admettant* 0 *et* ∞ *comme valeurs déficientes de defaut* 1. *Si $a_i (i = 1, \ldots, 4)$ sont quatre valeurs finies différentes de zéro et distinctes entre elles; et $b_j (j = 1, 2, \ldots, 4)$ quatre valeurs de même nature distinctes entre elles, alors la fonction f est univoquement déterminée par cinq ensembles quelconques pris parmi les ensembles* $\overline{\mathrm{E}}(a_i)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ *et* $\overline{\mathrm{E}}^{(k)}(b_j) j = 1, \ldots, 4)$.

33. Au lieu d'utiliser III', on peut partir de l'inégalité (78). En supposant que zéro et l'infini aient chacun un défaut 1, elle prend la forme

$$(109) \qquad [q - o(1)]\,\mathrm{T}(r, f) < \sum_{j=1}^{b} \overline{\mathrm{N}}\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - b_j}\right) + \overline{\mathrm{S}}_k(r, f)$$

dont $\overline{\mathrm{S}}_k(r, f)$ est analogue à $\mathrm{S}_k(r, f)$.

A partir de cette inégalité, on arrive à démontrer l'inégalité

$$(110) \quad [q - o(1)][\mathrm{T}(r, f_1) + \mathrm{T}(r, f_2)] < \sum_{j=1}^{q} [\overline{\mathrm{N}}_{12}^{(k)}(r, b_j) + 2\overline{\mathrm{N}}_0^{(k)}(r, b_j)] + \mathrm{O}[\log(r\,\mathrm{T}(r, f_1)\,\mathrm{T}(r, f_2)]$$

qui nous permet d'obtenir par le même procédé, le résultat

XIX. *$f(x)$ est définie comme dans le théorème précédent; $b_j (j = 1, 2, 3)$ étant trois nombres quelconques mais finis différents de zéros et distincts entre eux, la fonction f est déterminée, à un polynome de degré $k - 1$ près, par les trois ensembles points des* $\overline{\mathrm{E}}^{(k)}(b_j)$ $(j = 1, 2, 3)$.

34. On peut obtenir un résultat sans rien supposer sur $\mathrm{N}(r, f)$; mais le nombre des ensembles utilisés pour la détermination de f sera plus grand que dans ce qui précède.

CHAPITRE III.

Introduction des fonctions primitives.

I. — Inégalité fondamentale dans le cas général.

35. Pour établir, par intervention d'une primitive de la fonction donnée, une inégalité qui étend la seconde inégalité fondamentale, on peut évidemment procéder comme dans le cas où intervient une dérivée. Mais dans le cas général il est moins facile ici d'obtenir comme reste une quantité exprimée en fonction de la fonction donnée (non en fonction de la primitive considérée), tout en conservant pour la partie principale de l'inégalité une forme simple. En recourant à un théorème de É. Borel, nous sommes parvenu à un résultat satisfaisant [12, g].

36. Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans tout le plan (¹) telle que les primitives d'ordre k soient aussi méromorphes et désignons par $f^{(-k)}$ une de ces fonctions primitives. Si $a_i (i = 1, \ldots, p)$ sont p nombres finis non nuls et distincts entre eux, nous trouvons

$$(111) \qquad p\,T(r, f) < N(r, f) + kp\,\overline{N}(r, f) + p\,N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}}\right) + \sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) - \left[N_1(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right] + Q_1(r),$$

avec

$$Q_1(r) = S(r, f)_p + 2p \cdot m\left(r, \frac{f}{f^{(-k)}}\right) + p \log \left| \frac{f^{(-k)}(0)}{f(0)} \right|,$$

$S(r, f)_p$ désignant le terme complémentaire de la seconde inégalité fondamentale de M. R. Nevanlinna appliquée à f pour les valeurs 0, ∞, et $a_i (i = 1, \ldots, p)$.

(¹) Le cas des fonctions méromorphes dans le cercle-unité peut se traiter de la même façon.

Cette inégalité s'écrit encore

$$(111)' \qquad p\,T(r,f) < (kp+1)\,\overline{N}(r,f) + p\,N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}}\right) + \sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + Q_1(r)$$

et dans le cas où les primitives d'ordre $h = kp$ sont méromorphes, comme

$$N_1(r,f) = N_1(r, f^{(-h)}) + h\overline{N}(r,f),$$

on peut la mettre encore sous la forme

$$(111)'' \qquad p\,T(r,f) < p\,N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}}\right) + \sum_{i=1}^{p+1} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + Q_1(r).$$

où a_{p+1} désigne l'infini ou un nombre fini différent de $a_i (i = 1, \ldots, p)$.

Soient ensuite $b_j (j = 1, \ldots, q)$ des nombres finis non nuls et distincts entre eux; appliquons la seconde inégalité fondamentale à la fonction $f^{(-k)}$ pour les valeurs 0, ∞ et b_j. En combinant le résultat obtenu avec l'inégalité $(111)'$ et en tenant compte des propriétés des indices de densité, on obtient

$$(112) \qquad (p+q)\,T(r,f) < [k(p+q)+2]\,\overline{N}(r,f) + (p+1)\,N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}}\right) + \sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}-b_j}\right) - \left[N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(-k+1)}}\right)\right] + Q(r),$$

avec

$$(113) \qquad Q(r) = (p+q+1)\,m\left(r, \frac{f}{f^{(-k)}}\right) + S(r,f)_p + S(r, f^{(-k)})_q + p\log\left|\frac{f^{(-k)}(0)}{f(0)}\right|.$$

Si, en posant $h = k(p+q)+1$, la primitive $f^{(-h)}$ est méromorphe, on a l'inégalité de forme plus simple

$$(112)' \quad (p+q)\,T(r,f) < (p+1)\,N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}}\right) + \sum_{i=1}^{p+1} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}-b_j}\right) - \left[N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(-k+1)}}\right)\right] + Q(r).$$

où a_{p+1} a la signification précédente.

37. Dans le cas général, la quantité $Q(r)$ ne peut être limitée par une expression en fonction de f jouissant des propriétés énoncées par M. R. Nevanlinna pour le reste habituel. Pour obtenir une inégalité fondamentale de forme simple avec un reste jouissant des propriétés désirées, nous procédons comme suit : Après avoir appliqué l'inégalité (3) au premier terme de l'expression de $Q(r)$, nous majorons $\overset{+}{\log} T(\rho, f^{(-k)})$ par

$$\overset{+}{\log} T(\rho, f) + \overset{+}{\log} N\left(\rho, \frac{1}{f^{(-k)}}\right) + \overset{+}{\log}\,\overset{+}{\log}\,\frac{1}{\rho} + \overset{+}{\log}\log\rho + \overset{+}{\log}\,\overset{+}{\log}\,\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f^{(-k)}(0)}\right| + \overset{+}{\log}\log\left|\frac{f^{(-k)}(0)}{f(0)}\right| + O(1)$$

et nous éliminons ρ en recourant au lemme bien connu de Borel sur les fonctions croissantes. Soit K une constante positive; d'après ce lemme, $T(r, f^{(-k)}) + K$, $T(r, f)$ et $N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}}\right)$ étant des fonctions croissantes, on a, en désignant par α un nombre > 1,

$$T(R' f^{(-k)}) + K < [T(r, f^{(-k)}) + K]^{\alpha}, \quad \text{avec} \quad R' = r + \frac{1}{\log[T(r, f^{(-k)}) + K]},$$

$$T(r' f) < T(r, f)^{\alpha}, \qquad r' = r + \frac{1}{\log T(r, f)},$$

et

$$N\left(R'_1, \frac{1}{f^{(-k)}}\right) < N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}}\right)^{\alpha}, \qquad R'_1 = r + \frac{1}{\log N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}}\right)},$$

sauf peut-être, dans le cas où $f^{(-k)}$ est d'ordre infini, pour chaque inégalité une suite d'intervalles extraordinaires dont la longueur totale est finie.

D'après le premier théorème fondamental, nous pouvons choisir K et r_0 de façon que $T(r, f^{(-k)}) + K$ soit supérieur à $N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}}\right)$, par suite que R'_1 soit supérieur à R' pour $r > r_0$. Pour chaque valeur $r > r_0$ nous choisissons ρ égal à la plus petite des valeurs R' et r'. On a alors, en prenant $\alpha = 2$,

$$N\left(\rho, \frac{1}{f^{(-k)}}\right) < N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}}\right)^2 \tag{114}$$

et en même temps

$$T(\rho, f^{(-k)}) + K < [T(r, f^{(-k)}) + K]^2, \qquad T(\rho, f) < T(r, f)^2. \tag{115}$$

Nous distinguons deux cas suivant que $R' < r'$ ou $R' > r'$. Dans le premier cas un calcul simple donne

$$\begin{aligned}\lambda_k \overset{+}{\log} T(\rho, f^{(-k)}) < 2\lambda_k \overset{+}{\log} T(r, f) + 2\lambda_k \overset{+}{\log} N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}}\right) + \overset{+}{\log}\frac{1}{r} \\ + \log r + \overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f^{(-k)}(0)}\right| \\ + \lambda_k \overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\left|\frac{f^{(-k)}(0)}{f(0)}\right| + O(1);\end{aligned} \tag{116}$$

on trouve, de plus,

$$\log\frac{\rho}{\rho - r} < \log 2r + \overset{+}{\log}\overset{+}{\log} T(r, f^{(-k)}) + \overset{+}{\log}\log K + \log 3. \tag{117}$$

On est alors conduit à limiter une quantité de la forme

$$\lambda'_k \overset{+}{\log}\overset{+}{\log} T(r, f^{(-k)}),$$

λ'_k étant un nombre qui ne dépend que de k. Or, une telle quantité est majorée par $\overset{+}{\log} T(r, f^{(-k)}) + \lambda''_k$, λ''_k étant un nombre comme λ'_k. Donc pour $Q(r)$, on a à majorer

$$(2\lambda_k + 1)\log N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}}\right)$$

et l'on trouve comme majorante $N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}}\right) + \bar{\lambda}_k$, λ_k et $\bar{\lambda}_k$ étant de même nature que λ'_k. On arrive finalement à l'inégalité

$$Q(r) < N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}}\right) + S_{-k}(r, f), \tag{118}$$

$S_{-k}(r, f)$ étant une expression qui jouit des propriétés du reste habituel.

Pour le cas où $R' > r'$, on obtient un résultat pareil. Ce qui établit le théorème général :

I. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe telle que ses primitives d'ordre k, soient aussi méromorphes, et l'on désigne par $f^{(-k)}$ une des primitives. Soient ensuite $a_i (i = 1, \ldots, p)$ et $b_j (j = 1, \ldots, q)$ deux groupes de nombres finis non nuls et distincts entre eux dans chaque groupe. En supposant que $f(0) \neq 0$, a_i; $f'(0) \neq 0$; $f^{(-k)}(0) \neq 0$, ∞, b_j; et $f^{(-k+1)}(0) \neq 0$ et en prenant une valeur r_0 suffisamment grande, on a pour $r > r_0$ l'inégalité*

$$(119) \quad \begin{aligned}(p+q)\,T(r, f) < [k(p+q)+2]\,\overline{N}(r, f) + (p+2)\,N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}}\right) \\ + \sum_1^p N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_1^q N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}-b_j}\right) \\ - \left[N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(-k+1)}}\right)\right] + S_k(r, f),\end{aligned}$$

sauf peut-être, dans le cas où $f^{(-k)}$ est d'ordre infini, pour une suite d'intervalles de longueur totale finie. Le reste a pour expression

$$(120) \quad \begin{aligned}S_{-k}(r, f) = \log K + 9(p+2)\log\frac{4}{d} + 9(q+2)\log\frac{4}{d'} \\ + 2\overset{+}{\log}|f(0)| + (p+1)\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right| + \log\left|\frac{1}{f'(0)}\right| \\ + (p+q+3)\overset{+}{\log}|f^{(-k)}(0)| + \log\left|\frac{1}{f^{(-k+1)}(0)}\right| \\ + B_{-k}\overset{+}{\log} r + B'_{-k}\overset{+}{\log}\frac{1}{r} + C_{-k}\overset{+}{\log} T(r, f) + O(1),\end{aligned}$$

où en posant $a_0 = 0$ et $a_{p+1} = \infty$, d est une quantité positive telle que $|a_\mu, a_\nu| \geqq d$ ($\mu \neq \nu$ et μ, $\nu = 0, 1, \ldots, p+1$) et d' est une quantité analogue par rapport aux b_j; K est un nombre fixe assez grand; et $B_{-k}, \ldots, C_{-k}$ sont des constantes numériques ne dépendant que de p et de q à part k.

38. Dans chacun des trois cas suivants, $Q(r)$ peut être majoré par une expression jouissant des propriétés du reste et l'on a un résultat plus simple.

1° *Cas où f est d'ordre fini.* — En prenant $\rho = 2r$, on trouve ce résultat :

I_a. *Étant donnée une fonction f comme dans* I, *on conserve les significations des a_i, b_j et les hypothèses sur les valeurs initiales. Alors si f est d'ordre fini $< \lambda$, et si l'on choisit une valeur r_0 suffisamment grande, on a pour $r > r_0$ l'inégalité*

$$(121)\quad (p+q)\,\mathrm{T}(r, f) < [k(p+q)+2]\,\overline{\mathrm{N}}(r, f) + (p+1)\,\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}}\right) + \sum_1^p \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_1^q \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}-b_j}\right) - \left[\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f^{(-k+1)}}\right)\right] + \mathrm{S}_{-k}(r, f),$$

avec

$$(122)\quad \mathrm{S}_{-k}(r, f) = \mathrm{A}_{-k} + 9(p+2)\log\frac{4}{d} + 9(q+2\log)\frac{4}{d'} + 2\,\overset{+}{\log}|f(0)| + p\,\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right| + \log\left|\frac{1}{f'(0)}\right| + (p+q+2)\,\overset{+}{\log}|f^{(-k)}(0)| + \log\left|\frac{1}{f^{(-k+1)}(0)}\right| + \mathrm{C}_{-k}\log r,$$

A_{-k} *et* C_{-k} *dépendant seulement de p, q et λ à part k.*

2° *Cas où zéro a pour $f^{(-k)}$ un défaut $\delta^{(-k)}(0) > 0$.* On a

$$\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}}\right) < [1 - \delta^{(-k)}(0) + o(1)]\,\mathrm{T}(r, f^{(-k)}).$$

Et l'on trouve

$$[1-o(1)]\,\mathrm{T}(\rho, f^{(-k)}) < \mathrm{T}(\rho, f) + \mathrm{N}\left(\rho, \frac{1}{f^{(-k)}}\right) + b_k\,\overset{+}{\log}\frac{1}{\rho} + b'_k\log\rho + a'_k\,\overset{+}{\log}\,\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f^{(-k)}(0)}\right| + \log\left|\frac{f^{(-k)}(0)}{f(0)}\right|,$$

inégalité qui est valable en excluant éventuellement une suite d'intervalles de longueur totale finie.

Au moyen de ces deux inégalités, on peut majorer $\mathrm{Q}(r)$ d'une façon simple et l'on obtient le théorème :

I_b. *On conserve les hypothèses du théorème* I; *si $f^{(-k)}$ admet zéro comme valeur exceptionnelle de défaut $\delta^{(-k)}(0) > 0$, on a pour $r < \rho$, l'inégalité* (121), *sauf peut-être pour une suite d'intervalles* *de longueur totale finie. Le terme complémentaire a pour expression*

$$(123)\quad S_{-k}(r,f) = A'_{-k}\log\frac{1}{\delta^{(-k)}(0)-o(1)} + \Omega_0 + \log\rho + R_{-k}(r,f),$$

avec

$$\Omega_0 = 9(p+2)\log\frac{4}{d} + 9(q+2)\log\frac{4}{d'} + 2\overset{+}{\log}|f(0)| + (p+1)\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right|$$
$$+\log\left|\frac{1}{f'(0)}\right| + (p+q+3)\overset{+}{\log}|f^{(-k)}(0)| + \log\left|\frac{1}{f^{(-k+1)}(0)}\right|,$$

A'_{-k} *et les coefficients des termes de l'expression* R_{-k} *dépendant seulement de p et q à part k.*

3° *Cas où* $m(r, f^{(-k)}) \leqq [\tau + o(1)]T(r, f^{(-k)})$, τ *étant un nombre positif inférieur à* 1. — La majoration de $Q(r)$ se fait facilement en remarquant que $N(r, f^{(-k)}) \leqq N(r, f)$.

I$_c$. *On conserve les hypothèses de* I; *si*

$$m(r, f^{(-k)}) < [\tau + o(1)]\,T(r, f^{(-k)} \qquad (0<\tau<1),$$

on a pour $r<\rho$ *l'inégalité* (121), *avec*

$$(124)\qquad S_{-k}(r,f) = A'_{-k}(p,q)\log\frac{1}{1-\tau-o(1)} + \Omega_0 + R_{-k}(r,f),$$

A'_{-}, Ω_0 *et* R_{-k} *ont les mêmes significations que précédemment.*

39. *Remarque.* — Dans les théorèmes précédents, si, en posant $h = k(p+q)+1$, la fonction $f^{(-h)}$ est méromorphe, alors on peut remplacer l'inégalité (121) par l'inégalité (112)$'$ dans laquelle on majore $Q(r)$ par $S_{-k}(r, f)$ ou par une expression analogue, et au lieu de (119) on peut prendre l'inégalité

$$(125)\quad (p+q)\,T(r,f) < (p+2)\,N\left(r,\frac{1}{f^{(-k)}}\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{p+1} N\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{1}^{q} N\left(r,\frac{1}{f^{(-k)}-b_j}\right)$$
$$-\left[N\left(r,\frac{1}{f'}\right) + N\left(r,\frac{1}{f^{(-k+1)}}\right)\right] + S_{-k}(r,f).$$

où a_{p+1} *a la même signification que dans l'inégalité* (111)$''$.

II. — Cas où on limite l'indice $T(r, f)$ non affecté d'un coefficient.

40. Dans le cas simple et important où il s'agit de limiter $T(r, f)$, on peut obtenir une inégalité de forme plus favorable que celle déduite de (119) ou de (121).

Soit c un nombre fini pouvant être nul; au lieu de considérer $f^{(-k)}$ comme au n° 36, nous prenons $f^{(-k)}-c$ et nous trouvons

$$(126)\quad T(r, f^{(-k)}-c) < T(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}-c}\right) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{f}{f^{(-k)}-c}\right) + \log\left|\frac{f^{(-k)}(0)-c}{f(0)}\right|.$$

Soient ensuite a, b deux nombres finis ou non, mais distincts entre eux et différents de zéro; l'application de la seconde inégalité fondamentale à f pour les trois valeurs a, b et 0 donne

$$T(r, f) < N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) - N_1(r) + S(r),$$

avec

$$S(r) = 27\log\frac{4}{d} + 3\log|f(0)| + \log\left|\frac{1}{f'(0)}\right| + R_1(r, f).$$

En portant cette borne de $T(r, f)$ dans (126), il vient une inégalité de la forme

$$(126)'\quad T(r, f^{(-k)}-c) < N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}-c}\right) - N_1(r) + Q_1(r).$$

D'autre part, de l'identité $f = (f^{(-k)}-c)\dfrac{f}{f^{(-k)}-c}$, on déduit

$$(127)\quad T(r, f^{(-k)}-c) > T(r, f) - k\overline{N}(r, f) - m\left(r, \frac{f}{f^{(-k)}-c}\right).$$

Si l'on observe que $N_1(r, f) > k\overline{N}(r, f)$, alors à partir des inégalités (126)′ et (127), on arrive facilement à ce résultat :

II. *f et $f^{(-k)}$ étant définies comme dans le théorème* I, *soient a, b deux nombres distincts non nuls (dont l'un peut être infini et c un nombre fini (pouvant être zéro). On suppose que les distances sphériques des trois nombres a, b, 0 pris deux à deux et celle de c*

à l'infini soient toutes au moins égales à une quantité positive d *et l'on désigne par* K *un nombre positif assez grand. Alors, si* $f(0) \neq 0$, a, b; $f'(0) \neq 0$; $f^{(-k)}(0) \neq c$, ∞; *et* $f^{(-k+1)}(0) \neq 0$, *on a, pour* $r > r_0$, *l'inégalité*

$$(128)\quad T(r, f) < N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + 2N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}-c}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S_{-k}(r, f) \quad (^1)$$

en excluant éventuellement une suite d'intervalles de longueur totale finie. Le terme complémentaire a pour expression

$$(129)\quad S_{-k}(r, f) = A_{-k} + 27\log\frac{1}{d} + 2\log\frac{1}{d'} + 2\overset{+}{\log}|f(0)| + 2\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right| + \log\left|\frac{1}{f'(0)}\right| + 2\overset{+}{\log}|f^{(-k)}(0)| + B_{-k}(\log r + K) + B'_{-k}\overset{+}{\log}\frac{1}{r} + C_{-k}\overset{+}{\log} T(r, f) + o(1),$$

$A_{-k}, \ldots, C_{-k}$ *étant des constantes numériques qui ne dépendent que de* k.

41. Dans les cas particuliers considérés au n° **37**, on trouve les théorèmes suivants :

II$_a$. *On conserve les hypothèses de* II, *et l'on suppose que soit d'ordre fini* $< \lambda$; *alors on a pour* $r > r_0$ *l'inégalité*

$$(130)\quad T(r, f) < N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}-c}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S_{-k}(r, f),$$

avec

$$(131)\quad S_{-k}(r, f) = A_{-l}(\lambda) + 27\log\frac{1}{d} + 2\log\frac{1}{d'} + 2\overset{+}{\log}|f(0)| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right| + \log\left|\frac{1}{f'(0)}\right| + \overset{+}{\log}|f^{(-k)}(0)| + B_{-k}\overset{+}{\log}\frac{1}{r} + C_{-k}(\lambda)\log r.$$

---

(1) Cette inégalité est de forme plus generale que celle antérieurement donnée [12, g] dont l'indice $N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}-b}\right)$ doit être affecte d'un coefficient 2.

II$_b$. *On conserve les hypothèses de* II; *et l'on suppose que* $f^{(-k)}$ *admette un nombre fini* c *comme valeur exceptionnelle de défaut* $\delta^{(-k)}(c) > 0$; *alors en excluant éventuellement une suite d'intervalles de longueur totale finie, on a pour* $r < \rho$ *l'inégalité* (130). *Le reste a pour expression*

$$S_{-k}(r, f) = A'_{-k} \log \frac{1}{\delta^{(-k)}(c) - o(1)} + \omega_0 + \log \rho + R_{-k}(r, f), \tag{132}$$

avec

$$\omega_0 = 27 \log \frac{1}{d} + 2 \log \frac{1}{d'} + 2 \overset{+}{\log} |f(0)| + 2 \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(0)} \right| + \log \left| \frac{1}{f'(0)} \right| + 2 \overset{+}{\log} |f^{(-k)}(0)|.$$

II$_c$. *On conserve toujours les hypothèses de* II; *et l'on suppose que*

$$m(r, f^{(-k)}) \leqq [\tau + o(1)]\, T(r, f^{(-k)}) \qquad (0 < \tau < 1);$$

alors on a pour $r < \rho$ *l'inégalité* (130), *avec*

$$S_{-k}(r, f) = A'_k \log \frac{1}{1 - \tau - o(1)} + \omega_0 + R_{-k}(r, f), \tag{133}$$

ω_0 *étant l'expression qu'on a vue dans* II$_b$.

III. — Propositions sur les valeurs exceptionnelles.

42. Comme conséquence immédiate on peut d'abord établir le théorème suivant :

III. *Étant donnée une fonction méromorphe* $f(x)$ *qui ne se réduit pas à zéro, si* $f^{(-k)}$, *une de ses primitives d'ordre* k *supposées méromorphes, admet un nombre fini* c (*pouvant être nul*) *comme valeur déficiente de défaut* 1, *alors la fonction* f *n'admet pas deux nombres non nuls distincts* a *et* b (*finis ou non*) *comme valeurs déficientes telles que la somme de leurs défauts dépasse un nombre* $l > 1$.

Appliquons le théorème II du n° **40**. Admettons que $\delta(a) + \delta(b) \geqq l$; on a

$$N\left(r, \frac{1}{f - a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f - b}\right) < [2 - l + o(1)]\, T(r, f), \tag{134}$$

$$N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)} - c}\right) < [1 - \delta^{(-k)}(c) + o(1)]\, T(r, f^{(-k)}), \tag{135}$$

Puis, en tenant compte de l'hypothèse, on trouve

$$T(r, f^{(-k)}) < [1 + o(1)]\, T(r, f)$$

et l'inégalité (135) s'écrit

$$(135)' \qquad N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)} - b}\right) = o(1)\, T(r, f_0).$$

Portons les bornes (134) et (135)' dans (130), il vient

$$(136) \qquad [l - 1 - o(1)]\, T(r, f) < S_{-k}(r, f)$$

et il en résulte une inégalité de la forme (49). Ce qui donne une contradiction avec l'hypothèse.

En particulier, on a la proposition :

III'. *Étant donnée une fonction méromorphe $f(x)$ si une de ses primitives supposées non constantes et méromorphes admet un nombre fini comme valeur déficiente de défaut* 1 *et si la fonction f admet l'infini comme valeur déficiente de défaut* 1, *alors f n'admet aucune valeur déficiente finie différente de zéro.*

On peut ensuite démontrer le théorème :

IV. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe non constante, telle que ses primitives d'ordre $h = kp$ soient aussi méromorphes. Si une primitive $f^{(-k)}$ admet une valeur déficiente finie b de défaut* 1, *la fonction f n'admet pas un ensemble de valeurs déficientes infinies ou finies distinctes entre elles et différentes de zéro, telles que la somme de leurs défauts dépasse un nombre $l > 1$.*

Appliquons le théorème I_b avec un peu de modification. Au lieu de $f^{(-k)}$ si l'on prend $f^{(-k)} - b$, on trouve par le même procédé l'inégalité de forme un peu plus générale

$$(137) \quad p\, T(r, f) < N(r, f) + kp\, \overline{N}(r, f) + p\, N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)} - b}\right) + \sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) - \left[N_1(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right] + S_{-k}(r, f).$$

Si $f^{(h)}$, avec $h = kp$ est méromorphe, l'inégalité (137) s'écrit encore

$$(137)' \quad p\, T(r, f) < N(r, f) + p\, N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)} - b}\right) + \sum^{p} N\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) - \left[N_1(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right] + S_{-k}(r, f).$$

Maintenant supposons que b est pour $f^{(-k)}$ une valeur déficiente de défaut 1 et admettons qu'il existe $p+1$ nombres distincts ∞ et $a^i (i=1, \ldots, p)$ qui sont des valeurs déficientes pour f avec δ comme somme de leurs défauts. On a

$$\sum_{i=1}^{p+1} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) < [p+1-\delta+o(1)]\,T(r, f) \qquad (a_{p+1}=\infty)$$

et l'on trouve, comme pour le théorème précédent,

$$N\left(r, \frac{1}{f^{(-k)}-b}\right) < o(1)\,T(r, f),$$

Au moyen de (137') on trouvera alors une inégalité de forme (49).

Dans le cas où f admet une infinité de valeurs déficientes a_i, il suffit de prendre un nombre l' compris entre 1 et l et un nombre p suffisamment grand de façon que la somme δ' des défauts des $p+1$ valeurs ∞ et $a_1, \ldots, a_p$ soit $> l'$.

Plus généralement, on démontre le théorème :

V. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe transcendante telle que ses primitives d'ordre $k(p+q)+1$ soient aussi méromorphes; si une de ses primitives $f^{(-k)}$ admet comme valeurs déficientes zéro et un ensemble* (E_1) *de nombres finis non nuls $b_j (j=1, \ldots)$ tels que le défaut de zéro soit 1 et la somme des défauts de l'ensemble $\delta^{(-k)}$ dépasse un nombre $l_1 > 0$, alors la fonction f ne peut pas admettre un ensemble de valeurs déficientes infinies ou finies, différentes de zéro et distinctes entre elles telles que la somme de leurs défauts δ dépasse un nombre $l > 1 - l_1$.*

On applique le théorème I_b et l'on raisonne comme pour les deux théorèmes précédents.

43. On peut étudier aussi le cas des fonctions méromorphes dans le cercle-unité. En particulier, il sera intéressant de faire une extension du théorème de Schottky en éliminant la valeur initiale de la primitive que l'on considéra.

IV. — Problèmes d'unicité.

44. On peut se poser des problèmes d'unicité comme dans le cas des dérivées (¹). En partant de (119), on démontre un théorème analogue à XVII du n° 31 et au moyen de ce théorème on arrive au résultat suivant :

VI. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe qui ne se réduit pas à zéro et dont la primitive $f^{(-k)}$ est méromorphe; on suppose qu'elle admet* 0 *et* ∞ *comme valeurs déficientes de défaut* 1. *Soient* $a_i (i = 1, \ldots, 4)$ *quatre valeurs finies non nulles et distinctes entre elles et* $b_j (j = 1, 2, \ldots, 4)$ *quatre valeurs finies non nulles et distinctes entre elles; alors en désignant par* $\overline{\mathrm{E}}^{(-k)}(b)$ *l'ensemble des points analogue à celui désigné par* $\overline{\mathrm{E}}^{(k)}(b)$ *dans le cas des dérivées, la fonction f est univoquement déterminée par cinq ensembles pris d'une façon quelconque parmi les* $\overline{\mathrm{E}}(a_i)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ *et les* $\overline{\mathrm{E}}^{(-k)}(b_j)$ $(j = 1, \ldots, 4)$.

Au lieu de partir de (119) si l'on utilise l'inégalité (111)' avec une légère modification on trouve le résultat suivant :

VII. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe non constante dont la primitive $f^{(-k)}$ est méromorphe, on suppose que l'infini et un nombre fini b nul ou non soient respectivement pour f et pour $f^{(-k)}$ des valeurs déficientes de défaut* 1. *Alors* $a_i (i = 1, 2, 3)$ *étant trois nombres différents de zéro et distincts entre eux, la fonction est univoquement déterminée par les trois ensembles* $\overline{\mathrm{E}}(a_i) (i = 1, 2, 3)$.

45. Dans le cas où l'inégalité (112)' est valable on peut obtenir un résultat sans rien supposer sur la valeur ∞ de f. Soient f_1 et f_2 deux fonctions dont les primitives d'ordre $h = k(p + q) + 1$ sont méromorphes; soient ensuite $a_i (i = 1, \ldots, p + 1)$ $p + 1$ nombres finis non nuls distincts entre eux et $b_j (j = 1, \ldots, q)$ q nombres finis distincts *non nuls* entre eux. Supposons que f_1 et f_2 ne soient pas identiques; on peut démontrer qu'en excluant éventuellement

(¹) Les résultats que nous donnons ici seront développés dans un Mémoire à paraître prochainement.

une suite d'intervalles de longueur totale finie, l'inégalité

$$(138)\quad [p+q-4+o(1)][T(r, f_1)+T(r, f_2)] \\ < \sum_{i=1}^{p+1}{}' \overline{N}_{1\,2}(r, a_i) + \sum_{j=1}^{q} \overline{N}_{1,2}^{(-k)}(r, b_j) + O[\log(r\,T(r, f_1)\,T(r, f_2))]$$

est vérifiée.

Au moyen de cette inégalité, on trouve le résultat :

VIII. *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe qui ne se réduit pas à une fraction rationnelle et dont les primitives d'ordre $k(p+q)+1$ sont aussi méromorphes; si $f^{(-k)}$ admet zéro comme valeur déficient de défaut* 1, *alors en désignant par $a_i (i=1, \ldots, 4)$ quatre valeurs finies non nulles et distinctes entre elles et par $b_j (j=1, \ldots, 4)$ quatre valeurs finies non nulles distinctes entre elles, la fonction est univoquement déterminée par six ensembles pris parmi $\overline{E}(a_i)$ et $\overline{E}^{(-k)}(b_j)$.*

De même si les primitives d'ordre kp de f sont méromorphes on trouve, au moyen de $(111)''$ avec une légère modification, le résultat suivant :

IX. *La fonction f étant définie comme précédemment, on suppose que ses primitives d'ordre kp soient méromorphes et que $f^{(-k)}$ admette un nombre fini b comme valeur exceptionnelle de défaut* 1. *Alors si $a_i (i=1, \ldots, 4)$ sont quatre valeurs finies différentes de zéro et distinctes entre elles, la fonction est univoquement déterminée par les ensembles, $\overline{E}(a_i)$, $(i=1, \ldots, 4)$.*

CHAPITRE IV.

EXTENSIONS AUX FONCTIONS ALGÉBROIDES.

I. — Généralités. Premier théorème fondamental.

46. Les fonctions algébroïdes ont été d'abord étudiées par Rémoundos [22, *a*]. MM. Selberg et Valiron ont ensuite étendu à ces fonctions les théorèmes fondamentaux de M. R. Nevanlinna par des méthodes différentes [**23**, *a*; **27**, *c*, *f*] et, d'après ce que M. Selberg a indiqué, M. F. Nevanlinna a également obtenu une telle extension par sa méthode basée sur l'emploi de certaines solutions de l'équation de Poincaré-Picard $\Delta u = e^{iu}$. Dans un travail plus récent, M. Ullrich, en introduisant un indice relatif à la ramification, a obtenu des résultats qui précisent certains résultats antérieurs et, en ce qui concerne la dérivée, a établi une double inégalité analogue à (64) [**26**, *b*].

Par l'emploi d'une méthode due à M. H. Cartan, Valiron a trouvé d'une façon simple, entre la croissance d'une algébroïde et celle des coefficients de l'équation qui la définit une relation jouant un rôle capital; et après avoir établi ses théorèmes fondamentaux, il en a fait des applications très étendues. Nous allons exposer la théorie de cet auteur en renvoyant, pour les résultats de MM. Selberg et Ullrich, à leurs Mémoires.

47. Fonction caractéristique d'une algébroïde. — On appelle fonction algébroïde méromorphe pour $|x| < R \leqq \infty$, la fonction $u(x)$ définie par une équation algébrique

$$\psi(x, u) = \psi(u) \equiv A_\nu(x) u^\nu + A_{\nu-1}(x) u^{\nu-1} + \ldots A_0(x) = 0 \tag{139}$$

dont les coefficients $A_j(x)$ sont des fonctions données de x holomorphes pour $|x| < R$. On suppose essentiellement que les A_j ne s'annulent pas simultanément pour une même valeur de x; $u(x)$ est généralement une fonction multiforme à ν branches $u_k(x)$ $(k = 1, \ldots, \nu)$. Observons tout de suite que $u'(x)$ est aussi une fonction algébroïde à ν branches et que l'équation qui la définit s'obtient en éliminant u entre (139) et

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial u} u' = 0.$$

On pose

$$m(r, u) = \frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} \sum_1^\nu \overset{+}{\log} |u_k(r e^{i\varphi})| \, d\varphi$$

et $n(r, g)$ désignant le nombre de pôles de $g(x)$ dans le cercle $|x| \leqq r$ comptés avec leurs ordres de multiplicité, on a

$$N\left(r, \frac{1}{A_\nu}\right) = \frac{1}{\nu} \int_0^r \left[n\left(t, \frac{1}{A_\nu}\right) - n\left(0, \frac{1}{A_\nu}\right) \right] \frac{dt}{t} + n\left(0, \frac{1}{A_\nu}\right) \log r.$$

Convenons de poser $N(r, u) = \frac{1}{\nu} N\left(r, \frac{1}{A_\nu}\right)$ et pour une valeur finie a

$$N\left(r, \frac{1}{u-a}\right) = \frac{1}{\nu} N\left(r, \frac{1}{\psi(a)}\right),$$

alors la fonction caractéristique est définie par

$$T(r) = T(r, u) = m(r, u) + \frac{1}{\nu} N\left(r, \frac{1}{A_\nu}\right) = m(r, u) + N(r, u). \tag{140}$$

Pour $\nu = 1$, on retombe sur la fonction définie par M. R. Nevanlinna.

48. Propriétés fondamentales de $T(r, u)$. — x étant considéré comme une constante, on a identiquement

$$\psi(x, u) = A_\nu(x)[u - u_1(x)]]u - u_2(x)]\ldots[u - u_\nu(x)].$$

Posons $x = re^{i\varphi}$, $u = e^{i\theta}$ et considérons l'intégrale double

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\psi(re^{i\varphi}, e^{i\theta})|\, d\theta.$$

D'après la formule de Jansen, on trouve

$$V(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\psi(x, e^{i\theta})|\, d\theta = \log|A_\nu(x)| + \sum_1^\nu \overset{+}{\log}|u_k(x)| \tag{141}$$

et en désignant par C_λ le premier coefficient non nul du développement de Laurant de $A_\nu(x)$ autour de l'origine, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|A_\nu(re^{i\varphi})|\, d\varphi = \log|C_\lambda| + N\left(r, \frac{1}{A_\nu}\right). \tag{142}$$

Il vient donc

$$I = \log|C_\lambda| + \nu\, T(r, u). \tag{143}$$

Maintenant intervertissons l'ordre des intégrations de I, et appliquons la formule de Jensen à l'intégrale intérieure, il vient

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{\psi(e^{i\theta})}\right) d\theta + \sum_1^\nu \overset{+}{\log}|u_k(o)|. \tag{144}$$

La comparaison de (143) et de (144) donne

$$\nu T(r, u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1'}{\psi(e^{i\theta})}\right) d\theta + \sum \overset{+}{\log}|u_k(o)| - \log|C_\lambda|, \tag{145}$$

relation qui est analogue à (8) et qui permet de prouver que $T(r, u)$ est une fonction *croissante*, *convexe en* $\log r$.

49. Fonction $\mu(r, A)$ et premier théorème fondamental. — Désignons par $A(x)$ le plus grand des nombres $|A_j(x)|\ (j = 1, \ldots, \nu)$ pour chaque valeur de x; Valiron a introduit la fonction

$$\mu(r, A) = \frac{1}{2\pi\nu}\int_0^{2\pi} \log A(re^{i\varphi})\, d\varphi. \tag{146}$$

C'est une fonction convexe en $\log r$. En effet, les $\log|A_j(x)$ étant harmoniques (par suite sous-harmoniques), la proposition a du n° 5 prouve que $\log A(x)$ est sous-harmonique et la proposition b permet ensuite de démontrer qu'il en est de même de l'intégrale de (146). Or $\mu(r, A)$ est une fonction ne dépendant que de la seule variable r, donc elle est convexe en $\log r$ d'après le théorème de M. P. Montel rappelé à ce numéro.

On peut établir une relation simple entre $T(r, u)$ et $\mu(r, A)$. On a

$$V(x) \leqq \log\left|\sum A_j(x)\right| \leqq \log A(x) + \log(\nu+1). \tag{147}$$

Comme de la définition de $V(x)$ et de (143), on déduit

$$T(r, u) + \frac{1}{\nu}\log|C_\lambda| = \frac{1}{2\pi\nu}\int_0^{2\pi} V(re^{i\varphi})\, d\varphi, \tag{148}$$

on trouve immédiatement

$$T(r) + \frac{1}{\nu}\log|C_\lambda| \leqq \mu(r, A) + \frac{1}{\nu}\log(\nu+1). \tag{149}$$

Pour avoir une inégalité de sens contraire, on peut partir de

$$\left|\frac{A_j(x)}{A_\nu(x)}\right| \leqq \sum |u_1(x)\ldots u_{\nu-j}(x)| \cdot \qquad (j = 0, 1, \ldots, \nu-1),$$

la sommation étant étendue aux C_ν^j combinaisons des racines de $\nu-j$ à $\nu-j$. On en déduit pour tous les j, même pour $j=\nu$, l'inégalité

$$\log|A_j(x)| \leqq \log|A_\nu(x)| + \log C_\nu^j + \sum_1^\nu \overset{+}{\log}|u_k(x)|,$$

a fortiori

$$\log A(x) \leqq \log|A_\nu(x)| + \sum_1^\nu \overset{+}{\log}|u_k(x)| + \nu\log 2,$$

et en tenant compte de (142) on trouve

$$(150)\qquad \mu(r, \mathrm{A}) \leqq \mathrm{T}(r, u) + \frac{1}{\nu}\log|\mathrm{C}_\lambda| + \log 2.$$

Les inégalités (149) et (150) donnent l'énoncé suivant que l'on peut considérer comme premier théorème fondamental :

I. *L'expression*

$$\mathrm{T}(r, u) + \frac{1}{\nu}\log|\mathrm{C}_\lambda| - \mu(r, \mathrm{A})$$

est en module inférieure à log 2.

50. $u(x)$ étant la fonction algébroïde définie par (139), sa transformée homographique $\frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ est aussi fonction algébroïde à ν branches qui vérifie une équation de la forme (139) dont les coefficients $\mathrm{B}_j(x)$ sont des fonctions linéaires des $\mathrm{A}_j(x)$ et inversement, si Λ est le plus grand des nombres α, β, γ et δ, on a, $\mathrm{B}(x)$ étant le plus grand des nombres $\mathrm{B}_j(x)$ $(j = 0, 1, \ldots, \nu)$ pour chaque valeur de x,

$$\mathrm{B}(x) < (\nu + 1)(2\Lambda)^\nu \mathrm{A}(x)$$

et inversement; donc

$$|\mu(r, \mathrm{B}) - \mu(r, \mathrm{A})| < \log 2e\Lambda.$$

$\mathrm{B}_\nu(x)$ peut se mettre sous la forme $\gamma^\nu \psi\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$; en désignant par C'_λ le premier coefficient non nul de son développement autour de l'origine, on a d'après le théorème I,

$$(151)\qquad \left[\mathrm{T}\left(r, \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}\right) - \mathrm{T}(r, u) + \frac{1}{\nu}\log\left|\frac{\mathrm{C}'_\lambda}{\mathrm{C}_\lambda}\right|\right] < \mathrm{K} + \log\Lambda,$$

K étant une constante absolue.

En se rapportant à l'expression de $\mathrm{T}(r, u)$, on obtient le corollaire

I'. *Soit a un nombre donné; on a*

$$(152)\qquad \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{u - a}\right) < \mathrm{T}(r, u) + h(a, \nu),$$

$h(a, \nu)$ ne dépendant que de a et de ν et du comportement à l'origine de A_ν et $\psi(a)$.

51. **Ordre d'une algébroïde.** — L'ordre d'une algébroïde de u se définit au moyen de sa fonction caractéristique comme pour une fonction méromorphe; dans le cas où le domaine de méromorphie est tout le plan ouvert; il est égal à

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log T(r, u)}{\log r}.$$

L'ordre peut être zéro, fini et positif ou infini. En vertu du théorème I, pour que u soit d'ordre fini ρ, il faut et il suffit que les A_j soient tous d'ordre ρ au plus, l'un au moins étant d'ordre ρ [1].

Dans le cas de l'ordre infini, la définition des ordres que nous avons introduite pour une fonction méromorphe [12, *a* et n° 25] s'étend immédiatement ici.

Cette définition permet d'avoir dans des applications le degré de précision que comportent les résultats donnés par Borel pour les fonctions méromorphes dans le cas de l'ordre fini [2].

II. — Extensions des théorèmes se rattachant au théorème du module minimum de M. Hadamard. Limitation de $m\left(r, \frac{u'}{u}\right)$.

52. Au théorème bien connu de M. Hadamard sur le module minimum d'une fonction entière, se rattachent quelques théorèmes relatifs à une fonction méromorphe, obtenus par M. R. Nevanlinna au moyen de la méthode logarithmique [18, *d*]. Dans le cas des algébroïdes, une extension du théorème de M. Hadamard a déjà été faite par Rémoundos [22, *a*]; on peut étendre aussi ceux de M. R. Nevanlinna [27, *g*].

De l'égalité

$$u_k(x) = -\frac{1}{A_\nu(x)}[A_{\nu-1}(x) + A_{\nu-2}(x)\,u_k(x)^{-1} + \ldots + A_0(x)\,u_k(x)^{-\nu+1}],$$

on déduit, en conservant la signification de $A(x)$ du n° 49,

$$\overset{+}{\log} |u_k(x)| \leqq \log \left|\frac{A(x)}{A_\nu(x)}\right| + \log \nu. \tag{153}$$

(1) On suppose que $A_\nu(x)$ est un produit canonique.

(2) Comme application, on peut voir un résultat récent de M. Baganas [2, *b*].

Considérons la fonction $f(x) = \frac{A_j(x)}{A_\nu(x)}$; la formule de Poisson-Jensen donne, pour $|x| = r < t$,

$$\overset{+}{\log}|f(x)| \leqq \frac{t+r}{t-r} m(t, f) + \sum_{|b_\mu|<t} \log \frac{2t}{|x - b_\mu|}, \tag{154}$$

les b_μ étant les pôles de f. En observant que pour $\tau < r < t$, on a

$$\frac{t+\tau}{t-\tau} < \frac{t+r}{t-r},$$

il vient

$$\int_0^r \overset{+}{\log} M(\tau, f)\, d\tau \leqq \frac{t+r}{t-r} r\, m(t, f) + \sum_{|b_\mu|<t} \int_0^t \log \frac{2t}{|\tau - |b_\mu||} d\tau$$

et l'on trouve, en désignant par k une valeur arbitraire > 1 et en posant $t = \sqrt{k}\, r$,

$$\frac{1}{r}\int_0^r \overset{+}{\log} M(\tau, f)\, d\tau \leqq C(k)\, T(kr, f),$$

$C(k)$ étant une constante qui ne dépend de k.

Maintenant, soit $A_{j,\nu}$ le plus grand des deux nombres $A_j(x)$ et $A_\nu(x)$ pour chaque valeur de x; en vertu d'un résultat de M. H. Cartan [6, d] (¹), on a

$$T\left(r, \frac{A_j}{A_\nu}\right) + \log|C_\lambda| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log A_{j,\nu}(r e^{i\varphi})\, d\varphi < \nu\, \mu(r, A)$$

et, d'après (150), on trouve

$$T(r, f) = T\left(r, \frac{A_j}{A_\nu}\right) < \nu\, T(r, u) + \nu \log 2. \tag{155}$$

En tenant compte de (153), on arrive aisément à la proposition suivante qui généralise un théorème de M. R. Nevanlinna.

II. *Soit $u(x)$ une fonction algébroïde définie par* (139) *et méromorphe pour $|x| < R \leqq \infty$; à un nombre donné quelconque $k < 1$, correspond un nombre $C(k)$, tel que l'on ait*

$$\frac{1}{r}\int_0^r \log M(t, u)\, dt < C(k)\, T(kr, u), \tag{156}$$

$M(t, u)$ désignant le module maximum de $u(x)$ pour $|x| = t$.

(¹) *Voir* aussi le chapitre suivant.

On voit de même que la convergence de

$$(157) \qquad \int_1^\infty T(t, u)\, t^{-\rho-1}\, dt \qquad (\rho > 0)$$

entraîne celle de

$$(158) \qquad \int_1^\infty \log M(t, u)\, t^{-\rho-1}\, dt$$

et aussi celle de

$$(159) \qquad \int_1^\infty N\left(t, \frac{1}{\psi(a)}\right) t^{-\rho-1}\, dt$$

pour tous les a. La convergence de (159) pour une valeur a jointe à la convergence de (158) entraîne évidemment celle de (157), donc celle de (159) pour tous les a.

53. Pour obtenir une limitation pour $m\left(r, \frac{u'}{u}\right)$, on peut partir de l'inégalité (154). Supposons $|x - b_\mu| > 2h$ et prenons $t = r + h$; chaque terme de la somme du second membre est $< \log \frac{t}{h}$ et l'on a

$$\overset{+}{\log} |f(x)| \leq \frac{2r+h}{h} T(r+h, f) + n(r+h, f) \log \frac{r+h}{h}.$$

D'après la définition et la convexité de l'indice N, on trouve

$$\begin{aligned} \overset{+}{\log} |f(x)| \leq & \left[\frac{2r+h}{h} + 2\frac{r+h}{h} \log \frac{r+h}{h}\right] \\ & \times \left[T(r+2h, f) + n(0, f)\left(1 + \overset{+}{\log} \frac{1}{r}\right)\right], \end{aligned}$$

a fortiori on voit que si $A_\nu(x)$ ne s'annule pas dans la couronne (C_h)

$$0 < r - 2h < |x| < r + 2h,$$

on a, pour $|x| = r$,

$$(160) \qquad \overset{+}{\log} |f(x)| \leq 11 \left(\frac{r}{h}\right)^2 \left[T(r+2h, f) + n(0, f)\left(1 + \overset{+}{\log} \frac{1}{r}\right)\right]$$

et, en vertu de (155),

$$\overset{+}{\log} \left|\frac{A_j(x)}{A_\nu(x)}\right| \leq 11\nu \left(\frac{r}{h}\right)^2 [T(r+2h, u) + K],$$

avec

$$\nu K = \nu^2 \log 2 + \lambda\left(1 + \overset{+}{\log} \frac{1}{r}\right).$$

En portant cette borne dans (153) et en appliquant le résultat obtenu aussi à la fonction $\left|\frac{1}{u(x)}\right|$, on déduit des deux résultats obtenus, pour toutes les branches de $u(x)$, l'inégalité

$$(161)\qquad \big|\log|u(x)|\big| < 11\nu\left(\frac{r}{h}\right)^2\left[\mathrm{T}(r+2h,\,u)+\sigma+\sigma'\overset{+}{\log}\frac{1}{r}\right],$$

où $r=|x|$, σ et σ' ne dépendent que du comportement à l'origine des deux fonctions $\mathrm{A}_\nu(x)$ et $\mathrm{A}_0(x)$. Cette inégalité est valable pourvu que ces deux fonctions ne s'annulent pas dans la couronne $(r-2h,\ r+2h)$.

54. Les branches $u_k(x)$ ne s'annulent pas et restent finies dans la couronne dans laquelle (161) est vérifiée, mais elles peuvent admettre des points de ramification. Les valeurs de x fournissant de tels points sont les zéros de la fonction holomorphe formée par le discriminant du polynome $\psi(u)$ [1]; elle est de la forme

$$\mathrm{J}(x)=\sum\beta\,\mathrm{A}_0^{\alpha_0}\mathrm{A}_1^{\alpha_1}\ldots\mathrm{A}_\nu^{\alpha_\nu},$$

Ce polynome par rapport aux A_j étant de degré $2(\nu-1)$. On a donc, d'après l'égalité de Jensen et le théorème I.

$$(162)\qquad \mathrm{N}\left(r,\frac{1}{\mathrm{J}}\right)<2\nu(\nu-1)\,\mathrm{T}(r,\,u)+\sigma'',$$

σ'' ne dépendant que du comportement à l'origine des fonctions $\mathrm{A}_j(x)$.

Plaçons-nous dans une couronne $0<r-2h<|t|<r+2h<\mathrm{R}$ ne contenant pas de zéro de $\mathrm{A}_0(t)$, $\mathrm{A}_\nu(t)$ et $\mathrm{J}(t)$; les branches de $u(t)$ y sont partout régulières, donc sont holomorphes dans tout cercle tangent aux deux circonférences limitant la couronne. Soit $|t-x|<2h$ un tel cercle et appelons $\log u_k(t)$ la branche de $\log u(t)$ qui prend au point x la valeur $\log|u_k(x)|+i\omega$, avec $|\omega|\leqq\pi$. D'après le théorème de Hadamard-Carathéodory sur la partie réelle d'une fonction holomorphe [2] et d'après (161), on a

---

[1] *Voir* par exemple, VALIRON, *Équations fonctionnelles*, 1945, p. 9.
[2] *Voir* VALIRON, *Théorie des fonctions*, 1948, p. 373.

pour $|t-x| \dot{<} h$

$$(163) \qquad |\log u_\lambda(x)| < 4\left\{33\left(\frac{8r}{h}\right)^2\left[T(r+2h,\, u)+\sigma+\sigma'\overset{+}{\log}\frac{4}{r}\right]+2\pi\right\}$$

et, en appliquant le théorème de Cauchy, il s'ensuit que, pour toutes les branches,

$$(164) \qquad \left|\frac{u'(x)}{u(x)}\right| < 8448\left(\frac{r}{h}\right)^2\frac{1}{h}\left[T(r+2h,\, u)+\sigma''+\sigma'\overset{+}{\log}\frac{1}{r}\right].$$

55. Pour les valeurs de r pour lesquelles (164) est vérifiée, on a

$$(165) \qquad m\left(r,\, \frac{u'}{u}\right) < \overset{+}{\log} T(r+2h,\, u)+3\overset{+}{\log}\frac{r}{h}+2\overset{+}{\log}\frac{1}{r}+\sigma''',$$

σ''' ne dépendant que de ν et du comportement à l'origine de A_ν et A_0.

Donnons-nous deux nombres r' et r'' tels que $0<r'<r''<R$ et posons $t=\frac{r'+r''}{2}$. D'après l'inégalité (162), d'après les propriétés de $T(r,\, u)$ et d'après la formule de Jensen, le nombre total des points de module moindre que t et qui sont zéros, pôles ou points de ramification de $u(x)$ est au plus égal à

$$n'=\left[HT(r'',\, u)+H'\left(1+\overset{+}{\log}\frac{1}{r''}\right)\right]:\log\frac{r''}{t},$$

H ne dépendant que de ν et H' de ν et du comportement de A_j à l'origine. Dans l'intervalle

$$r', \quad r'+\frac{r''-r'}{(n'+2)^9}<t$$

il existe au moins une valeur r pour laquelle (165) est vérifiée en prenant $h=\frac{r''-r'}{4(n'+2)^3}$. Pour cet r, on aura

$$\begin{aligned} m\left(r,\, \frac{u'}{u}\right) &< \overset{+}{\log} T(r'',\, u)+3\overset{+}{\log}\frac{r}{r''-r'}+9\overset{+}{\log} n'+2\overset{+}{\log}\frac{1}{r}+\sigma^{\text{IV}} \\ &< 10\overset{+}{\log} T(r'',\, u)+12\log\frac{r''}{r''-r'}+3\overset{+}{\log}\frac{1}{r}+\sigma^{\text{V}}, \end{aligned}$$

σ^{V} ne dépendant toujours que de ν et du comportement à l'origine.

Comme $\frac{u'}{u}$ est une fonction algébroïde à ν branches, la fonction

$$T\left(r,\, \frac{u'}{u}\right)=m\left(r,\, \frac{u''}{u}\right)+\frac{1}{\nu}N\left(r',\, \frac{u'}{u}\right)$$

est croissante et l'on aura

$$m\left(r', \frac{u'}{u}\right) < m\left(r, \frac{u'}{u}\right) + \frac{1}{\nu}\left[N\left(r, \frac{u'}{u}\right) - N\left(r', \frac{u'}{u}\right)\right].$$

Or

$$r - r' < \frac{r'' - r'}{(n' + 2)^2}$$

et les infinis $\frac{u'}{u}$ ne proviennent que des zéros de $A_0(x)$, $A_\nu(x)$ et $J(x)$, leur nombre pour $|x| < t$ est au plus égal à n', on a donc

$$N\left(r, \frac{u'}{u}\right) - N\left(r', \frac{u'}{u}\right) < n' \log\frac{r}{r'} < n'\,\frac{r - r'}{r'} < \frac{r'' - r'}{r'(n' + 2)} < 1,$$

pourvu que $r'' - r' < r'$. Par suite,

$$m\left(r', \frac{u'}{u}\right) < 10 \overset{+}{\log} T(r'', u) + 12 \overset{+}{\log}\frac{r''}{r'' - r'} + 3 \overset{+}{\log}\frac{1}{r'} + \sigma^{\text{VI}}.$$

La restriction $r'' < 2r'$ peut être supprimée puisque $T(r)$ croît et que le second terme du second membre est borné pour $r'' > 2r'$. On arrive ainsi au théorème fondamental analogue au lemme de M. R. Nevanlinna :

III. *Si $u(x)$ est la fonction définie par* (139), *les $A_j(x)$ étant holomorphes pour $|x| < R \leq \infty$, on a*

$$m\left(r, \frac{u'}{u}\right) < 10 \overset{+}{\log} T(t, u) + 12 \log\frac{t}{t - r} + 3 \overset{+}{\log}\frac{1}{r} + \sigma_1 \tag{166}$$

pourvu que $0 < r < t < R$, σ_1 *ne dépendant que de ν et du comportement des $A_j(x)$ à l'origine.*

Supposons $R = \infty$, on a pour le cas de l'ordre fini

$$m\left(r, \frac{u'}{u}\right) < O(\log r)$$

et dans le cas de l'ordre infini, en appliquant le théorème de Borel sur les fonctions croissantes,

$$m\left(r, \frac{u'}{u}\right) < O\,[\log T(r, u) + \log r],$$

sauf peut-être pour une suite d'intervalles de longueur totale finie.

III. — Second théorème fondamental.

56. Dans sa première Note [27, c], Valiron a indiqué simplement qu'en écrivant

$$(167) \qquad (u-a_2)\ldots(u-a_p) \equiv \frac{\dfrac{u'}{u-a_1}}{\displaystyle\sum_{h=1}^{p} B_1 \frac{u'}{u-a_h}} \quad [1]$$

pour $u = u_k(x)$ $(k = 1, \ldots, \nu)$ et formant les fonctions symétriques élémentaires, on arrive à l'inégalité

$$(168) \qquad \nu(p-2\nu)\,T(r) < \sum_{1}^{p} N\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right) + S(r),$$

et il n'a pas donné le calcul même dans son Mémoire cité. Nous avons complété la démonstration de cet important théorème ; voici ses grandes lignes.

De l'identité (167), on peut déduire en posant $x = r e^{i\varphi}$

$$(169) \qquad (p-1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|A_\nu|\,d\varphi + \sum_{h=2}^{p} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{1}{\psi(a_h)}\right| d\varphi$$
$$< \sum_{k=1}^{\nu}\sum_{h=2}^{p} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{u'_k}{u_k-a_h}\right| d\varphi$$
$$+ \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{u_k-a_1}{u'_k}\right| d\varphi$$
$$+ \sigma_1 - \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|F_k|\,d\varphi,$$

où $F_k = (u_k - a_2)\ldots(u_k - a_p)$ et σ_1 ne dépend que de ν, de p et des B_{hk}. D'après la formule de Jensen, on a pour le premier membre

$$(p-1)\,N\left(r, \frac{1}{A_\nu}\right) - \sum_{h=2}^{p} N\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right) + \sigma_2,$$

σ_2 étant une constante qui ne dépend que du comportement à l'origine de A_φ et des $\psi(a_h)$.

---

[1] On peut prendre aussi une identité plus symétrique.

Envisageons le second membre de (169). Supposons que l'équation qui définit u' est $\psi_1(u') \equiv B_\nu u'^\nu + \ldots + B_0 = 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{u_k - a_1}{u'_k}\right| d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{B_\nu \psi(a_1)}{A_\nu \psi_1(0)}\right| d\varphi + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{u'_k}{u_k - a_1}\right| d\varphi.$$

Comme on sait que $B_\nu = A_\nu^2 J$ et comme on a vu que J est de degré $2(\nu - 1)$ par rapport aux $A_0, A_1, \ldots, A_\nu$, on trouve en vertu du théorème I que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{B_\nu \psi(a_1)}{A_\nu \psi_1(0)}\right| d\varphi < \nu(2\nu - 1)\,T(r, u) + N\left(r, \frac{1}{\varphi(a_1)}\right) - N\left(r, \frac{1}{\varphi_1(0)}\right).$$

Maintenant, en désignant par a un nombre positif tel que

$$a \geqq |a_h| \qquad (h = 2, \ldots, p),$$

on trouve

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|F_k|\, d\varphi > (p-1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|u_k|\, d\varphi - (p-1)\overset{+}{\log}|a| - 2(p-1)\log 2.$$

Portons tous ces résultats dans (169) et appliquons l'inégalité (166); on obtient une inégalité de la forme (168). Remarquons que a_1 peut être fini ou infini. Avec les notations que nous avons précisées au n° 47, on a l'énoncé :

IV. *Soit $u(x)$ une fonction algébroïde méromorphe pour $|x| < R \leqq \infty$ et définie par (139) et soient $a_h (h = 1, \ldots, p)$ p nombres distincts dont l'un peut être infini; on a pour $r < t < R$ l'inégalité*

$$(170) \qquad (p - 2\nu)\,T(r, u) < \sum_1^p N\left(r, \frac{1}{u - a_h}\right) - N\left(r, \frac{1}{u'}\right) + S(r, u).$$

Le terme complémentaire est de la forme

$$(171) \qquad S(r, u) = \sigma + \sigma \overset{+}{\log}\frac{1}{r} + \beta \log\frac{t}{t - r} + \gamma \overset{+}{\log} T(t, u),$$

où α, β, γ sont des nombres ne dépendant que de ν et de p tandis que σ est une constante ne dépendant que des conditions à l'origine des A_ν et $\psi(a_h)$ à part ν et p.

Supposons $R = \infty$; si u est d'ordre fini, on a $S(r, u) < O(\log r)$ et dans le cas de l'ordre infini, on a

$$S(r, u) < O[\log T(r, u) + \log r]$$

en excluant éventuellement une suite d'intervalles de longueur totale finie.

IV. — Autres théorèmes fondamentaux.

57. En faisant entrer en jeu des indices de densite relatifs à u', nous avons obtenu une inégalité qui étend (170) et qui est analogue à celle de M. Milloux du n° 19 pour une fonction méromorphe [12, *h*].

De l'identité

$$\prod_{k=1}^{\nu}\prod_{h=1}^{p}\frac{1}{u_k - a_h} \equiv \prod_{k=1}^{\nu}\left(\sum_{h=1}^{p} B_{hk}\frac{u'_k}{u_k - a_h}\right)\frac{1}{u'_k},$$

nous déduisons, en posant $x = re^{i\varphi}$ et à l'aide de la formule de Jensen, une inégalité de la forme

$$(172)\qquad p\,N\left(r, \frac{1}{A_\nu}\right) - \sum_{h=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right)$$
$$< \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_1^{\nu}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{u'_k}\right|d\varphi + \nu\sum_1^{p} m\left(r, \frac{u'}{u - a_h}\right)$$
$$-\sum_1^{\nu}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|(u_k - a_1)\ldots(u_k - a_p)|\,d\varphi + \sigma,$$

σ ne dépendant que de ν, p, B_{hk} et du comportement à l'origine des fonctions A_ν et des $\psi(a_h)$.

On peut écrire

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_1^{\nu}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{u'_k}\right|d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{B_\nu}{\psi_1(0)}\right|d\varphi + \nu\, m(r, u')$$

et, par suite, en vertu de la formule de Jensen,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{u'_k}\right| d\varphi = \nu\, T(r, u') - N\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right) + \sigma',$$

σ' ne dépendant que du comportement à l'origine de B_ν et de $\psi_1(0)$.

La démonstration se poursuit alors aisément et l'on obtient une inégalité de la forme

$$(173)\quad p\,T(r, u) < T(r, u') + \sum_1^p N\left(r, \frac{1}{u - a_h}\right) - N\left(r, \frac{1}{u'}\right) + Q_1(r).$$

Soient ensuite $b_i (i = 1, \ldots q)$ q nombres finis non nuls et distincts entre eux; en appliquant l'inégalité (170) à u' pour les $q + 1$ valeurs zéro et les b_i, on a

$$(174)\quad (q + 1 - 2\nu)\, T(r, u') < \sum_1^q N\left(r, \frac{1}{u' - b_i}\right) + N\left(r, \frac{1}{u'}\right) + S(r, u').$$

De (173) et (174) résulte l'inégalité

$$p(q + 1 - 2\nu)\, T(r, u) < (q + 1 - 2\nu) \sum_1^p N\left(r, \frac{1}{u - a_h}\right)$$
$$+ \sum_1^q N\left(r, \frac{1}{u' - b_i}\right) - (q - 2\nu)\, N\left(r, \frac{1}{u'}\right) + Q(r),$$

$Q(r)$ étant une expression qui entrera dans le reste et qu'on a à majorer. En remarquant que $S(r, u')$ peut se transformer en fonction de u à l'aide de l'inégalité suivante due à Valiron

$$T(r, u') < 2\nu\, T(r, u) + m\left(r, \frac{u'}{u}\right) + \sigma_1 \quad (^1),$$

cette majoration se fait sans difficulté.

V. *Soit* $u(x)$ *une fonction algébroïde méromorphe pour* $|x| < R \leqq \infty$ *définie par* (139); *soient ensuite* $a_h (h = 1, \ldots, p)$ p *nombres finis distincts et* $b_i (i = 1, \ldots, q)$ q *nombres distincts*

---

(1) Valiron a obtenu aussi une inégalité de sens contraire dont la démonstration exige des calculs assez longs. De ces deux inégalités, il résulte que u' est de même ordre que u dans le cas de l'ordre fini [27, *g*].

finis ou non mais différents de zéro. En conservant les notations du théorème précédent, on a pour $|x| < t < \mathrm{R}$ *l'inégalité*

$$(175)\quad \begin{aligned} & p(q+1-2\nu)\,\mathrm{T}(r,\,u) \\ & \quad < (q+1-2\nu)\sum_{h=1}^{p}\mathrm{N}\left(r,\,\frac{1}{u-a_h}\right)+\sum_{i=1}^{q}\mathrm{N}\left(r,\,\frac{1}{u'-b_i}\right) \\ & \qquad -(q-2\nu)\,\mathrm{N}\left(r,\,\frac{1}{u''}\right)+\mathrm{S}(r,\,u), \end{aligned}$$

$\mathrm{S}_1(r,\,u)$ *étant une expression de la forme* (171), *seulement les coefficients dépendent encore de* q, *de* σ *et des conditions à l'origine de* B_ν *et de* $\psi_1(b_i)$.

58. Dans ce qui précède, faisons varier i de 1 à $q+1$ et prenons $b_{q+1}=\infty$. Comme on sait que B_ν, premier coefficient de $\psi_1(u')$, est égal au produit du discriminant J par A_ν^2, on a, en vertu du théorème I,

$$(176)\qquad \mathrm{N}\left(r,\,\frac{1}{\mathrm{B}_\nu}\right) < 2\mathrm{N}\left(r,\,\frac{1}{\mathrm{A}_\nu}\right)+2\nu(\nu-1)\,\mathrm{T}(r,\,u)+\sigma_1,$$

φ_1 ne dépendant que de ν et des conditions à l'origine. En tenant compte de cette inégalité, on a le corollaire :

VI. *$u(x)$ étant défini comme précédemment, soient*

$$a_h(h=1,\,\ldots,\,p)\qquad \text{et}\qquad b_i(i=1,\,\ldots,\,q)$$

deux groupes de nombres finis et distincts entre eux dans chaque groupe et l'on suppose que $b_i \neq 0$. *On a pour* $r < \mathrm{R}$

$$(177)\quad \begin{aligned} & [pq-2(p+1)(\nu-1)]\,\mathrm{T}(r,\,u) \\ & \quad < 2\mathrm{N}(r,\,u)+(q+2-2\nu)\sum_{1}^{p}\mathrm{N}\left(r,\,\frac{1}{u-a_h}\right) \\ & \qquad +\sum_{1}^{q}\mathrm{N}\left(r,\,\frac{1}{u'-b_i}\right)-(q+1-2\nu)\,\mathrm{N}\left(r,\,\frac{1}{u'}\right)+\mathrm{S}_1(r,\,u). \end{aligned}$$

59. Dans sa Note citée [9, *b*], M. Dufresnoy a indiqué que le résultat obtenu par lui pour les fonctions méromorphes s'étend encore aux fonctions algébroïdes par une méthode très voisine. Avec une légère modification de notation, l'inégalité fondamentale qu'il a énoncée est de la forme

$$(178)\quad [p-(2^{d+1}-1)(2\nu-1)-1]\,T(r,u)<\sum_{1}^{p} N\left(r,\frac{1}{u-P_i}\right)+S(r),$$

où les P_i sont des polynomes de degré d.

V. — Applications.

60. En utilisant l'inégalité fondamentale (170), jointe à l'inégalité (152), on trouve des résultats qui complètent ceux de Rémoundos et qui généralisent ceux qui sont relatifs aux fonctions méromorphes. Notamment le défaut

$$(179)\qquad \delta(a)=1-\varlimsup_{r=\infty}\frac{N\left(r,\dfrac{1}{u-a}\right)}{T(r)}=1-\varlimsup\frac{N\left(r,\dfrac{1}{\psi(a)}\right)}{\nu\,T(r)}$$

appartient au segment 0, 1 ; il est nul, sauf au plus pour un ensemble dénombrable de valeurs a ; la somme des défauts relatifs à ces valeurs exceptionnelles a, *valeurs exceptionnelles au sens de* Nevanlinna, est au plus égale à 2ν [1]. De plus, on a, en excluant éventuellement, dans le cas de l'ordre infini, de l'axe des r une suite d'intervalles dont la longueur totale est finie,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\dfrac{1}{u-a}\right)}{T(r)}=1,$$

sauf pour un ensemble de valeurs a de mesure linéaire nulle, *valeurs exceptionnelles au sens de* Valiron.

Dans le cas de l'ordre fini ρ, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int^{\infty}\frac{N\left(r,\dfrac{1}{u-a}\right)}{r^{\rho+1}}\,dr$ entraîne celle de $\displaystyle\int^{\infty}\frac{T(r)}{r^{\rho+1}}\,dr$, sauf pour au plus $2\nu+1$ valeurs de a, tandis que la convergence de la seconde intégrale entraîne celle de la première quel que soit a. Ce qui conduit pour ρ entier à conclure que le genre des fonctions entières est le même, sauf pour 2ν valeur de a au plus. Tout ceci s'étend avec les modifications et restrictions au cas où les A sont seulement holomorphes dans un cercle de rayon fini [27, c].

---

(1) En s'appuyant sur une inégalité qu'il a déduite de la théorie des fonctions fuchsiennes, M. Ou Tchen-Yang a retrouvé ce résultat [19 a].

Pour la question d'unicité, en procédant comme M. R. Nevanlinna l'a fait dans le cas des fonctions méromorphes, on trouve ce résultat :

Si $u(x)$ et $w(x)$ sont deux algébroïdes méromorphes à ν et ν' branchés respectivement, si $\nu \geqq \nu'$ et si pour $4\nu + 1$ valeurs distinctes de a, les équations

$$u(x) = a, \qquad w(x) = a$$

sont vérifiées aux mêmes points du plan simple avec le même degré total de multiplicité, $w(x)$ est identique à $u(x)$.

Il existe effectivement des fonctions distinctes à ν branches prenant les mêmes 4ν valeurs aux mêmes points, mais ces fonctions sont très particulières [27, *e*].

On trouve dans le Mémoire de M. Ullrich [26, *b*] des théorèmes analogues à ceux du n° 25 et le résultat de M. Dufresnoy concernant l'ensemble des valeurs exceptionnelles au sens de Valiron pour une fonction méromorphe s'étend à une algébroïde. Enfin en appliquant le théorème V du n° 57, on obtient des résultats sur les défauts absolus et les défauts relatifs pour la dérivée d'une algébroïde, résultats analogues à ceux du n° 27-30 [12, *i*].

CHAPITRE V.

Systèmes de fonctions.

I. — Méthode de M. R. Nevanlinna. Inégalités fondamentales et conséquences.

61. Du théorème de Picard, Émile Borel a donné, après sa célèbre démonstration élémentaire, une généralisation qui est un théorème fondamental pour l'étude des systèmes de fonctions.

Traduit en termes finis, il joue un rôle essentiel dans la théorie des familles complexes normales créée par M. P. Montel ainsi que dans l'étude des systèmes de fonctions holomorphes à variétés lacunaires, étude faite par A. Bloch pour la première fois et poursuivie par M. H. Cartan [6, *a*] et plus récemment par M. Dufresnoy [9, *d*].

Et c'est aussi par le théorème de Borel que M. R. Nevanlinna a été amené à étendre, aux systèmes de fonctions, son second théorème fondamental et que M. H. Cartan a été amené ensuite à en faire une autre extension, en vue d'étendre le critère de M. Montel et les théorèmes de M. Schottky et de Landau.

A la suite de ces travaux, M. H. Cartan, en définissant une nouvelle fonction de croissance $T(r)$ pour p fonctions holomorphes dans le cercle $|x| < R$, est parvenu à donner une nouvelle méthode pour l'étude des systèmes de fonctions, tandis qu'une théorie des courbes méromorphes a été développée par MM. H. et J. Weyl [28, *a*] ([1]), puis par M. Ahlfors [1, *c*].

Nous nous bornons ici à exposer, comme nous l'avons annoncé, les résultats fournis par la méthode de M. R. Nevanlinna et la théorie constituée par M. H. Cartan.

62. Nous commençons par donner rapidement ce qui concerne la méthode de M. R. Nevanlinna.

Soient $\varphi_i(x) (i = 1, \ldots, n)$ n fonctions méromorphes *linéairement distinctes* vérifiant la relation identique

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = 1, \tag{180}$$

d'où il suit en différenciant

$$\varphi_1^{(k)} + \varphi_2^{(k)} + \ldots + \varphi_n^{(k)} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n-1). \tag{180'}$$

Les fonctions φ_i étant linéairement distinctes, le wronskien

$$D = \| \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \ldots \quad \varphi_n \| = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \ldots & \varphi'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{181}$$

ne s'annule pas identiquement.

En désignant par D_i le mineur correspondant au $i^{\text{ième}}$ élément de la première ligne du déterminant D et par Δ_i le mineur analogue de

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \dfrac{\varphi'_1}{\varphi_1} & \dfrac{\varphi'_2}{\varphi_2} & \ldots & \dfrac{\varphi'_n}{\varphi_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\varphi_1^{(n-1)}}{\varphi_1} & \dfrac{\varphi_2^{(n-1)}}{\varphi_2} & \ldots & \dfrac{\varphi_n^{(n-1)}}{\varphi_n} \end{vmatrix},$$

([1]) M. Dufresnoy a montré [9, *b*] que la fonction de croissance définie par MM. H. et J. Weyl n'est pas essentiellement différente de celle donnée par M. H. Cartan on trouve

$$\varphi_1 \equiv \frac{D_1}{\varphi_2 \ldots \varphi_n} : \frac{D}{\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n} \equiv \Delta_1 : \Delta. \tag{182}$$

D'où l'on déduit

$$m(r, \varphi_1) < \left[N(r, \Delta) - N\left(r, \frac{1}{\Delta}\right) \right] + m(r, \Delta) + m(r, \Delta_1) + O(1).$$

Comme $\Delta = D : [\varphi_1 \ldots \varphi_n]$, le crochet s'écrit

$$\sum N\left(r, \frac{1}{\varphi_i}\right) - \sum N(r, \varphi_i) + N(r, D) - N\left(r, \frac{1}{D}\right).$$

Pour limiter $m(r, \Delta)$ et $m(r, \Delta_1)$, on utilise (1) ou plus simplement (2). On arrive ainsi à ce théorème de M. R. Nevanlinna :

I. *Soient n fonctions méromorphes $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ linéairement distinctes et vérifiant la relation* (180); *on désigne par* D *le wronskien* (181) *et par* $T(r)$ *la plus grande des quantités* $T(r, \varphi_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *pour chaque valeur de x. Alors on a, pour* $\nu = 1, \ldots, n$, *l'inégalité*

$$T(r, \varphi_\nu) < \sum_{i=1}^{n} N\left(r, \frac{1}{\varphi_i}\right) + N(r, \varphi_\nu) + N(r, D) - \sum_{i=1}^{n} N(r, \varphi_i) - N\left(r, \frac{1}{D}\right) + S(r) \tag{183}$$

avec

$$S(r) < O[\log T(r) + \log r],$$

sauf peut-être, dans le cas d'ordre infini, dans certains segments extraordinaires dont la longueur totale est finie.

Pour $n = 2$, on retombe sur le second théorème fondamental habituel dans le cas de trois indices de densité.

63. Le théorème précédent auquel M. R. Nevanlinna a été amené par le théorème de Borel permet de démontrer inversement ce dernier théorème qui peut se mettre sous la forme :

Si les fonctions entières $f_1, \ldots, f_p$ $(p > 1)$, supposées non nulles en tout point fini du plan, satisfont à une relation linéaire à coefficients non nuls et constants

$$c_1 f_1 + \ldots + c_p f_p \equiv 0, \tag{184}$$

on peut affirmer que certaines d'entre elles, en nombre $< p$, vérifient une relation de la même forme.

En effet, si l'on n'avait aucune autre relation de la forme (184) entre $k < p$ des f_i, les fonctions

$$(185) \qquad \varphi_i = -\frac{c_i f_i}{c_1 f_1} \qquad (i = 2, \ldots, p)$$

seraient linéairement distinctes et satisferaient à (180). En appliquant le théorème I, on trouverait

$$(186) \qquad \varlimsup_{r \to \infty} \frac{T(r)}{\log r} < O(1),$$

ce qui permet de conclure que l'hypothèse est impossible.

En raisonnant de la même façon, on peut démontrer un théorème plus général qui s'énonce comme suit :

II. *Soient p fonctions méromorphes $f_1, \ldots, f_p$ vérifiant une relation linéaire à coefficients constants*

$$c_1 f_1 + \ldots + c_p f_p \equiv 0$$

et satisfaisant, en outre, aux conditions suivantes : 1° *Aucun des rapports $\frac{f_h}{f_k}$ $(h \neq k)$ n'est constant;* 2° *Les zéros et les pôles des fonctions sont suffisamment rares pour qu'on ait*

$$N\left(r, \frac{1}{f_i}\right) = o[T(r)], \qquad N(r, f_i) = o[T(r)],$$

$T(r)$ étant le plus petit des nombres $T\left(r, \frac{f_h}{f_k}\right)$ $(h \neq k)$. Dans ces hypothèses, on a

$$c_1 = \ldots = c_p = 0.$$

On peut mettre le théorème de Borel encore sous la forme suivante :

Soient $X_i(x)$ $(i = 1, \ldots, p)$ p fonctions entières non nulles; s'il existe une relation de la forme

$$(187) \qquad X_1(x) + X_2(x) + \ldots + X_p(x) \equiv 0,$$

ou bien les rapports mutuels de ces fonctions sont des constantes;

ou bien les fonctions se partagent en plusieurs groupes, la somme des fonctions d'un même groupe est identiquement nulle et leurs rapports mutuels sont des constantes.

Pour la démonstration, au lieu du raisonnement que l'on a fait plus haut, on peut prouver que tous les $m\left(r, \frac{X_h}{X_k}\right)(h, k = 1, \ldots, p)$ sont bornés pour $r \to \infty$ [18, *c*]. Or pour que $m\left(r, \frac{X_h}{X_k}\right)$ soit borné, il suffit de supposer que les fonctions sont définies au voisinage du point de l'infini et qu'elles n'ont ni zéros ni pôles dans ce voisinage. Cette remarque donne lieu à la généralisation suivante du théorème de Borel, qui est due à M. H. Cartan [16, *a*] :

III. *Si l'on a une identité de la forme* (187) *entre des fonctions holomorphes privées de zéros au voisinage du point à l'infini, ou bien leurs rapports mutuels sont réguliers à l'infini, ou bien les fonctions se partagent en plusieurs groupes, la somme des fonctions d'un même groupe est identiquement nulle, et leurs rapports mutuels sont réguliers à l'infini.*

64. Au moyen du théorème de Borel ou de III, MM. G. Pólya, R. Nevanlinna et H. Cartan ont obtenu différents théorèmes d'unicité. Pour ces résultats, on consultera ces auteurs [20, *a*; 18, *d*; 6, *a*]. Nous nous bornons ici à indiquer deux théorèmes de M. H. Cartan qui s'obtiennent par application de III.

Considérons d'abord deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ méromorphes au voisinage du point à l'infini, supposé singulier essentiel; désignons par Δ ce voisinage, c'est-à-dire l'extérieur d'un cercle de centre O et de rayon suffisamment grand et admettons qu'elles prennent ensemble dans le domaine Δ, quatre valeurs distinctes a, b, c, et d [1] que nous pouvons supposer finies.

Désignons par $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ le rapport anharmonique de quatre nombres λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} \frac{\lambda_2 - \lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_4}$$

(1) On dit que f et g prennent ensemble a dans un domaine si les équations $f = a$ et $g = a$ y ont les mêmes racines avec les mêmes ordres de multiplicité.

et posons

$$(188)\qquad \begin{cases} (f, g, a, b) = \mathrm{X}, \\ (f, g, a, c) = \mathrm{Y}, \\ (f, g, a, d) = \mathrm{Z}. \end{cases}$$

X, Y, Z sont des fonctions holomorphes, sans zéro, dans Δ. En éliminant f et g entre les relations (188), il vient une identité de Borel à six termes

$$\begin{aligned}(a-b)(c-d)(\mathrm{X}+\mathrm{YZ}) + (a-c)(d-b)(\mathrm{Y}+\mathrm{ZX})& \\ + (a-d)(b-c)(\mathrm{Z}+\mathrm{XY}) &\equiv 0.\end{aligned}$$

Remplaçons X, Y, Z par leurs valeurs en fonction de f et g; on obtient l'identité

$$(189)\qquad \mathrm{X}_1^1 + \mathrm{X}_1^2 + \mathrm{X}_2^1 + \mathrm{X}_2^2 + \mathrm{X}_3^1 + \mathrm{X}_3^2 \equiv 0$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}_1^1 &= (a-b)(c-d)(f-a)(f-b)(g-c)(g-d), \\
\mathrm{X}_1^2 &= (a-b)(c-d)(g-a)(g-b)(f-c)(f-d), \\
\mathrm{X}_2^1 &= (a-c)(d-b)(f-a)(f-c)(g-b)(g-d), \\
\mathrm{X}_2^2 &= (a-c)(d-b)(g-a)(g-c)(f-b)(f-d), \\
\mathrm{X}_3^1 &= (a-d)(b-c)(f-a)(f-d)(g-b)(g-c), \\
\mathrm{X}_3^2 &= (a-d)(b-c)(g-a)(g-d)(f-b)(f-c).
\end{aligned}$$

$\mathrm{X}_1^1, \ldots, \mathrm{X}_3^2$ sont des fonctions méromorphes dans Δ et leurs rapports mutuels n'y possèdent ni zéros ni pôles. On peut donc appliquer III à (189).

On démontre d'abord que, u et v désignant deux quelconques des quatre nombres a, b, c, d $(u \neq v)$, si deux des six rapports anharmoniques (f, g, u, v) sont réguliers dans Δ, les fonctions f et g sont identiques.

On décompose ensuite les termes de (189) en groupes. En examinant tous les cas possibles, on arrive à ce résultat :

IV. *a, b, c, d désignant quatre nombres complexes distincts, il existe au plus une fonction, méromorphe au voisinage du point singulier essentiel à l'infini, pour laquelle* $\mathrm{E}(a)$, $\mathrm{E}(b)$, $\mathrm{E}(c)$, $\mathrm{E}(d)$ *coïncident respectivement, au voisinage de l'infini, avec quatre ensembles donnés*, A, B, C, D. *Il y a exception si*, A, B *étant vides au voisinage de l'infini, on a*

$$(a, b, c, d) = -1;$$

dans ce cas, s'il existe une fonction répondant à la question, il en existe deux, et deux seulement, f et g, et l'on a

$$(f, g, c, d) = -1.$$

De ce théorème dû à M. H. Cartan, on déduit immédiatement un énoncé pour une fonction méromorphe dans tout le plan; on retrouve en particulier un théorème de M. G. Pólya et celui de M. R. Nevanlinna qui généralise ce dernier.

En utilisant encore III et en considérant trois fonctions $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ méromorphes dans Δ, qui prennent ensemble trois valeurs distinctes a, b, c, M. H. Cartan a démontré le théorème :

V. *Il existe au plus deux fonctions méromorphes au voisinage du point singulier essentiel à l'infini, pour lesquelles* $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ *coincident respectivement, au voisinage de l'infini, avec trois ensembles donnés* A, B, C.

On a un énoncé analogue pour des fonctions méromorphes dans tout le plan et l'on peut voir aussi un résultat de M. R. Nevanlinna.

On sait qu'on peut toujours construire une fonction méromorphe dans tout le plan admettant deux ensembles donnés; mais étant donné trois ensembles quelconques A, B, C, il n'existe pas, en général, de fonction méromorphe dans tout le plan, pour laquelle $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ coïncident respectivement avec A, B, C [6, a].

65. En procédant comme dans la démonstration du théorème I, M. H. Cartan a obtenu un résultat que l'on peut énoncer comme suit [6, a].

VI. *Étant donné un système de n fonctions $\varphi_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ holomorphes dans le cercle-unité, privées de zéro et vérifiant*

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n \equiv 1, \tag{180'}$$

on suppose qu'elles ne soient liées par aucune relation linéaire homogène à coefficients constants non tous nuls, et l'on désigne par $m(r)$ la plus grande des quantités $m(r, \varphi_i)$. Si l'on pose

$$D(x) = \| \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n \| \quad \text{et} \quad \Delta(x) = \frac{D(x)}{\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n}$$

et si α est un nombre positif fixe inférieur à $|\Delta(0)|$ et à chaque

$|\varphi_i(0)|$, *on a, pour* $r < \rho < 1$,

$$m(r) \leq A + B \log \frac{1}{\rho - r} + C \overset{+}{\log} m(\rho), \tag{190}$$

B *et* C *ne dépendant que de* n, *et* A *de* n *et de* α.

66. En éliminant la valeur arbitraire ρ, on obtient la proposition :

VII. *Étant donné un système de* n *fonctions* φ_i *définies comme dans* VI, *on a*

$$\varlimsup_{r \to 1} \frac{m(r)}{\log \frac{1}{1 - r}} \leq \lambda, \tag{191}$$

λ *étant une constante positive fixe qui ne dépend que de* n.

Comme application, on déduit de VI le critère suivant :

VIII. *Soit une famille de systèmes de* n *fonctions* $\varphi_i (i = 1, \ldots, n)$ *définies comme dans ce qui précède; si* $\Delta(0)$ *et les* $\varphi_i(0)$ *sont en module supérieurs à un nombre positif fixe* α *valable pour tous les systèmes de la famille, les* φ_i *forment une famille complexe normale.*

A part le théorème VI, M. H. Cartan a établi dans le même Mémoire un lemme important et quelques autres théorèmes. A l'aide de VI et de ces résultats, il a étudié le problème qui consiste à *traduire en termes finis* le théorème de Borel cité (pour $n > 3$), problème que A. Bloch avait déjà traité pour le cas des systèmes de n fonctions *prenant des valeurs données à l'origine* [3, *b*]. En s'affranchissant de cette restriction, M. H. Cartan a obtenu une sorte de critère de famille complexe normale et certaines extensions du théorème de M. Schottky et du théorème de Landau. On consultera la thèse de cet auteur pour ces résultats dont l'exposition nous entraînerait trop loin [1].

[1] Plus récemment un important résultat a été obtenu par M. Dufresnoy sur les familles complexes normales en introduisant une modification à la définition que leur a donnée M. P. Montel [9, *d*].

II. — Méthode de M. H. Cartan. Fonction de croissance et première inégalité fondamentale.

67. M. H. Cartan a défini une fonction de croissance $T(r)$ pour p fonctions holomorphes données $g_j(x)(j=1, \ldots, p)$ et au moyen de q combinaisons linéaires F_i des g_j, il a établi une inégalité fondamentale qui étend celle de M. R. Nevanlinna. Dans le cas $p=2$, $T(r)$ se confond avec la fonction caractéristique $T(r, f)$ en posant $f=\frac{g_1}{g_2}$ et l'inégalité fondamentale de M. H. Cartan se réduit à celle de M. R. Nevanlinna; pour $p>2$, la première de ces deux inégalités peut jouer le même rôle dans la théorie des systèmes de fonctions que celui joué par la seconde dans la théorie des fonctions méromorphes. Mais même dans le premier cas, à cause de la définition simple de $T(r)$, l'emploi de la méthode de M. H. Cartan est souvent plus commode.

68. Définition de la fonction de croissance. — Soient données p fonctions $g_j(x)$ holomorphes pour $|x|<R$. Supposons une fois pour toutes qu'il n'existe aucune valeur de x annulant simultanément toutes ces fonctions; supposons, en outre, dans le but de simplifier les calculs qui suivront que $g_j(0) \neq 0$, $(j=1, \ldots, p)$ [1]. Désignons par $u(x)$ la fonction réelle qui, pour chaque valeur de x, est égale à la plus grande des p quantités $\log|g_j(x)|$ $(j=1, 2, \ldots, p)$, et posons, pour $r<R$,

$$T(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta-u(0). \tag{192}$$

$T(r)$ ne change pas si l'on multiplie toutes les $g_j(x)$ par une même fonction holomorphe sans zéro $\omega(x)$; en effet, $u(x)$ se trouve remplacé par

$$u(x)+\log|\omega(x)|,$$

et $T(r)$ se trouve augmenté de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\omega(re^{i\theta})|\,d\theta-\log|\omega(0)|=0.$$

---

[1] Cette hypothèse n'a rien d'essentiel, on pourra au besoin s'en affranchir.

On peut dire que $T(r)$ dépend seulement des quotients mutuels des fonctions $g_j(x)$. $T(r)$ sera dit *fonction de croissance* des fonctions holomorphes $g_j(x)$ $(j=1, \ldots, p)$.

Plus généralement, étant donné p fonctions $\varphi_j(x)$ $(j=1, \ldots, p)$ méromorphes pour $|x|<R$, il est possible de trouver une fonction $\Phi(x)$, méromorphe pour $|x|<R$, de façon que les p fonctions

$$\Phi(x)\varphi_j(x) \equiv g_j(x) \tag{193}$$

soient holomorphes pour $|x|<R$, et qu'il n'existe aucun zéro commun à toutes les $g_j(x)$. Comme fonction de croissance attachée à l'ensemble des $\varphi_j(x)$, on prendra la fonction $T(r)$ définie plus haut pour les $g_j(x)$; cette fonction est parfaitement déterminée et dépend seulement des quotients mutuels des $\varphi_j(x)$.

69. **Propriétés de** $T(r)$. — D'abord $T(r)$ est une *fonction convexe* de $\log r$. On le démontre en appliquant le théorème de M. Montel comme pour la fonction $\mu(r, A)$ du n° 49.

Ensuite, *si l'on effectue sur les* g_j *une substitution linéaire homogène à coefficients constants, de déterminant non nul, la nouvelle fonction de croissance* $T_1(r)$, *attachée au système des p nouvelles fonctions* G_j, *ne diffère de* $T(r)$ *que par une quantité qui reste inférieure à un nombre fixe* M *quel que soit* r (M dépend seulement des coefficients de la substitution envisagée).

En effet, soit

$$G_j(x) = \sum_{k=1}^{p} A_j^k g_k(x)$$

la substitution envisagée, et soit

$$g_j(x) \equiv \sum_{k=1}^{p} a_j^k G_k(x)$$

la substitution inverse. Remarquons tout d'abord qu'il n'existe aucun zéro commun à toutes les $G_j(x)$. Soit A une borne supérieure des modules des a_j^k et des A_j^k. Si l'on désigne par $U(x)$ la plus grande des quantités $\log|G_j(x)|$, on a évidemment

$$U(x) \leq \log(pA) + u(x) \qquad \text{et} \qquad u(x) \leq \log(pA) + U(x),$$

d'où l'on peut déduire

$$(194) \qquad |T_1(r) - T(r)| \leqq 2\log(pA),$$

ce qui suffit à établir la proposition annoncée.

70. Justification du nom donné à $T(r)$. — D'abord dans le cas où $p = 2$, je dis que $T(r)$ se confond avec la fonction caractéristique $T(r, f)$, en posant $f(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$. En effet,

$$u(x) = \overset{+}{\log}\left|\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\right| + \log|g_2(x)|$$

et, par suite,

$$(195) \qquad T(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \overset{+}{\log}|f(0)| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g_2(re^{i\theta})|\,d\theta - \log|g_2(0)|.$$

Or

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g_2(re^{i\theta})|\,d\theta - \log|g_2(0)| = N\left(r, \frac{1}{g_2}\right) = N(r, f) \quad (^1),$$

donc si l'on écrit, avec M. H. Cartan, pour fonction caractéristique de M. R. Nevanlinna (²)

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi - \overset{+}{\log}|f(0)| + N(r, f),$$

on a bien $T(r) = T(r, f)$ en vertu de (195).

Montrons ensuite que l'on a, en général,

$$(196) \qquad T\left(r, \frac{g_h}{g_k}\right) < T(r) + K,$$

K étant une constante qui dépend seulement des valeurs de $g_j(x)$ pour $x = 0$. En effet, on peut mettre $g_h(x)$ et $g_k(x)$ sous la forme

$$g_h(x) \equiv G_h(x)\,\omega_{hk}(x), \qquad g_k(x) \equiv G_k(x)\,\omega_{hk}(x),$$

$\omega_{hk}(x)$ étant holomorphe, G_h et G_k étant aussi holomorphes et n'ayant aucun zéro commun. On a alors, en désignant par $u_1(x)$ la plus

(¹) Nous conservons la notation habituelle de l'indice de densité.

(²) On ajoute le terme constant $-\overset{+}{\log}|f(0)|$.

grande des quantités $\log|g_h(x)|$ et $\log|g_k(x)|$,

$$T\left(r, \frac{g_h}{g_k}\right) = T\left(r, \frac{G_h}{G_k}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [u_1(r\,e^{i\theta}) - \log|\omega_{hk}(r\,e^{i\theta})|]\,d\theta - u_1(0) + \log|\omega_{hk}(0)|$$

et l'on trouve

$$T\left(r, \frac{g_h}{g_k}\right) \leqq T(r) - N\left(r, \frac{1}{\omega_{hk}}\right) + u(0) - u_1(0), \tag{197}$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

Plus généralement, soient $F_1(x)$ et $F_2(x)$ deux combinaisons linéaires homogènes distinctes, à coefficients constants, des p fonctions $g_j(x)$. On aura

$$T\left(r, \frac{F_1}{F_2}\right) < T(r) + K, \tag{198}$$

K étant indépendant de r.

71. Première inégalite fondamentale. — L'inégalité (197) limite la croissance des quotients mutuels des $g_j(x)$ à l'aide de $T(r)$. On peut également limiter la croissance de la suite des zéros de chaque $g_j(x)$ et, plus généralement, la croissance de la suite des zéros d'une combinaison linéaire quelconque a coefficients constants

$$F(x) \equiv \sum a_j g_j(x).$$

On a

$$N\left(r, \frac{1}{F}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(r\,e^{i\theta})|\,d\theta - \log|F(0)|;$$

d'ailleurs

$$\log|F(x)| \leqq u(x) + \log(pA),$$

en designant par A une borne supérieure des quantités $|a_j|$. D'où

$$N\left(r, \frac{1}{F}\right) \leqq T(r) + u(0) - \log|F(0)| + \log(pA) \tag{199}$$

qui peut être considérée comme première inégalité fondamentale et l'on a le théorème :

IX. *Soient données p fonctions $g_i(x)$ ($j = 1, \ldots, p$) holomorphes pour $|x| < R$, et soit*

$$F(x) \equiv \sum_{j=1}^{p} a_j g_j(x)$$

une combinaison quelconque de ces fonctions, les a_j étant des constantes. En supposant $g_j(0) \neq 0$, on a

$$(199)' \qquad N\left(r, \frac{1}{F}\right) < T(r) + O(1).$$

Remarque. — Des inégalités (197) et (199), il résulte en particulier que si les $g_j(x)$ sont entières, et si $T(r)$ est inférieur à un nombre fixe pour $r \to \infty$, alors les quotients mutuels des $g_i(x)$ sont des constantes et les $g_j(x)$ ne s'annulent pas.

III. — Seconde inégalité fondamentale de M. H. Cartan.

72. Considérons $q(>p)$ combinaisons

$$(200) \qquad F_i(x) = \sum_{j=1}^{p} a_i^j g_j(x) \qquad (i = 1, \ldots, q)$$

et rangeons-les dans un certain ordre $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \ldots, F_{\alpha_q}$. Si h désigne l'un quelconque des $q-p+1$ premiers nombres entiers, on peut exprimer les $g_j(x)$ linéairement à l'aide de $F_{\alpha_h}, F_{\alpha_{q-p+2}}, \ldots, F_{\alpha_q}$ à condition que le déterminant d'ordre p du tableau des a_i^j soit différent de zéro. De cette remarque on déduit immédiatement le

Lemme. — *Soient $q(>p)$ combinaisons de la forme* (200) *des fonctions $g_j(x)(j = 1, \ldots, p)$; on suppose que tous les déterminants d'ordre p du tableau des coefficients a_i^j soient différents de zéro. Si, pour chaque valeur de x, les fonctions $F_i(x)$ sont rangées par ordre de module non croissants $F_{\alpha_1}(x), F_{\alpha_2}(x), \ldots, F_{\alpha_q}(x)$, on a alors, quel que soit $j \leqq p$ et quel que soit $i \leqq q-p+1$,*

$$|g_j(x)| \leqq K\,|F_{\alpha_i}(x)|,$$

K étant une constante positive qui ne dépend que des a_i^j.

Corollaire I. — *Pour chaque valeur de x, il y a au moins $q-p+1$ fonctions F_i qui ne sont pas nulles.*

Corollaire II. — *Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{q-p}$, $q-p$ entiers distincts pris d'une façon quelconque parmi les q premiers entiers; en désignant par $v(x)$ la plus grande de toutes les quantités*

$$\log |F_{\beta_1}(x) F_{\beta_2}(x) \ldots F_{\beta_{q-p}}(x)|,$$

on a

$$(201)\qquad (q-p)\,\mathrm{T}(r) < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})\,d\theta + \mathrm{O}(1).$$

En effet, on a, d'après le lemme,

$$(q-p)\log|g_j(x)| < v(x) + (q'-p)\log \mathrm{K},$$

et cela quel que soit j. D'où

$$(q-p)\,u(x) < v(x) + (q'-p)\log \mathrm{K}$$

et, en intégrant,

$$(202)\qquad (q-p)\,\mathrm{T}(r) < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})\,d\theta + (q-p)[\log \mathrm{K} - u(0)].$$

73. On désignera par $\mathrm{N}_p\left(r, \frac{1}{\mathrm{F}}\right)$ l'indice de densité des zéros d'une fonction holomorphe, chaque zéro étant compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité, si celui-ci est inférieur à p et p fois dans le cas contraire.

Partons de l'inégalité (201) et cherchons une borne supérieure de l'intégrale qui figure au second membre. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, p entiers distincts quelconques pris parmi les q premiers entiers, et soient $\beta_1, \ldots, \beta_{q-p}$ les $q-p$ entiers restants. Pour chaque x, rangeons les $\mathrm{F}_i(x)$ comme ce qui a été dit dans le lemme. Puisque les F_i sont des combinaisons linéaires homogènes distinctes p à p des fonctions g_i, on a

$$(203)\qquad \|\mathrm{F}_{\alpha_1}\mathrm{F}_{\alpha_2}\ldots\mathrm{F}_{\alpha_p}\| \equiv \frac{1}{\mathrm{C}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)}\|g_1 g_2 \ldots g_p\|,$$

$\mathrm{C}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ désignant une constante finie et non nulle, qui dépend seulement du groupe des entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ pris parmi les q premiers entiers. En vertu de l'hypothèse, le second membre de (203) n'est pas identiquement nul. On peut écrire

$$(204)\qquad \frac{\mathrm{F}_{\beta_1}\;\mathrm{F}_{\beta_2}\;\ldots\;\mathrm{F}_{\beta_{q-p}}}{\mathrm{C}(\alpha_1\ldots\alpha_p)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \frac{\mathrm{F}'_{\alpha_1}}{\mathrm{F}_{\alpha_1}} & \frac{\mathrm{F}'_{\alpha_2}}{\mathrm{F}_{\alpha_2}} & \ldots & \frac{\mathrm{F}'_{\alpha_p}}{\mathrm{F}_{\alpha_p}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\mathrm{F}^{(p-1)}_{\alpha_1}}{\mathrm{F}_{\alpha_1}} & \frac{\mathrm{F}^{(p-1)}_{\alpha_2}}{\mathrm{F}_{\alpha_2}} & \ldots & \frac{\mathrm{F}^{(p-1)}_{\alpha_p}}{\mathrm{F}_{\alpha}} \end{vmatrix}} \equiv \frac{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\ldots\mathrm{F}_q}{\|g_1 g_2 \ldots g_p\|}.$$

On voit que le premier membre de (204) est une fonction qui ne dépend pas du groupe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$; désignons-le par $H(x)$. Soit alors, pour chaque valeur de x, $w(x)$ le plus grand des log des modules de tous les dénominateurs tels que celui du premier membre de (204). On a évidemment

$$v(x) \equiv \log |H(x)| + w(x).$$

On aura donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|H(re^{i\theta})|\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(re^{i\theta})\,d\theta;$$

d'autre part, en supposant $H(0) \neq 0, \infty$ [1],

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|H(re^{i\theta})|\,d\theta \leqq N\left(r, \frac{1}{H}\right) + \log|H(0)|.$$

On est donc conduit à chercher une limitation de $N\left(r, \frac{1}{H}\right)$. Or, soit x_0 un zéro de $H(x)$; d'après le corollaire I du lemme, il existe au moins un groupe d'entiers $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{q-p}$, tel que le produit $F_{\beta_1}F_{\beta_2}, \ldots, F_{\beta_{q-p}}$ ne soit pas nul pour $x = x_0$; l'ordre de multiplicité de x_0, considéré comme zéro de $H(x)$ est donc égal à l'ordre de multiplicité de x_0 considéré comme pôle du dénominateur du premier membre de (204). On en déduit facilement

$$N\left(r, \frac{1}{H}\right) \leqq \sum_{i=1}^{q} N_{p-1}\left(r, \frac{1}{F_i}\right).$$

On montre ensuite que l'on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(re^{i\theta})\,d\theta < S(r) + O(1); \tag{205}$$

pour cela on remarque d'abord que $w(x)$ est inférieur à la somme des $\overset{+}{\log}$ des modules de tous les dénominateurs tels que ceux du premier membre de (204). Comme ces dénominateurs ne changent pas de valeur si l'on multiplie toutes les $F_i(x)$ par une même fonction, $\frac{1}{F_1(x)}$ par exemple, chacun d'eux peut se mettre sous la forme

(1) Ce qui ne restreint pas la généralité.

d'un polynome entier par rapport aux quantités $\frac{d}{dx}\left(\log\frac{F_i(x)}{F_1(x)}\right)$ et à leurs $p - 2$ premières dérivées. On a donc

$$w(x) < K + K\sum_{i=2}^{q}\sum_{h=1}^{p-1}\log\left|\frac{d^h}{dx^h}\left(\log\frac{F_i(x)}{F_1(x)}\right)\right|,$$

K étant une certaine quantité indépendante de x. On aura par suite,

$$(206)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(re^{i\theta})\,d\theta < K + K\sum_{i=2}^{q}\sum_{h=1}^{p-1} m\left[r, \frac{d^h}{dx^h}\left(\log\frac{F_i}{F_1}\right)\right].$$

Pour avoir une limitation du second membre, il suffit d'appliquer (2) (¹) et, en vertu des inégalités telles que (198), on aura (205).

On arrive ainsi au théorème de M. H. Cartan :

X. (Théorème fondamental). — *Etant données p fonctions $g_j(x)$ $(j = 1, \ldots, p)$ holomorphes pour $|x| < R$, qui ne s'annulent pas simultanément pour aucune valeur de x, soient*

$$F_i(x) \equiv \sum_{j=1}^{p} a_i^j g_j(x) \qquad (i = 1, \ldots, q)$$

$q(q > p)$ combinaisons linéaires homogènes à coefficients constants des $g_j(x)$. On suppose que tous les déterminants d'ordre p du tableau des a_i^j soient différents de zéro, et, en outre, qu'il n'existe aucune relation linéaire homogène à coefficients constants entre les $g_j(x)$. Si $g_j(0) \neq 0$ $(j = 1, \ldots, p)$ (¹), on a

$$(207)\qquad (q-p)\,T(r) < \sum_{i=1}^{q} N_{p-1}\left(r, \frac{1}{F_i}\right) + S(r),$$

où $S(r)$ jouit des mêmes propriétés que le terme complémentaire $S(r, f)$ de l'inégalité de M. R. Nevanlinna à condition de remplacer $T(r, f)$ par $T(r)$.

(¹) Dans le Mémoire de M. H. Cartan, la limitation s'obtient au moyen de (1), ce qui exige une transformation préalable assez longue.

IV. — Cas des fonctions entières. Zéros des fonctions entières et défauts des combinaisons des fonctions.

74. Appliquons le théorème I au cas où les p fonctions $g_j (j = 1, \ldots, p)$ sont entières. Les q combinaisons $F_i (i = 1, \ldots, q)$ sont alors aussi entières. En excluant éventuellement de l'axe des r une suite d'intervalles $\mathcal{J}$ dont la longueur totale est finie, on a

$$\lim_{r \to \infty} \frac{S(r)}{T(r)} = 0,$$

et de l'inégalité (207) il résulte

$$(208) \qquad \sum_{i=1}^{q} \left[1 - \overline{\lim_{(r \to \infty)}} \frac{N_{p-1}\left(r, \frac{1}{F_i}\right)}{T(r)} \right] \leqq p.$$

D'autre part, de l'inégalité $(199)'$, on déduit

$$(209) \qquad \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N\left(r, \frac{1}{F}\right)}{T(r)} \leqq 1.$$

Comme conséquences de ces inégalités, M. H. Cartan a obtenu des résultats intéressants sur les zéros des fonctions et le défaut des combinaisons des fonctions.

75. Zéros des fonctions entières. — Supposons qu'à chaque $F_i(x)$ soit attaché un entier m_i tels que les zéros de $F_i(x)$ soient tous d'ordre m_i au moins. De l'inégalité évidente

$$N_{p-1}\left(r, \frac{1}{F_i}\right) \leqq \frac{p-1}{m_i} N\left(r, \frac{1}{F_i}\right),$$

et de $(208)'$, on déduit tout de suite en tenant compte de (209), l'inégalité

$$(210) \qquad \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{m_i} \geqq \frac{q-p}{p-1}.$$

qui généralise un résultat connu [18, *d*, p. 102].

Appliquons l'inégalité (210) au cas particulier où $q = p + 1$, et où

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_p = \infty,$$

ce qui exprime que les fonctions $F_1(x), \ldots, F_p(x)$ n'ont pas de zéros; il vient

$$(211) \qquad m_{q+1} \leqq p - 1.$$

Remarquons que $F_{p+1}(x)$ se présente sous la forme d'une combinaison linéaire homogène, à coefficients constants, de p fonctions entières $F_1(x), \ldots, F_p(x)$ dépourvues de zéros. On a, en outre, supposé que ces p fonctions sont linéairement indépendantes, et que la combinaison F_{p+1} les fait toutes intervenir effectivement. Or l'inégalité (210) exprime que $F_{p+1}(x)$ possède au moins un zéro dont l'ordre de multiplicité est au plus égal à $p - 1$; donc en particulier, $F_{p+1}(x)$ ne saurait être la puissance $p^{\text{ième}}$ d'une fonction entière. D'où

XI. *Une fonction entière sans zéros ne peut être identique à la somme de plusieurs fonctions entières, sans zéros, et linéairement indépendantes* (théorème connu de Borel [4, *a*]).

XII. *La puissance $k^{\text{ième}}$ d'une fonction entière qui a des zéros ne peut être la somme de moins de $k + 1$ fonctions entières sans zéros.*

Ce dernier résultat est intéressant, parce que la fonction $(1 + e^x)^k$ se présente effectivement sous la forme de la somme de $k + 1$ fonctions entières sans zéros.

76. **Défaut des combinaisons des fonctions entières.** — $F(x)$ désignant une combinaison linéaire homogène, à coefficients constants, des p fonctions entières $g_j(x)$, on appelle *défaut* de $F(x)$ la quantité

$$\delta(F) = 1 - \varlimsup_{(r \to \infty)} \frac{N_{p-1}\left(r, \frac{1}{F}\right)}{T(r)},$$

r restant extérieur aux intervalles $\mathcal{J}$.

$\delta(F)$ est $\geqq 0$ et $\leqq 1$; il est d'autant plus grand que les zéros de $F(x)$ sont moins nombreux ou d'ordres de multiplicité plus élevés. Une combinaison de défaut positif sera dite *exceptionnelle*.

On a le théorème

XIII. *Les fonctions entières $g_j(x)$ étant données, on peut choisir un nombre fini ou une infinité dénombrable de combinaisons exceptionnelles $F_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ linéairement distinctes p à p, de façon que :*

1° *la série $\Sigma\delta(F_i)$ soit convergente et de somme $S \leqq p$;*

2° *toute combinaison exceptionnelle puisse s'exprimer par une combinaison linéaire homogène de moins de p parmi les combinaisons $F_i(x)$.*

M. H. Cartan a indiqué qu'on peut démontrer ce théorème en s'appuyant sur la remarque suivante. Si grand que soit l'entier k, il est impossible de trouver plus de k combinaisons linéaires, distinctes p à p, et telles que le défaut de chacune d'elles soit plus grand que $\frac{p}{k}$, sinon l'inégalité (208)′ ne serait pas vérifiée.

Ce théorème peut être complété par la proposition suivante que l'on démontre facilement :

Si la somme S de l'énoncé est égale à p, alors on a, pour toute combinaison $F(x)$ qui n'est pas une combinaison de moins de p fonctions $F_i(x)$,

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N_{p-1}\left(r, \frac{1}{F}\right)}{T(r)} = 1,$$

r reste toujours extérieur aux intervalles $\mathfrak{J}$.

V. — Application à des problèmes d'unicité.

77. M. R. Nevanlinna a démontré qu'une fonction méromorphe non constante est déterminée par cinq ensembles de points $\overline{E}(c_i)$ $(i = 1, \ldots, 5)$, les c_i étant des valeurs distinctes [1]. On peut énoncer son théorème de la façon suivante :

Etant donnés deux couples de deux fonctions entières $g_i^1(x)$, $g_i^2(x)$ $(i = 1, 2)$ telles que le quotient $\frac{g_i^1}{g_i^2}$ de deux fonctions

(1) *Voir* R. Nevanlinna [18, *d*]; on utilise ici une notation du paragraphe IV du chapitre II

d'un même couple ne soit pas constant, et telles, en outre, que le déterminant formé avec ces quatre fonctions ne soit pas identiquement nul, il est impossible de trouver cinq systèmes de deux constantes a_1^k, a_2^k $(k = 1, \ldots, 5)$, *telles que tous les déterminants d'ordre* 2 *du tableau des* a_i^k *soient différents de zéro, et telle que, pour chaque valeur de* k, *les deux fonctions* $a_1^k g_1^1 + a_2^k g_1^2$ *et* $a_1^k g_2^1 + a_2^k g_2^2$ *aient les mêmes zéros.*

En mettant le théorème de M. R. Nevanlinna sous cette forme, M. H. Cartan l'a généralisé ainsi :

XIV. *Soient p systèmes de p fonctions entières*

$$g_i^j(x) \, (i = 1, \ldots, p;\, j = 1, \ldots, p);$$

on suppose que, pour chaque valeur de i, *les* p *fonctions* g_i^j $(j = 1, \ldots, p)$ *ne soient liées par aucune relation linéaire homogène à coefficients constants, et que le déterminant des* g_i^j *ne soit pas identiquement nul. Alors il est impossible de trouver* $2p + 1$ *systèmes de* p *constantes* a_j^k $(j = 1, \ldots, p;\ k = 1, \ldots, 2p + 1)$ *telles que tous les déterminants d'ordre p du tableau des* a_j^k *soient différents de zéro, et telles que, pour chaque valeur de* k, les p *combinaisons* $\sum_{j=1}^{p} a_j^k g_i^j(x)$ $(i = 1, \ldots, p)$ *aient toutes les mêmes zéros avec les mêmes ordres de multiplicité.*

et il a donné un exemple de p systèmes de p fonctions entières $g_i^j(x)$ satisfaisant aux conditions énumérées plus haut, et de $2p$ systèmes de p constantes a_j^k, telles que tous les déterminants d'ordre p du tableau des a_j^k soient différents de zéro, et telles que pour chaque valeur de $k (k = 1, \ldots, 2p)$ les p combinaisons $F_i^k(x) \equiv \sum_j a_j^k g_i^j(x) \, (i = 1, \ldots, p;\, j = 1, \ldots, p)$ aient les mêmes zéros avec les mêmes ordres de multiplicité [6, d].

Pour démontrer le théorème on pose

$$F_i^k(x) \equiv \sum_{j=1}^{p} a_j^k g_i^j(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2p + 1)$$

et l'on désigne par $F^k(x)$ une fonction entière qui a pour zéro les zéros communs à toutes les $F_i^k(x)$ (k fixe; $i=1, \ldots, p$), chaque zéro de $F^k(x)$ ayant pour ordre de multiplicité le plus petit des ordres de multiplicité qu'il possède relativement aux $F_i^k(x)$. En appliquant l'inégalité (207) pour chaque i, on peut écrire

$$(212) \quad (p+1)\sum_{i=1}^{p} T_i(r) < p \sum_{k=1}^{2p+1} N_{p-1}\left(r, \frac{1}{F^k}\right) + \sum_{k=1}^{2p+1}\sum_{i=1}^{p}\left[N_{p-1}\left(r, \frac{1}{F_i^k}\right) - N_{p-1}\left(r, \frac{1}{F^k}\right)\right] + \sum_{i=1}^{p} S_i(r).$$

Considérons le déterminant

$$\Delta(x) \equiv \begin{vmatrix} g_1^1 & g_1^2 & \cdots & g_1^p \\ g_2^1 & g_2^2 & \cdots & g_2^p \\ \cdot\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_p^1 & g_p^2 & \cdots & g_p^p \end{vmatrix},$$

on constate que

$$\sum_{k=1}^{2p+1} N_{p-1}\left(r, \frac{1}{F^k}\right) \leqq N\left(r, \frac{1}{\Delta}\right).$$

Soit $u_i(x)$ la plus grande des quantités $\log|g_j(x)|$ ($j=1, \ldots, p$), on a

$$\log|\Delta(x)| < \log(p\,!) + \sum_{i=1}^{p} u_i(x)$$

et l'application de la formule de Jensen à $\Delta(r\,e^{i\theta})$ permet d'obtenir

$$N\left(r, \frac{1}{\Delta}\right) < \sum_{i=1}^{p} T_i(r) + O(1).$$

En tenant compte de ceci, l'inégalité (212) donne la suivante :

$$(213) \quad \sum_{i=1}^{p} T_i(p) < \sum_{k=1}^{2p+1}\sum_{i=1}^{p}\left[N_{p-1}\left(r, \frac{1}{F_i^k}\right) - N_{p-1}\left(r, \frac{1}{F^k}\right)\right] + S(r).$$

Pour arriver à la conclusion du théorème, il suffit de remarquer que si l'on avait, quels que soient i et k,

$$N_{p-1}\left(r, \frac{1}{F_i^k}\right) - N_{p-1}\left(r, \frac{1}{F^k}\right) = 0,$$

en vertu de (213), les fonctions $T_i(r)$ resteraient bornées quand r augmente indéfiniment et, par suite, pour chaque i les quotients mutuels des $g_i^j(x)$ seraient des constantes; or on a supposé les $g_i^j(x)$ linéairement indépendantes. Il y aurait donc une contradiction.

78. Une autre application intéressante du théorème fondamental de M. H. Cartan est la suivante : étant donné deux fonctions entières $f_1(x)$ et $f_2(x)$, non constantes *dépourvues de zéros*; et telles que $f_1(x) \not\equiv f_2(x)$ et $f_1(x) f_2(x) \not\equiv 1$, MM. Pólya et R. Nevanlinna ont démontré que l'ensemble des zéros de $f_1(x) - 1$ et celui des zéros de $f_2(x) - 1$ ne peuvent pas se coïncider même si l'on fait abstraction des ordres de multiplicité de ces zéros. Au moyen de (207), M. H. Cartan est parvenu au résultat suivant qui est de beaucoup plus précis :

XV. *f_1 et f_2 étant définis comme dans ce qui précède, on pose*

$$N(r) = \sum_i \overset{+}{\log} \frac{r}{|\alpha_i|},$$

$$N'(r) = \sum_j \overset{+}{\log} \frac{r}{|\beta_j|}, \qquad N''(r) = \sum_k \overset{+}{\log} \frac{r}{|\gamma_k|},$$

α_i désignant les zéros communs à $f_1(x) - 1$ et $f_2(x) - 1$, β_j les zéros de $f_1(x) - 1$ qui n'annulent pas $f_2(x) - 1$, et γ_k les zéros de $f_2(x) - 1$ qui n'annulent pas $f_1(x) - 1$; dans les sommes précédentes, chaque zéro est compté une seule fois. Alors, on a l'inégalité

$$\lim_{r \to \infty} \frac{N(r)}{N'(r) + N''(r)} \leq 1 \tag{214}$$

à condition d'exclure éventuellement de l'axe des r une suite d'intervalles dont la longueur totale est finie.

Pour le démontrer, on considère une fonction entière $\varphi(x)$ ayant pour zéros les zéros communs à $f_1(x) - 1$ et $f_2(x) - 1$, pris avec le plus petit des deux ordres de multiplicité correspondants, et l'on écrit l'identité

$$f_1\frac{f_2-1}{\varphi}-f_2\frac{f_1-1}{\varphi}+\frac{f_1-1}{\varphi}-\frac{f_2-1}{\varphi}\equiv 0 \tag{215}$$

dont le premier membre est la somme de quatre fonctions n'ayant aucun zéro commun entre elles. En s'appuyant sur le théorème de MM. Pólya et Nevanlinna, on démontre qu'il n'y a aucune relation linéaire homogène à coefficients constants entre les trois premières de ces fonctions. Alors, d'une part, en appliquant l'inégalité (207) à ces trois fonctions et à leur somme qui est égale à $\frac{f_2-1}{\varphi}$, on a

$$T(r)<2N_2\left(r,\frac{\varphi}{f_1-1}\right)+2N_2\left(r,\frac{\varphi}{f_2-1}\right)+O[\log T(r)]+O(\log r), \tag{216}$$

à condition que r reste extérieur à certains intervalles $\mathcal{J}'$ de longueur totale finie.

Et, d'autre part, si l'on applique l'inégalité (197) en prenant

$$g_h=f_1\frac{f_2-1}{\varphi},\qquad g_k=\frac{f_2-1}{\varphi}\qquad \text{et}\qquad \omega_{hk}=\frac{f_2-1}{\varphi},$$

on trouve une inégalité de sens contraire

$$N\left(r,\frac{\varphi}{f_1-1}\right)+N\left(r,\frac{\varphi}{f_2-1}\right)+N\left(r.\frac{1}{\varphi}\right)<T(r)+O(1). \tag{217}$$

La comparaison de (216) et (217) donne

$$\begin{aligned}N\left(r,\frac{\varphi}{f_1-1}\right)+N\left(r,\frac{\varphi}{f_2-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)\\<2N_2\left(r,\frac{\varphi}{f_1-1}\right)+2N_2\left(r,\frac{\varphi}{f_2-1}\right)+O[\log T(r)]+O(\log r).\end{aligned} \tag{218}$$

De cette inégalité résulte la suivante :

$$N(r)<N'(r)+N''(r)+O[\log T(r)]+O(\log r). \tag{219}$$

Puis, en vertu de la définition de $T(r)$, on trouve

$$\begin{aligned}T(r)&<m(r,f_1)+m(r,f_2)-N\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+O(1)\\&\leqq m(r,f_1)+m(r,f_2)+O(1).\end{aligned} \tag{220}$$

Par application de la seconde inégalité fondamentale aux f_i, on en déduit ensuite une inégalité qui permet avec (217) de prouver que $T(r)$ est de l'ordre de $N(r)+N'(r)+N''(r)$. Alors (219) peut s'écrire

$$N(r) < N'(r) + N''(r) + O(\log[N'(r) + N''(r)]) + O(\log r);$$

ce qui entraîne immédiatement (214).

Remarque. — En prenant $f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = e^{2x}$, il vient

$$N''(r) = N(r) \quad \text{et} \quad N'(r) = 0;$$

par suite, on a exactement

$$\frac{N(r)}{N'(r)+N''(r)} = 1;$$

il est donc impossible d'améliorer la limite tournie par (214).

VI. — Application aux algébroïdes méromorphes.

79. Soit $y(x)$ la fonction algébroïde définie par une équation $\psi(x, y) = 0$ de la forme (139), où u est remplacé par y; on conserve l'hypothèse sur les coefficients. On suppose de plus que cette équation ne se décompose pas en plusieurs équations de la même forme et de degré moindre.

Si les A_j ne sont liés par aucune relation linéaire homogène à coefficients constants, on dit que l'algébroïde y est du *type général.* Remarquons que si un ou plusieurs des coefficients A_j est identiquement nul, l'algébroïde y n'est pas du type général.

Désignons par $N_\nu\left(r, \frac{1}{\psi(a)}\right)$ la somme $\sum \overset{+}{\log} \frac{r}{|\alpha_i|}$ étendue aux racines α_i de $y(x) = a$, chaque racine étant comptée autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité λ si $\lambda < \nu$ et ν fois si $\lambda \geqq \nu$. Et convenons d'écrire

$$N_\nu\left(r, \frac{1}{y-a}\right) = \frac{1}{\nu} N_\nu\left(r, \frac{1}{\psi(a)}\right)$$

et

$$N_\nu(r, y) = \frac{1}{\nu} N_\nu\left(r, \frac{1}{A_\nu}\right) = \frac{1}{\nu} N_\nu\left(r, \frac{1}{\psi(\infty)}\right).$$

Le théorème fondamental de M. H. Cartan permet de démontrer le théorème :

XVI. *Soit y une algébroïde du type général définie par l'équation $\psi(x, y) = 0$ de la forme* (139); $a_i (i = 1, \ldots, q)$ *étant q nombres complexes distincts, on a l'inégalité*

$$(221) \qquad (q - \nu - 1)\,T(r, y) < \sum_{i=1}^{q} N_\nu\left(r, \frac{1}{y - a_i}\right) + S(r).$$

En effet, les expressions $\psi(x, a_1), \ldots, \psi(x, a_q)$ sont q combinaisons linéaires homogènes, distinctes $\nu + 1$ à $\nu + 1$, des A_j, et les $A_j(x)$ ne sont liés par aucune relation linéaire homogène à coefficients constants, on peut donc leur appliquer l'inégalité fondamentale (207); il vient

$$(222) \qquad (q - \nu - 1)\,T(r) < \sum_{i=1}^{q} N_\nu\left(r, \frac{1}{\psi(a_i)}\right) + S(r).$$

Par définition,

$$T(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r e^{i\theta})\,d\theta - u(0),$$

on montre immédiatement que

$$|\nu\,T(r, y) - T(r)| < O(1)$$

et l'inégalité (222) peut donc se mettre sous la forme (221) en modifiant légèrement $S(r)$.

80. Pour $\nu = 1$, on retrouve l'inégalité fondamentale de M. Nevanlinna. Toutes les propriétés des fonctions méromorphes, que l'on peut déduire de cette inégalité, s'étendent donc, avec les modifications nécessaires, aux algébroïdes méromorphes d'ordre ν du type général. En particulier, une telle algébroïde, si elle est méromorphe dans tout le plan ne peut admettre plus de $\nu + 1$ valeurs exceptionnelles au sens de Picard.

On peut appliquer l'inégalité (210) du n° 75 aux algébroïdes, méromorphes dans tout le plan ouvert, à ν branches et du type général; il suffit pour cela d'y remplacer p par $\nu + 1$.

Le théorème XIV conduit immédiatement à un théorème d'unicité relatif aux algébroïdes du cas précédent et l'on obtient la proposition suivante :

XVII. *Soient* $\nu+1$ *telles algébroïdes; si le déterminant des coefficients des équations qui les définissent n'est pas identiquement nul, alors ces* $\nu+1$ *algébroïdes «prennent ensemble»* (1) *au plus* $2(\nu+1)$ *valeurs distinctes.*

81. Dans le cas où il existe λ relations entre les A_j, on peut espérer démontrer, d'après M. H. Cartan, l'inégalité

$$(233) \qquad (q-\nu-\lambda-1)\,T(r,y) < \sum_{i=1}^{q} N_{\nu-\lambda}\left(r, \frac{1}{y-a_i}\right) + S(r);$$

elle est déjà établie par cet auteur pour le cas où $\lambda = \nu - 1$.

82. On peut obtenir ici un théorème analogue à V du chapitre IV, en utilisant (221) au lieu de (170) [**12**, *h*].

XVIII. *Soit* $y(x)$ *une algébroïde du type général et soient ensuite* $a_j (j=1, \ldots, p)$ p *nombres complexes finis distincts et* $b_i (i=1, \ldots, q)$ q *nombres complexes distincts finis ou non, mais différents de zéro. On a*

$$(224) \quad p(q-\nu)\,T(r,y) < (q-\nu)\sum_{1}^{p} N\left(r, \frac{1}{y-a_j}\right) + \sum_{1}^{q} N_\nu\left(r, \frac{1}{y'-b_i}\right) - (q-\nu-1)\,N_\nu\left(r, \frac{1}{y'}\right) + S_1(r).$$

Cette inégalité est plus précise que (175) dans le cas où l'algébroïde considérée est du type général.

---

(1) On a ici une définition analogue à celle donnée au n° 64.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

[1] Ahlfors (L.) :

a. Ueber eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen (*Soc. Sc. Fenn. Comment. Phys.-math.*, t. 8, nº 10, 1932).

b. Zur Theorie der Ueberlagerungsflaschen (*Acta math.*, t. 65, 1935).

c. The theory of meromorphic curves (*Acta Soc. Sc. Fenn.*, nouv. série A, III, t. 4, 1941).

[2] Baganas (N.) :

a. Un théorème général sur les fonctions algébroïdes (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 1728).

[3] Bloch (A.) :

a. Sur la non-uniformisabilité par les fonctions méromorphes algébriques les plus générales (*C. R. Acad. Sc.*, t. 181, 1925, p. 276).

b. Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 42, 1925).

[4] Borel (E.) :

a. Sur les zéros des fonctions entières (*Acta Math.*, t. 20, 1897).

b. Leçons sur les fonctions entières (*Coll. Borel*, Paris, 1897).

[5] Bureau (F.) :

a. Mémoire sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé (*Mém. Soc. Roy. Sc. de Liège*, t. 17, 1932).

[6] Cartan (H.) :

a. Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications (*Thèse*, Paris; *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. 45, 1928).

b. Sur la dérivée par rapport à $\log r$ *de la fonction de croissance* $T(r, f)$ (*C. R. Acad. Sc.*, t. 189, 1929, p. 521).

c. Sur la croissance des fonctions méromorphes d'une ou plusieurs variables complexes (*C. R. Acad. Sc.*, t. 489, 1929, p. 1374).

d. Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données (*Mathematica*, Cluj, t. 7, 1933, p. 5-29).

[7] Collingwood (E. F.) :

a. Sur quelques théorèmes de M. R. Nevanlinna (*C. R. Acad. Sc.*, t. 179, 1924).

[8] DINGHAS (A.) :

a. Zur Nevanlinna's zweiten fundamentalsatz in der meromorphen Funktionen (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, 1re série A, I, *Math.-phys.*, t. 151, 1953).

[9] DUFRESNOY (J.) :

a. Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes voisines d'une fonction méromorphe donnée (*C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 1939, p. 255).

b. Sur une propriété de la fonction de croissance T (*r*) *d'un système de fonctions holomorphes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 211, 1940, p. 536).

c. Sur les domaines couverts par les valeurs d'une fonction méromorphe ou algébroïde (*Thèse*, Paris; *Ann. Éc. Norm. sup.*, t. 58, 1941, p. 179-259).

d. Théorie nouvelle des familles complexes normales (*Ann. Éc. Norm. sup.*, t. 61, 1944, p. 1-44).

[10] GONTCHAROFF (H. L.) :

a. Sur la détermination des fonctions par les zéros de leurs dérivées (*C. R. Acad. Sc.*, t. 185, 1927; *Comm. Soc. Kharko.*, 4e série, t. 2, 1928).

b. Détermination des fonctions entières par interpolation (*Act. Sc. et Ind.*, n° 465).

[11] HADAMARD (J.) :

a. Sur les fonctions entières de la forme $e^{G(x)}$ (*C. R. Acad. Sc.*, t. 114, p. 1053).

b. Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann (*J. Math. pures et appl.*, 4e série, t. 9, 1892, p. 171-255).

[12] HIONG (K. L.) :

a. Sur les fonctions entières et les fonctions méromorphes d'ordre infini (*J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 14, 1935, p. 233-308).

b. Some properties of the meromorphic functions of infinite ordre (*Sc. Reports of the National Tsing-Hua Univ.*, série A, t. 3, 1935).

c. Sur une extension du second théorème fondamental de R. Nevanlinna (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 1636).

d. Sur les fonctions holomorphes dont les dérivées admettent une valeur exceptionnelle (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. 72, 1955, p. 165-197).

e. Nouvelle démonstration et amélioration d'une inégalité de M. Milloux (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. 74, 1955, p. 135-160).

f. Sur un théorème fondamental de M. Milloux et ses extensions (*Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch.*, Amsterdam, série A, t. 59, 1956).

g. Un théorème fondamental sur les fonctions méromorphes et leurs primitives (*C. R. Acad. Sc.*, t. 242, 1956, p. 53-55).

h. Sur la croissance des fonctions algébroïdes en rapport avec leurs dérivées (*C. R. Acad. Sc.*, t. 242, 1956, p. 3032).

[13] Kunugui (K.) :

Sur la théorie des fonctions méromorphes et uniformes (*Jap. J. Math.*, t. 18, 1941-1943, p. 583-614).

[14] Milloux (H.) :

a. Extension d'un théorème de M. R. Nevanlinna et applications (*Act. Scient. et Ind.*, n° 888, 1940).

b. Sur la théorie des défauts (*C. R. Acad. Sc.*, t. 210, 1940, p. 289).

c. Sur une inégalité de R. Nevanlinna (*Revisita de Ciencia*, n° 453, 1945).

d. Les dérivées des fonctions méromorphes et la théorie des défauts (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. 63, 1946, p. 289).

e. Sur une nouvelle extension d'une inégalité de M. R. Nevanlinna (*J. Math. pures et appl.*, t. 19, 1940, p. 197-210).

[15] Miranda (C.) :

a. Sur un nouveau critère de normalité pour les familles des fonctions holomorphes (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 64, p. 185).

[16] Montel (P.) :

a. Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications (*Coll. Borel*, 1927).

b. Sur les fonctions convexes et les fonctions sous-harmoniques (*J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 7, 1928, p. 29-60).

c. Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes (Paris, 1932).

d. Le rôle des familles normales (*L'Enseignement mathématique*, t. 33, 1934).

[17] Nevanlinna (F.) :

a. Ueber die Anwendung einer Klasse uniformisierender Transzendenten zur Untersuchung der Wertverteilung analytischer Funktionen (*Acta math.*, t. 50, 1927).

[18] Nevanlinna (R.) :

a. Zur Theorie der meromorphen Funktionen (*Acta Math.*, t. 46, 1925).

b. Ueber die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkerraum (*Akta Soc. Sc. Fenn.*, t. 50, n° 12, 1925).

c. Einige Eindeutigkeitssatze in der Theorie der meromorphen Funktionen (*Acta Math.*, t. 48, 1926).

d. Le théorème de Picard-Borel (*Coll. Borel*, Paris, 1929).

e. Eindeutige analytische Funktionen (Berlin, 1934).

[19] Ou Tchen-Yang (V.) :

a. Valeurs déficientes d'une algébroïde (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 2073).

[20] Pólya (G.) :

a. Bestimmung einer ganzen Funktion endlichen Geschlechts durch viererlei Stellen (*Math. Tidskrift*, B, 1921).

[21] RAUCH (A.) :

a. Deux remarques sur les fonctions entières d'ordre fini (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 72, 1944).

[22] RÉMOUNDOS (G.) :

a. Extension aux fonctions algébroïdes multipliformes du théorème de M. Picard et de ses généralisations (*Mém. Sc. Math.*, fasc. 23, 1927).

[23] SELBERG (H.) :

a. Ueber die Wertverteilung der algebroïden Funktionen (*Math. Z.*, t. 31, 1930, p. 709-728).

b. Algebroïde Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale (*Avh. Norske Vid.-Akad.*, Oslo, Mat.-Naturvid Kl., n° 8, 1934).

[24] SHIMIZU (T.) :

a. On the theory of meromorphic functions (*Jap. J. Math.*, t. 6, 1929).

[25] TSUJI (M.) :

a. Nevanlinna's fundamental theorems and Ahlfors' theorem on the number of asymptotic values (*Jap. J. Math.*, t. 18, 1941-1943, p. 675-708).

[26] ULLRICH (E.) :

a. Ueber die Ableitung einer meromorphen Funktionen (*Sitz. preuss. Akad. Wiss.*, Phys. math. Kl., 1929).

b. Ueber den Einfluss der verzweigtheit einer Algebroide auf ihre Wertverteilung (*J. Reine Ang. Math.*, t. 167, 1931).

[27] VALIRON (G.) :

a. Recherches sur le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions entières (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. 39, 1922, p. 317-341).

b. Sur la distribution des valeurs de fonctions méromorphes (*Acta Math.*, t. 47, 1925).

c. Sur les fonctions algébroïdes méromorphes du second degré (*C. R. Acad. Sc.*, t. 189, 1929, p. 623).

d. Sur les fonctions algébroïdes méromorphes (*C. R. Acad. Sc.*, t. 189 1929, p. 729).

e. Sur quelques propriétés des fonctions algébroïdes (*C. R. Acad. Sc.*, t. 189, 1929, p. 824).

f. Sur la dérivée des fonctions algébroïdes (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 59, p. 17-39).

g. Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes et de leurs dérivées (*Act. Scient. et Ind.*, n° 570, 1937).

[28] WEYL (H.) et (J.) :

a. Meromorphic curves (*Ann. Math.*, II, t. 39, 1938, p. 516).

TABLE DES MATIÈRES.

Chapitre IV.

Extensions aux fonctions algébroïdes.

Chapitre V.

Systèmes de fonctions.

150 830-57 — Imp Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris (6e).