

FÉLIX POLLACZEK

**Problèmes stochastiques posés par le phénomène  
de formation d'une queue d'attente à un guichet  
et par des phénomènes apparentés**

*Mémoires des sciences mathématiques*, fascicule 136 (1957)

[http://www.numdam.org/item?id=MSM\\_1957\\_\\_136\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSM_1957__136__1_0)

© Gauthier-Villars, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

BSM 3155

**Félix POLLACZEK**

Maitre de Recherches  
au Centre National de la Recherche Scientifique

---

# PROBLÈMES STOCHASTIQUES

POSÉS PAR LE PHÉNOMÈNE DE FORMATION  
D'UNE QUEUE D'ATTENTE A UN GUICHET  
ET PAR DES PHÉNOMÈNES APPARENTÉS

---

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CXXXVI



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1957



© 1957 by Gauthier-Villars.  
Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés  
pour tous pays.

---

# PROBLÈMES STOCHASTIQUES

## POSÉS PAR LE PHÉNOMÈNE DE FORMATION

### D'UNE QUEUE D'ATTENTE A UN GUICHET

### ET PAR DES PHÉNOMÈNES APPARENTÉS

Par M. Félix POLLACZEK.



#### INTRODUCTION.

Ci-après nous étudions des questions de Calcul des Probabilités soulevées par le phénomène de formation d'une queue d'attente. On rencontre ce phénomène qui nous est familier lorsqu'il s'agit de l'attente à un guichet, dans différentes branches de la technique. La surveillance des machines automatiques (par exemple, des métiers), le trafic ferroviaire et routier, des phénomènes de congestion dont les aéroports sont le siège, le déchargement de cargos à un quai ([6], p. 184) (\*), l'emmagasinage de matières dans un entrepôt de capacité infinie ([21], p. 449) en fournissent quelques exemples.

Un autre exemple nous est fourni par l'encombrement d'une ligne téléphonique unique par des demandes de communications (des appels) et ce sont justement les besoins de la Téléphonie qui ont contribué à faire avancer la théorie stochastique de ce phénomène. Il

---

(\*) Les chiffres contenus entre des crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.

est vrai que dans cet ordre d'idées, on a surtout étudié des problèmes concernant un groupe de  $s > 1$  lignes interchangeables et c'est singulièrement ce nombre  $s$  qu'on s'efforce de déterminer, pour un trafic téléphonique donné ou estimé, au moyen de raisonnements de caractère stochastique.

Cependant une étude particulière des nombreux problèmes qui se posent déjà pour  $s = 1$  (et dont nous ne pourrions traiter qu'une partie dans ce travail) se justifie parce que, pour traiter à fond le cas difficile  $s > 1$ , on est contraint d'utiliser des méthodes analytiques plus puissantes dont le seul exposé nécessiterait beaucoup de place.

Nous utiliserons ici une terminologie adaptée à l'attente à un guichet et au lieu d'appels lancés sur une ligne, nous parlerons par conséquent de visiteurs qui se présentent à un guichet. L'instant d'arrivée (i. a.) du  $i^{\text{ème}}$  visiteur devant le guichet sera désigné par  $X_i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) et nous appellerons « durée d'opération » (d. o.) l'intervalle de temps  $T_i$  pendant lequel il est traité au guichet.

En premier lieu, nous construirons les fonctions de répartition (f. r.)  $\rho_n(t)$  des délais d'attente (d. a.)  $\tau_n$  des visiteurs successifs, en admettant différentes hypothèses sur la répartition des variables aléatoires (v. a.)  $T_i$  et  $X_i$  desquelles dépendent les d. a.  $\tau_n$ , et nous établirons de quelle manière  $\rho_n(t)$  tend, pour  $n \rightarrow \infty$ , vers la f. r. d'équilibre statistique  $\rho(t)$ . En vue de certaines applications techniques nous établirons la théorie de deux dispositifs où l'attente obéit à des lois différentes de celles qui sont valables pour un guichet. Ensuite on traitera différents problèmes de probabilités composées ainsi que celui de la répartition des périodes d'occupation ininterrompue d'un guichet. Enfin nous nous occuperons des problèmes qui se posent lorsqu'on suppose que sont refusés les visiteurs (ou les appels) qui ne peuvent être traités sans délai. En raison des méthodes analytiques que nous utilisons, tous ces problèmes peuvent servir en même temps d'exemples d'application et d'exercices pour les parties élémentaires de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que les visiteurs sont traités au guichet suivant leur ordre d'arrivée. Notons qu'en supposant, avec M. Vulot [25], que les visiteurs sont traités, non suivant une loi de priorité quelconque mais au hasard, on obtiendrait des lois de

répartition des d. a. toutes différentes de celles qui seront établies ci-dessous.

Quant aux hypothèses à imposer aux différentes f. r. qui figurent dans les données de nos problèmes, on peut distinguer deux attitudes extrêmes, l'une conduisant à admettre *toutes* les f. r. dont les propriétés sont compatibles avec la nature des problèmes en question et à utiliser de préférence la théorie des fonctions réelles, tandis que, l'autre tend à restreindre la généralité de ces f. r. de manière à faciliter l'emploi de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Un exemple de la première tendance est fourni par un travail de M. D. V. Lindley [11] qui a démontré dans les hypothèses les plus larges admissibles que, dans les conditions de son théorème (voir p. 92), la f. r. du  $n^{\text{ème}}$  appel sur une ligne unique *tend* pour  $n \rightarrow \infty$  vers une f. r. limite.

C'est l'autre point de vue que nous avons adopté ici. Afin de simplifier nos calculs et d'obtenir une théorie plus développée, nous avons soumis les fonctions caractéristiques (f. c.) des f. r. données à certaines hypothèses restrictives qui, d'ailleurs, sont satisfaites pour toutes les f. r. qu'on peut être amené à utiliser en pratique. Notre manière de procéder nous semble donc être justifiée d'autant plus que ce travail a été écrit en vue des applications. D'autre part, certaines de nos formules pourraient être établies en admettant des hypothèses notablement plus larges.

Nous avons tâché d'exposer notre sujet d'une manière uniforme, tout en utilisant une méthode analytique assez différente des traitements usuels en cette matière. Aussi n'avons-nous que rarement eu lieu de nous rapporter à la littérature nombreuse dont l'analyse n'était pas dans nos intentions. Mentionnons toutefois, outre les travaux classiques de A. K. Erlang [4] et un travail de M. A. Khintchine [8], un récent Mémoire de M. D. G. Kendall [6]. En utilisant la théorie des chaînes de Markoff relatives à une infinité dénombrable d'états, amplifiée récemment par M. W. Feller [5], M. Kendall établit une théorie originale et digne d'intérêt, bien qu'en raison de sa nature même elle laisse certaines questions sans réponse. C'est aussi à ce Mémoire et à un article subséquent de M. Kendall [7] que nous renvoyons le lecteur pour une bibliographie exhaustive concernant les queues à un seul guichet et à un groupe de « guichets ».

## LISTE DES ABRÉVIATIONS UTILISÉES.

d. a.,	décal d'attente.
d. o.,	durée d'opération.
e. m., E,	espérance mathématique.
$\mathcal{E}$ ,	événement.
f. c.,	fonction caractéristique.
f. g.,	fonction génératrice.
f. r.,	fonction de répartition.
i. a.,	instant d'arrivée.
p. o. i.,	période d'occupation ininterrompue.
R,	partie réelle.
v. a.,	variable aléatoire.
v. a. i.,	variables aléatoires indépendantes.

## CHAPITRE I.

RÉPARTITION DES DÉLAIS D'ATTENTE DANS L'HYPOTHÈSE  
D'UNE RÉPARTITION POISSONNIENNE DES INSTANTS D'ARRIVÉE.

Supposons que des visiteurs numérotés  $0, 1, 2, \dots$ , et dont nous désignons par  $T_0, T_1, \dots$  les d. o. et par  $\tau_0, \tau_1, \dots$  les d. a. se présentent respectivement aux instants

$$(1.1) \quad X_0, X_1, \dots \quad (X_0 \leq X_1 \leq \dots)$$

à un guichet.

Montrons d'abord que pour  $n \geq 0$ , le d. a.  $\tau_{n+1}$  s'exprime en fonction des v. a.  $T_i$  et  $X_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n+1$ ) et du d. a. initial  $\tau_0$ , considéré comme donné. D'après nos hypothèses, le  $n^{\text{ième}}$  visiteur, arrivé à l'instant  $X_n$ , est traité, après un d. a. égal à  $\tau_n$ , pendant la d. o.  $T_n$ ; il quitte donc le guichet à l'instant  $X_n + \tau_n + T_n$ . Par conséquent, le d. a.  $\tau_{n+1}$  du  $(n+1)^{\text{ième}}$  visiteur qui arrive à l'instant  $X_{n+1}$ , est égal ou à  $X_n + \tau_n + T_n - X_{n+1}$  si ce nombre est positif, ou à 0 dans le cas contraire. Au moyen de la notation

$$(1.2) \quad a^+ = \max(a, 0) \quad (a \geq 0),$$

nous obtenons donc la formule de récurrence

$$(1.3) \quad \tau_{n+1} = (X_n + \tau_n + T_n - X_{n+1})^+ \quad (n = 0, 1, \dots)$$

qui permet manifestement d'exprimer  $\tau_{n+1}$  en fonction de  $\tau_0$  et des  $2n + 2$  nombres  $T_i$  et  $X_{i+1} - X_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ).

En employant la notation

$$(1.4) \quad X_{i+1} - X_i = Y_i \quad (\geq 0) \quad (i = 0, 1, \dots)$$

pour les intervalles de temps qui séparent deux arrivées consécutives, (1.3) prend la forme

$$(1.5) \quad \tau_{n+1} = (\tau_n + T_n - Y_n)^+ \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Il résulte de cette équation que  $\tau_{n+1}$  est une fonction continue, et linéaire par morceaux, de  $\tau_0$  et des  $n + 1$  variables ( $T_i - Y_i$ ) ( $i = 0, \dots, n$ ), ce que nous utiliserons au chapitre VII.

Afin d'être en mesure de traiter des problèmes de Calcul des Probabilités concernant les  $\tau_n$ , il faut admettre des hypothèses sur les répartitions des  $T_n$  et  $X_n$ . Dorénavant nous allons considérer les d. o.  $T_n$  comme des variables aléatoires *indépendantes* (v. a. i.) ayant toutes la même f. r.  $f_1(t)$ , donc

$$(1.6) \quad \text{Prob}(T_n < t) = f_1(t) \quad (t > 0; n = 0, 1, \dots).$$

Pour le moment, nous supposons seulement que  $f_1(t)$  est une fonction non décroissante telle que

$$(1.7) \quad f_1(-0) = f_1(+0) = 0, \quad f_1(\infty) = 1 \quad \left( \text{donc} \int_0^\infty df_1(t) = 1 \right),$$

et que l'espérance mathématique (e. m.) des  $T_n$  est finie, c'est-à-dire que

$$(1.8) \quad E(T) = \int_0^\infty t df_1(t) < \infty.$$

En outre,  $f_1(t)$  et toutes les autres f. r. que nous utiliserons seront considérées comme continues à gauche.

La répartition des  $X_n$  sera supposée poissonnienne aux chapitres I, II, IV, V et VI, bernoullienne au chapitre III, tandis qu'aux chapitres VII, VIII et IX nous allons considérer les intervalles  $Y_n$  [équ. (1.4)] comme des v. a. i. de f. r.  $f_2(y)$  largement arbitraire. En adoptant dans ce chapitre pour les instants d'arrivée  $X_n$  une répartition poissonnienne, nous avons

$$(1.9) \quad f_2(t) = 1 - e^{-\tau t},$$

$\eta$  désignant une constante positive, c'est-à-dire que nous supposons

$$(1.10) \quad \text{Prob}(Y_n < t) = 1 - e^{-\eta t} \quad (t > 0; n = 0, 1, \dots).$$

Rappelons ici que la loi (1.10) entraîne, pour l'e. m. du nombre d'arrivées pendant un intervalle de temps quelconque de longueur  $t$ , l'expression  $\eta t$ .

En premier lieu nous allons construire les f. r.  $\rho_n(t)$  des d. a.  $\tau_n$ , c'est-à-dire les fonctions

$$(1.11) \quad \rho_n(t) = \text{Prob}(\tau_n < t) \quad (t > 0), \quad = 0 \quad (t < 0) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Pour cela, nous utiliserons la fonction, dite de Heaviside,

$$(1.12) \quad s(x) = 1 \quad (x > 0), \quad = 0 \quad (x < 0), \quad s(0) = \frac{1}{2}$$

qui, pour  $x$  arbitraire, peut être représentée par l'expression

$$(1.13) \quad s(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN+\delta}^{iN+\delta} e^{xz} \frac{dz}{z} \quad (\delta > 0).$$

Pour  $x \neq 0$ ,  $s(x)$  peut être représentée par l'intégrale de Dirichlet

$$(1.14) \quad s(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{xz} \frac{dz}{z} \quad (x \neq 0),$$

$C$  désignant (de même que, plus loin,  $C_p$ ,  $C_q$ , ...) une parallèle à l'axe imaginaire du plan complexe, parcourue de bas en haut et laissant le pôle  $z = 0$  à sa gauche. Parfois nous écrirons aussi  $\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0}$

et  $\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0}$  pour désigner des intégrations faites respectivement le long de  $C_1$  (fig. 1 a) et de  $C_2$  (fig. 1 b) (ou encore faites le long de droites très voisines de l'axe imaginaire et situées respectivement à gauche et à droite de cet axe).

L'indicateur de l'événement  $\tau_{n+1} < t$ , c'est-à-dire la fonction de  $\tau_{n+1}$  et  $t$  qui est égale à 1 pour  $\tau_{n+1} < t$ , et = 0 dans le cas contraire, est égal à  $s(t - \tau_{n+1})$  [la valeur attribuée à  $s(0)$  étant indifférente puisqu'en raison de la continuité de la f. r.  $f_2(y)$ , l'événement  $\tau_{n+1} = t$  est de probabilité nulle]. Comme la probabilité d'un événement est égale à l'e. m. de son indicateur, et que celui-ci dépend

ici des seules v. a.  $T_0, Y_0, \dots, T_n, Y_n$ , il vient

$$(1.15) \quad \rho_{n+1}(t) = \mathbf{E}s(t - \tau_{n+1}) = \int_0^\infty df_1(t_0) \int_0^\infty df_2(y_0) \dots \\ \times \int_0^\infty df_1(t_n) df_2(y_n) s(t - \tau_{n+1}(t_0, \dots, y_n)) \quad [t > 0];$$

dans cette formule, de même que dans toutes les formules analogues de ce travail, nous avons pris pour variables d'intégration les minuscules  $(t_0, y_0, \dots)$  correspondant aux v. a. i.  $(T_0, Y_0, \dots)$  qui

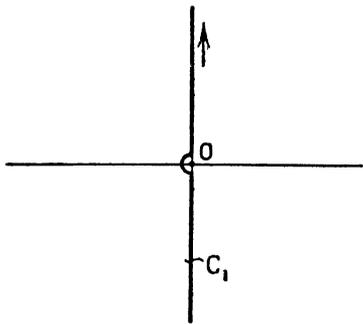


Fig. 1 a. — Plan  $q$ .

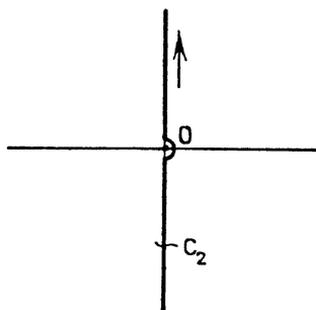


Fig. 1 b. — Plan  $q$ .

figuraient originairement dans la fonction à intégrer. Remplaçons  $s(t - \tau_{n+1})$ , pour  $\tau_{n+1} \neq t$ , par l'intégrale  $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_q} e^{\eta(t - \tau_{n+1})} \frac{d\eta}{\eta}$  [équ. (1.14)]; nous verrons qu'il est permis d'intervertir les opérations  $\int_{C_q}$  et

$$\mathbf{E} = \int_0^\infty df_1(t_0) \dots \int_0^\infty \dots df_2(y_n),$$

donc que

$$(1.16) \quad \rho_{n+1}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_q} e^{\eta t} \mathbf{E} e^{-\eta \tau_{n+1}} \frac{d\eta}{\eta}, \quad (t > 0),$$

où nous avons posé

$$(1.17) \quad \mathbf{E} e^{-\eta \tau_{n+1}} = \int_0^\infty df_1(t_0) \int_0^\infty df_2(y_0) \dots \int_0^\infty e^{-\eta \tau_{n+1}} df_2(y_n).$$

Transformons d'abord l'intégrale  $\int_0^\infty df_2(y_n) s(t - \tau_{n+1})$  où,

d'après (1.5),

$$(1.18) \quad \tau_{n+1} = \tau_n + t_n - y_n \quad (0 \leq y_n \leq \tau_n + t_n), \quad = 0 \quad (y_n > \tau_n + t_n).$$

Pour  $t > \tau_n + t_n$ , nous avons donc  $t > \tau_{n+1}$  (pour  $0 \leq y_n < \infty$ ), de sorte qu'il vient, au moyen de (1.9),

$$(1.19) \quad \int_0^\infty s(t - \tau_{n+1}) df_2(y_n) \\ = \int_0^\infty \eta e^{-\eta y_n} dy_n \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{qt - q\tau_{n+1}} \frac{dq}{q} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{qt} \left[ \int_0^\infty \eta e^{-\eta y_n - q\tau_{n+1}} dy_n \right] \frac{dq}{q} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{qt} \left[ \frac{\eta}{\eta - q} e^{-q(\tau_n + t_n)} - \frac{q}{\eta - q} e^{-\eta(\tau_n + t_n)} \right] \frac{dq}{q} \quad (q \neq \eta),$$

la permutation de  $\int_0^\infty \dots dy_n$  et  $\int_C$  étant licite du fait que  $\int_C$  converge uniformément par rapport à  $y_n$ . Pour  $t \leq \tau_n + t_n$ , il faut d'abord remplacer  $\int_0^\infty \dots dy_n$ , dans (1.19), par  $\lim_{\delta \rightarrow +0} \left( \int_0^{\tau_n + t_n - t - \delta} \dots + \int_{\tau_n + t_n - t + \delta}^\infty \dots dy_n \right)$ , mais on obtient le même résultat que précédemment, à savoir

$$(1.20) \quad \int_0^\infty s(t - \tau_{n+1}) df_2(y_n) \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{qt} \left[ \frac{\eta}{\eta - q} e^{-q(\tau_n + t_n)} - \frac{q}{\eta - q} e^{-\eta(\tau_n + t_n)} \right] \frac{dq}{q} = e^{-\eta(\tau_n + t_n - t)^+}.$$

L'intégrale figurant au deuxième membre converge uniformément pour toutes les valeurs de  $\tau_n + t_n (\geq 0)$ , de sorte que les  $2n + 1$  premières intégrations indiquées dans (1.17) peuvent être effectuées sous le signe  $\int_C$ , et cela démontre la relation (1.16), avec

$$(1.21) \quad E e^{-q\tau_{n+1}} = E \left[ \frac{\eta}{\eta - q} e^{-q(\tau_n + t_n)} - \frac{q}{\eta - q} e^{-\eta(\tau_n + t_n)} \right].$$

En outre, le fait que le troisième membre de (1.20) est continu en  $t$ , uniformément par rapport à toutes les valeurs de  $\tau_n + t_n$ , montre que  $\rho_{n+1}(t) = E e^{-\eta(\tau_n + t_n - t)^+}$  est continue pour  $t > 0$ .

Notons que (1.16) peut être déduit du théorème suivant dû à M. P. Lévy (Lévy [9], p. 166, 167 et [10], p. 38; Cramér [3], p. 93):

Soit

$$(1.22) \quad \varphi(it) = E e^{itx} = \int_{-\infty}^\infty e^{itx} df(x)$$

la fonction caractéristique (f. c.) d'une v. a. quelconque  $X$ , de f. r.  $f(x)$ . Réciproquement, on a alors

$$(1.23) \quad f(a+h) - f(a-h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \frac{\sin ht}{t} e^{-iat} \varphi(it) dt,$$

pourvu que  $f(x)$  soit continue aux points  $x = a + h$  et  $x = a - h$ ,

En effet, si  $X \geq 0$  (comme c'est le cas pour notre v. a.  $\tau_{n+1}$ ), il vient  $df(x) = 0$  pour  $x < 0$ . En désignant dans ce cas par f. c. de  $f(x)$  la fonction  $\varphi(z) = \int_{-0}^{\infty} e^{zx} df(x)$  qui est continue (et de module  $\leq 1$ ) pour  $\text{Re}(z) \leq 0$ , et analytique pour  $\text{Re}(z) < 0$ , on peut transformer (1.23) en

$$(1.24) \quad f(a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN+\delta}^{iN+\delta} e^{-az} \varphi(-z) \frac{dz}{z} \quad (a \geq 0, \delta > 0)$$

[ $f(x)$  étant supposée continue en  $x = a$ ] et au lieu de  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-iN+\delta}^{iN+\delta}$  on peut écrire ici  $\int_{-i\tau+\delta}^{i\infty+\delta}$ , pourvu que cette intégrale converge. En remplaçant  $f(x)$  par  $\rho_{n+1}(t)$  et  $\varphi(-z)$  par  $E e^{-z\tau_{n+1}}$ , on obtient (1.16), où  $\int_C$  converge en raison de la forme particulière du deuxième membre de (1.21).

Pour  $n = 0$ , nous tirons de (1.17) et (1.21)

$$(1.25) \quad E e^{-q\tau_1} = \int_0^{\infty} df_1(t_0) \int_0^{\infty} df_2(\gamma_0) e^{-q\tau_1} \\ = \int_0^{\infty} df_1(t_0) \left( \frac{\eta}{\eta - q} e^{-q(\tau_0+t_0)} - \frac{q}{\eta - q} e^{-\eta(\tau_0+t_0)} \right),$$

et, de là, en désignant par

$$(1.26) \quad \varepsilon(z) = \int_0^{\infty} e^{zt} df_1(t) \quad \left[ \text{donc } \varepsilon(0) = \int_0^{\infty} df_1(t) = 1 \right]$$

la f. c. de la f. r.  $f_1(t)$  [équ. (1.6)],

$$(1.27) \quad E e^{-q\tau_1} = \frac{\eta \varepsilon(-q)}{\eta - q} e^{-q\tau_0} - \frac{q \varepsilon(-\eta)}{\eta - q} e^{-\eta\tau_0}.$$

Cette formule a été déduite en considérant le d. a.  $\tau_0$  du visiteur

initial comme un nombre donné. Mais si  $\tau_0$  est aussi considéré comme une v. a., on obtient  $E e^{-q\tau_1}$  en calculant l'e. m. du deuxième membre de (1.27), en tant que fonction de  $\tau_0$ ; il vient alors

$$(1.28) \quad E e^{-q\tau_1} = \frac{\eta \varepsilon(-q)}{\eta - q} E e^{-q\tau_0} - \frac{q \varepsilon(-\eta)}{\eta - q} E e^{-\eta\tau_0}.$$

Dans l'hypothèse où il existe un état d'équilibre statistique où tous les  $\tau_n$  ont la même répartition  $\rho(t)$ , donc tous les  $e^{-q\tau_n}$  la même e. m.  $E e^{-q\tau}$ , la dernière équation fournit pour cette e. m. la relation

$$\left(1 - \frac{\eta \varepsilon(-q)}{\eta - q}\right) E e^{-q\tau} + \frac{q}{\eta - q} \varepsilon(-\eta) E e^{-\eta\tau} = 0.$$

ou

$$(1.29) \quad E e^{-q\tau} = \frac{cq}{q - \eta + \eta \varepsilon(-q)} \quad [c = \varepsilon(-\eta) E e^{-\eta\tau_0}].$$

Si la v. a. non négative  $\tau$  possède une f. r.  $\rho(t)$  au sens usuel [c'est-à-dire, telle que  $\rho(\infty) = 1$ ], sa f. c.  $E e^{-q\tau}$  est nécessairement continue pour  $R(q) \geq 0$ , et en particulier pour  $q \rightarrow +0$ , de sorte que  $\lim_{q \rightarrow +0} E e^{-q\tau} = E(1) = 1$ . Pour  $q \rightarrow +0$ , (1.29) fournit l'équation

tion  $1 = \frac{c}{1 - \eta \varepsilon'(-0)}$ , au moyen de laquelle nous obtenons enfin

$$(1.30) \quad E e^{-q\tau} = (1 - \eta \varepsilon'(-0)) \frac{q}{q - \eta + \eta \varepsilon(-q)} \quad [R(q) \geq 0].$$

Pour  $\varepsilon'(-0)$  nous obtenons, en vertu des relations (1.6) à (1.8),

$$(1.31) \quad \begin{aligned} \varepsilon'(-0) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} \left(1 - \int_0^\infty e^{-xt} df_1(t)\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{x} df_1(t) = \int_0^\infty t df_1(t) = E(T). \end{aligned}$$

Donc la quantité

$$\eta \varepsilon'(-0) = \eta \int_0^\infty t df_1(t)$$

figurant dans (1.30) est l'e. m. du nombre d'arrivées par durée moyenne d'opération; or, il est clair qu'un équilibre statistique (au sens usuel) ne peut exister que lorsque cette quantité est  $< 1$ .

Nous verrons plus loin que le deuxième membre de (1.30) est en

effet la f. c. d'une f. r. lorsque l'inégalité

$$(1.32) \quad \eta \int_0^\infty t df_1(t) < 1$$

est satisfaite.

Dans le reste de ce chapitre, ainsi qu'aux chapitres II, III et VI, nous prendrons l'e. m. de d. o.  $E(T) = \int_0^\infty t df_1(t)$  pour unité de temps. Ensuite, nous admettrons toujours qu'il existe une constante arbitrairement petite  $\delta > 0$  telle que l'intégrale de Stieltjes (1.26) converge pour  $z < \delta$ ; il en résulte que la fonction analytique  $\varepsilon(z)$  est holomorphe pour  $z = 0$ , ce qui simplifiera nos raisonnements ultérieurs. Nous avons donc maintenant

$$(1.33) \quad \varepsilon'(0) = \int_0^\infty t df_1(t) = 1,$$

l'inégalité (1.32) et l'équation (1.30) se transformant respectivement en

$$(1.34) \quad \eta < 1,$$

$$(1.35) \quad E e^{-q\tau} = \frac{(1-\eta)q}{q-\eta+\eta\varepsilon(-q)} \quad [R(q) \geq 0].$$

En utilisant ensuite l'équation (1.16), où l'on écrira  $\rho$  et  $\tau$  au lieu de  $\rho_{n+1}$  et  $\tau_{n+1}$ , nous obtenons

$$(1.36) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(t) = \text{Prob}(\tau < t) &= \frac{1-\eta}{2\pi i} \int_{-t\infty+0}^{t\infty+0} \frac{e^{qt} dq}{q-\eta+\eta\varepsilon(-q)} \\ (t > 0; 0 < \eta < 1). \end{aligned} \right.$$

Avant de calculer cette intégrale pour différentes classes de f. r.  $f_1(t)$ , nous allons étudier les e. m.  $E e^{-q\tau_{n+1}}$  [équ. (1.17)], en considérant le d. a. initial  $\tau_0$  comme une grandeur donnée. Nous verrons que pour  $n \rightarrow \infty$ ,  $E e^{-q\tau_n}$  tend vers la fonction (1.35) si  $\eta < 1$ , et vers zéro si  $\eta \geq 1$ .

De manière analogue à (1.25) et (1.27), nous trouvons

$$(1.37) \quad \int_0^\infty df_1(t_n) \int_0^\infty df_2(y_n) e^{-q\tau_{n+1}} = \frac{\eta\varepsilon(-q)}{\eta-q} e^{-q\tau_n} - \frac{q\varepsilon(-\eta)}{\eta-q} e^{-\eta\tau_n}$$

et, de là, en effectuant les  $2n$  premières intégrations indiquées

dans (1.17),

$$(1.38) \quad E e^{-q\tau_{n+1}} = \frac{\eta \varepsilon(-q)}{\eta - q} E e^{-q\tau_n} - \frac{q \varepsilon(-\eta)}{\eta - q} E e^{-\eta\tau_n} \quad (n \geq 0).$$

Nous utiliserons cette formule de récurrence pour construire la fonction génératrice (f. g.) des  $E e^{-q\tau_n}$ , définie par la série

$$(1.39) \quad \Phi(q, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n E e^{-q\tau_n} \quad [R(q) \geq 0, |z| < 1, E e^{-q\tau_0} = e^{-q\tau_0}].$$

Cette série converge pour  $|z| < 1$ , car pour  $R(q) \geq 0$ , il vient

$$|e^{-q\tau_n}| \leq 1, \quad \text{donc} \quad |E e^{-q\tau_n}| \leq E |e^{-q\tau_n}| \leq 1.$$

Multipliant (1.38) par  $z^{n+1}$  et sommant depuis  $n=0$  jusqu'à  $n=\infty$ , nous obtenons pour  $\Phi(q, z)$  l'équation fonctionnelle

$$\Phi(q, z) - e^{-q\tau_0} = \frac{z \eta \varepsilon(-q)}{\eta - q} \Phi(q, z) - \frac{z q \varepsilon(-\eta)}{\eta - q} \Phi(\eta, z)$$

ou

$$(1.40) \quad \left(1 - \frac{z \eta \varepsilon(-q)}{\eta - q}\right) \Phi(q, z) = e^{-q\tau_0} - \frac{z q \varepsilon(-\eta)}{\eta - q} \Phi(\eta, z),$$

où figure la grandeur inconnue  $\Phi(\eta, z)$ , indépendante de  $q$ .

Pour calculer  $\Phi(\eta, z)$ , utilisons le fait que la fonction

$$(1.41) \quad 1 - \frac{z \eta \varepsilon(-q)}{\eta - q} \quad (|z| < 1)$$

qui figure au premier membre de (1.40), s'annule en un point (unique)  $q = q_0(z)$  du demi-plan  $R(q) > 0$ . En effet, sur l'axe imaginaire des  $q$  ( $q = iy$ ,  $-\infty < y < \infty$ ) il vient

$$|\varepsilon(-q)| = \left| \int_0^{\infty} e^{-\nu t} df_1(t) \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-\nu t}| df_1(t) = 1,$$

donc

$$(1.42) \quad \left| \frac{z \eta \varepsilon(-q)}{\eta - q} \right| = \left| \frac{z \eta \varepsilon(-iy)}{\eta - iy} \right| \leq |z| < 1,$$

et il est évident que cette inégalité est aussi vérifiée, pour  $r$  assez grand, sur la périphérie du demi-cercle  $q = r e^{i\varphi}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , situé dans le demi-plan droit des  $q$ .

D'après le théorème de Rouché ([24], p. 116), l'expression (1.41),

considérée en tant que fonction de  $q$ , a par conséquent à l'intérieur d'un tel demi-cercle, donc à l'intérieur du demi-plan droit, autant de zéros que de pôles. Mais comme (1.41) a dans le demi-plan droit un seul pôle  $q = \eta > 0$ , nous voyons que l'équation

$$(1.43) \quad 1 - \frac{z \eta \varepsilon(-q)}{\eta - q} = 0, \quad (|z| < 1)$$

possède une seule racine  $q_0(z)$  telle que  $R(q_0) > 0$ .

En raison de cette dernière inégalité, nous sommes en droit de poser, dans (1.40),  $q = q_0(z)$ . Il vient ainsi

$$z \varepsilon(-\eta) \Phi(\eta, z) = \frac{\eta - q_0}{q_0} e^{-q_0 \tau_0},$$

et en introduisant cette expression dans (1.40), nous obtenons pour la f. g.  $\Phi(q, z)$  l'équation

$$(1.44) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(q, z) &= \frac{q}{q - \eta + \eta z \varepsilon(-q)} \left( \frac{q - \eta}{q} e^{-q \tau_0} - \frac{q_0 - \eta}{q_0} e^{-q_0 \tau_0} \right) \\ & \quad [q_0 = q_0(z)] \end{aligned} \right.$$

dont le deuxième membre ne contient que des grandeurs connues.

Nous pouvons maintenant exprimer les coefficients  $E e^{-q \tau_n}$  de la série (1.3g) sous forme de résidus de  $\Phi z^{-n-1}$  en  $z = 0$ , donc

$$(1.45) \quad E e^{-q \tau_n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z| < 1} \Phi(q, z) \frac{dz}{z^{n+1}} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

ou

$$(1.46) \quad E e^{-q \tau_n} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{q}{q - \eta + \eta z \varepsilon(-q)} \times \left( \frac{q - \eta}{q} e^{-q \tau_0} - \frac{q_0(z) - \eta}{q_0(z)} e^{-q_0 \tau_0} \right) \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Afin d'obtenir pour  $E e^{-q \tau_n}$  une expression asymptotique valable pour les grandes valeurs de  $n$ , nous étendrons le chemin d'intégration des dernières intégrales au-delà du cercle unité. Cela nécessite le prolongement analytique de  $\Phi(q, z)$ , donc celui de la fonction  $q_0(z)$  qui est holomorphe pour  $|z| < 1$ , au-delà de ce cercle, et pour y parvenir, nous allons étendre le domaine de validité de l'inégalité (1.42).

Nous pouvons conclure de l'équation

$$(1.47) \quad \left[ \frac{d}{dx} \frac{\eta \varepsilon(-x)}{\eta - x} \right]_{x=0} = \frac{1}{\eta} - 1$$

qu'il existe deux nombres  $x'(\eta) > 0$  et  $x''(\eta) > 0$  tels que  $0 < \frac{\eta \varepsilon(-x)}{\eta - x} < 1$  pour  $\eta < 1$  et  $-x' < x < 0$ , ainsi que pour  $\eta > 1$  et  $0 < x < x''$ . De là résulte l'inégalité

$$\left| \frac{\eta \varepsilon(-q)}{\eta - q} \right| = \left| \frac{\eta \varepsilon(-x - iy)}{\eta - x - iy} \right| \leq \frac{\eta \varepsilon(-x)}{\eta - x} < 1 \quad (q = x + iy)$$

respectivement pour  $\eta < 1$  et  $-x' < R(q) < 0$  et pour  $\eta > 1$  et  $0 < R(q) < x''$ .

Donc il existe  $\delta(\eta) > 0$  tel que l'inégalité

$$(1.48) \quad \left| \frac{\eta \varepsilon(-q)}{\eta - q} \right| < 1 - \delta$$

soit satisfaite sur l'axe imaginaire des  $q$ , déformé à l'origine assez peu respectivement vers la gauche ( $C_1$  dans la figure 1 a) pour  $\eta < 1$ , et vers la droite ( $C_2$  dans la figure 1 b) pour  $\eta > 1$ . Pour des  $q$  situés, selon la grandeur de  $\eta$ , sur  $C_1$  ou  $C_2$ , il vient par conséquent

$$\left| \frac{z \eta \varepsilon(-q)}{\eta - q} \right| < 1 - \delta^2 < 1 \quad (\text{pour } |z| \leq 1 + \delta).$$

En reprenant le raisonnement précédent, nous trouvons maintenant que pour  $|z| \leq 1 + \delta$ , l'équation (1.43) a une racine unique  $q_0(z)$  dans le domaine situé à droite respectivement de  $C_1$  (pour  $\eta < 1$ ) et de  $C_2$  (pour  $\eta > 1$ ) et il est clair que  $q_0(z)$  est holomorphe pour  $|z| \leq 1 + \delta$ .

Du fait que le premier membre de (1.43) s'annule [voir (1.26)] pour  $z = 1$ ,  $q = 0$ , nous concluons maintenant que

$$(1.49) \quad q_0(1) = 0 \quad (\text{pour } \eta < 1);$$

par contre, il vient

$$(1.50) \quad q_0(1) > 0 \quad (\text{pour } \eta > 1).$$

Pour le développement taylorien de  $q_0(z)$  au voisinage de  $z = 1$ , nous trouvons au moyen de (1.43)

$$(1.51) \quad q_0(z) = q_0(1) + (z-1) \frac{dq_0}{dz} \Big|_{z=1} + \dots \\ = -(z-1) \frac{\eta}{1-\eta} + a_2(z-1)^2 + \dots \quad (\eta < 1),$$

ce qui montre que pour  $\eta < 1$ , la fonction  $\Phi(q, z)$  [équ. (1.44)] a dans le cercle  $|z| \leq 1 + \delta$  pour seule singularité un pôle simple  $z = 1$ , de résidu  $-\frac{(1-\eta)q}{q-\eta+\eta\varepsilon(-q)}$ .

Au moyen du théorème de Cauchy, la formule (1.45) peut donc être transformée en

$$(1.52) \quad \left\{ \begin{aligned} E e^{-q\tau_n} &= \frac{(1-\eta)q}{q-\eta+\eta\varepsilon(-q)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1+\delta} \Phi(q, z) z^{-n-1} dz, \\ &[\eta < 1, R(q) \geq 0]. \end{aligned} \right.$$

Afin d'obtenir une valeur approchée de la dernière intégrale pour les grandes valeurs de  $n$  et de  $|q|$ , décomposons  $\Phi(q, z)$  comme suit :

$$(1.53) \quad \Phi(q, z) = \frac{q-\eta}{q} e^{-q\tau_0} - \frac{q_0(z)-\eta}{q_0(z)} e^{-q_0\tau_0} + \frac{\eta-\eta z(-q)}{q-\eta+\eta z\varepsilon(-q)} \left( \frac{q-\eta}{q} e^{-q\tau_0} - \frac{q_0(z)-\eta}{q_0(z)} e^{-q_0\tau_0} \right).$$

Or, l'opération  $\oint_{|z|=1+\delta} \dots z^{-n-1} dz$  annule le premier terme de (1.53) qui ne dépend pas de  $z$ , et transforme les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> termes en des quantités dont les modules sont respectivement  $< \frac{c_1}{(1+\delta)^n}$  et  $< \frac{c_2}{|q|(1+\delta)^n}$ , les constantes  $c_1$  et  $c_2$  ne dépendant ni de  $n$  ni de  $q$ . Nous obtenons ainsi pour  $E e^{-q\tau_n}$  la formule

$$(1.54) \quad \left\{ \begin{aligned} E e^{-q\tau_n} &= \frac{(1-\eta)q}{q-\eta+\eta\varepsilon(-q)} + O[(1+\delta)^{-n}] + \frac{1}{|q|} O[(1+\delta)^{-n}]. \\ &[\eta < 1, R(q) \geq 0]. \end{aligned} \right.$$

Substituons cette expression dont le deuxième terme ne dépend pas de  $q$ , dans (1.16). Alors le deuxième terme n'est pas modifié, tandis qu'en raison de la convergence de l'intégrale  $\int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} \left| e^{qt} \frac{dq}{q^2} \right|$ , le troisième terme se transforme en une quantité dont la valeur absolue est  $< \frac{c(t)}{(1+\delta)^n}$  et qui sera désignée par  $O_t[(1+\delta)^{-n}]$ . Il vient ainsi

$$(1.55) \quad \rho_n(t) = \frac{1-\eta}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} \frac{e^{qt} dq}{q-\eta+\eta\varepsilon(-q)} + O_t[(1+\delta)^{-n}] \quad (\eta < 1, t > 0);$$

donc dans l'hypothèse où  $\eta < 1$ ,  $\rho_n(t)$  tend pour  $n \rightarrow \infty$  exponen-

tiellement vers la fonction  $\rho(t)$  [équ. 1.36)]. De là, il résulte aussi que la fonction  $\rho(t)$ , en tant que limite d'une suite de f. r., est non décroissante, et puisque  $\rho(\infty) = 1$  (ce que nous verrons au chapitre II),  $\rho(t)$  est bien une f. r.; par conséquent,  $E e^{-\eta t}$  [équ. (1.30) et (1.35)] est bien la f. c. d'une f. r. au sens usuel.

Pour  $\eta > 1$ ,  $\Phi(q, z)$  est, en raison de (1.50), holomorphe pour  $|z| \leq 1 + \delta$ . Nous pouvons donc prendre le cercle  $|z| = 1 + \delta$  pour chemin d'intégration de l'intégrale (1.46) et en décomposant  $\Phi(q, z)$  comme précédemment, nous trouvons la formule asymptotique

$$(1.56) \quad \rho_n(t) = O_t[(1 + \delta)^{-n}] \quad (\eta > 1, t > 0);$$

donc pour  $\eta > 1$ ,  $\rho_n(t)$  tend pour  $n \rightarrow \infty$  exponentiellement vers zéro.

Pour obtenir des formules plus précises, nous admettrons une hypothèse supplémentaire sur la f. c.  $\varepsilon(z)$ . On sait qu'à moins que l'intégrale de Stieltjes  $\varepsilon(z) = \int_0^\infty e^{zt} df(t)$  ne soit convergente pour tout  $z$  fini, il existe un nombre  $a \geq 0$  tel que cette intégrale converge pour  $z < a$ , et diverge pour  $z > a$ ,  $\varepsilon(a)$  pouvant être ou finie ou infinie. Pour  $\eta < 1$ , une partie des raisonnements qui suivent, ainsi que les équations (1.61), (1.85) et (1.87) ne sont valables que dans l'hypothèse où

$$(1.57) \quad \lim_{z \nearrow a} \varepsilon(z) = +\infty, \quad (1)$$

la lettre  $a$  devant être remplacée par  $+\infty$  dans le cas où  $\varepsilon(z)$  converge pour tout  $z$  fini.

Nous verrons maintenant que la première singularité (autre que  $z = 1$ ) de  $\Phi(q, z)$  qu'on rencontre en élargissant le cercle d'intégration de (1.45), est un point de ramification de  $q_0(z)$ .

Soit d'abord  $\eta < 1$ . Alors la fonction  $g(q) = \frac{\eta \varepsilon(-q)}{\eta - q}$  est, en vertu de (1.47), croissante au point  $q = 0$  de l'axe réel. En raison de (1.57),  $g(q)$  décroît d'autre part de  $+\infty$  à 1, lorsque  $q$  croît de  $-a$  à 0.

(1) Un exemple d'une f. r. exclue par l'hypothèse (1.57) est fourni par la fonction  $f(t) = \int_0^t e^{-ax} \frac{dx}{1+x^2} \left[ \int_0^\infty e^{-ax} \frac{dx}{1+x^2} \right]^{-1}$  dont la f. c. converge pour  $z \leq a$ , et diverge pour  $z > a > 0$ .

$g(q)$  a donc un minimum  $0 < g(q^*) < 1$  en un point  $-a < q^* < 0$ , et il vient

$$(1.58) \quad \begin{cases} g'(q^*) = \frac{\eta \varepsilon(-q^*)}{(\eta - q^*)^2} - \frac{\eta \varepsilon'(-q^*)}{\eta - q^*} = 0, \\ g''(q^*) = \frac{2\eta \varepsilon(-q^*)}{(\eta - q^*)^3} - \frac{2\eta \varepsilon'(-q^*)}{(\eta - q^*)^2} + \frac{\eta \varepsilon''(-q^*)}{\eta - q^*} = \frac{\eta \varepsilon''(-q^*)}{\eta - q^*} > 0, \end{cases}$$

ce qui montre que ce minimum est unique. En posant

$$(1.59) \quad \frac{1}{z^*} = g(q^*) = \frac{\eta \varepsilon(-q^*)}{\eta - q^*} \quad (z^* > 1)$$

et observant qu'évidemment

$$\left| \frac{\varepsilon(-q)}{\eta - q} \right| < \frac{\varepsilon(-q^*)}{\eta - q^*} \quad \text{pour } R(q) = q^*, \quad q \neq q^*,$$

nous obtenons l'inégalité

$$(1.60), \quad \left| z \frac{\eta \varepsilon(-q)}{\eta - q} \right| = |z g(q)| < z^* g(q^*) = 1 \quad [R(q) = q^*, |z| < z^*].$$

De là nous concluons au moyen du théorème de Rouché que pour  $|z| < z^*$  l'équation (1.43) possède une seule racine  $q(z)$  telle que  $R(q) > q^*$ .  $q(z)$  est une fonction holomorphe de  $z$  et coïncide pour  $|z| < 1$  avec  $q_0(z)$ ; c'est donc le prolongement analytique de  $q_0(z)$  dans le domaine  $1 \leq |z| < z^*$ . Ensuite on voit que l'intégrale

$$\int_{q^* - i\infty}^{q^* + i\infty} d \log \left( 1 - z \frac{\eta \varepsilon(-q)}{\eta - q} \right) \quad (|z| = z^*, z \neq z^*),$$

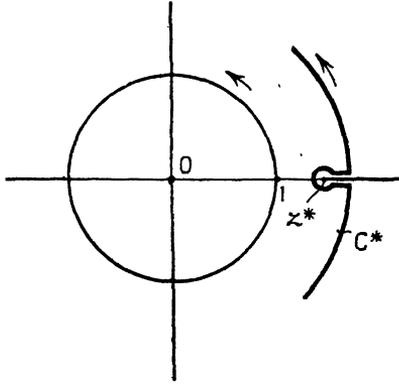
étendue à la droite  $R(q) = q^*$ , est nulle, d'où il résulte que  $q_0(z)$  existe et est encore holomorphe sur la périphérie  $|z| = z^*$ , sauf en  $z = z^*$ . En vertu de (1.58) et (1.59), ce dernier point est pour  $q_0(z)$  un point de ramification d'ordre 2.

On démontre de la même manière que  $q_0(z)$  est holomorphe pour  $|z| < z^*$  ( $z \neq z^*$ ) dans le cas où  $\eta > 1$ , sauf qu'alors  $0 < q^* < \eta$ , de sorte que l'hypothèse (1.57) n'intervient pas.

Par conséquent, nous pouvons prolonger  $q_0(z)$ , donc  $\Phi(q, z)$ , dans le plan  $z$ , découpé à partir du point  $z = z^*$ , au-delà du cercle  $|z| = z^*$ , ce qui nous permet de remplacer le chemin d'intégration de (1.45) par une courbe ( $C^*$  dans la figure 2) dont les points, à l'exception de l'arc qui contourne le point  $z = z^*$ , sont à une dis



tance  $> z^*$  de l'origine. Pour  $n \rightarrow \infty$ , seule la partie de  $C^*$  qui est voisine de  $z^*$ , contribuera alors, en raison du facteur  $z^{-n}$ , d'une manière appréciable à la valeur numérique de l'intégrale (1.46). D'après une méthode bien connue [27] on obtient le développement asymptotique de cette intégrale en y posant  $z = z^* \left(1 - \frac{\xi^2}{n}\right)$ , en développant la fonction à intégrer en série de Taylor en  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , et en intégrant dans chaque terme depuis  $\xi = -\infty$  jusqu'à  $\xi = \infty$ .

Fig. 2. — Plan  $z$ .

De ce développement asymptotique on tire celui de  $\rho_n(t)$  en effectuant terme à terme l'opération

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} e^{qt} \dots \frac{dq}{q}.$$

Pour  $\eta \neq 1$ , il vient ainsi à l'aide de la notation (1.2) :

$$(1.61) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_n(t) &= (1-\eta)^+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \frac{e^{qt} dq}{q - \eta + \eta \varepsilon(-q)} \\ &+ cn^{-\frac{1}{2}} z^{*-n} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \frac{e^{qt} dq}{q - \eta + \eta z^* \varepsilon(-q)} + O_t \left( n^{-\frac{5}{2}} z^{*-n} \right) \end{aligned} \right. \quad (\eta \neq 1),$$

où nous avons posé

$$(1.62) \quad c = (\eta + q^* \tau_0 (\eta - q^*)) e^{-q^* \tau_0} \frac{1}{q^{*2}} \sqrt{\frac{\varepsilon(-q^*)}{2\pi \varepsilon''(-q^*)}}.$$

Pour  $\eta = 1$  (où  $q^* = 0, z^* = 1$ ), le procédé qui nous a fourni (1.61), donne

$$(1.63) \quad \rho_n(t) = \sqrt{\frac{\varepsilon''(0)}{2\pi n}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} \frac{e^{qt} dq}{q-1+\varepsilon(-q)} + O_t\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) \quad (\eta = 1).$$

En modifiant quelque peu la méthode mentionnée plus haut, nous obtenons dans ce dernier cas pour la f. r.  $\rho_n(t\sqrt{n})$ , pour  $t$  fixe et  $n \rightarrow \infty$ ,

$$(1.64) \quad \rho_n(t\sqrt{n}) = \sqrt{\frac{2}{\pi \varepsilon''(0)}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon''(0)}} dx + O_t\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (\eta = 1).$$

Donc, pour  $\eta = 1$  et  $n \rightarrow \infty$ , la loi de répartition du d. a. du  $n^{\text{ième}}$  visiteur, mesuré par une unité de temps proportionnelle à  $\sqrt{n}$ , tend vers une loi semi-normale.

En supposant que le visiteur initial arrive à l'instant  $X_0 = 0$  et que son d. a.  $\tau_0$  soit nul, nous allons déterminer maintenant la probabilité conditionnelle  $\rho_{t'}(t) = \text{Prob}(\tau < t | X = t')$  (2) pour qu'un visiteur subséquent quelconque qui, par hypothèse, arrive à un instant donné  $X = t' > 0$ , ait un d. a.  $\tau < t$ .  $\rho_{t'}(t)$  peut être déterminé comme la limite, pour  $t'' \searrow t'$ , de la probabilité conditionnelle

$$\text{Prob}(\tau < t | t' \leq X < t''),$$

donc

$$(1.65) \quad \rho_{t'}(t) = \text{Prob}(\tau < t | X = t') = \lim_{t'' \searrow t'} \text{Prob}(\tau < t | t' \leq X < t'').$$

La probabilité qui figure dans le dernier membre de (1.65) peut être exprimée au moyen des probabilités (f. r. à deux variables)

$$(1.66) \quad \rho_n(t, t') = \text{Prob}(\tau_n < t; X_n < t') \quad (t > 0, t' > 0; n = 1, 2, \dots)$$

par la formule

$$(1.67) \quad \text{Prob}(\tau < t | t' \leq X < t'') = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (\rho_n(t, t'') - \rho_n(t, t'))}{\sum_{n=1}^{\infty} (\rho_n(\infty, t'') - \rho_n(\infty, t'))},$$

de sorte que notre problème se ramène au calcul des f. r.  $\rho_n(t, t')$ .

(2) Pour désigner des probabilités conditionnelles, nous séparons, suivant l'usage, l'événement en question ( $\tau < t$ ) par un trait vertical de l'hypothèse ( $X = t'$ ) dans laquelle sa probabilité est définie, tandis que des probabilités composées [par exemple (1.66)] sont dénotées en séparant les événements simultanés par des virgules ou des points virgules.

Comme l'indicateur de l'évènement : «  $\tau_n < t$  et  $X_n < t'$  » est égal à  $s(t - \tau_n) s(t' - X_n)$ , il vient

$$(1.68) \quad \rho_n(t, t') = \mathbb{E} s(t - \tau_n) s(t' - X_n)$$

et de là, en utilisant (1.14),

$$(1.69) \quad \rho_n(t, t') = \mathbb{E} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_q} e^{q(t - \tau_n)} \frac{dq}{q} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{r(t' - X_n)} \frac{dr}{r}.$$

Par des raisonnements analogues à ceux qui nous ont fourni (1.16), on démontre que l'opération  $\mathbb{E}$  peut être permutée avec  $\int_{C_q}$  et  $\int_{C_r}$ , et qu'en outre,  $\rho_n(t, t')$  peut être écrite sous forme d'une intégrale double, à savoir

$$(1.70) \quad \rho_n(t, t') = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_q} \int_{C_r} e^{q(t - \tau_n) + r(t' - X_n)} \mathbb{E} e^{-q\tau_n - rX_n} \frac{dq dr}{qr}.$$

Pour l'e. m. qui figure ici, nous obtenons de manière analogue à (1.17) [en utilisant qu'en vertu des relations (1.4) et  $X_0 = 0$ ,  $X_n = \sum_{i=0}^{n-1} Y_i$ ]

$$(1.71) \quad \mathbb{E} e^{-q\tau_n - rX_n} = \int_0^\infty df_1(t_0) \dots \int_0^\infty \exp\left(-q\tau_n - r \sum_{i=0}^{n-1} y_i\right) df_2(y_{n-1}).$$

En appliquant les identités [équ. (1.9)]

$$e^{-r y_i} df_2(y_i) = \eta e^{-(\eta+r)y_i} dy_i = \frac{\eta}{\eta+r} d(1 - e^{-(\eta+r)y_i}) \quad (i = 0, \dots, n-1),$$

nous trouvons ensuite

$$(1.72) \quad \mathbb{E} e^{-q\tau_n - rX_n} = \left(\frac{\eta}{\eta+r}\right)^n \mathbb{E}_{\eta+r} e^{-q\tau_n} \quad [R(q), R(r) > 0],$$

l'indice de  $\mathbb{E}_{\eta+r}$ , puis de  $\Phi_{\eta+r}$ , signifiant que ces fonctions ont été construites au moyen de la « f. r. »  $1 - e^{-(\eta+r)y}$ , au lieu de  $1 - e^{-\eta y}$ .

Pour la somme de toutes les e. m. (1.72) qui, en raison de l'inégalité

$$|\mathbb{E} e^{-q\tau_n - rX_n}| \leq \mathbb{E} |e^{-q\tau_n - rX_n}| \leq \mathbb{E} e^{-X_n R(r)} = \left(\frac{\eta}{\eta + R(r)}\right)^n \quad [R(q) \geq 0],$$

converge pour  $R(q) \geq 0$ ,  $R(r) > 0$ , on obtient (dans notre hypo-

thèse  $\tau_0 = 0$ ) au moyen de (1.39)

$$(1.73) \quad \sum_{n=1}^{\infty} E e^{-q\tau_n - rX_n} = \sum_1^{\infty} \left( \frac{\eta}{\eta+r} \right)^n E_{\eta+r} e^{-q\tau_n} = \Phi_{\eta+r} \left( q, \frac{\eta}{\eta+r} \right) - 1.$$

Or, le raisonnement qui nous a fourni l'expression (1.44) de  $\Phi(q, z) = \Phi_{\eta}(q, z)$  s'applique encore lorsqu'on remplace la constante positive  $\eta$  et la variable complexe  $z$  respectivement par  $\eta+r$  et  $\frac{\eta}{\eta+r}$ ,  $r$  étant un paramètre tel que  $R(r) \geq 0$ ,  $r \neq 0$ . Pour  $\tau_0 = 0$ , nous tirons ainsi de (1.44) la formule

$$(1.74) \quad \Phi_{\eta+r} \left( q, \frac{\eta}{\eta+r} \right) = \frac{\eta+r}{q-\eta-r+\eta\varepsilon(-q)} \frac{q-q_{00}(r)}{q_{00}(r)},$$

où  $q_{00}(r)$  désigne la racine unique de l'équation

$$(1.75) \quad q - \eta - r + \eta\varepsilon(-q) = 0$$

telle que  $R(q) > 0$  pour  $R(r) > 0$ .

Pour la somme de toutes les  $\rho_n(t, t')$  nous obtenons au moyen des équations (1.70), (1.73), (1.74) et (1.75), la sommation *sous* les symboles d'intégration pouvant être justifiée,

$$(1.76) \quad \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(t, t') = \frac{\eta}{(2\pi i)^2} \int_{C_q} \int_{C_r} e^{qt+r't'} \frac{q\varepsilon(-q_{00}) - q_{00}\varepsilon(-q)}{q-\eta-r+\eta\varepsilon(-q)} \frac{dq dr}{q_{00}qr} \right. \\ \left. [q_{00} = q_{00}(r)]. \right.$$

Pour  $t = \infty$ ,  $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_q} \dots dq$  se réduit au résidu de la fonction à intégrer en  $q = 0$ . On voit cela en amenant  $C_q$  en une droite

$$R(q) = -\delta' \quad (0 < \delta' \ll 1),$$

$\int_{R(q)=-\delta'} \dots dq$  s'annulant pour  $t \rightarrow \infty$ . Il vient donc

$$(1.77) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(\infty, t') = \frac{\eta}{2\pi i} \int_C e^{r't'} \frac{dr}{r^2} = \eta t' \quad (3).$$

(3) Cette équation peut aussi être obtenue de la manière suivante :

$$\rho_n(\infty, t') = \text{Prob}(X_n < t')$$

est la probabilité pour que pendant l'intervalle  $(0, t')$ , au moins  $n$  visiteurs se pré-

En portant les expressions (1.76) et (1.77) dans (1.67), nous avons

$$(1.78) \quad \text{Prob}(\tau < t \mid t' \leq X \leq t'') \\ = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_q} \int_{C_r} e^{qt} \frac{e^{rt''} - e^{rt'}}{r(t'' - t')} \frac{q \varepsilon(-q_{00}) - q_{00} \varepsilon(-q)}{q - \eta - r + \eta \varepsilon(-q)} \frac{dq dr}{q_{00} q}.$$

Pour obtenir la limite de cette expression qui figure dans (1.65), nous sommes en droit de faire passer  $t'' \searrow t'$  sous le signe  $\int_{C_q} \int_{C_r}$ , car l'intégrale double obtenue ainsi converge uniformément par rapport aux  $t'$  de tout intervalle fini  $0 \leq a < t' \leq b$ . Pour  $\rho_{\nu}(t)$  [équ. 1.65)], il vient ainsi

$$(1.79) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_{\nu}(t) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_q} \int_{C_r} e^{qt+r t'} \frac{q \varepsilon(-q_{00}) - q_{00} \varepsilon(-q)}{q - \eta - r + \eta \varepsilon(-q)} \frac{dq dr}{q_{00} q} \\ &\quad (t > 0, t' > 0) \end{aligned} \right.$$

ou

$$(1.80) \quad \rho_{\nu}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_q} e^{qt} E(e^{-q\tau} \mid X = t') \frac{dq}{q},$$

$$(1.81) \quad E(e^{-q\tau} \mid X = t') = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{r t'} \frac{q \varepsilon(-q_{00}) - q_{00} \varepsilon(-q)}{q - \eta - r + \eta \varepsilon(-q)} \frac{dr}{q_{00}(r)}.$$

Pour déduire de la dernière formule une formule asymptotique pour les grandes valeurs de  $t'$ , nous déplacerons  $C_r$  vers la gauche et dans ce but, nous devons prolonger  $q_{00}(r)$  analytiquement au-delà de l'axe imaginaire. On confirme sans peine qu'en raison de notre hypothèse initiale sur  $\varepsilon(z)$ ,  $q_{00}(r)$  est encore holomorphe dans une certaine bande  $-\delta' \leq R(r) \leq 0$ . En procédant comme lors de l'étude de  $q_0(z)$  pour  $z = 0$  [équ. (1.49) et (1.50)], on voit ensuite que  $q_{00}(0) = 0$  pour  $\eta < 1$  et que

$$(1.82) \quad q_{00}(r) = \frac{r}{1 - \eta} + a_2 r^2 + \dots \quad (\eta < 1, |r| \ll 1),$$

tandis que  $q_{00}(0) > 0$  pour  $\eta > 1$ .

sentent suivant une loi de Poisson. Il vient donc

$$\rho_n(\infty, t') = \sum_{i=n}^{\infty} p_i \quad \left[ \text{avec } p_i = \frac{(\eta t')^i}{i!} e^{-\eta t'} \right]$$

et, de là,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(\infty, t') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i = \eta t'.$$

Par conséquent, la fonction à intégrer de (1.81) a, pour  $\eta < 1$ , un pôle du premier ordre en  $r = 0$ , mais est holomorphe en ce point, lorsque  $\eta > 1$ . En amenant le chemin  $C_r$  en la droite  $R(r) = -\delta'$ , on trouve donc que la fonction (1.81) ne diffère respectivement du résidu en  $r = 0$ , et de 0, que d'une quantité qui est  $O(e^{-\delta't'})$  pour  $t' \rightarrow \infty$ .

Afin d'obtenir une meilleure approximation, nous admettrons à nouveau l'hypothèse (1.57). Soit d'abord  $\eta < 1$ . Pour  $r$  donné ( $-\eta < r \leq 0$ ), l'expression  $\frac{\eta \varepsilon(-q)}{\eta + r - q}$ , considérée en tant que fonction de la variable réelle  $q$ , atteindra alors son minimum en un point  $q^*(r)$  de l'intervalle  $(-a, 0)$ . Désignons par  $r^* (< 0)$  la valeur de  $r$  pour laquelle ce minimum est égal à 1, et écrivons  $q^*$  au lieu de  $q^*(r^*)$ . Par définition,  $q^*$  et  $r^*$  satisfont donc aux équations (1.75) et

$$(1.83) \quad \frac{\partial}{\partial q} (q - \eta - r + \eta \varepsilon(-q)) = 1 - \eta \varepsilon'(-q) = 0,$$

de sorte que la fonction  $q_{00}(r)$  est ramifiée au point  $r = r^*$ . Ensuite nous voyons que

$$\left| \frac{\eta \varepsilon(-q)}{\eta + r - q} \right| < 1 \quad \text{pour } R(q) = q^*, \quad R(r) > r^*,$$

de sorte que  $q_{00}(r)$  n'est pas ramifiée pour  $R(r) > r^* (r^* < 0)$ . Ce résultat subsiste pour  $\eta > 1$ , sauf qu'alors la solution réelle  $q^*$  de (1.83) est positive. Mais pour obtenir que  $q_{00}(r)$  soit encore holomorphe dans une bande  $r^* - \delta' \leq R(r) \leq r^*$  (si mince soit-elle), découpée à partir du point  $r^*$ , nous devons admettre une deuxième hypothèse supplémentaire sur  $\varepsilon(z)$ , à savoir : Pour tout  $x < a$  et  $\delta_1 > 0$ , il existe  $\delta_2 = \delta_2(x, \delta_1) > 0$  tel que

$$(1.84) \quad |\varepsilon(x + iy)| \leq \varepsilon(x) - \delta_2 \quad \text{pour } |y| \geq \delta_1.$$

A l'aide de cette hypothèse [qui exclut par exemple les  $f. r. f(t)$  suivant (7.53)] on démontre sans peine que  $q_{00}(r)$  est holomorphe dans la bande découpée. Nous pouvons donc amener le chemin d'intégration  $C_r$  de (1.81) (en ajoutant, pour  $\eta < 1$ , le résidu en  $r = 0$ ) en une courbe  $C_r^*$  qui, à l'exception de l'arc qui contourne le point de ramification  $r^*$ , appartient à cette bande. En raison du facteur  $e^{-t'}$ , seul cet arc contribuera pour  $t' \rightarrow \infty$  de manière appré-

ciable à l'intégrale (1.81) dont le développement asymptotique s'obtient par la méthode mentionnée plus haut [avant l'équation (1.61)].

En première approximation on trouve ainsi

$$(1.85) \quad E(-q^r | X = t') = (1 - \eta)^+ \frac{q}{q - \eta + \eta \varepsilon(-q)} \\ + ct'^{-\frac{r}{2}} e^{r^* t'} \frac{q}{q - \eta - r^* + \eta \varepsilon(-q)} + O\left(t'^{-\frac{r}{2}} e^{r^* t'}\right) \\ + \frac{1}{|q|} O\left(t'^{-\frac{r}{2}} e^{r^* t'}\right) \quad (\eta \neq 1),$$

où nous avons posé

$$(1.86) \quad c = \frac{1}{q^{*2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta \varepsilon^r(-q^*)}}.$$

De là nous obtenons en vertu de (1.80)

$$(1.87) \quad \rho_{r'}(t) = \frac{(1 - \eta)^+}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \frac{e^{\eta t} dq}{q - \eta + \eta \varepsilon(-q)} \\ + ct'^{-\frac{r}{2}} e^{r^* t'} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \frac{e^{\eta t} dq}{q - \eta - r^* + \eta \varepsilon(-q)} \\ + O\left(t'^{-\frac{r}{2}} e^{r^* t'}\right) \quad (\eta \neq 1).$$

Pour  $\eta = 1$  et pour des  $f. c. \varepsilon(z)$  satisfaisant à (1.84), les formules asymptotiques (1.63) et (1.64) subsistent à condition d'y remplacer  $n$  par  $t'$ .

## CHAPITRE II.

### APPLICATION DES FORMULES DU CHAPITRE I.

**Généralités.** — Le mode de convergence de  $\rho_n(t)$ , respectivement vers  $\rho(t)$  (pour  $\eta < 1$ ) et vers zéro (pour  $\eta \geq 1$ ), ayant été exposé au précédent chapitre, revenons aux équations (1.35) et (1.36) valables pour  $\eta < 1$  en état d'équilibre statistique.

En décomposant le dénominateur de (1.35) comme suit :

$$(2.1) \quad \frac{1}{q - \eta + \eta \varepsilon(-q)} = \frac{1}{q} + \frac{\eta}{q} \frac{1 - \varepsilon(-q)}{q - \eta + \eta \varepsilon(-q)}$$

et utilisant la formule

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty-0}^{i\infty+0} e^{\eta t} \frac{dq}{q} = 1 \quad (t > 0),$$

nous tirons de (1.36)

$$(2.2) \quad \rho(t) = 1 - \eta + \frac{\eta(1-\eta)}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} e^{\eta t} \frac{1-\varepsilon(-q)}{q-\eta+\eta\varepsilon(-q)} \frac{dq}{q} \quad (t > 0).$$

Ici, on peut prendre pour  $R(q) = \delta$  n'importe quel nombre positif. En prenant par exemple  $\delta > 2\eta$ , nous avons sur la droite  $R(q) = \delta$

$$(2.3) \quad \left| \frac{1-\varepsilon(-q)}{q(q-\eta+\eta\varepsilon(-q))} \right| \leq \frac{2}{|q|(|q|-2\eta)} \\ = \frac{|q|}{|q|-2\eta} \frac{2}{|q|^2} \leq \frac{2\delta}{\delta-2\eta} \frac{1}{|q|^2},$$

de sorte que l'intégrale (2.2) converge comme

$$\frac{2\delta}{\delta-2\eta} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} \left| e^{\eta t} \frac{dq}{q^2} \right| = \frac{2\delta}{\delta-2\eta} e^{\delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^2+\delta^2} = \frac{2\pi}{\delta-2\eta} e^{\delta t},$$

donc uniformément par rapport à tous les  $t$  appartenant à un intervalle fini quelconque  $a \leq t \leq b$ . Donc, cette intégrale est une fonction continue de  $t$ , de sorte que la f. r.  $\rho(t)$  est continue pour  $t > 0$ .

Pour  $t = 0$ , la valeur absolue de l'intégrale (2.2) est, d'après ce qui précède,  $\leq \frac{2\pi}{\delta-2\eta}$ , et puisque  $\delta$  peut être choisi arbitrairement grand, cette intégrale est  $= 0$ . Pour  $t \searrow +0$ , (2.2) donne donc pour la probabilité  $\rho(+0)$  de non-attente

$$(2.4) \quad \rho(+0) = 1 - \eta.$$

Comme nous avons posé  $\rho(t) = 0$  pour  $t < 0$ , il vient en particulier  $\rho(-0) = 0$ , de sorte que la f. r.  $\rho(t)$  définie par (2.1) et (1.11) présente pour  $t = 0$  le saut

$$(2.5) \quad \rho(+0) - \rho(-0) = 1 - \eta.$$

En développant la fonction

$$E e^{-\eta\tau} = \int_{-0}^{\infty} e^{-\eta t} d\rho(t) = \frac{(1-\eta)q}{q-\eta+\eta\varepsilon(-q)}$$

qui, en raison de notre hypothèse sur  $\varepsilon(z)$ , est holomorphe au point  $q = 0$ , en série de Taylor, nous obtenons

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \mathbb{E} e^{-q\tau} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q)^n}{n!} \int_{-0}^{\infty} \tau^n d\rho(\tau) \\ &= 1 - \frac{\eta \varepsilon''(0)}{2(1-\eta)} q + \left( \frac{\eta^2 \varepsilon''^2(0)}{4(1-\eta)^2} + \frac{\eta \varepsilon'''(0)}{6(1-\eta)} \right) q^2 \\ &\quad - \left( \frac{\eta^3 \varepsilon''^3(0)}{8(1-\eta)^3} + \frac{\eta^2 \varepsilon''(0) \varepsilon'''(0)}{6(1-\eta)^2} + \frac{\eta \varepsilon^{(4)}(0)}{24(1-\eta)} \right) q^3 + \dots \end{aligned}$$

De là résultent les formules

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{aligned} m_1(\tau) &= \int_0^{\infty} \tau d\rho(\tau) = \frac{\eta}{2(1-\eta)} \varepsilon''(0) = \text{espérance mathématique} \\ &\quad \text{du délai d'attente,} \\ m_2(\tau) &= \int_0^{\infty} \tau^2 d\rho(\tau) = \frac{\eta^2}{2(1-\eta)^2} \varepsilon''^2(0) + \frac{\eta}{3(1-\eta)} \varepsilon'''(0), \\ \sqrt{m_2(\tau) - m_1^2(\tau)} &= \sqrt{\frac{\eta^2}{4(1-\eta)^2} \varepsilon''^2(0) + \frac{\eta}{3(1-\eta)} \varepsilon'''(0)} \\ &= \text{écart moyen quadratique du d. a.} \end{aligned} \right.$$

Considérons maintenant, dans l'hypothèse (1.57) sur  $\varepsilon(z)$ , le comportement de la fonction

$$(2.8) \quad q - \eta + \eta \varepsilon(-q) \quad (\eta < 1)$$

qui existe au moins dans le demi-plan  $\mathbb{R}(q) > -a$ , sur le segment  $-a < q \leq 0$  de l'axe réel. Cette fonction est nulle pour  $q = 0$ , négative pour  $-a \ll q < 0$  (puisque sa dérivée pour  $q = 0$  est  $1 - \eta > 0$ ) et tend vers  $+\infty$  pour  $q \rightarrow -a + 0$ . Elle a donc à l'intérieur de ce segment un zéro  $-\beta_0$  ( $-a < -\beta_0 < 0$ ), et celui-ci est unique car la dérivée  $1 - \eta \varepsilon'(-q)$  de (2.8) est à croissance monotone dans  $(-a, 0]$ . On voit en outre qu'il existe une constante  $\delta' > 0$  telle que dans la bande  $-\beta_0 - \delta' \leq \mathbb{R}(q) \leq 0$  du demi-plan gauche, la fonction (2.8) ne possède pas d'autres zéros (complexes).

Par conséquent, nous sommes en droit d'amener le chemin d'intégration de l'intégrale qui figure dans (2.2) dans la droite  $\mathbb{R}(q) = -\beta_0 - \delta'$ , en ajoutant les résidus en  $q = 0$  et  $q = -\beta_0$ .

seuls pôles à considérer ici; ainsi il vient

$$(2.9) \quad \rho(t) = 1 - \frac{1-\eta}{1-\eta \varepsilon'(\beta_0)} e^{-\beta_0 t} + \frac{\eta(1-\eta)}{2\pi i} \int_{-\infty-\beta_0-\delta'}^{i\infty-\beta_0-\delta'} e^{qt} \frac{1-\varepsilon(-q)}{q-\eta+\eta\varepsilon(-q)} \frac{dq}{q}.$$

Ici le module de la fonction à intégrer peut être majoré par une expression de la forme  $e^{-(\beta_0+\delta')t} \frac{c}{|q|^n}$ , au moyen de laquelle nous obtenons la formule asymptotique

$$(2.10) \quad \begin{cases} \rho(t) = 1 - \frac{1-\eta}{1-\eta \varepsilon'(\beta_0)} e^{-\beta_0 t} + O(e^{-(\beta_0+\delta')t}) \\ (\eta < 1; \beta_0 + \eta - \eta \varepsilon(\beta_0) = 0; t \rightarrow \infty). \end{cases}$$

Donc dans l'hypothèse présente sur  $\varepsilon(z)$ ,  $\rho(t)$  est asymptotiquement de la forme  $1 - c_1 e^{-c_2 t}$  ( $c_1 > 0, c_2 > 0$ ).

**Exemples.** — Nous allons construire maintenant  $\rho(t)$  pour différentes f. r.  $f_1(t)$  choisies de telle façon que leurs f. c.  $\varepsilon(z)$  qui seules figurent dans (1.35) et (1.36), soient des fonctions élémentaires de  $z$ . Conformément à (1.33), dans tous ces exemples l'e. m. de d. o.

$$E(T) = \int_0^\infty t df_1(t)$$

a été prise pour unité de temps.

1° Soit d'abord

$$(2.11) \quad f_1(t) = 1 - e^{-t} \quad (t \geq 0), \quad \varepsilon(z) = \int_0^\infty e^{zt} e^{-t} dt = \frac{1}{1-z} \quad [R(z) < 1].$$

Nous avons alors

$$q - \eta + \eta \varepsilon(-q) = q - \eta + \frac{\eta}{1+q} = \frac{q}{1+q} (q + 1 - \eta),$$

de sorte que (1.36) prend la forme

$$\rho(t) = \frac{1-\eta}{2\pi i} \int_{-\infty+0}^{i\infty+0} \frac{q+1}{q+1-\eta} \frac{dq}{q} \quad (t > 0, \eta < 1),$$

et cette intégrale se réduit, en vertu du théorème de Cauchy, à la somme des résidus aux pôles  $q = 0$  et  $q = \eta - 1 < 0$  de la fonction

à intégrer, donc

$$(2.12) \quad \varphi(t) = 1 - \eta e^{-(1-\eta)t} \quad (t > 0, \eta < 1).$$

2° Prenons maintenant pour  $f_1(t)$  une forme linéaire de deux fonctions suivant (2.11), donc

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(t) = a_1(1 - e^{-b_1 t}) + a_2(1 - e^{-b_2 t}) \\ (a_1 + a_2 = 1; b_1, b_2 > 0; t \geq 0), \end{array} \right.$$

d'où l'on tire

$$(2.14) \quad \varepsilon(z) = \int_0^\infty (a_1 b_1 e^{-b_1 t} + a_2 b_2 e^{-b_2 t}) e^{zt} dt = \frac{a_1 b_1}{b_1 - z} + \frac{a_2 b_2}{b_2 - z}.$$

En résolvant les équations linéaires

$$(2.15) \quad a_1 + a_2 = 1, \quad \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = 1,$$

dont la seconde résulte de (1.33), il vient

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = b_1 \frac{b_2 - 1}{b_2 - b_1}, \quad a_2 = b_2 \frac{b_1 - 1}{b_1 - b_2}, \\ \text{donc} \\ \varepsilon(z) = \frac{b_1 b_2 - z(b_1 + b_2 - b_1 b_2)}{(b_1 - z)(b_2 - z)}. \end{array} \right.$$

Afin que la fonction (2.13) puisse être une f. r., il faut et il suffit que l'inégalité

$$(2.17) \quad f_1(t) = a_1 b_1 e^{-b_1 t} + a_2 b_2 e^{-b_2 t} \geq 0$$

soit satisfaite pour  $t \geq 0$ .

En particulier, (2.17) doit être satisfait pour  $t = 0$ , donc

$$(2.18) \quad f_1(0) = a_1 b_1 + a_2 b_2 = b_1 + b_2 - b_1 b_2 \geq 0,$$

ainsi que pour les grandes valeurs de  $t$ , donc, dans l'hypothèse  $b_2 > b_1$ ,

$$(2.19) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{b_1 t} f_1(t) = a_1 b_1 = b_1^2 \frac{b_2 - 1}{b_2 - b_1} \geq 0.$$

La dernière inégalité est équivalente à

$$(2.20) \quad b_2 \geq 1 \quad (b_2 > b_1 > 0)$$

et il est clair que réciproquement, les inégalités (2.18) et (2.20) entraînent la validité de (2.17).

Le domaine D du plan  $(b_1, b_2)$  où sont satisfaites soit les inégalités

$$(2.21) \quad b_1 > 0, \quad b_2 \geq b_1, \quad b_2 \geq 1, \quad b_1 + b_2 - b_1 b_2 \geq 0,$$

soit celles qui en résultent par la permutation de  $b_1$  et  $b_2$ , et dont les points (à l'exception de ceux qui sont situés sur la droite  $b_1 = b_2$ ) correspondent aux  $f_1(t)$  suivant (2.13) et (2.15), est représenté en

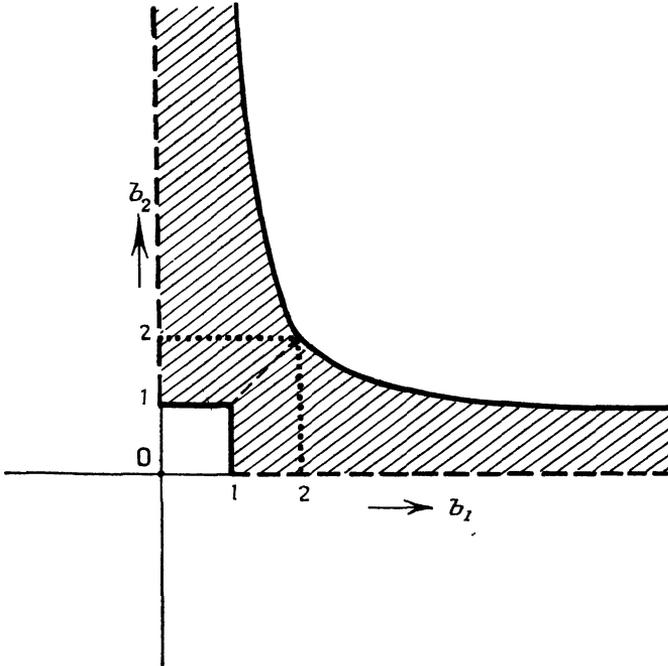


Fig. 3. — Plan  $(b_1, b_2)$ .

hachures sur la figure 3. Ce domaine est fermé, sauf le long des axes de coordonnées.

En substituant  $\varepsilon(z)$  [équ. (2.16)] dans (2.8), on trouve

$$(2.22) \quad q - \eta + \eta\varepsilon(-q) = \frac{q}{(b_1 + q)(b_2 + q)} [q^2 + q(b_1 + b_2 - \eta) + b_1 b_2 (1 - \eta)] \\ = \frac{q(q + \beta_1)(q + \beta_2)}{(q + b_1)(q + b_2)},$$

où nous avons posé

$$(2.23) \quad \beta_{1(2)} = \frac{b_1 + b_2 - \eta}{2} \pm \sqrt{\frac{(b_1 + b_2 - \eta)^2}{4} - b_1 b_2 (1 - \eta)} \quad (\beta_1 > 0, \beta_2 > 0).$$

En portant (2.23) dans le dénominateur de (1.36), nous avons

$$(2.24) \quad \rho(t) = \frac{1-\eta}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} e^{qt} \frac{(q+b_1)(q+b_2)}{(q+\beta_1)(q+\beta_2)} \frac{dq}{q} \quad (t > 0),$$

et, après quelques simplifications, nous obtenons pour cette intégrale qui est égale à la somme des résidus aux pôles  $q=0, -\beta_1, -\beta_2$ , la formule

$$(2.25) \quad \rho(t) = 1 - \eta \frac{\beta_2 - 1 + \eta}{\beta_2 - \beta_1} e^{-\beta_1 t} - \eta \frac{\beta_1 - 1 + \eta}{\beta_1 - \beta_2} e^{-\beta_2 t} \quad (t > 0, \eta < 1).$$

Pour obtenir les  $f_1(t)$  correspondant aux points  $1 \leq b_1 = b_2 \leq 2$  de la droite  $b_1 = b_2$  (fig. 3), substituons les expressions (2.16) de  $a_1$  et  $a_2$  dans (2.13) et faisons ensuite tendre  $b_2$  vers  $b_1 \equiv b$ . Il vient ainsi

$$(2.26) \quad \begin{cases} f_1(t) = 1 - e^{-bt} - b(b-1)t e^{-bt}, \\ \varepsilon(z) = \frac{b^2 + z(b^2 - 2b)}{(b-z)^2} \quad (1 \leq b \leq 2) \end{cases}$$

et cette fonction est en effet (pour  $1 \leq b \leq 2$ ) une f. r. La f. r. correspondante  $\rho(t)$  est donnée par (2.25), avec

$$\beta_{1(2)} = b - \frac{\eta}{2} \pm \sqrt{\frac{\eta^2}{2} + \eta b(b-1)}.$$

Pour l'e. m. du d. a.  $m_1(\tau)$  on trouve au moyen de la première équation (2.7) et de (2.16)

$$(2.27) \quad m_1(\tau) = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{b_1 + b_2 - 1}{b_1 b_2}.$$

Le quotient  $\frac{b_1 + b_2 - 1}{b_1 b_2}$  atteint dans D son minimum ( $= \frac{3}{4}$ ) pour  $b_1 = b_2 = 2$  et a  $+\infty$  pour limite supérieure. Donc dans l'hypothèse présente (2.13), l'e. m. du délai d'attente peut prendre toute valeur  $\geq \frac{3\eta}{4(1-\eta)}$ .

3° On obtient pour  $\rho(t)$  une formule analogue à (2.25) en prenant pour  $f_1(t)$  une forme linéaire de  $n$  fonctions « exponentielles », donc

$$(2.28) \quad f_1(t) = \sum_{i=1}^n a_i (1 - e^{-b_i t}), \quad \left( R(b_1), \dots, R(b_n) > 0; \sum_{i=1}^n a_i = 1; \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} = 1 \right).$$

les  $a_i$  et les  $b_i$  devant, en outre, être tels que l'inégalité  $f_i(t) \geq 0$  ( $0 \leq t < \infty$ ) soit satisfaite. Il vient ici

$$\varepsilon(-q) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{q + b_i},$$

de sorte que (2.8) se transforme en

$$(2.29) \quad (q - \eta) \left( 1 - \frac{\eta}{\eta - q} \varepsilon(-q) \right) = (q - \eta) \left( 1 - \frac{\eta}{\eta - q} \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{q + b_i} \right).$$

Or, d'après (1.48), l'inégalité  $\left| \frac{\eta}{\eta - q} \varepsilon(-q) \right| < 1$  est remplie, pour  $\eta < 1$ , sur la courbe  $C_1$  de la figure 1a, et comme dans le cas présent cette inégalité est aussi satisfaite pour  $R(q) \leq 0$  et  $|q| \rightarrow \infty$ , nous pouvons appliquer le théorème de Rouché à la partie du plan  $q$  située à gauche de  $C_1$ . On trouve ainsi que dans le demi-plan

$R(q) < 0$ , la fonction  $1 - \frac{\eta}{\eta - q} \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{q + b_i}$  ( $0 < \eta < 1$ ) a autant de zéros que de pôles, donc  $n$  zéros  $-\beta_1, \dots, -\beta_n$ , de sorte que nous pouvons écrire

$$(2.30) \quad q - \eta + \eta \varepsilon(-q) = q \prod_{i=1}^n \frac{q + \beta_i}{q + b_i}.$$

Introduisant cette expression dans (1.36) et appliquant le théorème de Cauchy, nous trouvons, dans le cas où les  $\beta_i$  sont tous différents,

$$(2.31) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho(t) &= 1 - (1 - \eta) \sum_{k=1}^n \frac{b_k - \beta_k}{\beta_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{b_l - \beta_k}{\beta_l - \beta_k} e^{-\beta_k t} \\ &[t > 0; R(\beta_1), \dots, R(\beta_n) > 0]. \end{aligned} \right.$$

4° Supposons maintenant que tous les visiteurs aient la même d. o.  $T = 1$ ; il vient alors

$$(2.32) \quad f_i(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq 1), \quad = 1 \quad (t > 1); \quad \varepsilon(z) = e^z,$$

d'où

$$(2.33) \quad \rho(t) = \frac{1 - \eta}{2\pi i} \int_C e^{\eta t} \frac{dq}{q - \eta + \eta e^{-q}}.$$

Prenons ici pour  $C$  une parallèle à l'axe imaginaire située à une distance  $> \eta$  à droite de cet axe, et utilisons, pour  $n \leq t < n + 1$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) l'identité

$$(2.34) \quad \frac{1}{q - \eta + \eta e^{-\eta}} = \sum_{i=0}^n \frac{(-\eta e^{-\eta})^i}{(q - \eta)^{i+1}} + \left( \frac{-\eta e^{-\eta}}{q - \eta} \right)^{n+1} \frac{1}{q - \eta + \eta e^{-\eta}}.$$

Les intégrales  $\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\eta t} \dots dq$ , étendues aux termes de la somme  $\sum_{i=0}^n$  se réduisent aux résidus en  $q = \eta$ , car en vertu du facteur  $e^{\eta(t-i)}$  ( $t \geq i$ ), les fonctions à intégrer tendent vers zéro dans le demi-plan gauche au moins comme  $\frac{1}{q^n}$ . Il vient ainsi

$$(2.35) \quad \left\{ \frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \int_{R(q)=\text{const.} > \eta} \frac{e^{\eta(t-i)}}{(q - \eta)^{i+1}} dq = e^{\eta(t-i)} \frac{(t-i)!}{i!} \right. \\ \left. (i = 0, \dots, n; t \geq n \geq i). \right.$$

L'intégrale  $\int_{R(q) > \eta}$  étendue au dernier terme du deuxième membre de (2.34) est nulle, car sa fonction à intégrer [qui n'a pas de pôle pour  $R(q) > 0$ ] s'annule dans le demi-plan droit, en vertu du facteur  $e^{\eta(t-n-1)}$  ( $t < n + 1$ ), au moins comme  $q^{-n-1}$ . En désignant par  $[t]$  le plus grand entier  $\leq t$ , nous obtenons donc

$$(2.36) \quad \rho(t) = (1 - \eta) \sum_{i=0}^{[t]} \frac{\eta^i (i-t)!}{i!} e^{\eta(t-i)} \quad (t > 0, \eta < 1).$$

La courbe  $\rho(t)$  est donc composée d'arcs de courbes respectivement analytiques pour  $n < t < n + 1$ . En  $t = 1$ ,  $\rho(t)$  a un point anguleux et de manière générale,  $\rho^{(n)}(t)$  est la première des dérivées de  $\rho(t)$  qui soit discontinue en  $t = n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

En raisonnant comme lors de l'étude de la fonction (2.8), on reconnaît que dans le demi-plan  $R(q) < 0$  l'équation

$$(2.37) \quad q - \eta + \eta e^{-q} = 0$$

possède une seule racine réelle  $-\beta_0 < 0$ . Les autres racines (en dehors de 0) de (2.37) forment des paires de nombres conjugués complexes  $-\beta_n$  et  $-\bar{\beta}_n$ , pour lesquels on déduit sans peine la

formule asymptotique

$$(2.38) \quad \beta_n = \log\left(\frac{\pi}{2\eta}(1+4n)\right) + \frac{i\pi}{2}(1+4n) + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

En amenant dans (2.33) la droite C vers l'infini du demi-plan gauche on obtient

$$(2.39) \quad \rho(t) = 1 - (1-\eta) \frac{e^{-\beta_0 t}}{\beta_0 + \eta - 1} - (1-\eta) \sum_{n=1}^{\infty} 2R\left(\frac{e^{-\beta_n t}}{\beta_n + \eta - 1}\right) \\ [t > 0; R(\beta_n) > 0, n = 1, 2, \dots];$$

on utilisera cette formule surtout pour les grandes valeurs de  $t$ .

5° La méthode employée pour déduire la formule (2.36) s'applique aussi dans le cas où  $f_1(t)$  est une fonction « en escalier » quelconque, donc où cette f. r. obéit à une loi de la forme

$$(2.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(t) = \sum_{i=1}^n a_i \quad (t_n < t \leq t_{n+1}; n = 0, \dots, N), \\ a_1, \dots, a_N > 0, \quad \sum_{i=1}^N a_i = 1 \\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} = \infty, \quad \sum_{i=1}^N a_i t_i = 1. \end{array} \right.$$

A titre d'exemple, prenons  $N = 2$ ; donc

$$(2.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq t_1) = a_1 \quad (t_1 < t \leq t_2), = a_1 + a_2 \quad (t > t_2) \\ (0 < t_1 < t_2, a_1 + a_2 = 1, a_1 t_1 + a_2 t_2 = 1). \end{array} \right.$$

Il vient alors  $\varepsilon(z) = a_1 e^{t_1 z} + a_2 e^{t_2 z}$  et, pour cette f. c., (1.36) se transforme en

$$(2.42) \quad \rho(t) = (1-\eta) \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\tau}\right]} \\ \times \sum_{\substack{i_1+i_2=i \\ i_1 t_1 + i_2 t_2 < t}} \frac{a_1^{i_1} a_2^{i_2}}{i_1! i_2!} \eta^i (i_1 t_1 + i_2 t_2 - t)^i e^{\eta(t - i_1 t_1 - i_2 t_2)} \quad (t > 0).$$

Pour une f. r. suivant (2.40), l'e. m. du délai d'attente s'exprime,

en vertu de la première équation (2.7) et de (1.26), par la formule

$$(2.43) \quad E(\tau) = m_k(\tau) = \frac{\eta}{2(1-\eta)} \int_0^\infty t^2 df_1(t) = \frac{\eta}{2(1-\eta)} \sum_{i=1}^N a_i t_i^2$$

qui, au moyen de l'identité

$$(2.44) \quad \sum_{i=1}^N a_i \sum_{i=1}^N a_i t_i^2 = \left( \sum_{i=1}^N a_i t_i \right)^2 + \sum_{1 \leq i < k \leq N} a_i a_k (t_i - t_k)^2$$

et de l'équation  $\sum_{i=1}^N a_i t_i = 1$  [(2.40)] prend la forme

$$(2.45) \quad m_1(\tau) = \frac{\eta}{2(1-\eta)} \left( 1 + \sum_{1 \leq i < k \leq N} a_i a_k (t_i - t_k)^2 \right).$$

Cela montre que parmi toutes les f. r. en escalier telles que  $\int_0^\infty t df_1(t) = 1$ , la f. r. (2.32) qui correspond à des opérations de durée constante, produit (à égale intensité de trafic  $\eta$ ) le moindre d. a. moyen  $m_1(\tau) = \frac{\eta}{2(1-\eta)}$ . En approximant une quelconque f. r. suivant (1.7) et (1.33) par une suite de courbes en escalier (2.40), on démontre que la f. r. (2.32) produit le moindre d. a. moyen parmi toutes ces f. r.

Appliquons enfin les formules asymptotiques (1.61), (1.63) et (1.87) au cas où  $f_1(t) = 1 - e^{-t}$ , donc  $\varepsilon(z) = \frac{1}{1-z}$  [(2.11)], de sorte que (1.57) et (1.84) sont satisfaits. En résolvant les équations (1.58) et (1.59) pour cette f. c., nous trouvons

$$q^* = \frac{\eta - 1}{2}, \quad z^* = \frac{(1 + \eta)}{4\eta},$$

de sorte que dans le cas présent, l'intégrale qui figure au deuxième terme du deuxième membre de (1.61), se transforme en

$$(2.46) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-l-\varepsilon}^{l+\varepsilon} e^{qt} \frac{(1+q) dq}{\left(q + \frac{1-\eta}{2}\right)^2} = \frac{\partial}{\partial q} [(1+q) e^{qt}]_{q=\frac{1-\eta}{2}} \\ = \left(1 + \frac{1+\eta}{2} t\right) e^{-\frac{1-\eta}{2} t} \quad (t > 0)$$

En supposant  $\tau_0 = 0$ , l'expression (1.62) devient  $c = \frac{\eta(t+\eta)}{\sqrt{\pi}(1-\eta)^2}$ ; en utilisant en outre l'équation (2.12), la formule (1.61) donne ainsi

$$(2.47) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_n(t) &= s(1-\eta)(1-\eta e^{-(1-\eta)t}) + n^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{(1+\eta)^2}{4\eta} \right)^{-n} \frac{\eta(1+\eta)}{\sqrt{\pi}(1-\eta)^2} \\ &\quad \times e^{-\frac{1-\eta}{2}t} \left( 1 + \frac{1+\eta}{2}t + O_t\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &\quad (t > 0, \eta \neq 1, n \rightarrow \infty). \end{aligned} \right.$$

Dans le cas présent, (1.63) prend la forme

$$(2.48) \quad \rho_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (1+t) + O_t(n^{-\frac{3}{2}}) \quad (t > 0, \eta = 1, n \rightarrow \infty)$$

et de (1.87) nous tirons

$$(2.49) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_{l'}(t) &= s(1-\eta)(1-\eta e^{-(1-\eta)t}) \\ &\quad + t'^{-\frac{3}{2}} e^{-(1-\eta)t} \frac{\eta^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}(1-\sqrt{\eta})^2} \left( 1 + \sqrt{\eta}t + O_t\left(\frac{1}{l'}\right) \right) \\ &\quad (t > 0, \eta \neq 1, l' \rightarrow \infty). \end{aligned} \right.$$

### CHAPITRE III.

#### RÉPARTITION BERNOULLIENNE DES INSTANTS D'ARRIVÉE.

##### A. Définition et propriétés de la répartition bernoullienne.

Pour définir la répartition « bernoullienne » de  $N$  points sur le segment de droite  $0 \leq x \leq \mathfrak{C}$ , nous procédons comme suit : On place sur ce segment successivement  $N$  points dont chacun a, par hypothèse, la probabilité  $\frac{\Delta x}{\mathfrak{C}}$  de tomber sur un segment donné, de longueur  $\Delta x$  et appartenant à  $[0, \mathfrak{C}]$ .

Soient, dans un cas particulier,  $X_0, \dots, X_{N-1}$  les abscisses de ces  $N$  points, rangées par ordre de grandeur croissante, donc

$$(3.1) \quad 0 \leq X_0 \leq \dots \leq X_{N-1} \leq \mathfrak{C}.$$

En désignant par  $x_0, \dots, x_{N-1}$  des nombres quelconques satisfaisant

aux inégalités

$$(3.2) \quad 0 \leq x_0 \leq \dots \leq x_{N-1} \leq \mathfrak{C},$$

nous allons déterminer la probabilité pour que les inégalités

$$(3.3) \quad x_i \leq X_i \leq x_i + dx_i \quad (i = 0, \dots, N-1)$$

soient remplies. A un système donné de  $N$  nombre  $X_i$ , rangés suivant (3.1), il correspondra en général  $N!$  événements « placement successif de  $N$  points sur une droite, de telle manière que leurs abscisses coïncident, à l'ordre près, avec ces  $X_i$  ». Par conséquent, la probabilité de l'événement (3.3) sera égale, dans nos hypothèses, à  $N! \frac{dx_0 \dots dx_{N-1}}{\mathfrak{C}^N}$ , donc

$$(3.4) \quad \text{Prob}(x_i \leq X_i \leq x_i + dx_i \mid 0 \leq x_0 \leq \dots \leq x_{N-1} \leq \mathfrak{C}) = \frac{N!}{\mathfrak{C}^N} dx_0 \dots dx_{N-1}.$$

Nous dirons d'un système de  $N$  variables aléatoires (liées)  $X_0, \dots, X_{N-1}$  suivant (3.1), qui satisfait à la loi (3.4), qu'il a une répartition bernoullienne.

Soient  $t_0, \dots, t_{N-1}$   $N$  nombres tels que

$$(3.5) \quad 0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_{N-1} \leq \mathfrak{C};$$

nous allons déterminer les probabilités conditionnelles

$$(3.6) \quad \begin{cases} p_0 = \text{Prob}(X_0 < t_0), \\ p_n = \text{Prob}(X_n < t_n \mid X_{n-1} = t_{n-1}) \quad (n = 1, \dots, N-1). \end{cases}$$

Pour obtenir  $p_0$ , observons que  $1 - p_0$  est la probabilité de l'événement : tous les  $X_i$  appartiennent à l'intervalle  $[t_0, \mathfrak{C}]$ . Il vient donc  $1 - p_0 = \left(\frac{\mathfrak{C} - t_0}{\mathfrak{C}}\right)^N$  et, de là,

$$p_0 = 1 - \left(\frac{\mathfrak{C} - t_0}{\mathfrak{C}}\right)^N.$$

Ensuite,  $1 - p_1$  est la probabilité de l'événement suivant :

$$t_1 \leq X_1 \leq \dots \leq X_{N-1} \leq \mathfrak{C} \mid X_0 = t_0.$$

On reconnaît que  $1 - p_1 = \left(\frac{\mathfrak{C} - t_1}{\mathfrak{C} - t_0}\right)^{N-1}$ , et en continuant on obtient

la relation

$$(3.7) \left\{ \begin{aligned} p_n &= \text{Prob}(X_n < t_n | X_{n-1} = t_{n-1}) \\ &= \text{Prob}(X_n - X_{n-1} < t_n - t_{n-1} | X_{n-1} = t_{n-1}) = 1 - \left( \frac{\mathfrak{C} - t_n}{\mathfrak{C} - t_{n-1}} \right)^{N-n} \\ &\quad (n = 0, \dots, N-1). \end{aligned} \right.$$

L'espérance mathématique d'une fonction donnée  $F_n(X_0, \dots, X_n)$  des  $n + 1$  premières v. a. bernoulliennes suivant (3.1) et (3.4) sera désignée par  $E_B(F_n)$ . Pour obtenir  $E_B(F_n)$ , on sommera sur tous les parallélépipèdes élémentaires (3.3) appartenant au simplexe (3.2) et munis respectivement des probabilités (3.4); ainsi il vient

$$(3.8) \quad E_B(F_n) = \frac{N!}{\mathfrak{C}^N} \int_0^{\mathfrak{C}} dx_0 \int_{x_0}^{\mathfrak{C}} dx_1 \dots \int_{x_{N-n}}^{\mathfrak{C}} F_n(x_0, \dots, x_n) dx_{N-n}.$$

Ici, les  $N - 1 - n$  dernières intégrations peuvent être effectuées immédiatement, puisque  $F_n$  ne dépend que des variables  $x_0, \dots, x_n$ , et nous obtenons ainsi

$$(3.9) \left\{ \begin{aligned} E_B(F_n) &= \frac{N!}{\mathfrak{C}^N} \int_0^{\mathfrak{C}} dx_0 \int_{x_0}^{\mathfrak{C}} dx_1 \dots \int_{x_{n-1}}^{\mathfrak{C}} F_n(x_0, \dots, x_n) \frac{(\mathfrak{C} - x_n)^{N-n-1}}{(N-n-1)!} dx_n \\ &\quad (n = 0, \dots, N-1). \end{aligned} \right.$$

Dans (3.7) et (3.9) nous allons maintenant faire tendre  $N$  vers l'infini, en supposant que le quotient

$$(3.10) \quad \frac{N}{\mathfrak{C}} = c$$

ne dépend pas de  $N$ .

Pour le dernier membre de (3.7) on trouve ainsi, pour  $n, t_{n-1}$  et  $t_n$  donnés,

$$\left( \frac{\mathfrak{C} - t_n}{\mathfrak{C} - t_{n-1}} \right)^{N-n} = \left( \frac{1 - \frac{ct_n}{N}}{1 - \frac{ct_{n-1}}{N}} \right)^{N-n} \rightarrow e^{-c(t_n - t_{n-1})} \quad (\text{pour } N \rightarrow \infty),$$

de sorte qu'en posant  $t_n - t_{n-1} = t (\geq 0)$ , nous tirons de (3.7) à la limite pour  $X_n - X_{n-1}$  la loi de probabilité inconditionnelle

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{Prob}(X_n - X_{n-1} < t | X_{n-1} = t_{n-1}) &= 1 - e^{-ct} \\ (n = 0, 1, \dots; X_{-1} = t_{-1} = 0) \end{aligned} \right.$$

dont la f. r.  $f(t) = 1 - e^{-ct}$  est indépendante de la valeur parti-

culière  $t_{n-1}$  imposée à la v. a.  $X_{n-1}$ . Donc dans l'hypothèse (3.10),  $X_0$  ainsi que les quantités

$$(3.12) \quad Y_n = X_{n+1} - X_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

tendent pour  $N \rightarrow \infty$  vers des v. a. *indépendantes* de f. r.

$$(3.13) \quad \text{Prob}(0 \leq Y < t) = f(t) = 1 - e^{-t},$$

de sorte que la  $(n+1)^{\text{ième}}$  v. a. bernoullienne

$$(3.14) \quad X_n = X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \quad (n = 0, 1, \dots)$$

tend vers la somme de  $n+1$  v. a. i., de f. r. (3.13). Autrement dit, à la limite, la répartition des points d'abscisses  $X_n$  est une répartition poissonnienne dont les lois sont bien connues.

On démontre sans peine que pour des fonctions  $F_n(x_0, \dots, x_n)$  qui sont continues et bornées pour

$$(3.15) \quad 0 \leq x_0 \leq \dots \leq x_n < \infty,$$

$\lim_{N \rightarrow \infty} E_B(F_n)$  s'obtient en faisant tendre  $N$  vers l'infini dans la fonction à

intégrer  $F_n \frac{N!}{(N-n-1)!} \frac{(c-x_n)^{N-n-1}}{c^N}$  de (3.9), ce qui donne

$$(3.16) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} E_B(F_n) = \int_0^\infty dx_0 \int_{x_0}^\infty dx_1 \dots \int_{x_{n-1}}^\infty c^{n+1} e^{-cx_n} F_n(x_0, \dots, x_n) dx_n.$$

Or, le deuxième membre est l'e. m.  $E_P$  d'une répartition poissonnienne suivant (3.11), ce qu'on reconnaît en y introduisant de nouvelles variables d'intégration  $x_0, y_0 = x_1 - x_0, \dots, y_{n-1} = x_n - x_{n-1}$  qui, au moyen de la notation (3.13), transforment (3.16) en

$$(3.17) \quad E_P(F_n(X_0, \dots, X_n)) = \int_0^\infty df(x_0) \int_0^\infty df(y_0) \dots \\ \times \int_0^\infty F_n \left( x_0, \dots, x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} y_i \right) df(y_{n-1}).$$

Nous avons donc la notation suivante :

$$(3.18) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} E_B(F_n) = E_P(F_n).$$

Le calcul direct des e. m.  $E_B$  [équ. (3.9)], pour  $N$  fini, serait long. Mais nous allons maintenant exprimer les  $E_B$ , au moyen d'un artifice d'Analyse, par des  $E_p$  suivant (3.17) où, toutefois, la constante  $c$  de  $f(t)$  [équ. (3.13)] sera remplacée par un paramètre complexe  $p$  tel que  $R(p) > 0$ .

Pour cela, utilisons la formule

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} e^{p(\mathfrak{C}-x_n)} \frac{dp}{p^{N-n}} &= \begin{cases} \frac{(\mathfrak{C}-x_n)^{N-n-1}}{(N-n-1)!} & (0 \leq x_n < \mathfrak{C}) \\ 0 & (x_n > \mathfrak{C}) \end{cases} \\ & (n = 0, \dots, N-1) \end{aligned} \right\}$$

qui est encore valable pour  $x_n = \mathfrak{C}$ , sauf si  $n = N-1$ . Substituant cette intégrale dans le deuxième membre de (3.9), nous avons

$$(3.20) \quad E_B(F_n) = \frac{N!}{\mathfrak{C}^N} \int_0^{\mathfrak{C}} dx_0 \dots \int_{x_{n-1}}^{\mathfrak{C}} F_n(x_0, \dots, x_n) \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} e^{p(\mathfrak{C}-x_n)} \frac{dp}{p^{N-n}} dx_n$$

où, pour  $n = N-1$  et  $x_{N-1} = \mathfrak{C}$ , on remplacera  $\int_{C_p}$  par  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-iA+\delta}^{iA+\delta}$

Comme  $\int_{C_p} \dots dp$  s'annule pour  $x_n > \mathfrak{C}$ , les limites supérieures  $\mathfrak{C}$  peuvent être remplacées, dans (3.20), par  $\infty$ ; il vient ainsi

$$(3.21) \quad \left\{ \begin{aligned} E_B(F_n) &= \frac{N!}{\mathfrak{C}^N} \int_0^{\infty} dx_0 \dots \int_{x_{n-1}}^{\infty} F_n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} e^{p(\mathfrak{C}-x_n)} \frac{dp}{p^{N-n}} dx_n \\ & (n = 0, \dots, N-1). \end{aligned} \right\}$$

Cette intégrale converge absolument <sup>(1)</sup>, pourvu que dans le domaine (3.15) l'inégalité

$$(3.22) \quad |F_n| < c' < \infty$$

(1) Posant  $p = iy + \delta$ , nous avons

$$|e^{p(\mathfrak{C}-x_n)} p^{N-n} dp| \leq e^{\delta(\mathfrak{C}-x_n)} (\gamma^2 + \delta^2)^{\frac{n-N}{2}} d\gamma$$

et

$$\begin{aligned} |E_B(F_n)| &\leq \frac{N! c}{2\pi \mathfrak{C}^N} \int_0^{\infty} dx_0 \dots \int_{x_{n-1}}^{\infty} e^{\delta(\mathfrak{C}-x_n)} dx_n \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma^2 + \delta^2)^{-\frac{N-n}{2}} d\gamma = \frac{N! c}{2\pi \mathfrak{C}^N} e^{\delta \mathfrak{C}} \delta^{-N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma}{(\gamma^2 + 1)^{\frac{N-n}{2}}}, \end{aligned}$$

la dernière intégrale convergent pour  $n < N-1$ .

soit satisfaite et que  $n < N - 1$ ; il est alors permis d'invertir l'ordre des intégrations réelles et complexe. Nous supposons dorénavant les fonctions  $F_n$  telles que ce procédé soit aussi légitime pour  $n = N - 1$ . Alors la formule (3.21) peut être mise sous la forme

$$(3.23) \quad E_B(F_n) = \frac{N!}{\mathfrak{C}^N} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} e^{p\mathfrak{C}} E_p(F_n) \frac{dp}{p^{N+1}} \quad (n = 0, \dots, N - 1),$$

où nous avons posé

$$(3.24) \quad E_p(F_n) = \int_0^\infty dx_0 \dots \int_{x_{n-1}}^\infty p^{n+1} e^{-px_n} F_n(x_0, \dots, x_n) dx_n.$$

La dernière quantité qui, de manière analogue à (3.17), peut être écrite sous la forme

$$(3.25) \quad E_p(F_n) = \int_0^\infty df_p(x_0) \int_0^\infty df_p(y_0) \dots \\ \times \int_0^\infty F_n \left( x_0, \dots, x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} y_i \right) df_p(y_{n-1}).$$

avec

$$(3.26) \quad f_p(t) = 1 - e^{-pt},$$

est, d'un point de vue formaliste, l'e. m. d'une répartition « poissonnienne » de loi  $f_p(t)$ .

#### B. — Construction de différentes f. r. du délai d'attente.

Nous reprenons maintenant l'étude des problèmes traités au chapitre I dans l'hypothèse d'une répartition bernoullienne de  $N$  instants d'arrivée  $X_i$  sur l'intervalle de temps  $0 \leq t \leq \mathfrak{C}$ . Mentionnons d'abord qu'en vertu des formules classiques de Bernoulli relatives à des épreuves  $N$  fois répétées, l'e. m. du nombre de points  $X_i$  qui tombent sur un segment de longueur  $\Delta t$ , appartenant à  $[0, \mathfrak{C}]$ , est  $N \frac{\Delta t}{\mathfrak{C}}$ . Donc, à un instant  $t \in [0, \mathfrak{C}]$ , le nombre moyen de visiteurs par unité de temps est égal à  $\frac{N}{\mathfrak{C}} = c$ , de sorte que  $c$  correspond à l'intensité de trafic poissonnien  $\eta$ .

D'abord nous allons à nouveau construire les f. r.  $\rho_n(t)$  [équ. (1.11)]

au moyen des e. m.  $E e^{-q\tau_n}$ , l'équation (1.16) pouvant être démontrée comme dans l'hypothèse poissonnienne, ou encore en utilisant le théorème de P. Lévy [équ. (1.23)]. Ci-après, le symbole E se rapporte aux v. a.  $X_i$  et  $T_i$ , respectivement de lois (3.4) et (1.6); nous continuerons d'écrire  $E_p$  pour des e. m. par rapport aux v. a.  $X_0$ ,  $Y_i$  et  $T_i$ , respectivement de lois (3.26) et (1.6). En posant  $F_n = e^{-q\tau_n}$  dans (3.23) et (3.25), nous obtenons ainsi

$$(3.27) \quad E e^{-q\tau_n} = \frac{N!}{\mathfrak{C}^N} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} e^{p\zeta} E_p e^{-q\tau_n} \frac{d\rho}{\rho^{N+1}},$$

où nous avons posé

$$(3.28) \quad E_p e^{-q\tau_n} = \int_0^\infty df_1(t_0) \int_0^\infty df_p(y_0) \dots \int_0^\infty df_1(t_{n-1}) \int_0^\infty df_p(y_{n-1}) e^{-q\tau_n},$$

en tenant compte de ce que  $\tau_n$  peut être considérée comme une fonction des seules v. a.  $Y_i$  et  $T_i$ .

Tout comme au chapitre I, nous allons exprimer cette e. m. au moyen de la fonction

$$(3.29) \quad \Phi_p(q, z) = \sum_{n=0}^\infty z^n E_p e^{-q\tau_n}.$$

Pour évaluer le rayon de convergence de cette série, utilisons les relations  $|e^{-q\tau_n}| \leq 1$  [pour  $R(q) \geq 0$ ] et  $\int_0^\infty df_1(t) = 1$ , au moyen desquelles on tire de (3.28)

$$(3.30) \quad |z^n E_p e^{-q\tau_n}| \leq |z^n| \int_0^\infty |p| e^{-|y_0| R(p)} dy_0 \dots \int_0^\infty |p| e^{-|y_{n-1}| R(p)} dy_{n-1} \\ = \frac{|zp|^n}{R^n(p)};$$

par conséquent, la série (3.29) converge pour  $|z| < \frac{R(p)}{|p|}$ .

On voit sans peine que pour des  $z$  satisfaisant à cette inégalité, les raisonnements faits au chapitre I pour construire  $\Phi(q, z) = \Phi_\eta(q, z)$  s'appliquent aussi à  $\Phi_p(q, z)$ ; donc pour cette fonction l'équation (1.44), où  $\eta$  sera remplacé par  $p$ , reste valable. Dans (1.44) posons en outre  $z = \frac{\zeta}{p}$  et  $\tau_0 = 0$  et écrivons désormais  $\Phi(q, p, \zeta)$  au lieu

de  $\Phi_p\left(q, \frac{\zeta}{p}\right)$ ; il vient ainsi

$$(3.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(q, p, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{p^n} E_p e^{-q\tau_n} = \frac{p}{q-p+\zeta\varepsilon(-q)} \frac{q-q_0(p, \zeta)}{q_0(p, \zeta)} \\ [R(p) > 0, R(q) \geq 0, |\zeta| < R(p)], \end{array} \right.$$

$q_0(p, \zeta)$  désignant la racine unique de l'équation

$$(3.32) \quad p - q - \zeta\varepsilon(-q) = 0$$

telle que  $R(q) > 0$  pour  $|\zeta| < R(p)$ .

De (3.31) résulte la formule

$$(3.33) \quad E_p e^{-q\tau_n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta| < R(p)} \Phi(q, p, \zeta) \frac{p^n d\zeta}{\zeta^{n+1}}$$

qui, substituée dans (3.27), donne

$$(3.34) \quad E e^{-q\tau_n} = \frac{N!}{\mathfrak{E}^N} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_\zeta} \frac{e^{qt}}{p^{N+1}} \Phi(q, p, \zeta) \frac{p^n}{\zeta^{n+1}} d\zeta dp,$$

où  $K_\zeta$  désigne un cercle de rayon  $|\zeta| < R(p)$ , ayant son centre à l'origine; en portant cette dernière expression dans (1.16), nous obtenons  $\rho_n(t)$ .

Déterminons maintenant la probabilité  $\rho(t) = \text{Prob}(\tau < t)$  pour que le d. a.  $\tau$  d'un quelconque de nos  $N$  visiteurs soit  $< t$ . Il vient

$$(3.35) \quad \rho(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \rho_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_q} e^{qt} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E^{-q\tau_n} \frac{dq}{q} \quad (t > 0).$$

On obtient  $\sum_0^{N-1} E e^{-q\tau_n}$  en remplaçant, dans le deuxième membre

de (3.34), le facteur  $\frac{p^n}{\zeta^{n+1}}$  par

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{p^n}{\zeta^{n+1}} = \frac{p^N - \zeta^N}{\zeta^N(p - \zeta)} = \frac{p^N}{\zeta^N(p - \zeta)} - \frac{1}{p - \zeta}.$$

Mais nous pouvons supprimer le terme  $-\frac{1}{p - \zeta}$ , car, dans le cercle  $|\zeta| < R(p)$ ,  $\Phi(q, p, \zeta) \frac{1}{p - \zeta}$  est une fonction holomorphe de  $\zeta$

qui est annulée par l'opération  $\int_{\mathbb{K}\zeta} \cdot$ . Il vient ainsi

$$(3.36) \quad \begin{aligned} E e^{-q\tau} &\equiv \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E e^{-q\tau_n} \\ &= \frac{(N-1)!}{\mathfrak{C}^N} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{\mathbb{K}\zeta} e^{p\mathfrak{C}} \Phi(q, p, \zeta) \frac{d\zeta dp}{\zeta^N p(p-\zeta)} \end{aligned}$$

et, en substituant cette expression dans (3.35) et utilisant (3.31), nous obtenons enfin

$$(3.37) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_q} e^{qt} \\ &\times \left[ \frac{(N-1)!}{\mathfrak{C}^N} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{\mathbb{K}\zeta} e^{p\mathfrak{C}} \frac{q-q_0}{q-p+\zeta\varepsilon(-q)} \frac{dp d\zeta}{q_0(p-\zeta)\zeta^N} \right] \frac{dq}{q} \\ &[q_0 = q_0(p, \zeta)]. \end{aligned} \right.$$

Les formules (1.65) à (1.70) relatives aux f. r.

$$\rho'_t(t) = \text{Prob}(\tau < t \mid X = t') \quad \text{et} \quad \rho_n(t, t') = \text{Prob}(\tau_n < t; X_n < t')$$

(où  $t > 0$ ,  $0 < t' \leq \mathfrak{C}$ ) restent valables dans l'hypothèse présente, à condition de remplacer par  $\sum_{n=0}^{N-1}$  les sommes  $\sum_{n=1}^{\infty}$  figurant au deuxième membre de (1.67)

Pour l'e. m.  $E e^{-q\tau_n - t'X_n}$  qui figure dans (1.70), nous obtenons, au moyen de (3.14) et des équations (3.23) et (3.25) où l'on prendra la moyenne par rapport aux  $T_i$ ,

$$(3.38) \quad E e^{-q\tau_n - t'X_n} = \frac{N!}{\mathfrak{C}^N} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} e^{p\mathfrak{C}} E_p e^{-q\tau_n - t'X_n} \frac{dp}{p^{N+1}},$$

$$(3.39) \quad \begin{aligned} E_p e^{-q\tau_n - t'X_n} &= \int_0^\infty df_p(x_0) \int_0^\infty df_1(t_0) \int_0^\infty df_p(y_0) \dots \\ &\times \int_0^\infty e^{-q\tau_n - t' \left( x_0 + \sum_0^{n-1} y_i \right)} df_p(y_{n-1}). \end{aligned}$$

En utilisant l'identité

$$e^{-t'y} df_p(y) = \frac{p}{p+t'r} df_{p+t'r}(y) \quad [\text{équ. 3.26}]$$

et en intégrant par rapport à la variable  $x_0$  (dont  $\tau_n$  ne dépend pas),

le deuxième membre de la dernière équation se transforme en

$$\left(\frac{p}{p+r}\right)^{n+1} \int_0^{\infty} df_1(t_0) \int_0^{\infty} df_{p+r}(y_0) \dots \int_0^{\infty} df_1(t_{n-1}) \int_0^{\infty} e^{-q\tau_n} df_{p+r}(y_{n-1}).$$

En vertu de (3.28) et (3.33), il vient

$$(3.40) \quad \left\{ \begin{aligned} E_p e^{-q\tau_n - rX_n} &= \left(\frac{p}{p+r}\right)^{n+1} E_{p+r} e^{-q\tau_n} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{K}_\zeta} \frac{p}{p+r} \Phi(q, p+r, \zeta) \frac{p^n d\zeta}{\zeta^{n+1}} \\ &\quad (n = 0, \dots, N-1), \end{aligned} \right.$$

et au moyen de (3.38), (3.31) et (1.70), on peut tirer de cette relation une formule explicite pour  $\rho_n(t, t')$ .

Pour trouver le deuxième membre de la formule (modifiée) (1.67), nous devons calculer, au moyen de (3.40), la somme des Ne. m. (3.38); on obtient, de manière analogue à (3.36),

$$(3.41) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} E e^{-q\tau_n - rX_n} &= \frac{N!}{\mathfrak{E}^N} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{\mathbb{K}_\zeta} E^p \mathfrak{E} \Phi(q, p+r, \zeta) \frac{dp d\zeta}{(p+r)(p-\zeta)\zeta^N} \\ &\quad [R(p) > |\zeta|]. \end{aligned} \right.$$

En prenant ensuite  $p+r$ , au lieu de  $p$ , pour nouvelle variable d'intégration, nous avons

$$(3.42) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} E e^{-q\tau_n - rX_n} &= \frac{N!}{\mathfrak{E}^N} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{\mathbb{K}_\zeta} e^{p-r} \mathfrak{E} \Phi(q, p, \zeta) \frac{dp d\zeta}{p(p-r-\zeta)\zeta^N} \\ &\quad [R(p-r) > |\zeta|]. \end{aligned} \right.$$

Effectuons ici l'opération  $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{rt'} \dots \frac{dr}{r}$  indiquée dans (1.70); cette opération peut être permutée avec  $\int_{C_p} \int_{\mathbb{K}_\zeta}$ , car  $\int_{C_r} \int_{C_p} \int_{\mathbb{K}_\zeta}$  converge absolument, et nous obtenons ainsi

$$(3.43) \quad \begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{rt'} E e^{-q\tau_n - rX_n} \frac{dr}{r} \\ = \frac{N!}{\mathfrak{E}^N} \int_{C_p} \int_{\mathbb{K}_\zeta} e^{p\mathfrak{E}} \Phi(q, p, \zeta) \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{r(u-\mathfrak{E})}}{p-r-\zeta} \frac{dr}{r} \right] \frac{dp d\zeta}{p\zeta^N}. \end{aligned}$$

Or dans le problème présent, on a  $t' \leq \mathfrak{E}$ , de sorte que la dernière

intégrale par rapport à  $r$  se réduit au résidu en  $r = p - \zeta$ , donc à  $\frac{1}{p - \zeta} e^{(p - \zeta)(t - \mathfrak{C})}$ , le deuxième membre de (3.43) prenant ainsi la forme

$$(3.44) \quad \frac{N!}{\mathfrak{C}^N} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_\zeta} e^{\zeta \mathfrak{C} + (p - \zeta)t} \Phi(q, p, \zeta) \frac{dp d\zeta}{p(p - \zeta) \zeta^N},$$

où  $\Phi$  est donnée par (3.31).

En vertu de (1.70), l'opération  $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_q} e^{qt} \dots \frac{dq}{q}$  transforme (3.43), compte tenu de (3.44), en

$$(3.45) \quad \sum_{n=0}^{N-1} \rho_n(t, t') \\ = \frac{N!}{\mathfrak{C}^N} \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_q} \int_{C_p} \int_{K_\zeta} e^{qt + (p - \zeta)t' + \zeta \mathfrak{C}} \frac{q - q_0(p, \zeta)}{q - p + \zeta \varepsilon(-q)} \frac{dq dp d\zeta}{q_0 q (p - \zeta) \zeta^N};$$

notons qu'en raison des relations  $\rho_n(t, \mathfrak{C}) = \rho_n(t)$  et (3.35), cette formule se confond, pour  $t' = \mathfrak{C}$ , avec (3.37).

Pour  $t = \infty$ , l'intégrale par rapport à  $q$  se réduit au résidu en  $q = 0$ , et de là résulte l'équation

$$(3.46) \quad \sum_{n=0}^{N-1} \rho_n(\infty, t') = \frac{N}{\mathfrak{C}} t'$$

qui toutefois pourrait aussi être établie par un raisonnement analogue à celui du renvoi (3).

Conformément à (1.65) et (1.67),  $\rho_{t'}(t)$  est donc, au facteur constant  $\frac{\mathfrak{C}}{N}$  près, la dérivée par rapport à  $t'$  de la fonction (3.45).

Pour la même raison que pour l'équation (1.78), nous sommes en droit de dériver la fonction (3.45) sous les signes d'intégration et obtenons ainsi

$$(3.47) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_{t'}(t) &= \frac{(N-1)!}{\mathfrak{C}^{N-1}} \\ &\times \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_q} \int_{C_p} \int_{K_\zeta} e^{qt + (p - \zeta)t' + \zeta \mathfrak{C}} \frac{q - q_0(p, \zeta)}{q - p + \zeta \varepsilon(-q)} \frac{d\zeta dp dq}{q_0 q \zeta^N} \\ &(t > 0; 0 < t' \leq \mathfrak{C}). \end{aligned} \right.$$

**Applications.** — Afin de simplifier nos formules, nous prendrons

désormais l'e. m. de d. o.  $E(T)$  pour unité de temps, de sorte que  $E(T) = s'(0) = 1$  [équ. (1.33)], le quotient  $c = \frac{N}{\mathfrak{C}} = \frac{NE(T)}{\mathfrak{C}}$  prenant ainsi la signification de nombre de visiteurs par moyenne (ou par e. m.) de d. o.

1° Dans le cas où  $f_1(t)$  est égale à la f. r. (2.32), donc où  $\varepsilon(z) = e^z$ , les dernières formules se simplifient pour  $\mathfrak{C} > N$ ; car moyennant une transformation appropriée de la variable d'intégration  $\zeta$ ,  $\int_{C_p}$  se réduit alors à un résidu. Dans nos formules, à partir de (3.33), le cercle  $K_\zeta$  peut être remplacé par n'importe quelle courbe simple fermée, assez voisine de l'origine qu'elle contient dans son intérieur. Nous sommes donc en droit de poser

$$(3.48) \quad \zeta = z e^{p-z},$$

$z$  parcourant un cercle  $K_z$  de rayon assez petit, qui a son centre à l'origine. En posant  $\varepsilon(-q) = e^{-q}$ ,  $\zeta = z e^{p-z}$  dans l'équation (3.32) dont la racine  $q_0(p, \zeta)$  figure dans (3.31), on a

$$(3.49) \quad q - p + z e^{p-q-z} = 0 \quad [R(p) > |z e^{p-z}| > 0].$$

Cette équation est manifestement satisfaite par

$$(3.50) \quad q_0 = p - z$$

et comme  $R(p - z) > 0$  pour  $R(p) > 0$  et  $|z|$  assez petit, la quantité (3.50) est bien celle des racines de (3.32) que nous avons désignée par  $q_0$ .

A titre d'exemple nous allons déterminer l'e. m. de d. a.  $m_1(\tau)$ .

Au moyen de la transformation (3.48), l'équation (3.36) devient

$$(3.51) \quad \left\{ \begin{aligned} E e^{-q\tau} &= \frac{(N-1)!}{\mathfrak{C}^N} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_z} e^{(N-1) \cdot \frac{(1-z)}{z^N}} dz \\ &\times \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} e^{p(\mathfrak{C}-N+1)} \frac{p-q-z}{p-q-z e^{p-q-z}} \frac{dp}{(p-z)(p-z e^{p-z})} \\ &[R(p) > |z|]. \end{aligned} \right.$$

Considérons maintenant la fonction

$$(3.52) \quad \frac{1}{p} (p - z e^{p-z}) = 1 - p^{-1} e^{p-1} z e^{1-z}$$

pour  $R(p) = 1$  et  $|z|$  assez petit. Pour  $p = 1 + iy$  ( $-\infty < y < \infty$ ), il vient

$$\left| \frac{e^{p-1}}{p} \right| = \left| \frac{e^{iy}}{1 + iy} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \leq 1, \quad \text{donc} \quad \left| \frac{z e^{p-z}}{p} \right| < 1,$$

et la dernière inégalité est aussi satisfaite pour  $R(p) \leq 1$  et  $|p|$  assez grand. Par conséquent, la fonction (3.52) possède dans le demi-plan  $R(p) \leq 1$ , en vertu du théorème de Rouché, autant de zéros que de pôles. Comme il n'existe qu'un seul pôle  $p = 0$ , nous voyons ainsi que pour  $R(p) \leq 1$  et  $|z|$  assez petit, la fonction  $p - z^{p-z}$  a un seul zéro, à savoir  $p = z$ .

En vertu de ce résultat, la fonction à intégrer de  $\int_{C_p}$ , dans (3.51), possède à gauche de la droite  $C_p$  [qui peut être choisie telle que  $|z| < R(p) < 1$ ] un seul pôle, du deuxième ordre,  $p = z$ . Comme nous supposons que  $\mathfrak{C} > N$  (donc  $c < 1$ ),  $\int_{C_p}$  se réduit au résidu en  $p = z$ , et nous obtenons ainsi

$$(3.53) \quad E e^{-q\tau} = \frac{(N-1)!}{\mathfrak{C}^N} \frac{1}{2\pi i} \oint e^{s\mathfrak{C}} \left[ (\mathfrak{C} - N + 1)q + \frac{zq}{2(1-z)} + \frac{z - z e^{-q} - zq e^{-q}}{q - z + z e^{-q}} \right] \frac{1}{q - z + z e^{-q}} \frac{dz}{z^N}.$$

De là, nous tirons pour l'e. m. de d. a.  $m_1(\tau) = - \left[ \frac{d}{dq} E e^{-q\tau} \right]_q =$  l'expression

$$(3.54) \quad m_1(\tau) = \frac{(N-1)!}{\mathfrak{C}^N} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z| < 1} e^{s\mathfrak{C}} \left[ \left( \mathfrak{C} - N + \frac{1}{6} \right) \frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{3}{4(1-z)^3} \right] \frac{dz}{z^{N-1}}$$

qui se réduit à un résidu en  $z = 0$ . Nous trouvons ainsi pour l'e. m. de durée d'attente  $m_1(\tau)$  dans l'hypothèse où  $N$  visiteurs dont les durées d'opération sont égales à 1, se présentent suivant une répartition bernoullienne pendant un intervalle de temps  $\mathfrak{C} > N$ ,

$$(3.55) \quad \left\{ \begin{aligned} m_1(\tau) &= \frac{(N-1)!}{2 \mathfrak{C}^N} \sum_{i=0}^{N-2} \left( \mathfrak{C} - \frac{N+3i}{4} + \frac{1}{6} \right) (N-1-i) \frac{\mathfrak{C}^i}{i!} \\ & \quad (\mathfrak{T} = 1, \quad \mathfrak{C} > N). \end{aligned} \right.$$

2° Développement asymptotique pour  $N \rightarrow \infty$ . — On a intérêt à comparer les valeurs que prennent nos probabilités pour les grandes

valeurs de  $N$ , respectivement dans les hypothèses bernoullienne et poissonnienne (avec  $\eta = c$ ). Pour y parvenir, on établira pour  $E e^{-q\tau}$ , ... des développements asymptotiques, en considérant le quotient  $c$  comme une constante qui sera supposée ici  $< 1$ . Mentionnons toutefois que dans des cas particuliers ([12], p. 739, 745) d'autres hypothèses sur  $c(N)$  s'imposent.

Revenons à (3.36) où il est permis d'invertir l'ordre des intégrations et où nous pouvons supposer que  $|\zeta| = c < 1$  et  $R(p) > c$ . On démontre sans peine que, dans notre hypothèse sur la convergence de l'intégrale (1.26) pour  $z < \delta_0$ , la fonction analytique  $q_0(p, \zeta)$  qui figure dans  $\Phi$  [équ. (3.31)] et dont l'existence n'a été établie précédemment que pour  $R(p) > |\zeta|$ , peut être prolongée analytiquement dans le domaine

$$(3.56) \quad |\zeta| \geq R(p) > |\zeta| - g(|\zeta|), \quad |\zeta| < 1,$$

$g(x)$  désignant une fonction appropriée de  $x$  qui est positive pour  $0 < x < 1$  <sup>(5)</sup>. En particulier, on tire de (3.32) pour le développement de  $q_0$  dans le voisinage du point  $p = \zeta$

$$(3.57) \quad q_0(\zeta, \zeta) = 0; \quad q_0(p, \zeta) = \frac{p - \zeta}{1 - \zeta} - \frac{\zeta \varepsilon''(0)}{2} \frac{(p - \zeta)^2}{(1 - \zeta)^3} + a_3(\zeta)(p - \zeta)^3 + \dots \quad (|\zeta| < 1).$$

Traçons maintenant dans le plan complexe (*fig. 4*), outre  $K_{|\zeta|=c}$  et  $C_p$ , la droite  $C'_p \dots R(p) = c - \delta$  ( $0 < \delta < g(c)$ ) et désignons par  $P'$  et  $P''$  ses points d'intersection avec  $K_{|\zeta|=c}$ . D'après ce que nous venons de dire, nous sommes en droit d'amener  $C_p$  [équ. (3.36)] dans la position  $C'_p$  en ajoutant, pour les points  $\zeta$  appartenant à l'arc de cercle  $P'cP''$ , le résidu de  $\frac{1}{2\pi i} \int_{C'_p}$  au pôle du deuxième ordre  $p = \zeta$ .

Il vient ainsi au moyen de (3.57)

$$(3.58) \quad E e^{-q\tau} = \frac{(N-1)!}{\mathfrak{E}^N} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{K'_p} \int_{C'_p} + \frac{(N-1)!}{\mathfrak{E}^N} \frac{1}{2\pi i} \int_{P'}^{P''} e^{\zeta \mathfrak{E}} \frac{q(1-\zeta)}{q-\zeta+\zeta \varepsilon(-q)} \\ \times \left[ \mathfrak{E} + \frac{\zeta \varepsilon''(0)}{2(1-\zeta)^2} - \frac{1}{q(1-\zeta)} + \frac{1}{q-\zeta+\zeta \varepsilon(-q)} \right] \frac{d\zeta}{\zeta^N}.$$

(5) Soit  $0 < \delta' < \delta_0$ ; on peut alors poser

$$g(x) = \frac{\delta'^2}{4} \frac{(1-x)^2}{x \varepsilon(\delta') + \delta'}.$$

Or pour  $N \rightarrow \infty$ , cette intégrale répétée dont l'ordre de grandeur est déterminé par le facteur

$$\begin{aligned} \frac{(N-1)!}{\mathfrak{C}^N} \left| \frac{e^{i\mathfrak{C}}}{\zeta^N} \right| &= \frac{(N-1)!}{(c\mathfrak{C})^N} e^{R(\mu)\mathfrak{C}} = \frac{(N-1)!}{N^N} e^{(1-\delta)\frac{N}{c}} \\ &= \frac{(N-1)!}{N^N} e^{-\frac{\delta}{c}N} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{\delta}{c}N}, \end{aligned}$$

tend exponentiellement vers zéro.

Le développement asymptotique du deuxième terme de (3.58)

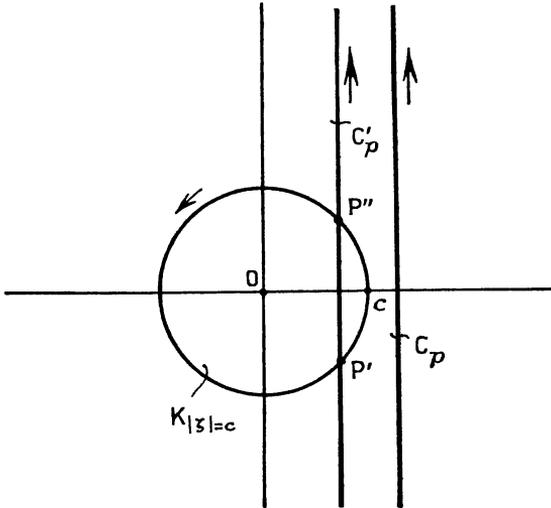


Fig. 4.

s'obtient par la méthode du col (le « col » étant le point  $\zeta = c$ ), et en deuxième approximation il vient ainsi

$$\begin{aligned} (3.59) \quad E e^{-q\tau} = E_B e^{-q\tau} &= \frac{(1-c)q}{q-c+c(\varepsilon-q)} + \frac{1}{N} \frac{(1-c)q}{q-c+c\varepsilon(-q)} \\ &\times \left[ \frac{1}{12} + \frac{c^2 \varepsilon''(0)}{2(1-c)^2} + \frac{c}{q-c+c\varepsilon(-q)} \right. \\ &\quad \left. - c^2 \frac{(\varepsilon(-q)-1)^2}{(q-c+c\varepsilon(-q))^2} - \frac{c^2}{1-c} \frac{\varepsilon(-q)-1}{q-c+c\varepsilon(-q)} - \frac{c}{(1-c)q} \right] \\ &\quad + O(N^{-2}) \quad [c < 1]. \end{aligned}$$

Le premier terme du deuxième membre est égal, en vertu de (1.35), à  $E_p e^{-q\tau}$  (pour  $\eta = c$ ), de sorte que (3.59) permet

d'évaluer la différence  $E_B e^{-q\tau} - E_P e^{-q\tau}$  à des termes d'ordre  $N^{-2}$  près. En effectuant dans la dernière formule l'opération  $\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{q\tau} \dots \frac{dq}{q}$ , on obtient, à une erreur du même ordre près, une expression pour  $\rho_B(t) - \rho_P(t)$ .

## CHAPITRE IV.

### L'HYPOTHÈSE DU DÉLAI SUPPLÉMENTAIRE VIRTUEL.

Dans certains cas, le phénomène de mise en attente entraîne, pour des raisons techniques, des délais supplémentaires qui s'ajoutent aux délais causés par la formation d'une queue d'attente. C'est surtout le cas pour les avions en instance d'atterrissage à un aéroport. Tant que sa piste d'atterrissage n'est pas libre, l'avion doit parcourir dans l'espace aérien au-dessus de l'aéroport un circuit d'attente et de ce fait, il subit un retard supplémentaire plus ou moins aléatoire.

Pour tenir compte de pareilles circonstances, nous supposons dans ce chapitre, tout en conservant les hypothèses du chapitre I, sauf celle qui est exprimée par l'équation (1.33) [la f. c. de  $f_1(t)$  équ. (1.26) étant désignée maintenant par  $\varepsilon_1(z)$ ], que pour  $n \geq 1$ , le  $n^{\text{ième}}$  visiteur subit un délai d'attente supplémentaire  $\Theta_{n-1}$  si, et seulement si à son instant d'arrivée  $X_n$ , le guichet est occupé.

Nous considérons les  $\Theta_n$  comme des v. a. i. qui, toutes, obéissent à la loi

$$(4.1) \quad \text{Prob}(\Theta_n < t) = f_3(t) \quad (t > 0; n = 0, 1, \dots), \quad \int_0^\infty df_3(t) = 1,$$

la f. r. donnée  $f_3(t)$  étant par hypothèse telle que l'intégrale de Stieltjes

$$(4.2) \quad \varepsilon_3(z) = \int_0^\infty e^{-zt} df_3(t)$$

converge pour  $z < \delta$ , où  $\delta > 0$  désigne une constante arbitrairement petite.

D'après ce qui a été dit au début du chapitre I [voir (1.3)], le  $n^{\text{ième}}$  visiteur n'est obligé à attendre que lorsque  $X_{n-1} + \tau_{n-1} + T_{n-1} > X_n$ ;

· dans l'hypothèse présente nous obtenons donc pour le d. a.  $\tau_n (n = 1, 2, \dots)$ :

$$(4.3) \quad \tau_n = \begin{cases} X_{n-1} + \tau_{n-1} + T_{n-1} - X_n + \theta_{n-1} & (\text{pour } X_{n-1} + \tau_{n-1} + T_{n-1} - X_n > 0), \\ 0 & (\text{pour } X_{n-1} + \tau_{n-1} + T_{n-1} - X_n \leq 0). \end{cases}$$

Cette formule qui détermine  $\tau_n$  en fonction du d. a. initial  $\tau_0$  et des  $3n$  v. a. i.  $T_i, \theta_i, Y_i = X_{i+1} - X_i (i = 0, \dots, n-1)$  nous permettra de construire l'e. m.

$$(4.4) \quad E e^{-q\tau_{n+1}} = \int_0^\infty df_1(t_0) \int_0^\infty df_2(y_0) \int_0^\infty df_3(\theta_0) \dots \\ \times \int_0^\infty df_1(t_n) \int_0^\infty df_2(y_n) \int_0^\infty df_3(\theta_n) e^{-q\tau_{n+1}}$$

et de là, au moyen de (1.16), la f. r.  $\rho_{n+1}(t) = \text{Prob}(\tau_{n+1} < t)$ .

En procédant comme lors de la démonstration de l'équation (1.38) et en utilisant les notations (1.9), (1.26) et (4.2), nous obtenons

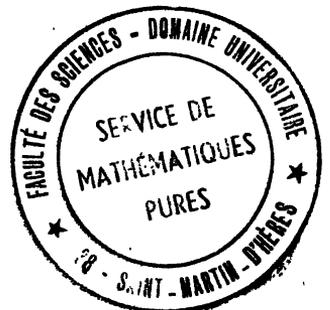
$$\int_0^\infty e^{-q\tau_{n+1}} df_2(y_n) = \int_0^{\tau_n + t_n} e^{-q(\tau_n + \theta_n + t_n - y_n) - \eta y_n} \eta dy_n + \int_{\tau_n + t_n}^\infty e^{-\eta y_n} \eta dy_n \\ = \frac{\eta e^{-q\theta_n}}{\eta - q} e^{-q(\tau_n + t_n)} - \left( \frac{\eta e^{-q\theta_n}}{\eta - q} - 1 \right) e^{-\eta(\tau_n + t_n)}, \\ \int_0^\infty df_1(t_n) \int_0^\infty df_3(\theta_n) \int_0^\infty e^{-q\tau_{n+1}} df_2(y_n) \\ = \frac{\eta \varepsilon_1(-q) \varepsilon_3(-q)}{\eta - q} e^{-q\tau_n} - \varepsilon_1(-\eta) \left( \frac{\eta \varepsilon_3(-q)}{\eta - q} - 1 \right) e^{-\eta\tau_n},$$

et de là, en effectuant les  $3n$  premières intégrations indiquées dans (4.4),

$$(4.5) \quad E e^{-q\tau_{n+1}} = \frac{\eta \varepsilon_1(-q) \varepsilon_3(-q)}{\eta - q} E e^{-q\tau_n} \\ - \varepsilon_1(-\eta) \left( \frac{\eta \varepsilon_3(-q)}{\eta - q} - 1 \right) E e^{-\eta\tau_n} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Dans l'hypothèse où  $\eta$  est assez petit pour qu'il existe un état d'équilibre statistique (au sens usuel) tel que tous les  $\tau_n$  aient la même f. r.  $\rho(t) = \text{Prob}(\tau < t)$ , nous tirons de (4.5), en raisonnant comme au chapitre I [équ. (1.28) à (1.30)], la formule (donnée dans [18])

$$(4.6) \quad E e^{-q\tau} = \frac{1 + \eta(\varepsilon_1'(0) + \varepsilon_3'(0))}{1 - \eta \varepsilon_3'(0)} \frac{q - \eta + \eta \varepsilon_3(-q)}{q - \eta + \eta \varepsilon_1(-q) \varepsilon_3(-q)},$$



Mais quand il s'agit d'établir, pour une valeur donnée du d. a. initial  $\tau_0$ , le comportement de  $E e^{-\gamma \tau_n}$  et de  $\rho_n(t)$  pour les grandes valeurs de  $n$ , nous devons à nouveau utiliser la f. g.  $\Phi(q, z)$  [équ. (1.39)]. En supposant dorénavant

$$(4.7) \quad \tau_0 = 0, \quad \text{donc} \quad E e^{-\gamma \tau_0} = 1,$$

nous obtenons pour  $\Phi$  dans le cas présent l'équation fonctionnelle

$$(4.8) \quad \left( 1 - \frac{z \eta \varepsilon_1(-q) \varepsilon_3(-q)}{\eta - q} \right) \Phi(q, z) \\ = 1 - z \varepsilon_1(-\tau_1) \left( \frac{\eta \varepsilon_3(-q)}{\eta - q} - 1 \right) \Phi(\eta, z).$$

En désignant maintenant par  $q_0(z)$  la racine unique de l'équation

$$(4.9) \quad 1 - \frac{z \eta \varepsilon_1(-q) \varepsilon_3(-q)}{\eta - q} = 0$$

telle que  $R(q) > 0$  pour  $|z| < 1$ , on tire de (4.8) la formule

$$(4.10) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(q, z) &= \frac{\eta}{q - \eta + z \eta \varepsilon_1(-q) \varepsilon_3(-q)} \\ &\times \frac{(\eta - q_0) \varepsilon_3(-q) - (\eta - q) \varepsilon_3(-q_0)}{\eta \varepsilon_3(-q_0) - \eta + q_0} \\ &[q_0 = q_0(z), R(q) \geq 0, |z| < 1]. \end{aligned} \right.$$

La fonction  $\Phi$  étant construite, nous allons à nouveau étendre le chemin d'intégration de (1.45) au-delà du cercle unité. Notons d'abord que l'équation (1.43), au moyen de laquelle nous avons défini  $q_0(z)$  au chapitre I, se transforme en (4.9) en substituant  $\varepsilon_1(-q) \varepsilon_3(-q)$  à  $\varepsilon_1(-q)$  (c'est-à-dire en substituant  $E e^{-\gamma(\tau + \Theta)}$  à  $E e^{-\gamma \tau}$ ).

Les résultats établis au chapitre I pour  $q_0(z)$  s'appliquent donc à la fonction  $q_0(z)$  qui satisfait à (4.9), pour laquelle ils doivent être formulés comme suit : Selon que la dérivée

$$(4.11) \quad \left[ \frac{d}{dq} \frac{\eta \varepsilon_1(-q) \varepsilon_3(-q)}{\eta - q} \right]_{q=0} = \frac{1}{\eta} - \varepsilon'_1(0) - \varepsilon'_3(0) \\ = \frac{1}{\eta} - \int_0^\infty t df_1(t) - \int_0^\infty \theta df_3(\theta)$$

qui correspond à (1.47), est  $> 0$  ou  $< 0$ , il vient  $q_0(1) = 0$  ou  $q_0(1) > 0$ . Dans ces deux cas,  $q_0(z)$  est holomorphe en  $z = 1$  ;

mais lorsque l'expression (4.11) est nulle,  $g_0(z)$  se comporte au point  $z = 1$  comme  $\sqrt{z-1}$ .

Il en résulte que pour  $\eta < \frac{1}{\varepsilon'_1(0) + \varepsilon'_2(0)}$ ,  $\Phi(q, z)$  a  $z = 1$  pour pôle du premier ordre, de résidu  $-E e^{-q\tau}$  [équ. (4.6)]; par contre,  $\Phi(q, z)$  est holomorphe en  $z = 1$  pour  $\eta > \frac{1}{\varepsilon'_1(0) + \varepsilon'_2(0)}$ . Au moyen des raisonnements du chapitre I nous trouvons ensuite que

$$(4.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E e^{-q\tau_n} = \begin{cases} E e^{-q\tau} & [\eta < (\varepsilon'_1(0) + \varepsilon'_2(0))^{-1}], \\ 0 & [\eta \geq (\varepsilon'_1(0) + \varepsilon'_2(0))^{-1}], \end{cases}$$

la différence  $\rho_n(t) - \rho(t)$  tendant, sauf pour  $\eta(\varepsilon'_1(0) + \varepsilon'_2(0)) = 1$ , vers zéro comme  $e^{-\delta n}$  (où  $\delta > 0$  désigne une constante appropriée).

Dans le cas présent, il convient de choisir l'unité de temps de telle manière que

$$(4.13) \quad \varepsilon'_1(0) + \varepsilon'_2(0) = E(T) + E(\Theta) = 1,$$

$\rho(t)$  prenant alors [voir (1.16) et (4.6)] la forme

$$(4.14) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho(t) &= \frac{1-\eta}{1-\eta \varepsilon'_2(0)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i0}^{t+\infty+i0} e^{qt} \frac{q - \eta + \eta \varepsilon_1(-q)}{q - \eta + \eta \varepsilon_1(-q) \varepsilon_2(-q)} \frac{dq}{q} \\ & \quad (t > 0, \eta < 1). \end{aligned} \right.$$

La condition  $\eta < 1$  qui figure ici, signifie qu'en état d'équilibre statistique (au sens usuel) l'e. m. d'arrivées par durée moyenne de la v. a.  $T + \Theta$  (durée d'opération + délai supplémentaire virtuel) est  $< 1$ .

Pour l'e. m. du d. a.

$$(4.15) \quad m_1(\tau) = \int_0^\infty \tau d\rho(\tau) = - \left[ \frac{d}{dq} E e^{-q\tau} \right]_{q=0},$$

on tire de (4.6) et (4.13) la formule

$$(4.16) \quad m_1(\tau) = \frac{\eta}{2} \left( \frac{\varepsilon''_1(0) + 2\varepsilon'_1(0)\varepsilon'_2(0) + \varepsilon''_2(0)}{1-\eta} - \frac{\varepsilon''_2(0)}{1-\eta \varepsilon'_2(0)} \right) \quad (\eta < 1).$$

Pour  $\Theta \equiv 0$ , donc  $\varepsilon_2(z) \equiv 1$ , (4.13), (4.14) et (4.16) se confondent respectivement avec (1.33), (1.36) et avec la première équation (2.7).

*Exemples.* — 1° Supposons que

$$(4.17) \quad f_1(t) = 1 - e^{-\frac{t}{a}}, \quad f_2(t) = 1 - e^{-\frac{t}{b}} \quad (a > 0, b > 0, a + b = 1),$$

la relation entre  $a$  et  $b$  résultant de (4.13). Il vient alors

$$\varepsilon_1(-q) = \frac{1}{1+aq}, \quad \varepsilon_2(-q) = \frac{1}{1+bq},$$

et en substituant ces fonctions dans (4.14), nous trouvons que cette intégrale se réduit à la somme des résidus aux pôles simples  $q=0, -\beta_1, -\beta_2$ , les racines de l'équation

$$(4.18) \quad abq^2 + q(1-ab\eta) + 1 - \eta = 0$$

étant désignées par  $-\beta_1$  et  $-\beta_2$ . On obtient ainsi la formule

$$(4.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(t) = 1 - \frac{a\eta}{1-b\eta} \frac{\beta_2 e^{-\beta_1 t} - \beta_1 e^{-\beta_2 t}}{\beta_2 - \beta_1} \\ \left[ \beta_{1(2)} = \frac{1-ab\eta}{2ab} \pm \frac{1}{2ab} \sqrt{(1+ab\eta)^2 - 4ab}; t > 0, \eta < 1, a+b=1 \right]. \end{array} \right.$$

Dans l'hypothèse (4.17), l'expression (4.16) prend la forme

$$(4.20) \quad m_1(\tau) = \frac{\eta(1-ab)}{1-\eta} - \frac{\eta b^\tau}{1-b\eta}.$$

2° En supposant toutes les d. o.  $T_n$  égales à la constante  $a > 0$ , et tous les délais supplémentaires  $\Theta_n$  égaux à  $b \geq 0$ , nous avons [voir (2.32)]

$$(4.21) \quad \varepsilon_1(-q) = E e^{-qT} = e^{-aq}, \quad \varepsilon_2(-q) = E e^{-q\Theta} = e^{-bq} \quad (a+b=1),$$

la dernière relation résultant de (4.13). Pour ces fonctions, (4.14) se transforme en

$$(4.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(t) = \frac{1-\eta}{1-b\eta} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} e^{qt} \frac{q-\eta+\eta e^{-bq}}{q-\eta+\eta e^{-q}} \frac{dq}{q} \\ (t > 0, \eta < 1, 0 \leq b < 1), \end{array} \right.$$

et en traitant cette intégrale de la même façon que (2.33) où figure le même dénominateur  $q - \eta + \eta e^{-q}$ , nous obtenons

$$(4.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(t) = \frac{1-\eta}{1-b\eta} \left( \sum_{i=0}^{[t-b]} e^{\eta(t-b-i)} \sum_{k=0}^i \frac{\eta^k (i+b-t)^k}{k!} \right. \\ \left. - \sum_{i=0}^{[t]} e^{\eta(t-i)} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\eta^k (i-t)^k}{k!} + [t] - [t-b] \right) \\ \left( \sum_{i=0}^{-1} \equiv 0; t > 0, \eta < 1, 0 \leq b < 1 \right). \end{array} \right.$$

Donc dans les intervalles

$$(4.24) \quad 0 < t \leq b, \quad b \leq t \leq 1, \quad 1 \leq t \leq 1 + b, \quad 1 + b \leq t \leq 2,$$

$\rho(t)$  est respectivement égale à

$$(4.25) \quad \begin{cases} \frac{1-\eta}{1-b\eta}, & \frac{1-\eta}{1-b\eta} e^{\eta(t-b)}, & \frac{1-\eta}{1-b\eta} (e^{\eta(t-b)} - e^{\eta(t-1)} + 1), \\ \frac{1-\eta}{1-b\eta} [e^{\eta(t-b)} - e^{\eta(t-1)} + e^{\eta(t-b-1)}(1-\eta(t-b-1))]. \end{cases}$$

Pour l'e. m. du d. a., (4.16) donne ici

$$(4.26) \quad m_1(\tau) = \frac{\eta}{2(1-\eta)} - \frac{\eta b^2}{2(1-b\eta)}.$$

## CHAPITRE V.

### DÉLAIS D'ATTENTE QUANTIFIÉS.

Supposons maintenant que pour  $\tau_n + T_n > Y_n$ , le d. a.  $\tau_{n+1}$ , mesuré en une unité de temps appropriée, ait pour valeur le plus petit entier supérieur à  $\tau_n + T_n - Y_n$  [équ. (4.3)], augmenté d'un délai supplémentaire virtuel  $\Theta_n$  ne prenant que des valeurs entières (en nombre fini). Nous obtenons ainsi la formule

$$(5.1) \quad \tau_{n+1} = \begin{cases} [\tau_n + T_n - Y_n] + 1 + \Theta_n & (Y_n < \tau_n + T_n), \\ 0 & (Y_n \geq \tau_n + T_n). \end{cases}$$

Comme aux chapitres précédents, nous admettons pour la répartition des v. a. i.  $T_n$  et  $Y_n$  respectivement les lois (1.6) et (1.10) et supposons que

$$(5.2) \quad \text{Prob}(\Theta_n = i) = \pi_i \quad \left( i = 0, \dots, N; \sum_{i=0}^N \pi_i = 1; n = 0, 1, \dots \right).$$

Notre objet principal sera le calcul des probabilités

$$(5.3) \quad p_{in} = \text{Prob}(\tau_n = i) \quad (i = 0, 1, \dots; n = 1, 2, \dots).$$

et de leurs limites

$$(5.4) \quad P_i = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{in} = \text{Prob}(\tau = i).$$

Mentionnons que c'est encore le phénomène d'encombrement des aéroports par des avions en instance d'atterrissage qui est à l'origine de ce problème ([17]). Car aux avions qui, faute de piste d'atterrissage libre, doivent être mis en attente, on impose parfois des  $d_n$  qui sont des multiples entiers d'un certain intervalle de temps fixe; c'est cet intervalle qui, dans (5.1), a été pris pour unité de temps.

Dans le cas présent,  $\Theta_{n-1}$  signifie l'erreur d'appréciation, de la part de la tour de commandement de l'aéroport, lors de l'arrivée du  $n^{\text{ème}}$  avion et  $T_n$ , la durée d'atterrissage de cet avion, laquelle en général, sera un nombre non entier.

En vertu de la définition (5.3) des  $p_{in}$  nous avons l'identité

$$(5.5) \quad E x^{\tau_{n+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,n+1} x^i \quad (n = 0, 1, \dots; |x| < 1),$$

où  $x$  est une variable complexe de module  $< 1$ . D'autre part, l'e. m.  $E x^{\tau_{n+1}}$  peut être représentée sous la forme

$$(5.6) \quad E x^{\tau_{n+1}} = \int_0^{\infty} df_1(t_0) \int_0^{\infty} df_2(\gamma_0) \sum_{\theta_0=0}^N \pi_{\theta_0} \dots \\ \times \int_0^{\infty} df_1(t_n) \int_0^{\infty} df_2(\gamma_n) \sum_{\theta_n=0}^N \pi_{\theta_n} x^{\tau_{n+1}},$$

ce qui permet d'établir une relation linéaire entre  $E x^{\tau_{n+1}}$  et  $E x^{\tau_n}$ .

Posons pour le moment  $\tau_n + T_n - Y_n = t$ ,  $\Theta_n + 1 = c$ ; la formule (5.1) prend alors la forme

$$\tau_{n+1} = [t] + c \quad (t > 0), \quad = 0 \quad (t \leq 0);$$

en vue d'effectuer les dernières opérations indiquées dans (5.6), nous allons représenter  $x^{\tau_{n+1}(t)}$  sous forme d'une intégrale de Fourier par rapport à  $t$ .

Or, pour la fonction

$$(5.7) \quad x^{\tau(t,c)} \quad [\varphi(t,c) = [t] + c \quad (t > 0), \quad = 0 \quad (t < 0); \quad |x| < 1],$$

on obtient au moyen du théorème de Fourier la représentation

$$(5.8) \quad x^{\tau(t,c)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\gamma}} e^{-\gamma t} \left( \frac{x^c (e^{\gamma} - 1)}{1 - x e^{\gamma}} + 1 \right) \frac{d\gamma}{\gamma} \quad (|x e^{\gamma}| < 1; t \neq 0, 1, \dots).$$

Cette formule se démontre immédiatement pour  $t < 0$ , car alors le deuxième membre se réduit au résidu en  $\zeta = 0$  qui est égal à  $x^0 = 1$ .

Pour  $t > [t] \geq 0$ , nous utilisons dans (5.8) l'identité

$$(5.9) \quad \frac{e^{\check{\zeta}} - 1}{1 - x e^{\check{\zeta}}} = -\frac{1}{x} + \frac{1-x}{x} \frac{1 - (x e^{\check{\zeta}})^{[t]+1}}{1 - x e^{\check{\zeta}}} + \frac{1-x}{x} \frac{(x e^{\check{\zeta}})^{[t]+1}}{1 - x e^{\check{\zeta}}}.$$

En appliquant ensuite le théorème de Cauchy pour le demi-plan droit des  $\zeta$ , on reconnaît que les intégrales qui correspondent aux premier et deuxième termes du second membre, sont nulles. Par contre, l'intégrale correspondant au troisième terme de (5.9) est égale au résidu en  $\zeta = 0$ , donc à

$$x^t \frac{1-x}{x} \frac{x^{[t]+1}}{1-x} = x^{[t]+c} = x^{\check{\tau}(t,c)},$$

ce qui achève la démonstration de (5.8).

En exprimant  $x^{\tau_{n+1}} = x^{\check{\tau}(\tau_n + \tau_n - Y_n, \Theta_{n+1})}$  par la formule (5.8) où le chemin d'intégration  $C_\zeta$  sera choisi de telle sorte que  $|x e^\zeta| < 1$  et  $\Re(\eta - \zeta) > 0$ , nous obtenons

$$(5.10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty df_2(y_n) x^{\tau_{n+1}} \\ &= \int_0^\infty \eta e^{-\eta y_n} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\zeta} e^{-(\tau_n + \tau_n - y_n)\zeta} \left( x^{\theta_{n+1}} \frac{e^{\check{\zeta}} - 1}{1 - x e^{\check{\zeta}}} + 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} dy_n \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\zeta} e^{-\tau_n \zeta - \tau_n \zeta} \left( x^{\theta_{n+1}} \frac{e^{\check{\zeta}} - 1}{1 - x e^{\check{\zeta}}} + 1 \right) \frac{\eta d\zeta}{(\eta - \zeta)\zeta} \\ & \quad [\Re(\eta - \zeta) > 0]. \end{aligned} \right.$$

A l'aide des notations (1.26) et

$$(5.11) \quad \pi(x) = \sum_{l=0}^N \pi_l x^{l+1} \quad (= \mathbf{E} x^{\Theta+1})$$

il vient ensuite

$$(5.12) \quad \int_0^\infty df_1(t_n) \int_0^\infty df_2(y_n) \sum_{\theta_n=0}^N \pi_{\theta_n} x^{\tau_{n+1}} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\zeta} e^{-\zeta \tau_n} \varepsilon(-\zeta) \left( \pi(x) \frac{e^{\check{\zeta}} - 1}{1 - x e^{\check{\zeta}}} + 1 \right) \frac{\eta d\zeta}{(\eta - \zeta)\zeta}$$

et en effectuant les autres opérations indiquées dans (5.6), nous trouvons

$$(5.13) \quad \mathbf{E} x^{\tau_{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \mathbf{E} e^{-\zeta \tau_n} \varepsilon(-\zeta) \left( \pi(x) \frac{e^{\zeta} - 1}{1 - x e^{\zeta}} + 1 \right) \frac{\eta d\zeta}{(\eta - \zeta)\zeta}.$$

Dans l'hypothèse où  $\tau_0 = 0$ , donc  $\mathbf{E}(x^{\tau_0}) = 1$ , nous tirons de (5.13) pour la série

$$(5.14) \quad \Psi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{E} x^{\tau_n} \quad (|z| < 1, |x| \leq 1)$$

dont la convergence pour  $|z| < 1$  et  $|x| \leq 1$ , est évidente, l'équation intégrale

$$(5.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(x, z) = 1 + \frac{z}{2\pi i} \int_C \Psi(e^{-\zeta}, z) \varepsilon(-\zeta) \left( \frac{\pi(x)(e^{\zeta} - 1)}{1 - x e^{\zeta}} + 1 \right) \frac{\eta d\zeta}{(\eta - \zeta)\zeta}, \\ [\mathbf{R}(\eta - \zeta) > 0, |x e^{\zeta}| < 1]. \end{array} \right.$$

En décomposant cette fonction à intégrer comme suit :

$$(5.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\eta}{(\eta - \zeta)\zeta} \frac{\pi(x)}{e^{-\zeta} - x} \left( (1 - e^{-\zeta}) \Psi(e^{-\zeta}, z) \int_0^{\infty} e^{-\zeta t} df_1(t) \right. \\ \quad \left. - (1 - x) \Psi(x, z) \int_0^{\infty} e^{-(t-[t])\zeta} x^{[t]} df_1(t) \right) \\ + \frac{\eta}{(\eta - \zeta)\zeta} \frac{\pi(x) e^{\zeta}}{1 - x e^{\zeta}} (1 - x) \Psi(x, z) \int_0^{\infty} e^{-(t-[t])\zeta} x^{[t]} df_1(t) \\ + \frac{\eta}{(\eta - \zeta)\zeta} \Psi(e^{-\zeta}, z) \varepsilon(-\zeta), \end{array} \right.$$

on voit que les premier et troisième termes [où, en vertu de (5.5) et (5.14),  $\Psi(e^{-\zeta}, z)$  est une série de Taylor en  $e^{-\zeta}$ ] ont le pôle  $\zeta = \eta$  pour seule singularité dans le demi-plan droit des  $\zeta$ . Puisqu'en outre ces termes s'annulent, pour  $|\zeta| \rightarrow \infty$  et  $\mathbf{R}(\zeta) > 0$ , comme  $\frac{1}{(\eta - \zeta)\zeta}$ ,

l'opération  $\frac{1}{2\pi i} \int_C$  les transforme en leurs résidus en  $\zeta = \eta$ . De même on reconnaît que l'intégrale par rapport au deuxième terme de (5.16) est égale au résidu de ce terme en  $\zeta = 0$ . En utilisant la notation

$$(5.17) \quad (t) = t - [t] \quad (0 \leq (t) \leq 1),$$

l'équation (5.15) se transforme ainsi en

$$\begin{aligned} \Psi(x, z) &= 1 + z \pi(x) \frac{1 - e^{-\eta}}{e^{-\eta} - x} \Psi(e^{-\eta}, z) \varepsilon(-\eta) \\ &\quad - \frac{z \pi(x)(1-x)}{e^{-\eta} - x} \Psi(x, z) \int_0^\infty e^{-\eta(t)} x^{[t]} df_1(t) \\ &\quad + z \varepsilon(-\eta) \Psi(e^{-\eta}, z) + z \pi(x) \Psi(x, z) \int_0^\infty x^{[t]} df_1(t) \end{aligned}$$

ou encore en

$$(5.18) \quad f(x, z) \Psi(x, z) = 1 + \left( 1 + \pi(x) \frac{e^\eta - 1}{1 - x e^\eta} \right) z \varepsilon(-\eta) \Psi(e^{-\eta}, z) \quad (x \neq e^{-\eta}),$$

où nous avons posé

$$(5.19) \quad f(x, z) = 1 - z \pi(x) \int_0^\infty \left( 1 + \frac{1-x}{x - e^{-\eta}} e^{-\eta(t)} \right) x^{[t]} df_1(t) \quad (x \neq e^{-\eta}).$$

L'équation fonctionnelle (5.18) peut être résolue de la même manière que (1.40). Démontrons d'abord que l'équation

$$(5.20) \quad f(x, z) = 0$$

possède une seule racine  $x = x_0(z)$  telle que  $|x| < 1$  pour  $|z| < 1$ . On confirme successivement que pour  $|x| = 1$ , les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} |x - e^{-\eta}| &\geq 1 - e^{-\eta}, & \left| \frac{1 - e^{-\eta}}{x - e^{-\eta}} \right| &\leq 1, \\ \left| 1 + \frac{1-x}{x - e^{-\eta}} e^{-\eta(t)} \right| &= \left| 1 - e^{-\eta(t)} + \frac{1 - e^{-\eta}}{x - e^{-\eta}} e^{-\eta(t)} \right| &\leq 1. \end{aligned}$$

Pour  $|x| = 1$  il vient en outre, en raison de (5.2) et (5.11),  $|\pi(x)| \leq \pi(1) = 1$ , d'où on tire

$$(5.21) \quad \left\{ \left| z \pi(x) \int_0^\infty \left( 1 + \frac{1-x}{x - e^{-\eta}} e^{-\eta(t)} \right) x^{[t]} df_1(t) \right| \leq |z| < 1 \right. \\ \left. (|x| = 1, |z| < 1). \right.$$

En vertu du théorème de Rouché,  $f(x, z)$  [équ. (5.19)] a donc, pour  $|z| < 1$ , autant de zéros que de pôles à l'intérieur du cercle  $|x| = 1$ . Or dans ce cercle le deuxième membre de (5.19) a visiblement un seul pôle  $x = e^{-\eta} < 1$ , de sorte que l'équation (5.20) y possède une seule racine  $x_0(z)$ .

En substituant  $x = x_0$  dans (5.18), nous obtenons une équation

linéaire pour  $\Psi(e^{-\tau}, z)$ , et de là, la formule

$$(5.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x, z) \Psi(x, z) = 1 - \left( 1 + \pi(x) \frac{e^{\tau} - 1}{1 - x e^{\tau}} \right) \left( 1 + \pi(x_0) \frac{e^{\tau} - 1}{1 - x_0 e^{\tau}} \right)^{-1} \\ [x_0 = x_0(z)] \end{array} \right.$$

qui exprime la f. g. des e. m.  $E x^{\tau}$  au moyen de la fonction connue  $f(x, z)$  [équ. (5.19)] et de la racine  $x_0$  de (5.20).

Un raisonnement analogue à celui fait au chapitre I pour  $q_0(z)$  nous montre que  $x_0(z)$  est prolongeable au-delà du cercle unité et que  $x_0(1) = 1$  ou  $< 1$ , selon que

$$(5.23) \quad f'_x(1, 1) = \left[ \frac{df(x, 1)}{dx} \right]_{x=1} > 0 \text{ ou } < 0.$$

Dans le premier cas,  $\Psi(x, z)$  a  $z = 1$  pour pôle du premier ordre, mais est dans l'autre cas holomorphe en ce point. Enfin, si cette dérivée est nulle,  $x_0(z)$  a  $z = 1$  pour point de ramification et  $\Psi(x, z)$  s'y comporte comme  $\frac{1}{\sqrt{z-1}}$ . Nous pouvons donc étendre le chemin d'intégration de

$$(5.24) \quad E x^{\tau} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z| < 1} \Psi(x, z) z^{-n-1} dz$$

au-delà du cercle unité, sauf pour  $f'_x(1, 1) = 0$  où ce chemin ( $C^*$  dans la figure 2) doit contourner le point de ramification  $z = 1$  et la coupure. En faisant ensuite tendre  $n \rightarrow \infty$ , nous obtenons

$$(5.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} E x^{\tau} = \lim_{n \rightarrow \infty} E x^{\tau} = - [\text{Res } \Psi(x, z)]_{z=1} \quad (f'_x(1, 1) > 0), \\ = 0 \quad (f'_x(1, 1) \leq 0). \end{array} \right.$$

Donc, dans le cas où l'inégalité

$$(5.26) \quad f'_x(1, 1) = \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-\tau(t)}}{1 - e^{-\tau}} - [t] \right) df_1(t) - \pi'(1) > 0$$

est satisfaite, il vient [voir (5.4)] pour le d. a.  $\tau$  en état d'équilibre statistique

$$(5.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} E x^{\tau} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l x^l = f^{-1}(x, 1) f'_x(1, 1) \frac{e^{\tau} - 1}{e^{\tau} - \pi'(1)(e^{\tau} - 1)} \\ \times \left( 1 + \pi(x) \frac{e^{\tau} - 1}{1 - x e^{\tau}} \right) \quad [f'(1, 1) > 0, |x| \leq 1]. \end{array} \right.$$

Pour obtenir les probabilités  $P_i$ , on développera cette fonction en série de Taylor; en particulier, il vient pour la probabilité de non-attente  $P_0$

$$(5.28) \quad P_0 = \text{Prob}(\tau = 0) = \frac{e^{\eta-1}}{e^\eta - \pi'(1)(e^\eta - 1)} f'_x(1, 1).$$

L'équation (5.26), où  $\frac{e^{\eta([t]-t)}}{1-e^{-\eta}} - [t]$  (de même que la fonction à intégrer de (5.19)) est une fonction continue de  $t$ , peut être mise [voir (1.6), (5.2) et (5.11)] sous la forme

$$(5.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} f'_x(1, 1) = \int_0^\infty \left( \frac{e^{\eta\nu(t)}}{e^\eta - 1} - \nu(t) \right) df_1(t) - E(T + \Theta) \\ \left[ 0 < \nu(t) = [t] + 1 - t \leq 1; \right. \\ \left. E(T + \Theta) = \int_0^\infty t df_1(t) + \pi'(1) - 1 \right]. \end{array} \right.$$

$f'_x(1, 1)$  est une fonction continue décroissante de  $\eta$ , et la racine unique  $\eta_{\text{sup}}$  de l'équation

$$(5.30) \quad f'_x(1, 1) = 0$$

est la borne supérieure des constantes  $\eta$  telles qu'un état d'équilibre statistique soit possible. Comme la fonction  $\varphi(r) = \frac{e^{\eta r}}{e^\eta - 1} - r$ , dans l'intervalle  $[0, 1]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(1) = \frac{1}{e^\eta - 1}$  pour maximum, il résulte de (5.29) et (5.30) que

$$(5.31) \quad \begin{aligned} E(T + \Theta) &= \int_0^\infty \left( \frac{e^{\eta_{\text{sup}}\nu(t)}}{e^{\eta_{\text{sup}}} - 1} - \nu(t) \right) df_1(t) \\ &\leq \int_0^\infty (e^{\eta_{\text{sup}}} - 1)^{-1} df_1(t) = (e^{\eta_{\text{sup}}} - 1)^{-1}, \end{aligned}$$

et de là nous obtenons pour  $\eta_{\text{sup}}$  l'inégalité suivante

$$(5.32) \quad \eta_{\text{sup}} \leq \log \left( 1 + \frac{1}{E(T + \Theta)} \right).$$

Dans l'hypothèse où les d. o.  $T_n$  ne prennent que des valeurs entières [de sorte que  $df_1(t) = 0$ , sauf pour  $t$  entier], les dernières

formules se simplifient. En particulier, (5.27) prend alors la forme

$$(5.33) \left\{ \begin{aligned} E x^\tau &= \sum_{i=0}^{\infty} P_i x^i \\ &= \frac{e^{\eta} - (\varepsilon'(0) + \pi'(1))(e^{\eta} - 1)}{e^{\eta} - \pi'(1)(e^{\eta} - 1)} \frac{1 - x e^{\eta} + \pi(x)(e^{\eta} - 1)}{1 - x e^{\eta} + \pi(x) \varepsilon(\log x)(e^{\eta} - 1)} \\ &\quad \left[ \eta < \log \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon'(0) + \pi'(1) - 1} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

où  $\varepsilon(\log x) = E x^{\Gamma}$  est une série de Taylor en  $x$ , et dans (5.31) et (5.32) le signe  $\leq$  doit être remplacé par le signe d'égalité.

Afin de simplifier l'écriture, nous avons pris jusqu'ici pour unité de temps l'intervalle de temps fixe dont, par hypothèse, les d. a.  $\tau_n$  et les erreurs d'appréciation  $\Theta_n$  sont des multiples entiers.

Désignons désormais cet intervalle, mesuré en une unité de temps quelconque, par  $h$ . Alors, la première équation (5.1) doit être remplacée par

$$(5.34) \quad \frac{\tau_{n+1}}{h} = \left[ \frac{\tau_n + T_n - Y_n}{h} \right] + 1 - \frac{\Theta_n}{h} \quad (Y_n < \tau_n + T_n).$$

Nos formules ultérieures restent donc valables sous condition de diviser par  $h$  tous les intervalles de temps qui y figurent. En outre, nous remplacerons  $\eta$  par  $\eta/h$ , afin de conserver à  $\eta$  la signification d'e. m. du nombre d'arrivées par unité de temps.

Ainsi l'équation (5.33) prend la forme

$$(5.35) \left\{ \begin{aligned} E x^{\tau/h-1} &= \sum_{i=0}^{\infty} P_i x^i \left( = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \text{Prob}(\tau = ih) \right) \\ &= \frac{1 - h^{-1}(e^{\eta/h} - 1) E(T + \Theta)}{1 - h^{-1}(e^{\eta/h} - 1) E(\Theta)} \frac{1 - x e^{\eta/h} + (e^{\eta/h} - 1) x E x^{(\Theta/h-1)}}{1 - x e^{\eta/h} + (e^{\eta/h} - 1) x E x^{(T+\Theta)/h-1}} \\ &\quad \left[ \begin{aligned} E x^{\Theta/h-1} &= x^{-1} \pi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \text{Prob}(\Theta = ih), \\ E x^{T/h-1} &= \sum_{i=0}^{\infty} x^i \text{Prob}(T = ih) \end{aligned} \right]. \end{aligned} \right.$$

L'inégalité (5.32) prend maintenant la forme

$$\eta_{\text{sup}} h \leq \log \left( 1 + \frac{h}{E(T + \Theta)} \right);$$

il en résulte pour le nombre  $\eta E(T + \Theta)$  [e. m. du nombre d'arrivées pendant l'intervalle  $E(T + \Theta)$ ] la relation

$$(5.36) \quad \eta E(T + \Theta) < \eta_{\text{sup}} E(T + \Theta) \leq \frac{E(T + \Theta)}{h} \log \left( 1 + \frac{h}{E(T + \Theta)} \right).$$

Donc dans l'hypothèse des d. a. quantifiés, la limite supérieure  $\eta_{\text{sup}} E(T + \Theta)$  de l'intensité de trafic (ou du degré d'utilisation du guichet, de l'aéroport, etc.)  $\eta E(T + \Theta)$  est  $< 1$ , car  $x \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) < 1$  (pour  $x > 0$ ). Notons que dans les hypothèses des chapitres précédents, cette limite était égale à 1.

Supposons à titre d'exemple toutes les d. o.  $T_n$  (les durées d'atterrissage, dans le cas de l'aéroport) égales à  $mh$  ( $m$  entier) et négligeons les erreurs d'appréciation, donc

$$(5.37) \quad \begin{cases} T = mh, & E(T) = mh, & E x^{T h^{-1}} = x^m, \\ \Theta = 0, & E(\Theta) = 0, & E x^{\Theta h^{-1}} = 1. \end{cases}$$

En prenant ici la d. o. constante  $T$  pour unité de temps, il vient  $mh = 1$ ,  $h = \frac{1}{m}$ , de sorte que l'équation (5.35) qui est valable dans le cas présent, se transforme en

$$(5.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{\infty} P_i x^i = (1 + m - m e^{\eta m^{-1}}) \frac{1 - x}{1 - x e^{\eta m^{-1}} + x^{m+1} (e^{\eta m^{-1}} - 1)}, \\ P_i = \text{Prob} \left( \tau = \frac{i}{m} \right) \quad (i = 0, 1, \dots); \\ T = 1, \quad \Theta = 0, \quad \eta < m \log \left( 1 + \frac{1}{m} \right). \end{array} \right.$$

Notons enfin qu'en posant, dans (5.35),  $x = e^{-q h}$  et en faisant ensuite tendre  $h$  vers zéro, on revient à la formule (4.6) de  $E e^{-q \tau}$ .

## CHAPITRE VI.

### CONSTRUCTION DE FONCTIONS DE RÉPARTITION A PLUSIEURS VARIABLES.

Les méthodes utilisées pour construire des f. r. telles que  $\rho(t) = \text{Prob}(\tau < t)$  permettent aussi de résoudre différents problèmes plus généraux. Considérons d'abord la suite des d. a. successifs  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \dots$ . Il est clair que ces v. a. sont stochasti-

quement liées deux à deux, de sorte qu'une information obtenue sur l'une d'entre elles,  $\tau_n$ , influera sur la répartition de chacun des d. a. suivants  $\tau_{n+n_1}$ .

Pour être en mesure d'étudier ces liaisons stochastiques, construisons les f. r. à deux variables

$$(6.1) \quad \rho_{n, n_1}(t, t_1) = \text{Prob}(\tau_n < t, \tau_{n+n_1} < t_1) \quad (n, n_1 = 0, 1, \dots; t, t_1 > 0).$$

Le calcul de  $\rho_{n, n_1}$  se ramène à celui de l'e. m.  $E e^{-q\tau_n - q_1\tau_{n+n_1}}$ , par la formule

$$(6.2) \quad \rho_{n, n_1}(t, t_1) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_C \int_C e^{qt + q_1 t_1} E e^{-q\tau_n - q_1\tau_{n+n_1}} \frac{dq dq_1}{qq_1}$$

qui peut être démontrée de manière analogue à (1.16) [voir aussi (1.69)].

Observons d'abord, en vue de construire cette e. m., qu'au moyen de la formule de récurrence (1.5)  $\tau_{n+n_1}$  peut être exprimé en fonction de  $\tau_n$  et des  $n_1$  v. a. i.

$$(6.3) \quad T_n - Y_n, \quad T_{n+1} - Y_{n+1}, \quad \dots, \quad T_{n+n_1-1} - Y_{n+n_1-1},$$

donc

$$\tau_{n+n_1} = f_{n_1}(T_n - Y_n, \dots, T_{n+n_1-1} - Y_{n+n_1-1}; \tau_n).$$

Comme cette formule est satisfaite pour tout  $n \geq 0$ , et que toutes les v. a.  $T_i - Y_i$  suivent la même loi, l'e. m. conditionnelle  $E(e^{-q_1\tau_{n+n_1}} | \tau_n)$  par rapport aux v. a. (6.3) (qui sera désignée pour le moment par  $E_n^{n+n_1-1} e^{-q_1\tau_{n+n_1}}$ ) s'obtient en remplaçant dans l'expression de  $E(e^{-q_1\tau_{n_1}} | \tau_0) = E_0^{n_1-1} e^{-q_1\tau_{n_1}}$ , la lettre  $\tau_0$  par  $\tau_n$ . Par conséquent nous obtenons la f. g.

$$(6.4) \quad \sum_{n_1=0}^{\infty} z_1^{n_1} E_n^{n+n_1-1} e^{-q_1\tau_{n+n_1}} = \Phi(q_1, z_1; \tau_n)$$

en remplaçant, dans le deuxième membre de (1.44),  $q$ ,  $z$  et  $\tau_0$  respectivement par  $q_1$ ,  $z_1$  et  $\tau_n$ , donc

$$(6.5) \quad \sum_{n_1=0}^{\infty} z_1^{n_1} E_n^{n+n_1-1} e^{-q_1\tau_{n+n_1}} = \frac{q_1}{q_1 - \eta + \eta z_1 \varepsilon(-q_1)} \left( \frac{q_1 - \eta}{q_1} e^{-q_1\tau_n} - \frac{q_0(z_1) - \eta}{q_0(z_1)} e^{-q_0(z_1)\tau_n} \right).$$

Or, il est évident que

$$(6.6) \quad E(e^{-q\tau_n - q_1\tau_{n+n_1}} | \tau_0) = E_0^{n-1}(e^{-q\tau_n} E_n^{n+n_1-1} e^{-q_1\tau_{n+n_1}}),$$

le symbole  $E_0^{n-1}$  se rapportant aux v. a. i.  $T_0 - Y_0, \dots, T_{n-1} - Y_{n-1}$  dont dépend  $\tau_n$ . En effectuant l'opération  $E_0^{n-1}$  dans les deux membres de l'équation (6.5), multipliés par  $e^{-\eta\tau_n}$ , nous trouvons donc

$$(6.7) \quad \sum_{z_1=0}^{\infty} z_1^{\eta_1} E e^{-\eta\tau_n - \eta_1\tau_{n+1}} = \frac{q_1}{q_1 - \eta + \eta_1 z_1 \varepsilon(-q_1)} \left( \frac{q_1 - \eta}{q_1} E e^{-(q+q_1)\tau_n} - \frac{q_0(z_1) - \eta}{q_0(z_1)} E e^{-(q+q_0(z_1))\tau_n} \right).$$

Multipliant par  $z^n$  et sommant depuis  $n = 0$  jusqu'à  $n = \infty$ , nous obtenons ensuite, au moyen de la notation (1.39),

$$(6.8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Phi_2(q, q_1; z, z_1) \\ & = \sum_{n, n_1=0}^{\infty} z^n z_1^{\eta_1} E e^{-\eta\tau_n - \eta_1\tau_{n+1}} = \frac{q_1}{q_1 - \eta + \eta_1 z_1 \varepsilon(-q_1)} \\ & \times \left( \frac{q_1 - \eta}{q_1} \Phi(q + q_1, z) - \frac{q_0(z_1) - \eta}{q_0(z_1)} \Phi(q + q_0(z_1), z) \right) \\ & \quad (|z|, |z_1| < 1). \end{aligned} \right.$$

De la même façon, on obtient la relation

$$(6.9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Phi_3(q, q_1, q_2; z, z_1, z_2) = \sum_{n, n_1, n_2=0}^{\infty} z^n z_1^{\eta_1} z_2^{\eta_2} E e^{-\eta\tau_n - \eta_1\tau_{n+1} - \eta_2\tau_{n+1} + n_2} \\ & = \frac{q_2}{q_2 - \eta + \eta_2 z_2 \varepsilon(-q_2)} \left( \frac{q_2 - \eta}{q_2} \Phi_2(q, q_1 + q_2; z, z_1) \right. \\ & \quad \left. - \frac{q_0(z_2) - \eta}{q_0(z_2)} \Phi_2(q, q_1 + q_0(z_2); z, z_1) \right) \\ & \quad (|z|, |z_1|, |z_2| < 1) \end{aligned} \right.$$

où l'on introduira les expressions (6.8) et (1.44), et le même procédé de construction s'applique aux f. g. suivantes  $\Phi_4, \Phi_5, \dots$ .

En substituant dans (6.8) le deuxième membre de (1.44), il vient

$$(6.10) \quad \Phi_2(q, q_1; z, z_1) = \frac{1}{q_0(z)} \frac{\eta}{q_1 - \eta + \eta_1 z_1 \varepsilon(-q_1)} \times \left[ \frac{(q_1 - \eta)(q + q_1 - q_0(z))}{q + q_1 - \eta + \eta_1 z_1 \varepsilon(-q - q_1)} - \frac{q_0(z_1) - \eta}{q_0(z_1)} \frac{q_1(q + q_0(z_1) - q_0(z))}{q + q_0(z_1) - \eta + \eta_1 z_1 \varepsilon(-q - q_0(z_1))} \right]$$

pour la f. g. des e. m.  $E e^{-\eta\tau_n - \eta_1\tau_{n+1}}$ .

En vue d'obtenir les limites de ces e. m. pour  $n \rightarrow \infty$ , effectuons dans (6.8) l'opération  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|<1} \dots z^{-n-1} dz$ , d'où

$$(6.11) \quad \sum_{n_1=0}^{\infty} z_1^{n_1} E e^{-q\tau_n - q_1\tau_{n+n_1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|<1} \Phi_2(q, q_1; z, z_1) z^{-n-1} dz.$$

Supposons pour le moment que

$$(6.12) \quad \eta < 1,$$

de sorte que (4.51) est valable. En utilisant cette équation, nous voyons que  $\Phi_2$  [équ. (6.10)], considérée en tant que fonction de  $z$ , est holomorphe sur le cercle  $|z| = 1$ , au pôle du premier ordre  $z = 1$  près. Donc la limite, pour  $n \rightarrow \infty$ , de la dernière intégrale est égale à  $-(\text{Res } \Phi_2)_{z=1}$ .

En calculant ce résidu à l'aide de (4.51), et en écrivant ensuite respectivement  $z$  et  $n$  au lieu de  $z_1$  et  $n_1$ , nous tirons ainsi de (6.11) pour  $n \rightarrow \infty$  la formule

$$(6.13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} z^n E e^{-q\tau - q_1\tau^{(n)}} \\ &= \frac{1-\eta}{q_1 - \eta + \eta z \varepsilon(-q_1)} \\ & \times \left[ \frac{(q_1 - \eta)(q + q_1)}{q + q_1 - \eta + \eta \varepsilon(-q - q_1)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{q_0(z) - \eta}{q_0(z)} \frac{q_1(q + q_0(z))}{q + q_0(z) - \eta + \eta \varepsilon(-q - q_0(z))} \right] \\ & [R(q), R(q_1) \geq 0, |z| < 1]; \end{aligned} \right.$$

ici  $\tau$  et  $\tau^{(n)}$  désignent respectivement le d. a. d'un visiteur quelconque, et celui du  $n^{\text{ième}}$  visiteur subséquent *en état d'équilibre statistique*.

En effectuant dans (6.13) l'opération  $\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_C \int_C e^{qt + q_1 t_1} \dots \frac{dq dq_1}{qq_1}$ , nous obtenons pour la f. g. des probabilités

$$(6.14) \quad \rho^{(n)}(t, t_1) = \text{Prob}(\tau < t, \tau^{(n)} < t_1)$$

la formule

$$(6.15) \quad L(t, t_1; z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \rho^{(n)}(t, t_1) \\ = \frac{1-\eta}{(2\pi i)^2} \int_C \int_C e^{qt + q_1 t_1} \frac{1}{q_1 - \eta + \eta z \varepsilon(-q_1)} \\ \times \left[ \frac{(q_1 - \eta)(q + q_1)}{q + q_1 - \eta + \eta \varepsilon(-q - q_1)} \right. \\ \left. - \frac{q_0(z) - \eta}{q_0(z)} \frac{q_1(q + q_0(z))}{q + q_0(z) - \eta + \eta \varepsilon(-q - q_0(z))} \right] \frac{dq dq_1}{qq_1}.$$

Entre autres, cette formule nous permet d'étudier les f. r.

$$(6.16) \quad \rho^{(n)}(t, t_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z| < 1} L(t, t_1; z) z^{-n-1} dz$$

pour les grandes valeurs de  $n$ . En transformant cette intégrale de la même manière que (1.45), nous trouvons en première approximation

$$(6.17) \quad \rho^{(n)}(t, t_1) = \rho(t)\rho(t_1) + O_{t, t_1} \left( z^{*-n} n^{-\frac{3}{2}} \right) \quad (\eta < 1),$$

la f. r.  $\rho(t)$  et la constante  $z^* (> 1)$  étant respectivement données par (1.36) et (1.59). Donc pour  $t$  et  $t_1$  donnés, l'écart entre  $\rho^{(n)}(t, t_1)$  et la f. r. d'état d'indépendance stochastique  $\rho(t)\rho(t_1)$  tend vers zéro avec  $n^{-1}$  comme  $z^{*-n} n^{-\frac{3}{2}}$ .

*Exemples.* — 1° Pour  $f_1(t) = 1 - e^{-t}$ ,  $\varepsilon(z) = \frac{1}{z-1}$  [équ. (2.11)] le deuxième membre de (6.13) se transforme en

$$(6.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma_1(1-\eta)}{\beta_2} \frac{1+q}{q-\beta_1} \frac{1+q_1}{q_1-\beta_1} \frac{q+q_1-\beta_1}{q+q_1+1-\eta} \\ \left( \begin{array}{l} \beta_1 = \frac{\gamma_1-1}{2} - \sqrt{\frac{(1+\eta)^2}{4} - \eta z}, \\ \beta_2 = \frac{\gamma_1-1}{2} + \sqrt{\frac{(1+\eta)^2}{4} - \eta z} = \eta - \frac{\eta z}{1+\eta} + \dots \end{array} \right), \end{array} \right.$$

donc en une fonction symétrique de  $q$  et  $q_1$ ; par conséquent,  $L(t, t_1; z)$  [équ. (6.15)] est symétrique en  $t$  et  $t_1$ . Réciproquement, on peut démontrer que  $f_1(t) = 1 - e^{-t}$  est la seule f. r. qui rende la fonction  $L(t, t_1; z)$  symétrique.

En substituant (6.18) dans le deuxième membre de (6.15) et en appliquant deux fois le théorème de Cauchy, nous obtenons

$$(6.19) \quad L(t, t_1; z) = \begin{cases} \frac{1}{1-z} \left( 1 - \eta e^{-1-\gamma_1 t_1} - \frac{\eta(1-\eta)z}{\beta_2 - \beta_1} e^{\beta_1 t + \beta_2 t_1} \right. \\ \quad \left. + \frac{(1-\eta)(\beta_1+1)}{\beta_2 - \beta_1} e^{\beta_1(t+t_1)} \right) & (t \geq t_1), \\ L(t_1, t; z) & (t \leq t_1). \end{cases}$$

En développant le deuxième membre en série de Taylor en  $z$ , on

trouve en particulier

$$(6.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho^{(1)}(t, t_1) = 1 - \eta e^{-(1-\eta)t_1} - \eta \frac{1-\eta}{1+\eta} e^{-(t-\eta t_1)} \quad (t \geq t_1), \\ \rho^{(2)}(t, t_1) = 1 - \eta e^{-(1-\eta)t_1} - \eta \frac{1-\eta}{1+\eta} e^{-(t-\eta t_1)} \\ \quad \times \left( 1 + \frac{2\eta}{(1+\eta)^2} + \frac{\eta(t-t_1)}{1+\eta} \right) + \eta^2 \frac{1-\eta}{(1+\eta)^2} e^{-t-t_1} \quad (t \geq t_1). \end{array} \right.$$

2° Dans l'hypothèse où  $T \equiv 1$ , donc  $\varepsilon(z) = e \cdot [\text{équ. 2.32}]$ , on déduit de (6.15) pour  $n = 1$  :

$$(6.21) \quad \rho^{(1)}(t, t_1) = \begin{cases} \rho(t) & (0 \leq t \leq t_1 - 1), \\ \rho(t_1) - e^{-\eta(t+t_1-1)}(\rho(t+1) - \rho(t)) & (t \geq t_1 - 1; t > 0, t_1 > 0), \end{cases}$$

la f. r.  $\rho(t)$  étant donnée par (2.36).

Passant à des problèmes qui, au lieu de fonctions de répartition à une ou à plusieurs variables, concernent le calcul d'ensembles dénombrables de probabilités, nous désignons par  $\mathcal{E}_{ni}(n, i = 0, 1, \dots)$  l'événement suivant :

$(\mathcal{E}_{ni})$  *A l'instant d'arrivée  $X_{n+i}$  du  $(n+i)^{\text{ième}}$  visiteur, exactement  $i$  personnes se trouvent devant le guichet, soit en attente, soit en cours d'opération.*

Pour que  $\mathcal{E}_{ni}$  ait lieu, il est évidemment nécessaire et suffisant que l'instant  $X_{n+i}$  soit situé entre les instants de départ des visiteurs  $(n-1)^{\text{ième}}$  et  $n^{\text{ième}}$ , donc (en ne tenant pas compte d'événements de probabilité zéro) que les inégalités

$$(6.22) \quad \begin{cases} X_{n-1} + \tau_{n-1} + T_{n-1} < X_{n+i} < X_n + \tau_n + T_n \\ (n = 0, 1, \dots; X_{-1} = \tau_{-1} = T_{-1} = 0) \end{cases}$$

soient vérifiées.

On voit immédiatement qu'à l'aide de la fonction  $s(x)$  [équ. (4.13)] l'indicateur  $\chi_{ni}$  de l'événement  $\mathcal{E}_{ni}$  peut être représenté comme suit :

$$(6.23) \quad \chi_{ni} = s(X_{n+i} - X_{n-1} - \tau_{n-1} - T_{n-1})s(X_n + \tau_n + T_n - X_{n+i}) \\ = s(X_{n+i} - X_{n-1} - \tau_{n-1} - T_{n-1}) - s(X_{n+i} - X_n - \tau_n - T_n),$$

car cette fonction est égale à 1 ou à 0, selon que  $X_{n+i}$  satisfait, ou non, aux inégalités (6.22).

Comme la probabilité  $p_{ni}$  de  $\mathcal{E}_{ni}$  est égale à l'e. m. de  $\chi_{ni}$ , il vient, en admettant les hypothèses du chapitre IV [voir (4.4)],

$$(6.24) \quad p_{ni} = E\chi_{ni} = \int_0^{\infty} df_1(t_0) \int_0^{\infty} df_0(y_0) \int_0^{\infty} df_3(\theta_0) \dots \\ \times \int_0^{\infty} df_1(t_n) \int_0^{\infty} df_2(y_n) \int_0^{\infty} df_2(y_{n+1}) \dots \\ \times \int_0^{\infty} df_0(y_{n+i-1}) \\ \times (s(x_{n+i} - x_{n-1} - \tau_{n-1} - t_{n+1}) - s(x_{n+i} - x_n - \tau_n - t_n)).$$

Représentons d'abord  $s(x_{n+i} - x_n - \tau_n - t_n)$  par l'intégrale de Dirichlet (1.14); en remplaçant en outre  $x_{n+i} - x_n$ , en vertu de (1.4), par  $\sum_{k=n}^{n+i-1} y_k$ , il vient

$$(6.25) \quad s(x_{n+i} - x_n - \tau_n - t_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp(q(y_n + \dots + y_{n+i-1} - \tau_n - t_n)) \frac{dq}{q}.$$

Plaçons la droite C de telle manière que  $R(q) < \eta$ ; alors l'opération

$$\int_0^{\infty} \dots df_0(y_{n+i-1}) = \int_0^{\infty} \dots \eta e^{-\eta y_{n+i-1}} dy_{n+i-1}$$

indiquée dans (6.24) peut être effectuée sous le signe  $\int_C$ , ce qui

transforme le facteur  $e^{\eta y_{n+i-1}}$  de  $\exp(\dots)$  en  $\frac{\eta}{\eta - q}$ . Ensuite l'opération

$$\int_0^{\infty} df_1(t_n) \int_0^{\infty} df_2(y_n) \dots \int_0^{\infty} \dots df_0(y_{n+i-2})$$

transforme le deuxième membre de (6.25), à l'aide de la notation (1.26), en

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-q\tau_n} \varepsilon_1(-q) \left(\frac{\eta}{\eta - q}\right)^i \frac{dq}{q}.$$

Effectuant enfin les  $3n$  premières intégrations indiquées dans (6.24) qui transforment  $e^{-q\tau_n}$  en  $E^{-q\tau_n}$ , nous obtenons

$$(6.26) \quad \left\{ \begin{aligned} E s(X_{n+i} - \lambda_n - \tau_n - T_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C E e^{-q\tau_n} \varepsilon_1(-q) \left(\frac{\eta}{\eta - q}\right)^i \frac{dq}{q} \\ &(n \geq 0, i \geq 1), \end{aligned} \right.$$

et de là, en remplaçant  $n$  et  $i$  respectivement par  $n - 1$  et  $i + 1$ ,

$$(6.27) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{E} s(X_{n+i} - X_{n-1} - \tau_{n-1} - \mathbf{T}_{n-1}) \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} e^{-q\tau_{n-1}} \varepsilon_1(-q) \left( \frac{\eta}{\eta - q} \right)^{i+1} \frac{dq}{q} \quad (n \geq 1, i \geq 0). \end{aligned} \right.$$

Le premier membre de (6.26) est égal à 0 pour  $i = 0$ , et celui de (6.27) est égal à 1 pour  $n = 0$ .

En portant les dernières expressions dans le dernier membre de

$$(6.28) \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{ni} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{E}_{/n_i} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{E}(s(X_{n+i} - X_{n-1} - \tau_{n-1} - \mathbf{T}_{n-1}) - s(X_{n+i} - X_n - \tau_n - \mathbf{T}_n)),$$

nous trouvons, en utilisant (4.39),

$$(6.29) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{ni} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \Phi(q, z) \varepsilon_1(-q) \left[ z \left( \frac{\eta}{\eta - q} \right)^{i+1} \right. \\ & \quad \left. - \left( \frac{\eta}{\eta - q} \right)^i + \delta_{i0} \right] \frac{dq}{q} + 1 \\ & \quad (\delta_{00} = 1, \delta_{i0} = 0 \text{ pour } i > 0, \mathbf{R}(q) < \eta, |z| < 1). \end{aligned} \right.$$

Ajoutons toutes les équations (6.29), multipliées respectivement par  $x^i$ ,  $x$  désignant, de même que  $z$ , une variable complexe de module  $< 1$ . Sur la droite  $\mathcal{C}_q$  qui sera supposée très voisine de l'axe imaginaire, les inégalités  $\left| \frac{x\eta}{\eta - q} \right| < 1$  et  $\mathbf{R}(\eta - \eta x - q) > 0$  sont vérifiées; il vient donc en vertu de la première de ces inégalités

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x\eta)^i}{(\eta - q)^{i+1}} = \frac{1}{\eta - \eta x - q}, \quad z \sum_{i=0}^{\infty} x^i \left( \frac{\eta}{\eta - q} \right)^{i+1} - \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{x\eta}{\eta - q} \right)^i = \frac{\eta(z - x)}{\eta - \eta x - q}$$

et, de là,

$$(6.30) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n,i=0}^{\infty} p_{ni} x^i z^n = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \Phi(q, z) \varepsilon_1(-q) \frac{\eta(z-x)}{\eta - \eta x - q} \frac{dq}{q} \\ & \quad [\mathbf{R}(\eta - \eta x - q) > 0]. \end{aligned} \right.$$

Comme  $\Phi(q, z)$  et  $\varepsilon_1(-q)$  sont holomorphes et bornées pour  $\mathbf{R}(q) \geq 0$ , la fonction à intégrer se comporte, pour  $|q| \rightarrow \infty$  et  $\mathbf{R}(q) \geq 0$ , comme  $\frac{1}{q^2}$ , de sorte que la dernière intégrale est égale au résidu au point  $q = \eta - \eta x$ . Ainsi nous obtenons pour la f. g. des

$p_{ni} = \text{Prob}(\mathcal{E}_{ni})$  la formule

$$(6.31) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{n,i=0}^{\infty} z^n x^i p_{ni} &= \frac{1}{1-x} + \frac{z-x}{1-x} \Phi(\eta(1-x), z) \varepsilon_1(\eta x - \eta) \\ & \quad (|z|, |x| < 1). \end{aligned} \right.$$

De là on conclut, en utilisant les propriétés de  $\Phi(q, z)$  établies au chapitre IV, que pour  $\eta < 1$  et  $n \rightarrow \infty$ , la somme  $\sum_{i=0}^{\infty} x^i p_{ni}$  tend vers l'opposé du résidu, en  $z = 1$ , du deuxième membre, donc vers  $E e^{-\eta(1-x)\tau} \varepsilon_1(\eta x - \eta)$ .

En posant

$$(6.32) \quad P_i = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ni} \quad (i = 0, 1, \dots),$$

nous obtenons ainsi, au moyen de (4.6) et (4.13), pour la f. g. des probabilités  $P_i$  pour que, en état d'équilibre statistique, à l'instant d'arrivée d'un visiteur quelconque, exactement  $i$  personnes se trouvent au guichet,

$$(6.33) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} P_i x^i &= \frac{1-\eta}{1-\eta \varepsilon_3'(0)} \frac{\varepsilon_3(\eta x - \eta) - x}{\varepsilon_1(\eta x - \eta) \varepsilon_3(\eta x - \eta) - x} \varepsilon_1(\eta x - \eta) \\ & \quad (\eta < 1, |x| \leq 1). \end{aligned} \right.$$

Dans les hypothèses des chapitres I et II, c'est-à-dire pour  $\Theta \equiv 0$ , donc  $\varepsilon_3(z) = 1$ , (6.33) se transforme en la formule, due à M. A. Khintchine [8].

$$(6.34) \quad \sum_{i=0}^{\infty} P_i x^i = (1-\eta) \frac{(1-x) \varepsilon_1(\eta x - \eta)}{\varepsilon_1(\eta x - \eta) - x} \quad (\eta < 1, |x| \leq 1).$$

Dans cet ordre d'idées se pose aussi le problème de déterminer les probabilités  $p_i(t')$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) des événements  $\mathcal{E}_i(t')$  définis comme suit :

$(\mathcal{E}_i(t'))$  *A l'instant donné  $t' > X_0 = 0$ , exactement  $i$  personnes se trouvent ou en attente ou en cours d'opération.*

Décomposons  $\mathcal{E}_i(t')$  en la somme des événements, deux à deux incompatibles,  $\mathcal{E}_{ni}(t')$  qui sont définis comme suit :

$(\mathcal{E}_{n0}(t'))$  *A l'instant  $t'$ , le  $(n-1)^{\text{ième}}$  visiteur ( $n = 1, 2, \dots$ ) étant déjà parti, le guichet est inoccupé.*

( $\mathcal{E}_{ni}(t')$ ) A l'instant  $t'$ , seuls les visiteurs  $n^{\text{ième}}$  à  $(n+i-1)^{\text{ième}}$  sont présents au guichet ( $n=0, 1, \dots; i=1, 2, \dots$ ).

Il vient alors  $\mathcal{E}_i(t') = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_{ni}(t')$ ,  $\mathcal{E}_{ni}(t')$  ayant lieu lorsque les inégalités

$$(6.35) \quad X_{n-1} + \tau_{n-1} + T_{n-1} < t' < \lambda_n + \tau_n + T_n, \quad X_{n+i-1} < t' < \lambda_{n+i}$$

sont vérifiées. Par conséquent, l'indicateur de  $\mathcal{E}_{ni}(t')$  est

$$(6.36) \quad \begin{cases} \chi_{ni}(t') = (s(t' - \lambda_{n-1} - \tau_{n-1} - T_{n-1}) - s(t' - \lambda_n - \tau_n - T_n)) \\ \quad \times (s(t' - \lambda_{n+i-1}) - s(t' - \lambda_{n+i})) \end{cases}$$

et les probabilités de  $\mathcal{E}_{ni}(t')$  et  $\mathcal{E}_i(t')$  sont respectivement

$$E_{\gamma_{ni}}(t') \quad \text{et} \quad p_i(t') = \sum_{n=0}^{\infty} E_{\gamma_{ni}}(t').$$

En vue de calculer les e. m.  $E_{\gamma_{ni}}$ , on représentera les quatre fonctions  $s$  qui figurent dans (6.36), par des intégrales de Dirichlet [équ. (1.14)] et procédera comme lors du calcul de  $p_{ni}$  [équ. 6.24]. Pour la f. g.

$$(6.37) \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i p_i(t') = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \sum_{n=0}^{\infty} E_{\gamma_{ni}}(t')$$

on obtient ainsi la formule

$$(6.38) \quad \begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} x^i p_i(t') &= x e^{\eta'(t'-1)} \\ &+ (1-x) \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{r t'} \Phi_{\eta+r} \left( \eta + r - \eta x, \frac{\eta}{\eta+r} \right) \\ &\times \varepsilon(-\eta - r + \eta x) \frac{dr}{\eta + r - \eta x} \quad (t' > 0, |x| \leq 1), \end{aligned}$$

la fonction  $\Phi_{\eta+r}$  étant pour  $\Theta \equiv 0$  donnée par (1.74) et (1.75) et résultant, pour  $\Theta \not\equiv 0$ , des formules (4.10) et (4.9) relatives à  $\Phi_{\eta}(q, z)$  (<sup>a</sup>).

(<sup>a</sup>) Nous avons posé  $X_0 = 0$ , de sorte que  $t'$  est en fait le temps passé depuis l'i. a. initial  $X_0$ . Par contre, si nous considérons  $X_0 \geq 0$  comme v. a. i. de loi (1.9), il faut supprimer le facteur  $x$  du premier terme du deuxième membre de (6.38), et ajouter à la fonction à intégrer le facteur  $\frac{\eta}{\eta+r}$ .

En traitant cette intégrale de la même façon que la fonction  $E(e^{-q\tau} | X = t')$  [équ. (1.81)], on trouve pour les  $p_i(t')$  des expressions asymptotiques valables pour  $t' \rightarrow \infty$ . Pour  $\eta < 1$ , il vient ainsi en première approximation

$$(6.39) \quad p_i(t') = P_i + O\left(e^{r^*t'} t'^{-\frac{7}{5}}\right) \quad (r^* < 0; i = 0, 1, \dots),$$

les probabilités  $P_i$ , indépendantes de  $t'$ , étant données par leur f. g. (6.33); la constante  $r^*$  a été définie au chapitre I [voir (1.75) et (1.83)].

Le fait que les événements  $\mathcal{E}_{n_i}(n, i = 0, 1, \dots)$  sont stochastiquement liés deux à deux, donne lieu à différents problèmes qui peuvent être résolus au moyen de la méthode utilisée au début de ce chapitre et dont le plus simple concerne le calcul des probabilités pour que les événements  $\mathcal{E}_{n_i}$  et  $\mathcal{E}_{n_{i'}}$  aient tous deux lieu.

En combinant les deux catégories de problèmes traités dans ce chapitre, on peut aussi étudier les probabilités pour que des événements tels que  $\mathcal{E}_{n_i}$  et  $\tau_{n'} < t$  aient tous deux lieu.

En revenant aux hypothèses des chapitres I et II, donc en négligeant désormais les  $\Theta$ , nous donnons ci-après sans démonstration la solution de ce problème pour  $n' \geq n + i$ , à savoir la f. g. des probabilités [voir (6.23)]

$$(6.40) \quad p_{n, i_1, i_2}(t) = \text{Prob}(\mathcal{E}_{n, i_1}; \tau_{n+i_1+i_2} < t) \\ = E[s(t - \tau_{n+i_1+i_2})(s(X_{n+i_1} - X_{n-1} - \tau_{n-1} - T_{n-1}) \\ - s(X_{n+i_1} - X_n - \tau_n - T_n))] \quad (n, i_1, i_2 = 0, 1, \dots; t > 0).$$

On obtient, en procédant comme lors du calcul de (6.37),

$$(6.41) \quad \sum_{n, i_1, i_2=0}^{\infty} z^n z_1^{i_1} z_2^{i_2} p_{n, i_1, i_2}(t) \\ = \frac{\eta(z - z_1)}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \int_{-i\infty+0}^{\infty+0} \frac{e^{qt}}{q - \eta + \eta z_2 \varepsilon(-q)} \\ \times \left[ \frac{q - \eta}{q - \eta + r + \eta z_1 \varepsilon(-q)} (F(r, \tilde{q}_0, z) - F(r, q, z)) \right. \\ \left. - \frac{q_0(z_2) - \eta}{q_0(z_2) - \eta + r + \eta z_1 \varepsilon(-q_0)} (F(r, \tilde{q}_0, z) - F(r, q_0(z_2), z)) \right] \\ \times \frac{dq dr}{r} + \frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} e^{qt} [z_1 \Phi(q, z_1) - z_2 \Phi(q, z_2)] \frac{dq}{q}.$$

Nous avons posé ici

$$(6.42) \quad F(r, x, z) = \frac{1}{x} \Phi(r+x, z) \varepsilon(-r-x) \quad [x = q, \tilde{q}_0, q_0(z_2)],$$

$\tilde{q}_0 = q_0(\eta - r, \eta z_1)$  [voir (3.32)] désignant la solution unique de l'équation

$$(6.43) \quad \eta - r - q - \eta z_1 \varepsilon(-q) = 0$$

telle que  $R(q) > 0$  pour  $\eta - R(r) > \eta |z_1|$ , et  $q_0(z_2)$  étant la solution de (4.43) introduite au chapitre I.

De (6.41) on tire, pour  $\eta < 1$ , la f. g. des probabilités d'équilibre statistique

$$(6.44) \quad P_{i_1, i_2}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{n, i_1, i_2}(t)$$

en remplaçant  $z - z_1$  et  $\Phi(r+x, z)$  [équ. (6.42)] respectivement par  $1 - z_1$  et par  $E e^{-(r+x)\tau} = \frac{(1-\eta)(r+x)}{r+x-\eta+\eta\varepsilon(-r-x)}$ , et en supprimant le terme  $\frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-l\infty+0}^{l\infty+0} e^{q\tau} \dots dq$ .

*Exemple.* — Pour  $n = \infty$ ,  $i_1 = 1$ ,  $i_2 = 0$  on déduit ainsi de (6.41) la formule

$$(6.45) \quad P_{10}(t) = \frac{\eta(1-\eta)}{\varepsilon(-\eta)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-l\infty+0}^{l\infty+0} e^{qt} \frac{\varepsilon(-q) - \varepsilon(-\eta)}{q(\eta - q)} dq$$

et, de là, il vient pour la probabilité de trouver, en état d'équilibre statistique, une seule personne au guichet,

$$(6.46) \quad P_{10}(\infty) = P_1 = (1-\eta) \frac{1 - \varepsilon(-\eta)}{\varepsilon(-\eta)} \quad (\eta < 1).$$

Donc la f. r. *conditionnelle* du d. a. d'un visiteur qui trouve le guichet occupé, aucune autre personne n'étant en attente, est égale à

$$(6.47) \quad \frac{P_{10}(t)}{P_{10}(\infty)} = \frac{\eta}{1 - \varepsilon(-\eta)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-l\infty+0}^{l\infty+0} e^{qt} \frac{\varepsilon(-q) - \varepsilon(-\eta)}{q(\eta - q)} dq \\ = \left[ 1 - \int_0^\infty e^{-\eta x} df_1(x) \right]^{-1} \\ \times \left[ f_1(t-0) + \int_{t-0}^\infty e^{-\eta(x-t)} df_1(x) - \int_0^\infty e^{-\eta x} df_1(x) \right].$$

CHAPITRE VII.

RÉPARTITION NON POISSONNIENNE DES INSTANTS D'ARRIVÉE (« GENERAL INPUT »).

Sauf au chapitre III, consacré à l'hypothèse de répartition bernoullienne des instants d'arrivée, nous avons jusqu'ici supposé cette répartition poissonnienne, de sorte que les intervalles de temps  $Y_n = X_{n+1} - X_n$  entre deux arrivées consécutives obéissaient à la loi (1.10).

D'une manière plus générale, nous allons désormais considérer les  $Y_n$  comme des v. a. i. ayant toutes la même f. r.  $f_2(t)$ , donc

$$(7.1) \quad \text{Prob}(Y_n < t) = f_2(t) \quad [t \geq 0; f_2(-0) = f_2(+0) = 0; n = 0, 1, \dots].$$

En outre, nous supposons la f. r.  $f_2(t)$  telle que sa f. c.

$$(7.2) \quad \varepsilon_2(z) = \int_0^\infty e^{-zt} df_2(t)$$

converge pour  $z < \delta$ , où  $\delta$  désigne une constante positive arbitrairement petite.

Pour la répartition des d. o.  $T_n$  nous conservons l'hypothèse (1.6), en désignant la f. c. de  $f_1(t)$  [équ. (1.26)] par  $\varepsilon_1(z)$ .

La différence  $T_n - Y_n$  qui figure dans la formule de récurrence (1.5) sera désignée maintenant par

$$(7.3) \quad Z_n = T_n - Y_n \quad (n = 0, 1, \dots);$$

en raison de nos hypothèses,  $Z_0, Z_1, \dots, Z_n, \dots$  sont des v. a. i. Pour la f. r. commune des  $Z_n$  nous obtenons en vertu de (1.6) et (7.1)

$$(7.4) \quad F(t) = \text{Prob}(Z < t) = \int_0^\infty f_1(y) df_2(y - t) \quad (-\infty < t < \infty),$$

et pour leur f. c. nous trouvons, en utilisant (1.26) et (7.2),

$$(7.5) \quad \varphi(z) = \int_{-\infty}^\infty e^{zt} dF(t) = E e^{zZ} = E e^{zT} E e^{-zY} = \varepsilon_1(z) \varepsilon_2(-z).$$

En raison de nos hypothèses sur  $\varepsilon_1(z)$  et  $\varepsilon_2(z)$ , la f. c.  $\varphi(z)$  est

holomorphe dans une bande

$$(7.6) \quad -\delta < \operatorname{R}(z) < \delta$$

autour de l'axe imaginaire du plan  $z$ .

Au moyen de (7.3), l'équation (1.5) prend la forme

$$(7.7) \quad \tau_{n+1} = (\tau_n + Z_n)^+ = \max(\tau_n + Z_n, 0) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

et de là on tire la formule explicite

$$(7.8) \quad \tau_{n+1} = \max \left( \tau_0 + \sum_{l=0}^n Z_l, \sum_{l=1}^n Z_l, \sum_{l=2}^{n'} Z_l, \dots, Z_n, 0 \right)$$

qui peut être démontrée par induction complète. Cette formule ne sera pas utilisée dans la suite de ce travail; mentionnons toutefois que dans [20] nous avons indiqué une méthode permettant de la prendre pour point de départ de la théorie des attentes.

En vue de calculer dans les hypothèses présentes, le d. a. initial  $\tau_0$  étant considéré comme donné, l'e. m.

$$(7.9) \quad \mathbf{E}(e^{-q\tau_{n+1}} | \tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(z_0) \dots \int_{-\infty}^{\infty} dF(z_n) e^{-q\tau_{n+1}},$$

nous utiliserons une représentation de la fonction  $e^{-q\tau^+}$  [voir (1.2)], pour  $\operatorname{R}(q) > 0$ , sous forme d'une intégrale de Fourier.

Au moyen du théorème de Fourier, on établit la formule

$$(7.10) \quad e^{-q\tau^+} = \frac{q}{2\pi i} \int_C e^{-\zeta\tau} \frac{d\zeta}{\zeta(q-\zeta)} \quad [\operatorname{R}(\zeta) > 0, \operatorname{R}(q-\zeta) > 0]$$

dont la vérification est immédiate. En posant ici  $x = \tau_{n+1} + Z_n$  [équ. (7.7)], et effectuant les opérations indiquées dans (7.9), nous obtenons successivement

$$(7.11) \quad e^{-q\tau_{n+1}} = \frac{q}{2\pi i} \int_C e^{-\zeta(\tau_n + Z_n)} \frac{d\zeta}{\zeta(q-\zeta)},$$

$$(7.12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q\tau_{n+1}} dF(z_n) = \frac{q}{2\pi i} \int_C e^{-\zeta\tau_n} \varphi(-\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta(q-\zeta)},$$

$$(7.13) \quad \begin{cases} \mathbf{E} e^{-q\tau_{n+1}} = \frac{q}{2\pi i} \int_C \mathbf{E} e^{-\zeta\tau_n} \varphi(-\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta(q-\zeta)} \\ [0 < \operatorname{R}(\zeta) < \delta, \operatorname{R}(q-\zeta) > 0; n = 0, 1, \dots]. \end{cases}$$

De (7.13) nous tirons pour la f. g. des  $E e^{-q\tau_n}$  [équ. (4.3g)] l'équation intégrale

$$(7.14) \quad \Phi(q, z) = \frac{z}{2\pi i} \int_C \Phi(\zeta, z) \bar{\varphi}(-\zeta) \frac{q d\zeta}{\zeta(q-\zeta)} + e^{-q\tau_0}.$$

Cette équation intégrale qui est étudiée dans la Note placée à la fin de ce travail, a pour solution

$$(7.15) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(q, z; \tau_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\xi} \left( \frac{1}{q-\xi} + \frac{1}{\xi} \right) e^{-\xi\tau_0} \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\zeta} \left( \frac{1}{q-\zeta} + \frac{1}{\zeta-\xi} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \log(1-z\varphi(-\zeta)) d\zeta \right] d\xi \\ &[R(q-\zeta), R(\zeta-\xi), R(\xi) > 0]. \end{aligned} \right.$$

Pour  $\tau_0 = 0$ ,  $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\xi}$  est égale au résidu, au point  $\xi = 0$ , de la fonction à intégrer, donc

$$(7.16) \quad \Phi(q, z; 0) = \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-l\infty+0}^{l\infty+0} \frac{q}{\zeta(q-\zeta)} \log(1-z\varphi(-\zeta)) d\zeta \right] \\ = \sum_{n=0}^{\infty} z^n E(e^{-q\tau_n} | 0) \quad [R(q-\zeta) > 0, |z| < 1, \tau_0 = 0]$$

et de là nous tirons la relation

$$(7.17) \quad \Phi(q, z; \tau_0) = \Phi(q, z; 0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-l\infty-0}^{l\infty-0} \frac{q}{\xi(q-\xi)} e^{-\xi\tau_0} \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\zeta} \frac{q-\xi}{(q-\zeta)(\zeta-\xi)} \log(1-z\varphi(-\zeta)) d\zeta \right] d\xi.$$

La f. g.  $\Phi$  étant ainsi construite, passons au calcul des e. m.

$$(7.18) \quad E e^{-q\tau_n - q_1\tau_{n+1}},$$

desquelles les f. r.  $\rho_{n, n_1}(t, t_1)$ , définies par (6.1), se déduisent au moyen de l'équation (6.2). En nous rappelant que le symbole  $E_n^{n+n_1-1}$ , dans (6.6), se rapporte aux v. a. i.  $Z_n, \dots, Z_{n+n_1-1}$ , nous obtenons la f. g. des e. m. conditionnelles  $E(e^{-q_1\tau_{n+n_1}} | \tau_n) = E_n^{n+n_1-1} e^{-q_1\tau_{n+n_1}}$  en remplaçant, dans (7.15),  $q$  et  $\tau_0$  respectivement par  $q_1$  et  $\tau_n$ , donc

$$(7.19) \quad \sum_{n_1=0}^{\infty} z_1^{n_1} E_n^{n+n_1-1} e^{-q_1\tau_{n+n_1}} = \Phi(q_1, z_1; \tau_n).$$

Multiplions cette équation où  $\Phi$  sera remplacé par le deuxième membre de (7.15), par  $z^n e^{-q\tau_n}$ , effectuons l'opération  $E_0^{n-1}$  relative aux v. a. i.  $Z_0, \dots, Z_{n-1}$ , et sommons depuis  $n = 0$  jusqu'à  $n = \infty$ ; il vient alors, en vertu de (6.6) et (4.39),

$$(7.20) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_0(q, q_1; z, z_1) &= \sum_{n, n_1=0}^{\infty} z^n z_1^{n_1} E e^{-q\tau_n - q_1\tau_{n+n_1}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{q_1}{\xi(q_1 - \xi)} \Phi(q + \xi, z; \tau_0) \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{q_1 - \xi}{(q_1 - \zeta)(\zeta - \xi)} \right. \\ &\quad \left. \times \log(1 - z_1 \varphi(-\zeta)) d\zeta \right] d\xi \\ &[R(q_1 - \zeta) > 0, R(\zeta - \xi) > 0; |z|, |z_1| < 1]. \end{aligned} \right.$$

En utilisant à nouveau (7.15), nous obtenons ainsi une expression explicite pour la f. g.  $\Phi_2$  des e. m. (7.18). On voit aussi que la méthode employée pour trouver  $\Phi_2$  permet de construire de même les f. g.  $\Phi_3$  [équ. (6.9)], etc.

Au moyen des équations (1.45), (7.16) et (7.17) nous pourrions évaluer  $E e^{-q\tau_n}$  pour les grandes valeurs de  $n$ . Développons d'abord en série de Taylor la fonction

$$(7.21) \quad \varphi(-\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta t} dF(t) = 1 - \varphi'(0)\zeta + \dots \quad [\varphi'(0) = E(T) - E(Y)]$$

qui, en vertu de (7.6), est holomorphe à l'origine. On en conclut que pour  $\delta' > 0$  assez petit, l'inégalité

$$(7.22) \quad |\varphi(-\zeta)| \leq \varphi(-R(\zeta)) < 1$$

sera respectivement vérifiée pour  $\varphi'(0) < 0$  sur la droite  $R(\zeta) = -\delta'$ , et pour  $\varphi'(0) > 0$  sur la droite  $R(\zeta) = \delta'$ . En désignant par  $z_0(\delta')$  une constante telle que  $\frac{1}{\varphi(\pm\delta')} > z_0 > 1$ , nous reconnaissons maintenant que l'inégalité

$$(7.23) \quad |\log(1 - z\varphi(-\zeta))| \leq \log(1 - z_0\varphi(\pm\delta')^{-1}) + \frac{\pi}{2} < \infty \quad (|z| \leq z_0).$$

sera vérifiée respectivement pour  $\varphi'(0) < 0$  et  $R(\zeta) = -\delta'$  et pour  $\varphi'(0) > 0$  et  $R(\zeta) = \delta'$ . Pour  $\varphi'(0) > 0$ , nous conservons la

forme de l'équation (7.16); mais pour  $\varphi'(0) < 0$ , nous amenons le chemin d'intégration en une droite située à gauche de l'axe imaginaire, d'où, compte tenu du résidu en  $\zeta = 0$ ,

$$(7.24) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(q, z; 0) &= \frac{1}{1-z} \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \frac{q}{\zeta(q-\zeta)} \log(1-z\varphi(-\zeta)) d\zeta \right] \\ &[\varphi'(0) < 0]. \end{aligned} \right.$$

En vertu de l'inégalité (7.23), le deuxième membre de (7.16), considéré en tant que fonction de  $z$ , s'avère pour  $\varphi'(0) > 0$  holomorphe dans le cercle  $|z| \leq z_0$ , tandis que pour  $\varphi'(0) < 0$ , le deuxième membre de (7.24) a dans ce cercle un seul pôle du premier ordre en  $z = 1$ . En substituant les fonctions (7.16) et (7.24) dans (1.45) où l'on prendra  $z_0$  pour rayon du cercle d'intégration, nous trouvons donc au moyen de la notation (1.13)

$$(7.25) \quad \mathbf{E} e^{-q\tau_n} = s(-\varphi'(0)) \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \frac{q}{\zeta(q-\zeta)} \log(1-\varphi(-\zeta)) d\zeta \right] + O(z_0^{-n}) \quad [z_0 > 1, \varphi'(0) \neq 0].$$

En introduisant maintenant  $\Phi(q, z; \tau_0)$ , au lieu de  $\Phi(q, z; 0)$ , dans (1.45), nous ne changeons rien à la formule (7.25), car le deuxième terme du deuxième membre de (7.17) est manifestement holomorphe pour  $|z| \leq z_0$ .

Dans le cas où  $\varphi'(0) = 0$ , on démontre dans l'hypothèse supplémentaire où, pour tout  $y_0 > 0$ ,

$$(7.26) \quad 1 - |\varphi(-iy)| \geq a(y_0) > 0 \quad (\text{pour } |y| \geq y_0),$$

qu'au voisinage de  $z = 1$ ,  $\Phi(q, z; \tau_0)$  se comporte comme  $\frac{1}{\sqrt{1-z}}$ ; de là résulte la formule

$$(7.27) \quad \mathbf{E} e^{-q\tau_n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad [\mathbf{R}(q) \geq 0, q \neq 0, \varphi'(0) = 0].$$

Il vient donc

$$(7.28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} e^{-q\tau_n} = 0 \quad [\varphi'(0) \geq 0, \mathbf{R}(q) \geq 0, q \neq 0],$$

de sorte qu'un état stationnaire n'est possible que pour  $\varphi'(0) < 0$ . Pour cette raison nous nous limitons dorénavant au cas où l'inégalité

$$(7.29) \quad \varphi'(0) = \mathbf{E}(T) - \mathbf{E}(Y) = \varepsilon'_1(0) - \varepsilon'_2(0) < 0$$

est vérifiée. Dans ce cas, on tire de (7.25) et (7.5) la formule

$$(7.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} E e^{-q\tau_n} = E e^{-q\tau} \\ = \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\infty}^{\infty-i\infty} \frac{q}{\zeta(q-\zeta)} \log(1 - \varepsilon_1(-\zeta) \varepsilon_2(\zeta)) d\zeta \right] \\ [\varphi'(0) < 0, R(q) \geq 0], \end{array} \right.$$

valable dans l'hypothèse où les f. c.  $\varepsilon_1(\zeta)$  et  $\varepsilon_2(\zeta)$  sont holomorphes pour  $\zeta = 0$ .

Notons que la fonction (7.30) est continue pour  $q = 0$ . Comme elle est la limite des f. c. des f. r.  $\rho_n(t)$ , elle est donc, d'après un théorème de H. Cramér ([2]; [3], p. 96) et P. Lévy [10], la f. c. de la f. r.  $\rho(t) = \lim \rho_n(t)$ , de sorte que nous sommes en droit de la désigner par  $E e^{-q\tau}$ .

**Exemples.** — Dans le cas où  $\varphi(\zeta)$  ne possède, dans l'un ou l'autre des demi-plans gauche et droit, qu'un nombre fini de pôles, tout en s'annulant à l'infini de ce demi-plan de manière convenable, l'intégrale figurant dans (7.30) se ramène à la somme des résidus en ces pôles. Presque tous les exemples traités dans la littérature rentrent dans cette catégorie, l'hypothèse la plus simple dans laquelle  $\varphi(\zeta)$  se comporte ainsi, consistant à admettre que ou  $\varepsilon_1(\zeta)$  ou  $\varepsilon_2(\zeta)$  est une fonction rationnelle.

Rappelons d'abord que toute f. r. de la forme

$$(7.31) \quad f(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{k_i} a_{ik} t^k e^{-\alpha_i t} \quad [t > 0; R(\alpha_i) > 0], \quad = 0 \quad (t < 0)$$

a pour f. c. une fonction rationnelle, à savoir

$$(7.32) \quad \varepsilon(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\zeta t} df(t) = 1 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{k_i} a_{ik} \frac{k! \zeta}{(\alpha_i - \zeta)^{k+1}}.$$

Réciproquement, on démontre au moyen du théorème de Fourier ([15], p. 533) ou du théorème de P. Lévy que toute f. r. dont la f. c. est rationnelle et nécessairement d'un degré  $\leq 0$ , est de la forme (7.31). Dans le cas où l'on a  $f(+0) = 0$ , et par suite  $\sum_{i=1}^N a_{i0} = 1$ , le degré de  $\varepsilon(\zeta)$  est  $< 0$ .

Prenons maintenant pour  $\varepsilon_2(\zeta)$  des fonctions rationnelles, et posons d'abord,  $s \geq 1$  désignant un entier,

$$(7.33) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_2(\zeta) = \frac{\eta^s}{(\eta - \zeta)^s}, \quad \text{d'où} \\ f_2(t) = 1 - e^{-\eta t} \left( 1 + \eta t + \dots + \frac{(\eta)^{s-1} t^{s-1}}{(s-1)!} \right) \quad (t \geq 0, \eta > 0). \end{array} \right.$$

En vertu de (7.29),  $\varepsilon_1(\zeta)$  doit alors remplir la condition suivante :

$$(7.34) \quad \varphi'(0) \equiv \varepsilon_1'(0) - \frac{s}{\eta} < 0.$$

Comme la f. c.  $\varepsilon_2(\zeta)$  est la  $s^{\text{ème}}$  puissance de la fonction  $\frac{\eta}{\eta - \zeta}$ , f. c. de la f. r.  $f(t) = 1 - e^{-\eta t}$ , la v. a. dont  $f_2(t)$  est la f. r. peut être considérée comme la somme de  $s$  v. a. i. ayant toutes  $f(t)$  pour f. r. Par conséquent, on obtient une répartition, suivant  $f_2(t)$ , de points sur une droite (par exemple, d'instant d'arrivée sur l'axe des temps) en ne conservant que chaque  $s^{\text{ème}}$  point d'une répartition poissonnienne suivant  $f(t)$ . Figurons-nous, par exemple, un groupe de  $s$  guichets où les visiteurs se présentent suivant la loi de Poisson, les visiteurs  $i^{\text{ème}}$ ,  $(s+i)^{\text{ème}}$ ,  $(2s+i)^{\text{ème}}$ , ... étant dirigés de prime abord vers le  $i^{\text{ème}}$  guichet ( $i=0, \dots, s-1$ ); alors la répartition des instants d'arrivée à chaque guichet obéira à la loi (7.33) ([6], § 5).

Dans le cas présent, nous avons

$$\varphi(-\zeta) = \left( \frac{\eta}{\eta - \zeta} \right)^s \varepsilon_1(-\zeta),$$

donc

$$|\varphi(-iy)| = \frac{\eta^s}{(\eta^2 + y^2)^{\frac{s}{2}}} |\varepsilon_1(-iy)| < 1 \quad (y \neq 0).$$

Puisqu'en outre  $|\varphi(-\zeta)| < 1$  pour  $|\zeta|$  assez grand et  $R(\zeta) > 0$ , nous pouvons conclure, comme au chapitre I [équ. (1.48)], que la fonction

$$(7.35) \quad 1 - \varphi(-\zeta) = \frac{(\eta - \zeta)^s - \eta^s \varepsilon_1(-\zeta)}{(\eta - \zeta)^s}$$

possède dans le domaine situé à droite de l'axe imaginaire, déformé à l'origine vers la gauche (*fig. 1 a*), autant de zéros que de pôles.

Outre le zéro évident  $\zeta_0 = 0$ , cette fonction a donc exactement  $s - 1$  zéros  $\zeta_i$  tels que  $R(\zeta_i) > 0$  ( $i = 1, \dots, s - 1$ ).

D'une manière plus précise,  $\zeta_1, \dots, \zeta_{s-1}$  sont situés [d'après [12], p. 746, où  $(\eta - \zeta_i)\eta^{-1}$  a été désigné par  $\alpha_i(\eta)$ ] à l'intérieur du cercle de centre  $\zeta = \eta$  et de rayon  $\eta$  dont la circonférence est donnée par

$$(7.36) \quad \zeta = \eta + \eta e^{i\psi} \quad (-\pi \leq \psi \leq \pi).$$

Il vient, en effet,

$$\begin{aligned} \varphi(-\eta - \eta e^{i\psi}) &= | -e^{-i\psi} |^s | \varepsilon_1(-\eta - \eta e^{i\psi}) | \\ &= | \varepsilon_1(-\eta(1 + \cos \psi) - i\eta \sin \psi) | < 1 \quad (-\pi < \psi < \pi) \end{aligned}$$

et en raison de (7.34), l'inégalité  $|\varphi(-\zeta)| < 1$  est aussi satisfaite sur la circonférence (7.36), déformée, dans un voisinage assez restreint de  $\zeta = 0$ , vers la gauche. D'après le théorème de Rouché, la fonction (7.35) possède donc à l'intérieur de cette courbe exactement  $s$  zéros, dont  $\zeta_0 = 0$ , et pour les autres zéros il vient

$$(7.37) \quad |\zeta_i - \eta| < \eta \quad (i = 1, \dots, s - 1).$$

Remplaçons maintenant dans (7.30) la fonction  $1 - \varphi(-\zeta)$  par  $\frac{1 - \varphi(-\zeta)}{\zeta}$ , ce qui est légitime puisque

$$(7.38) \quad \int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \frac{q}{\zeta(q-\zeta)} \log \zeta d\zeta = 0 \quad [R(q-\zeta) > 0];$$

prenons ensuite pour chemin d'intégration une droite C située à droite du point  $q$ , et intégrons par parties. En utilisant (7.21), il vient ainsi

$$(7.39) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{q-\zeta} \right) \log \frac{1-\varphi(-\zeta)}{\zeta} d\zeta \\ &= \log \varphi'(0) - \log \frac{1-\varphi(-q)}{q} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta-q} \right) \log \frac{1-\varphi(-\zeta)}{\zeta} d\zeta \\ & \quad [R(\zeta), R(\zeta-q) > 0] \\ &= \log \frac{\varphi'(0)q}{1-\varphi(-q)} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \log \frac{1-\varphi(-\zeta)}{\zeta} d \log \frac{\zeta}{\zeta-q} \\ &= \log \frac{\varphi'(0)q}{1-\varphi(-q)} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \log \frac{\zeta}{\zeta-q} d \log \frac{1-\varphi(-\zeta)}{\zeta}. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas présent, la fonction  $\frac{d}{d\zeta} \log \frac{1-\varphi(-\zeta)}{\zeta}$  a dans le demi-

plan  $R(\zeta) \geq 0$  pour seules singularités (à savoir, pour pôles simples) le pôle  $\eta$  et les zéros  $\zeta_1, \dots, \zeta_{s-1}$  de (7.35) et est  $O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right)$  pour  $|\zeta| \rightarrow \infty$ ,  $R(\zeta) \geq 0$ . Par conséquent, la dernière intégrale figurant dans (7.39) est égale à la somme des résidus en ces  $s$  pôles, donc à  $s \log \frac{\eta}{\eta - q} - \sum_{i=1}^{s-1} \log \frac{\zeta_i}{\zeta_i - q}$ . Pour le premier membre de (7.39) nous obtenons ainsi, en utilisant (7.34) et (7.35),

$$(7.40) \quad \begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - \varepsilon_1 q}^{+\infty - \varepsilon_1 q} \frac{q}{\zeta(\eta - \zeta)} \log \frac{1 - \varphi(-\zeta)}{\zeta} d\zeta \\ & = \log \frac{(s - \eta \varepsilon'_1(0)) \eta^{s-1} q}{\eta^s \varepsilon_1(-q) - (\eta - q)^s} - \sum_{i=1}^{s-1} \log \frac{\zeta_i}{\zeta_i - q}, \end{aligned}$$

et en substituant cette expression dans (7.30), nous trouvons enfin

$$(7.41) \quad \left\{ \begin{aligned} E e^{-q\tau} &= \frac{(s - \eta \varepsilon'_1(0)) \eta^{s-1} q}{\eta^s \varepsilon_1(-q) - (\eta - q)^s} \prod_{i=1}^{s-1} \frac{\zeta_i - q}{\zeta_i} \\ & \{s > \eta \varepsilon'_1(0); |\zeta_i - \eta| < \eta; \eta^s \varepsilon_1(-\zeta_i) = (\eta - \zeta_i)^s, i = 1, \dots, s-1\}. \end{aligned} \right.$$

Pour  $s = 1$ , cette formule se confond avec la formule (1.30), obtenue dans l'hypothèse d'une répartition poissonnienne des instants d'arrivée des visiteurs.

Soit ensuite  $f_s(t)$  une f. r. quelconque de la forme (7.31), et telle que  $f_s(+0) = 0$ . Alors le degré de sa f. c. [équ. (7.32)] est  $< 0$ , de sorte que celle-ci peut être écrite sous la forme

$$(7.42) \quad c_s(\zeta) = \frac{G_{s-1}(\zeta)}{\prod_{i=1}^s (\beta_i - \zeta)} \quad [R(\beta_1), \dots, R(\beta_s) > 0],$$

$G_{s-1}$  désignant un polynôme de degré  $\leq s - 1$ , et les pôles  $\beta_1, \dots, \beta_s$ , n'étant pas nécessairement différents.

En appliquant à cette f. c. les raisonnements que nous venons de faire dans l'hypothèse (7.33), nous obtenons la formule

$$(7.43) \quad \left\{ \begin{aligned} E e^{-q\tau} &= (\varepsilon'_2(0) - \varepsilon'_1(0)) q \\ & \times \left[ G_{s-1}(q) \varepsilon_1(-q) - \prod_{i=1}^s (\beta_i - q) \right]^{-1} \prod_{i=1}^{s-1} \frac{\zeta_i - q}{\zeta_i} \\ & [R(\zeta_1), \dots, R(\zeta_{s-1}) > 0], \end{aligned} \right.$$

$\zeta_1, \dots, \zeta_{s-1}$  désignant les  $s-1$  racines à partie réelle positive de l'équation

$$(7.44) \quad G_{s-1}(q) \varepsilon_1(-q) - \prod_{i=1}^s (\beta_i - q) = 0.$$

Les calculs deviennent encore plus simples lorsque c'est la f. c.  $\varepsilon_1(\zeta)$  qui est rationnelle. Soit d'abord

$$(7.45) \quad \varepsilon_1(\zeta) = \frac{c^s}{(c - \zeta)^s},$$

$f_1(t)$  étant alors égale à la fonction de répartition figurant dans (7.33). Dans l'hypothèse (7.29) qui prend ici la forme

$$(7.46) \quad \frac{s}{c} < \varepsilon'(0),$$

la formule (7.30) se transforme en

$$(7.47) \quad \left\{ \begin{aligned} E e^{-\gamma z} &= \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-0}^{+\infty-0} \log \left( 1 - \frac{c^s \varepsilon_2(\zeta)}{(c + \zeta)^s} \right) d \log \frac{\zeta}{\zeta - q} \right] \\ &= \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-0}^{+\infty-0} \log \frac{\zeta}{\zeta - q} \frac{d}{d\zeta} \log \left( 1 - \frac{c^s \varepsilon_2(\zeta)}{(c + \zeta)^s} \right) d\zeta \right] \\ &\quad [R(\zeta), R(\zeta - q) < 0]. \end{aligned} \right.$$

Or dans l'hypothèse (7.46), l'équation

$$(7.48) \quad (c + \zeta)^s - c^s \varepsilon_2(\zeta) = 0$$

possède dans le demi-plan  $R(\zeta) < 0$  exactement  $s$  racines  $\zeta_i$  [ $R(\zeta_i) < 0, i = 1, \dots, s$ ] qui, toutes, sont situées à l'intérieur du cercle  $\zeta = -c + c e^{i\psi}$  ( $-\pi \leq \psi \leq \pi$ ), de sorte que

$$(7.49) \quad |\zeta_i + c| < c \quad (i = 1, \dots, s).$$

On démontre cela par la méthode utilisée pour établir les propriétés analogues des zéros  $\zeta_i$  de la fonction (7.35).

Nous voyons maintenant que la deuxième fonction à intégrer qui figure dans (7.47) a dans le demi-plan gauche exactement  $s+1$  pôles  $\zeta = -c, \zeta_1, \dots, \zeta_s$ . Puisque cette fonction s'annule pour  $|\zeta| \rightarrow \infty, R(\zeta) \leq 0$  comme  $|\zeta|^{-s-1}$ , son intégrale est égale à la somme

des résidus en ces pôles, de sorte que nous obtenons

$$(7.50) \quad E e^{-q\tau} = \frac{(c+q)^s}{c^s} \prod_{i=1}^s \frac{\zeta_i}{\zeta_i - q}.$$

En prenant enfin pour  $\varepsilon_1(\zeta)$  dans le deuxième membre de (7.30) une fonction rationnelle de la forme (7.42), donc

$$\varepsilon_1(-\zeta) = \frac{G_{s-1}(-\zeta)}{\prod_1^s (b_i + \zeta)},$$

nous obtenons par les mêmes raisonnements

$$(7.51) \quad E e^{-q\tau} = \prod_{i=1}^s \frac{b_i + q}{b_i} \prod_{i=1}^s \frac{\zeta_i}{\zeta_i - q} \quad [R(\zeta_1), \dots, R(\zeta_s) < 0],$$

$\zeta_1, \dots, \zeta_s$  étant les  $s$  racines de partie réelle négative de l'équation

$$(7.52) \quad G_{-1}(-q) \varepsilon_0(q) - \prod_{i=1}^s (b_i + q) = 0.$$

Supposons maintenant que toutes les v. a.  $T_n$  et  $Y_n$  sont des multiples entiers d'un nombre  $h_0 > 0$ .  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  seront alors des fonctions en escalier suivant (2.40), toutes les abscisses  $t_i$  étant des multiples entiers de  $h_0$ . En supposant d'abord que le nombre de « gradins » de  $f_1(t)$  est fini, nous avons ainsi

$$(7.53) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1(t) &= \sum_{k=1}^i a_k && [ih_0 < t \leq (i+1)h_0; i = 0, \dots, n], \\ &= \sum_1^{n+1} a_k = 1 && [t > (n+1)h]; \quad a_1, \dots, a_{n+1} \geq 0; \end{aligned} \right.$$

$$(7.54) \quad \left\{ \begin{aligned} f_2(t) &= \sum_1^i b_k && [ih_0 < t \leq (i+1)h_0; i = 0, 1, \dots]; \\ &= \sum_1^\infty b_k = 1, && b_1, b_2, \dots \geq 0. \end{aligned} \right.$$

Il vient, par conséquent,

$$\varepsilon_1(\zeta) = \sum_1^{n+1} a_i e^{ih_0 \zeta}, \quad \varepsilon_2(\zeta) = \sum_1^{\infty} b_i e^{ih_0 \zeta}$$

et

$$(7.55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(-\zeta) = \varepsilon_1(-\zeta) \varepsilon_2(\zeta) = e^{-s h \zeta} \sum_{i=0}^{\infty} c_i e^{i h \zeta} \\ \left( c_0 > 0; c_1, c_2, \dots \leq 0, \sum_{i=0}^{\infty} c_i = 1, s \leq n \right), \end{array} \right.$$

$h$  désignant le plus grand multiple entier de  $h_0$  tel que  $\varphi(-\zeta)$  soit une série de puissances de  $e^{h\zeta}$ . Nous supposons que  $s \geq 1$ , car autrement tous les d. a. seraient nuls. En posant  $e^{h\zeta} = x$ , nous avons ensuite

$$(7.56) \quad 1 - x \varphi(-\zeta) = 1 - x x^{-s} \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad (c_0 > 0)$$

et en raison de la définition de  $h$ , il vient

$$\left| x^{-s} \sum_0^{\infty} c_i x^i \right| < \sum_0^{\infty} c_i = 1 \quad (|x| = 1, x \neq 1).$$

En vertu de (7.29) et (7.55), nous trouvons en outre que

$$\frac{d}{dx} \left[ x^{-s} \sum_0^{\infty} c_i x^i \right]_{x=1} = -\frac{1}{h} \varphi'(0) > 0.$$

En appliquant le théorème de Rouché au cercle unité du plan  $x$ , déformé au voisinage du point  $x = 1$  vers son intérieur, nous voyons que pour  $|z| \leq 1$ , exactement  $s$  zéros  $\alpha_1(z), \dots, \alpha_s(z)$  de la fonction (7.56) sont situées à l'intérieur de ce cercle, donc

$$(7.57) \quad |\alpha_i(z)| < 1 \quad (i = 1, \dots, s).$$

Nous pouvons donc représenter la fonction (7.56) comme produit des

deux facteurs  $x^{-s} \prod_{i=1}^s [x - \alpha_i(z)]$  et  $\frac{x^s - z \sum_0^{\infty} c^v x^v}{\prod_{i=1}^s [x - \alpha_i(z)]}$  dont le deuxième

ne s'annule pas dans le domaine

$$|x| (= e^{hR(\zeta)}) \leq e^{-h\delta}, |z| \leq 1$$

et  $y$  est borné. Nous en concluons que le deuxième terme du deuxième membre de l'équation

$$(7.58) \quad \log(1 - z \varphi(-\zeta)) = \sum_1^s \log [1 - \alpha_i(z) e^{-h\zeta}] + \log \frac{e^{sh\zeta} - z \sum_0^{\infty} c_\nu e^{\nu h\zeta}}{\prod_1^s [e^{h\zeta} - \alpha_i(z)]}$$

est holomorphe et borné pour  $R(\zeta) \leq -\delta' < 0, |z| \leq 1$ .

Par conséquent, l'opération  $-\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \frac{q}{z(q-\zeta)} \dots d\zeta$  de (7.24) annule ce terme, tandis qu'elle transforme le premier terme de (7.58) en la différence des résidus en  $\zeta = 0$  et  $\zeta = q$ , à savoir, en

$$\sum_1^s \log [1 - \alpha_i(z)] - \sum_1^s \log [1 - \alpha_i(z) e^{-hq}].$$

De (7.24) et (7.58) résulte ainsi la formule

$$\Phi(q, z; 0) = \frac{1}{1-z} \prod_1^s \frac{1 - \alpha_i(z)}{1 - \alpha_i(z) e^{-hq}},$$

et de là, au moyen de (1.45),

$$(7.59) \quad E e^{-q\tau} = \prod_1^s \frac{1 - \alpha_i}{1 - \alpha_i e^{-hq}} \quad [\alpha_i = \alpha_i(1)].$$

En substituant dans l'équation (1.24)  $E e^{-q\tau}$  à  $\varphi(-q)$ , nous obtenons enfin pour la f. r. des d. a. la formule

$$(7.60) \quad \rho(t) = \prod_1^s (1 - \alpha_i) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN+0}^{iN+0} e^{qt} \prod_1^s (1 - \alpha_i e^{-hq})^{-1} \frac{dq}{q} \\ = \prod_1^s (1 - \alpha_i) \left( 1 + s(t-h) \sum_1^s \alpha_i + s(t-2h) \sum_{1 \leq i \leq k \leq s} \alpha_i \alpha_k + \dots \right).$$

Dans le cas présent, tous les d. a. sont donc des multiples entiers de  $h$  et il vient

$$(7.61) \quad \text{Prob}(\tau = 0) = \prod_1^s (1 - \alpha_i), \quad \text{Prob}(\tau = h) = \prod_1^s (1 - \alpha_i) \sum_1^s \alpha_i,$$

On procédera d'une manière analogue dans le cas où les f. r.  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  sont respectivement de la forme (7.54) et (7.53).

Nous allons traiter enfin un exemple où ces deux f. r. sont de la forme (7.54) (où nous écrivons  $h$  au lieu de  $h_0$ ), la f. c. de  $f_2(t)$  étant en outre une fonction rationnelle de  $e^{h\zeta}$ .

Soit donc  $f_1(t)$  une fonction quelconque de la forme (7.53) (avec  $n = \infty$ ), d'où

$$\varepsilon_1(\zeta) = \sum_1^{\infty} \alpha_i e^{ih\zeta},$$

$f_2(t)$  étant définie par les équations

$$(7.62) \quad b_i = c^{i-1}(1-c) \quad (i = 1, 2, \dots; 0 < c < 1),$$

donc

$$\varepsilon_2(\zeta) = (1-c) \frac{e^{h\zeta}}{1 - c e^{h\zeta}}.$$

Afin que la condition (7.29) qui prend ici la forme  $h \sum_1^{\infty} n a_n < \frac{h}{1-c}$ , soit remplie,  $c$  doit en outre vérifier à l'inégalité

$$(7.63) \quad c > 1 - \left( \sum_1^{\infty} n a_n \right)^{-1}.$$

Avant d'utiliser la formule (7.30), décomposons la fonction

$$1 - \varphi(-\zeta) = 1 - \varepsilon_1(-\zeta) \varepsilon_2(\zeta)$$

comme suit :

$$(7.64) \quad 1 - \varphi(-\zeta) = 1 - \frac{1-c}{e^{-h\zeta} - c} \sum_1^{\infty} a_n e^{-nh\zeta} \\ = \frac{e^{-h\zeta} - 1}{e^{-h\zeta} - c} \left[ 1 - \frac{1-c}{1 - e^{-h\zeta}} \left( 1 - \sum_1^{\infty} a_n e^{-nh\zeta} \right) \right].$$

Or au moyen des inégalités (7.63) et  $a_n \geq 0$  ainsi que de

la relation  $\sum_1^{\infty} a_n = 1$  on conclut que

$$\left| \frac{1-c}{1-e^{-h\zeta}} \left( 1 - \sum_1^{\infty} a_n e^{-nh\zeta} \right) \right| = (1-c) \left| \sum_1^{\infty} a_n (1 + e^{-h\zeta} + \dots + e^{-(n-1)h\zeta}) \right|$$

$$\leq (1-c) \sum_1^{\infty} n a_n < 1, \quad \{R(\zeta) \geq 0\},$$

de sorte que,  $\sum_1^{\infty} a_n e^{nh\zeta}$  convergeant par hypothèse pour  $R(\zeta) < \delta (\delta > 0)$ , il existe  $\delta'$  tel que le logarithme de l'expression qui figure entre crochets dans (7.64), soit borné pour  $R(\zeta) \geq -\delta'$ . Donc l'opération  $-\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty-\delta'}^{i\infty-\delta'} \frac{q}{\zeta(q-\zeta)} \dots d\zeta$  de (7.30) qui annule le premier terme du deuxième membre de l'équation

$$(7.65) \quad \log \frac{1-\varphi(-\zeta)}{\zeta} = \log \frac{1-e^{h\zeta}}{\zeta(1-c e^{h\zeta})}$$

$$+ \log \left[ 1 - \frac{1-c}{1-e^{-h\zeta}} \left( 1 - \sum_1^{\infty} a_n e^{-nh\zeta} \right) \right],$$

transforme le deuxième terme en la somme des résidus aux points  $\zeta=0$  et  $\zeta=q$ . Ainsi, (7.30) prend ici la forme

$$(7.66) \quad E e^{-q\tau} = \frac{[1-h^{-1}(1-c)\varepsilon_1'(0)][1-e^{-hq}]}{c-e^{-hq}+(1-c)\varepsilon_1(-q)} \left[ \varepsilon_1(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{nhq} \right].$$

Notons que la f. r. définie par (7.54) et (7.62) tend, pour  $c = 1 - \eta h$  et  $h \searrow 0$ , vers la f. r.  $f_2(t) = 1 - e^{-\eta t}$  de répartition poissonnienne des i. a. En posant, dans (7.66),  $c = 1 - \eta h$ , et en y substituant à  $\varepsilon_1(q)$  la f. c. d'une f. r.  $f_1(t, h)$  suivant (7.53) et (4.33) et qui, pour  $h \searrow 0$ , tend vers une f. r. donnée, on obtient à la limite  $h = 0$  la formule (4.35) du régime poissonnien, l'inégalité (7.63) se transformant en  $\eta < 1$ .

**Calcul de la probabilité  $\rho(+0)$  et des moments  $m_i(\tau)$ .** — Afin d'obtenir pour la probabilité de non-attente

$$\rho(+0) = \lim_{q \rightarrow +\infty} E e^{-q\tau}.$$

une expression simple, supposons pour le moment que l'intégrale  $\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \left| \log(1 - \varphi(-\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta} \right|$  converge (c'est-à-dire que  $\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0}$  converge pour un  $\delta > 0$  assez petit).

Dans (7.30) on peut dans cette hypothèse faire tendre  $q \rightarrow +\infty$  sous le signe d'intégration, de sorte que nous obtenons

$$(7.67) \quad \rho(+0) = \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \log(1 - \varphi(-\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta} \right].$$

En développant ensuite le logarithme du dernier membre de (7.30) en série de Taylor en  $q$ , nous obtenons

$$(7.68) \quad \log E e^{-q\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} (-q)^n \frac{x_n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \zeta^{-n-1} \log(1 - \varphi(-\zeta)) d\zeta,$$

où nous avons désigné par  $x_n$  les cumulants de la f. r. de la v. a.  $\tau$ , donc (voir, par exemple, [3], p. 186)

$$(7.69) \quad x_1 = m_1(\tau), \quad x_2 = m_2(\tau) - m_1^2(\tau), \quad x_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3, \quad \dots$$

Inversement, les moments  $m_i$  s'expriment de manière élémentaire par les cumulants, donc par les intégrales qui figurent dans (7.68).

Nous allons utiliser ces formules pour calculer  $\log \rho(+0)$  et  $m_1(\tau)$  pour des f. c. suivant (7.33) et (7.34), ainsi que suivant (7.45) et (7.46).

Dans le premier cas, il vient

$$(7.70) \quad \log \rho(+0) = -\lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{q-\zeta} \right) \log \left( 1 - \frac{\eta^s \varepsilon_1(-\zeta)}{(\eta-\zeta)^s} \right) d\zeta.$$

En vertu des propriétés de la fonction (7.35), la partie, relative à  $\frac{1}{q-\zeta}$ , de la dernière intégrale est égale à

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-\eta|=r_1+0} \frac{1}{q-\zeta} \log \left( 1 - \frac{\eta^s \varepsilon_1(-\zeta)}{(\eta-\zeta)^s} \right) d\zeta - \log \left( 1 - \frac{\eta^s \varepsilon_1(-q)}{(\eta-q)^s} \right);$$

donc, sa limite pour  $q \rightarrow +\infty$  est 0. La formule (7.70) prend ainsi la forme

$$(7.71) \quad \begin{aligned} \log \rho(+0) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \log \left( 1 - \frac{\eta^s \varepsilon_1(-\zeta)}{(\eta-\zeta)^s} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \frac{\eta^{ns} \varepsilon_1^n(-\zeta)}{(\eta-\zeta)^{ns}} \frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned}$$

Le  $n^{\text{ième}}$  terme de cette somme est égal à la somme des résidus aux pôles  $\zeta = 0$  et  $\zeta = \eta$ , respectivement d'ordres 1 et  $ns$ , de sorte qu'au moyen de la substitution  $\zeta = \eta - \eta x$  et en utilisant la notation  $\left[ \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right]_{x=0} = [f(x)]_0^{(n)}$ , nous obtenons

$$(7.72) \quad \log \rho(+0) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ 1 - \frac{1}{(ns-1)!} \left[ \frac{\varepsilon_1^{(n)}(-\eta + \eta x)}{1-x} \right]_0^{(ns-1)} \right].$$

En traitant de la même façon l'expression qui résulte de (7.68) pour l'e. m. du d. a.  $m_1(\tau) = x_1(\tau)$ , nous trouvons

$$(7.73) \quad m_1(\tau) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{-l\infty-0}^{l\infty-0} \log \left( 1 - \frac{\eta^s \varepsilon_1(-\zeta)}{(\eta - \zeta)^s} \right) \frac{d\zeta}{\zeta^2} \\ = \frac{1}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ -n(s - \eta \varepsilon_1'(0)) + \frac{1}{(ns-1)!} \left[ \frac{\varepsilon_1^{(n)}(-\eta + \eta x)}{(1-x)^2} \right]_0^{(ns-1)} \right].$$

Admettons en particulier que les d. o.  $T_i$  sont toutes égales à  $s$ , d'où [voir (2.32)]  $\varepsilon_1(\zeta) = e^{s\zeta}$  et  $\varepsilon_1'(0) = s$ ; alors l'inégalité (7.34) prend la forme  $\eta < 1$ , tandis que (7.72) et (7.73) deviennent

$$(7.74) \quad \log \rho(+0) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ 1 - e^{-ns\eta} \sum_{k=0}^{ns-1} \frac{(ns\eta)^k}{k!} \right] \\ = -s\eta \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ns\eta} \sum_{k=ns-1}^{\infty} \frac{(ns\eta)^k}{(k+1)!},$$

$$(7.75) \quad m_1(\tau) = \frac{1}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ -ns(1-\eta) + e^{-ns\eta} \sum_{k=0}^{ns-1} \frac{(ns\eta)^k}{k!} (ns-k) \right] \\ = s \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ns\eta} \sum_{k=ns}^{\infty} \frac{(ns\eta)^k}{(k+1)!} (k+1 - ns).$$

Ces deux grandeurs peuvent aussi être interprétées comme la probabilité de non-attente et l'e. m. du d. a. à un groupe de  $s$  guichets (ou lignes) où les visiteurs (les appels) se présentent suivant la loi de Poisson  $f_2(t) = 1 - e^{-\eta t}$  ( $\eta < 1$ ), ont tous la même d. o. ( $= s$ ) et sont traités dans leur ordre d'arrivée. Car cette règle de priorité répartit automatiquement des visiteurs dont les d. o. sont égales; suivant les  $s$  queues particulières décrites plus haut, les i. a. de chacune de ces queues ayant la fonction (7.33) pour f. r. Pour de

grandes valeurs de l'entier  $s$ , les deux dernières grandeurs admettent des formules asymptotiques, différentes selon les hypothèses faites sur le degré d'utilisation  $\eta$  ([12], p. 78 et 749; [13], [14]).

En choisissant  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  suivant (7.45) et (7.46), nous obtenons, en procédant de manière analogue au cas précédent,

$$(7.76) \quad \log \rho(+0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \log \left( 1 - \frac{c^s \varepsilon_2(\zeta)}{(c+\zeta)^s} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ = -s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(ns)!} \left[ \frac{\varepsilon_2^n(-c+c\mathcal{X})}{1-x} \right]_0^{(ns-1)},$$

$$(7.77) \quad m_1(\tau) = \frac{s}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(ns)!} \left[ \frac{\varepsilon_2^n(-c+c\mathcal{X})}{(1-x)^2} \right]_0^{(ns-1)}.$$

Admettons ici en particulier que les intervalles  $Y_i$  entre des i. a. consécutifs sont tous égaux à  $s$  (de sorte que les arrivées ont lieu à horaire fixe), d'où  $\varepsilon_2(\zeta) = e^{s\zeta}$ . Alors (7.46) prend la forme  $c > 1$ , tandis que (7.76) et (7.77) se transforment en

$$(7.78) \quad \log \rho(+0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nsc} \sum_{k=0}^{ns-1} \frac{(nsc)^k}{k!} \quad (c > 1),$$

$$(7.79) \quad m_1(\tau) = \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nsc} \sum_{k=0}^{ns-1} \frac{(nsc)^k}{k!} (ns-k) \quad (c > 1). \quad (7)$$

**Atténuation des hypothèses imposées aux f. r.  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$ .** — Dans les seules hypothèses

$$(7.80) \quad E(T) = \int_0^{\infty} t df_1(t) < \infty, \quad E(Y) = \int_0^{\infty} t df_2(t) < \infty,$$

M. D. V. Lindley [11] a démontré que pour  $E(T) < E(Y)$ , ainsi que pour  $E(T) = E(Y)$  et  $\text{Prob}(T - Y = 0) = 1$ ,  $\rho_n(t)$  tend vers

(7) Pour obtenir, dans différentes hypothèses sur les f. r.  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$ , des formules explicites de  $\rho(t)$ , M. W. L. Smith [21] a utilisé la méthode de résolution de l'équation de Wiener Hopf donnée en 1940 par M. F. Smithies ([22], § 4).

Tant qu'il ne s'agit que de la seule f. r. d'équilibre statistique, il n'y a pas de différence essentielle entre cette manière de procéder et la nôtre, indiquée d'abord dans [20] et basée sur [16] [équ. (1) et (14)].

une f. r. limite  $\rho(t)$ , laquelle satisfait à l'équation intégrale de Wiener-Hopf

$$(7.81) \quad \rho(t) = - \int_0^\infty \rho(x) d_x F(t-x) \quad [t > 0, F(t) = \text{Prob}(T - Y < t)].$$

Réciproquement cette équation détermine pour  $E(T) < E(Y)$  la f. r.  $\rho(t)$  de manière univoque, mais pour  $E(T) \geq E(Y)$ , il n'existe pas, sauf dans le cas particulier mentionné plus haut, de f. r. qui satisfasse à (7.81).

### CHAPITRE VIII.

#### RÉPARTITION DES PÉRIODES D'OCCUPATION ININTERROMPUE D'UN GUICHET.

Ce problème a été posé par Émile Borel [1] qui a établi la répartition des durées des périodes d'occupation ininterrompue (p. o. i.) en supposant que les instants d'arrivée des visiteurs sont répartis suivant la loi de Poisson et que leurs d. o. sont égales.

Une remarque intéressante est due à M. D. G. Kendall ([6], p. 168 et 169) qui a observé que dans l'hypothèse d'arrivées poissonniennes, les d. o. étant réparties de manière quelconque, le problème de la répartition des p. o. i. est identique à celui de la disparition des noms de famille, traité par différents auteurs anglais et scandinaves.

Nous établirons d'après [19] la répartition des p. o. i. en supposant toujours que les intégrales  $\varepsilon_1(z)$  et  $\varepsilon_2(z)$  [équ. (1.6) et (7.2)] convergent pour  $R(z) < \delta$  ( $\delta > 0$ ).

Pour simplifier, nous supposons en outre qu'il existe  $\delta_0 > 0$  tel que

$$(8.1) \quad \varepsilon_2(iy) = O(|y|^{-\delta_0}) \quad \text{pour } |y| \rightarrow \infty.$$

Au moyen de (1.23) on en conclut que la f. r.  $f_2(t)$  est continue. Car en raison de la convergence de  $\int_c^\infty t^{-\delta_0-1} dt$  ( $c > 0$ ), l'intégrale  $\int_{-\infty}^\infty \left| \frac{\sin ht}{t} e^{-iut} \varepsilon_2(it) \right| dt$  et par conséquent, le deuxième membre de (1.23), tendent vers zéro pour  $h \rightarrow 0$ .

De (8.1) résulte en outre la relation

$$\varepsilon_2(z) = O_{x_0}(|y|^{-\delta_0} \log |y|) \quad (z = x + iy, \quad x \leq x_0 < 0, \quad |y| \rightarrow \infty) \quad (8),$$

donc

$$(8.2) \quad \varepsilon_2(z) = O_{x_0}(|\operatorname{Im}(z)|^{-\delta'}) \quad [R(z) \leq x_0 < 0, |\operatorname{Im}(z)| \rightarrow \infty, 0 < \delta' < \delta_0].$$

Admettons qu'à l'i. a.  $X_0 = 0$  du visiteur initial le guichet est inoccupé, donc que  $\tau_0 = 0$ . Nous dirons que la p. o. i. qui commence à cet instant est de classe  $n + 1$  ( $n \geq 0$ ) si elle est composée d'exac-  
tement  $n + 1$  d. o.  $T_0, \dots, T_n$ , sa durée étant alors égale à  $\sum_{i=0}^n T_i$ .

Pour qu'une p. o. i. soit de classe  $n + 1$ , il faut et il suffit que :  
1° aucun des visiteurs 1<sup>er</sup>, ...,  $n^{\text{ième}}$  n'arrive *après* le départ du visiteur précédent; 2° le  $n^{\text{ième}}$  visiteur parte *avant* l'i. a. du  $(n + 1)^{\text{ième}}$  visiteur.

Au moyen des notations introduites au chapitre I, ces conditions prennent la forme

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_i + T_i + X_i \geq X_{i+1} \quad (i = 0, \dots, n-1); \quad \tau_n + T_n + X_n < X_{n+1}$$

ou, en utilisant (1.4), (1.5) et (1.2),

$$(8.3) \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_{i+1} = \tau_i + T_i - Y_i \geq 0 \quad (i = 0, \dots, n-1); \quad \tau_n + T_n - Y_n < 0.$$

En ajoutant ces inégalités, nous obtenons

$$(8.4) \quad \tau_{i+1} = \sum_{k=0}^i (T_k - Y_k) \geq 0 \quad (i = 0, \dots, n-1); \quad \sum_{k=0}^n (T_k - Y_k) < 0,$$

$\sum_{k=0}^n (Y_k - T_k) > 0$  étant l'intervalle de temps entre la fin de la p. o. i. en question et le début de la p. o. i. suivante.

(8) Pour obtenir cette relation, on peut employer la formule

$$\varepsilon_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_2(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad [R(z) < 0].$$

Cette formule se démontre en utilisant le fait qu'en raison de la continuité de  $f_2(t)$  pour  $t = 0$ , l'expression (1.24) est nulle pour  $\varphi \equiv \varepsilon$ , et  $a = 0$ . Au moyen de (8.1) on montre que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\varepsilon_2(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right|$  est majorée par une expression de la forme  $c(x_0) |y|^{-\delta_0} \log |y|$ .

Ces inégalités représentent les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les v. a. i.  $T_i$  et  $Y_i$  pour que notre p. o. i. soit de classe  $n + 1$ . D'ailleurs les cas où une ou plusieurs de ces relations sont satisfaites avec le signe d'égalité, peuvent être négligés. Car comme, en vertu de notre hypothèse (8.1), la f. r.  $f_2(y)$  des  $Y_i$  est continue, la probabilité pour que soit vérifiée, par exemple, l'équation

$$(8.5) \quad \sum_{k=0}^i (T_k - Y_k) = 0$$

[ qui signifie que le  $(i + 1)^{\text{ième}}$  visiteur arrive à l'instant de départ du visiteur précédent ], est nulle.

En négligeant par conséquent tous les événements suivant (8.5), nous pouvons dire que l'indicateur de l'événement

$(\mathcal{E}_{n+1})$  « La p. o. i. qui débute à l'instant 0, est de classe  $n + 1$  » est égal à

$$(8.6) \quad \left[ 1 - s \sum_{k=0}^n (T_k - Y_k) \right] \prod_{l=0}^{n-1} s \sum_{k=0}^l (T_k - Y_k) = \pi_n - \pi_{n+1},$$

où nous avons posé

$$(8.7) \quad \pi_0 = 1, \quad \pi_n = \prod_{l=0}^{n-1} s \sum_{k=0}^l (T_k - Y_k) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

La probabilité de l'événement  $\mathcal{E}_{n+1}$  est évidemment égale à  $E(\pi_n - \pi_{n+1})$ ,  $E$  étant l'opérateur qui figure dans (4.15). De même, la probabilité  $g_{n+1}(t)$  pour que notre p. o. i. soit de classe  $n + 1$  ainsi que d'une durée  $\sum_{i=0}^n T_i < t$ , est égale à

$$(8.8) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{n+1}(t) &= \text{Prob} \left( \mathcal{E}_{n+1}; \sum_{i=0}^n T_i < t \right) \\ &= E \left[ (\pi_n - \pi_{n+1}) s \left( t - \sum_{i=0}^n T_i \right) \right] \quad (t > 0; n = 0, 1, \dots). \end{aligned} \right.$$

On en tire pour la f. r. (conditionnelle) des durées des p. o. i. de classe  $n + 1$  l'expression

$$g_{n+1}(t)/g_{n+1}(\infty) = g_{n+1}(t)/E(\pi_n - \pi_{n+1}).$$

En vertu du théorème de P. Lévy, la fonction non décroissante  $g_{n+1}(t)$  (nous poserons  $g_{n+1}(t) = 0$  pour  $t < 0$ ) peut être exprimée en ses points de continuité au moyen de sa f. c.

$$(8.9) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_{n+1}(q) &= \int_{-0}^{\infty} e^{-qt} dg_{n+1}(t) = E \left[ (\pi_n - \pi_{n+1}) \exp \left( -q \sum_{i=0}^n T_i \right) \right] \\ &[R(q) \geq 0; n = 0, 1, \dots]. \end{aligned} \right.$$

Ensuite

$$(8.10) \quad g_{n+1}(t, t') = E \left[ (\pi_n - \pi_{n+1}) s \left( t - \sum_{i=0}^n T_i \right) s \left( t' - \sum_{i=0}^n (Y_i - T_i) \right) \right]$$

est la probabilité pour qu'une p. o. i. soit de classe  $n+1$ , et que sa durée et l'intervalle de temps qui la sépare de la p. o. i. suivante soient respectivement  $< t$  et  $< t'$ . C'est la f. c. de  $g_{n+1}(t, t')$ , à savoir la fonction

$$(8.11) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_{n+1}(x, q) &= E \left[ (\pi_n - \pi_{n+1}) \exp \left( -x \sum_{i=0}^n (Y_i - T_i) - q \sum_{i=0}^n T_i \right) \right] \\ &[R(q) \geq 0, R(x) \geq 0; n = 0, 1, \dots] \end{aligned} \right.$$

que nous allons déterminer d'abord afin de faciliter les calculs ultérieurs. Pour  $x = 0$ , cette f. c. se confond avec (8.9), donc

$$(8.12) \quad \gamma_n(0, q) = \gamma_n(q).$$

On reconnaît aussi que dans le cas d'une répartition poissonnienne des i. a.  $(\varepsilon_2(-x) = \frac{\eta}{\eta+x})$ , l'intervalle  $\sum_{i=0}^n (Y_i - T_i)$  est, dans l'hypothèse (8.4), une v. a. poissonnienne, indépendante de la v. a.  $\sum_{i=0}^n T_i$  et de l'entier  $n$ , si bien qu'il vient dans ce cas

$$(8.13) \quad \gamma_n(x, q) = \gamma_n(q) \frac{\eta}{\eta+x}, \quad [\text{pour } f_2(t) = 1 - e^{-\eta t}].$$

Au moyen des notations

$$(8.14) \quad \left\{ \begin{aligned} J_0 &= 1, & J_{n+1}(x, q) &= \pi_{n+1} \exp \left( -x \sum_{i=0}^n (Y_i - T_i) - q \sum_{i=0}^n T_i \right) \\ & & & (n = 0, 1, \dots) \end{aligned} \right.$$

et en vertu des relations

$$\begin{aligned}
 (8.15) \quad & E \left[ \pi_n \exp \left( -x \sum_0^n (Y_i - T_i) - q \sum_0^n T_i \right) \right] \\
 & = E [ e^{-xY_n + (x-q)T_n} J_n(x, q) ] \\
 & = \int_0^\infty df_1(t_n) \int_0^\infty df_2(y_n) e^{-xy_n + (x-q)t_n} E J_n(x, q) \\
 & = \varepsilon_1(x - q) \varepsilon_2(-x) E J_n(x, q),
 \end{aligned}$$

l'équation (8.11) se transforme en

$$(8.16) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_{n+1}(x, q) &= \varepsilon_1(x - q) \varepsilon_2(-x) E J_n(x, q) - E J_{n+1}(x, q) \\ & \quad (n = 0, 1, \dots). \end{aligned} \right.$$

De là, nous obtenons pour la f. g. des f. c.  $\gamma_n(x, q)$

$$(8.17) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty z^n \gamma_n(x, q) &= 1 - (1 - z \varepsilon_1(x - q) \varepsilon_2(-x)) \sum_{n=0}^\infty z^n E J_n(x, q) \\ & \quad (|z| < 1). \end{aligned} \right.$$

En employant la notation

$$(8.18) \quad I(x, q, z) = \sum_{n=0}^\infty z^n E J_n(x, q),$$

l'équation (8.17) prend la forme

$$(8.19) \quad \sum_{n=1}^\infty z^n \gamma_n(x, q) = 1 - (1 - \varepsilon_1(-q + x) \varepsilon_2(-x)) I(x, q, z);$$

les dernières séries convergent pour  $|z| < 1$ , puisque  $|\gamma_n(x, q)|$ ,  $|J_n(x, q)|$  et  $|E J_n|$  sont  $\leq 1$ .

Nous établirons maintenant une relation linéaire entre  $J_{n+1}$  et  $J_n$ , d'où résultera pour  $I(x, q, z)$  une équation intégrale linéaire.

Au moyen de la relation

$$\pi_{n+1} = \pi_n s \sum_{i=0}^n (T_i - Y_i)$$

qui résulte de (8.7), la formule (8.14) se transforme en

$$(8.20) \quad J_{n+1}(x, q) = \pi_n e^{-q \sum_0^n T_i} x \sum_0^n (T_i - Y_i) s \sum_{i=0}^n (T_i - Y_i).$$

En vue d'obtenir  $EJ_{n+1}$ ,  $E$  étant l'opérateur figurant dans (1.15), calculons d'abord l'intégrale

$$\int_0^\infty J_{n+1} df_2(Y_n) = \pi_n e^{-q \sum_{i=0}^n T_i} \int_0^\infty e^{x \sum_{i=0}^n (T_i - Y_i)} s \sum_{i=0}^n (T_i - Y_i) df_2(Y_n).$$

Pour cela, posons  $a = \sum_{i=0}^n (T_i - Y_i)$  dans l'identité

$$(8.21) \quad \begin{cases} e^{xa} s(a) = (e^{xa} - 1) s(a) + s(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\xi a} \left( \frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi + s(a) \\ [R(\xi) > 0, R(\xi - x) > 0] \end{cases}$$

où  $\int_C$  converge uniformément par rapport à  $a$ , et effectuons l'opération  $\pi_n e^{-q \sum_{i=0}^n T_i} \int_0^\infty \dots df_2(Y_n)$ ; il vient ainsi

$$(8.22) \quad \int_0^\infty J_{n+1} df_2(y_n) = \pi_n \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{(\xi - q) \sum_{i=0}^n T_i - \xi \sum_{i=0}^{n-1} Y_i} \varepsilon_2(-\xi) \left( \frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi \\ + \pi_n e^{-q \sum_{i=0}^n T_i} \int_0^\infty s \left( \sum_{i=0}^n T_i - \sum_{i=0}^{n-1} Y_i - y_n \right) df_2(y_n).$$

Le deuxième terme du deuxième membre est égal à

$$\pi_n e^{-q \sum_{i=0}^n T_i} f_2 \left( \sum_{i=0}^n T_i - \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \right)$$

et peut, en vertu de (1.24) et (8.1), être écrit sous la forme

$$\pi_n e^{-q \sum_{i=0}^n T_i} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\xi \left( \sum_{i=0}^n T_i - \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \right)} \varepsilon_2(-\xi) \frac{d\xi}{\xi};$$

en substituant cette expression dans (8.22), nous obtenons

$$(8.23) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty df_2(y_n) J_{n+1}(x, q) \\ & = \pi_n \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{(\xi - q) \sum_{i=0}^n T_i - \xi \sum_{i=0}^{n-1} Y_i} \varepsilon_2(-\xi) \frac{d\xi}{\xi - x} \\ & \quad [R(\xi), R(\xi - x) > 0]. \end{aligned} \right.$$

En supposant provisoirement  $R(q-x) > 0$ , nous pouvons amener  $C_\xi$  à gauche du point  $q$ , de sorte que  $R(q-\xi) > 0$ . La dernière intégrale est alors majorée par l'intégrale  $\int_C \left| \varepsilon_2(-\xi) \frac{d\xi}{\xi-x} \right|$  laquelle converge en vertu de (8.1). Par conséquent, l'intégrale (8.23) converge uniformément par rapport à  $T_0, \dots, T_n, Y_0, \dots, Y_{n-1}$ , de sorte que l'opération E relative à ces variables peut être effectuée sous le signe  $\int_C$ . Ainsi nous obtenons, en procédant d'abord à l'intégration  $\int_0^\infty \dots df_1(t_n)$  et en utilisant (8.14),

$$(8.24) \quad \int_0^\infty df_1(t_n) \int_0^\infty df_2(\gamma_n) J_{n+1}(x, q) \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_C J_n(\xi, q) \varepsilon_1(\xi - q) \varepsilon_2(-\xi) \frac{d\xi}{\xi - x};$$

en effectuant ensuite l'opération E relative à  $T_0, \dots, Y_{n-1}$ , nous trouvons

$$(8.25) \quad \left\{ \begin{aligned} EJ_{n+1}(x, q) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C EJ_n(\xi, q) \varepsilon_1(\xi - q) \varepsilon_2(-\xi) \frac{d\xi}{\xi - x} \\ &[R(q - \xi), R(\xi - x) > 0]. \end{aligned} \right.$$

Il en résulte pour la f. g.  $I(x) = I(x, q, z)$  [équ. (8.18)] l'équation intégrale

$$(8.26) \quad \left\{ \begin{aligned} I(x) &= \frac{z}{2\pi i} \int_C I(\xi) \varepsilon_1(\xi - q) \varepsilon_2(-\xi) \frac{d\xi}{\xi - x} + 1 \\ &[R(q - \xi), R(\xi - x) > 0, |z| < 1] \end{aligned} \right.$$

dont la solution [voir équ. (20) et (26) de la Note placée à la fin de ce travail], est

$$(8.27) \quad \left\{ \begin{aligned} I(x, q, z) &= \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_C \log(1 - z \varepsilon_1(\zeta - q) \varepsilon_2(-\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta - x} \right] \\ &[R(\zeta - x) > 0]. \end{aligned} \right.$$

En substituant cette expression dans (8.19), nous obtenons enfin

$$(8.28) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \gamma_n(x, q) &= 1 - (1 - z \varepsilon_1(-q + x) \varepsilon_2(-x)) \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_C \log(1 - z \varepsilon_1(\zeta - q) \varepsilon_2(-\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta - x} \right] \\ &[R(\zeta - x) > 0] \end{aligned} \right.$$

ou, en amenant C à gauche du point  $x$ ,

$$(8.29) \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \gamma_n(x, q) &= 1 - \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_C \log(1 - z \varepsilon_1(\zeta - q) \varepsilon_2(-\zeta)) \frac{d\zeta}{x - \zeta} \right] \\ &[\operatorname{R}(x - \zeta) > 0]. \end{aligned} \right.$$

En admettant des hypothèses appropriées sur  $\varepsilon_1$  ou  $\varepsilon_2$ , les dernières intégrales peuvent être calculées de la même façon que l'intégrale qui figure dans (7.30), et nous utiliserons la formule (8.28) ou (8.29) selon que la fonction  $\varepsilon_1(\zeta - q) \varepsilon_2(-\zeta)$  sera méromorphe dans le demi-plan droit ou gauche des  $\zeta$ .

*Exemple.* — 1° Soit d'abord

$$f_2(t) = 1 - e^{-\eta t}, \quad \varepsilon_2(-\zeta) = \frac{\eta}{\eta + \zeta}.$$

Il résulte du théorème de Rouché que la fonction

$$(8.30) \quad 1 - z \varepsilon_1(\zeta - q) \varepsilon_2(-\zeta) = 1 - \frac{\eta z}{\eta + \zeta} \varepsilon_1(\zeta - q) \quad [\operatorname{R}(q) > 0, |z| \leq 1]$$

possède dans le domaine  $\operatorname{R}(\zeta) < 0$ , outre son pôle unique  $-\eta$ , un seul zéro  $\zeta_0(q, z)$ . Dans le demi-plan gauche des  $\zeta$ , découpé entre  $\zeta_0$  et  $-\eta$  (fig. 5), le logarithme de la fonction (8.30) est donc holomorphe, et  $O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right)$  pour  $|\zeta| \rightarrow \infty$ . Pour cette raison, la droite C, dans (8.29), peut être remplacée par un lacet C' (parcouru dans le sens positif) qui contourne la coupure. En intégrant ensuite par parties et appliquant le théorème de Cauchy (résidus en  $-\eta$  et  $\zeta_0$ ), il vient pour l'intégrale qui figure dans (8.29):

$$(8.31) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \log(x - \zeta) d \log \left( 1 - \frac{\eta z}{\eta + \zeta} \varepsilon_1(\zeta - q) \right) \\ &= \log(x - \zeta_0) - \log(x + \eta), \end{aligned}$$

et ainsi (8.29) prend la forme

$$(8.32) \quad \sum_{n=1}^{\infty} z^n \gamma_n(x, q) = 1 - \frac{x - \zeta_0}{x + \eta} = \frac{\eta + \zeta_0(q, z)}{x + \eta}.$$

Au moyen de (8.12), ou de (8.13), on déduit de là :

$$(8.33) \quad \sum_{n=1}^{\infty} z^n \gamma_n(q) = \frac{\eta + \zeta_0(q, z)}{\eta} \quad [f_2(t) = 1 - e^{-\eta t}],$$

$\zeta_0(q, z)$  désignant la racine unique de l'équation

$$(8.34) \quad \eta + \zeta - \eta z \varepsilon_1(\zeta - q) = 0$$

telle que  $R(\zeta) < 0$  pour  $|z| \leq 1$ ,  $R(q) > 0$ .

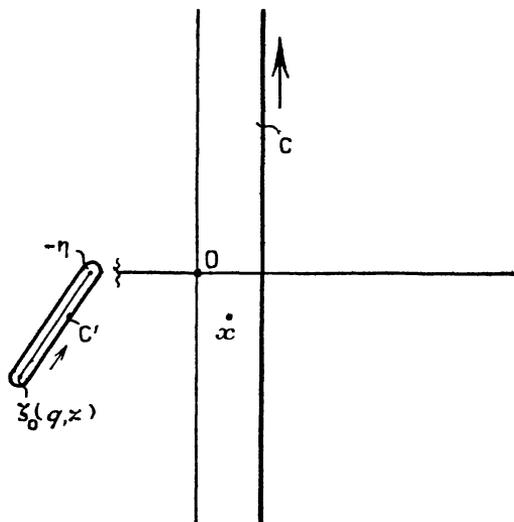


Fig 5. — Plan  $\zeta$

La dernière équation qui, au moyen des substitutions

$$\eta + \zeta = \xi, \quad \eta \varepsilon_1(\zeta - q) = u(\xi),$$

prend la forme

$$(8.35) \quad \xi - zu(\xi) = 0 \quad [u(0) \neq 0],$$

peut être résolue par la formule d'inversion de Lagrange ([26], p. 133)

$$(8.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left[ \frac{d^{n-1} u^n(\xi)}{d\xi^{n-1}} \right]_{\xi=0}, \\ f(\xi) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left[ \frac{d^{n-1} (u^n(\xi) f'(\xi))}{d\xi^{n-1}} \right]_{\xi=0}, \end{array} \right.$$

$f(\xi)$  désignant ici une fonction qui est holomorphe pour  $\xi = 0$ .

A l'aide des dernières formules et de (1.24), on obtient pour  $\gamma_n(q)$



et pour la probabilité cherchée  $g_n(t)$  les formules

$$(8.37) \quad \begin{cases} \gamma_n(q) = \frac{(-\eta)^{n-1}}{n!} \frac{d^{n-1} \varepsilon_1^n(-\eta-q)}{dq^{n-1}}, \\ g_n(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN+\delta}^{iN+\delta} e^{qt} \gamma_n(q) \frac{dq}{q} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Pour la probabilité pour qu'une p. o. i. de classe quelconque soit  $< t$ , on tire des équations (8.33) (pour  $z=1$ ) et (1.24) l'expression

$$(8.38) \quad \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN+\delta}^{iN+\delta} e^{qt} (\eta + \zeta_0(q, 1)) \frac{dq}{\eta q} \quad (t > 0),$$

pour laquelle M. Kendall ([6], p. 169) a esquissé une démonstration fondée sur des raisonnements probabilistes.

2° Soit maintenant

$$f_1(t) = 1 - e^{-t}, \quad \varepsilon_1(\zeta - q) = \frac{1}{1 + q - \zeta}.$$

Désignons par  $\zeta_1(q, z)$  la racine unique de l'équation

$$(8.39) \quad 1 - z \varepsilon_1(\zeta - q) \varepsilon_2(-\zeta) = 1 - \frac{z \varepsilon_2(-\zeta)}{1 + q - \zeta} = 0$$

telle que  $R(\zeta) > 0$  pour  $|z| \leq 1$ ,  $R(q) > 0$ . Substituons ensuite la fonction (8.39) dans (8.28), intégrons par parties et appliquons le théorème de Cauchy. Il vient ainsi

$$(8.40) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \gamma_n(x, q) &= 1 - \frac{1 + q - x - z \varepsilon_2(-x)}{1 + q - x} \\ &\times \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_C \log(\zeta - x) d \log \left( 1 - \frac{z \varepsilon_2(-\zeta)}{1 + q - \zeta} \right) \right] \\ &[R(\zeta - x), R(1 + q - \zeta), R(\zeta_1 - \zeta) > 0] \\ &= 1 - \frac{1 + q - x - z \varepsilon_2(-x)}{\zeta_1 - x} = \frac{\zeta_1 - 1 - q + z \varepsilon_2(-x)}{\zeta_1 - x} \end{aligned} \right.$$

et de là, en vertu de (8.12),

$$(8.41) \quad \sum_{n=1}^{\infty} z^n \gamma_n(q) = \frac{\zeta_1 - 1 - q + z}{\zeta_1} \quad [\zeta_1 = \zeta_1(q, z)].$$

En développant la dernière fonction, au moyen de (8.36), en série de Taylor en  $z$ , nous trouvons

$$(8.42) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_1(q) &= \frac{1 - \varepsilon_2(-q-1)}{q+1}, \\ \gamma_n(q) &= \frac{1}{n!} \left\{ n \left[ \frac{\varepsilon_2^{n-1}(\xi)}{\xi^2} \right]_{\xi=-q-1}^{(n-2)} - (q+1) \left[ \frac{\varepsilon_2^n(\xi)}{\xi^2} \right]_{\xi=-q-1}^{(n-1)} \right\} \\ &\quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned} \right.$$

et de là en particulier, au moyen de (1.24) et (7.2),

$$(8.43) \quad g_1(t) = 1 - e^{-t} - \int_0^t (e^{-\tau} - e^{-t}) df_2(\tau) \quad [f_1(t) = 1 - e^{-t}].$$

Pour  $\varepsilon_2(\zeta) = \frac{\eta}{\zeta - \eta}$ , on obtient pour la racine  $\zeta_1$  de (8.39)

$$(8.44) \quad \zeta_1(q, z) = \frac{q+1-\eta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(q+1+\eta)^2 - 4\eta z} = q+1 - \frac{\eta z}{q+1-\eta} + \dots,$$

donc [équ. (8.41)]

$$(8.45) \quad \sum_1^{\infty} z^n \gamma_n(q) = \frac{q+1+\eta}{2\eta} - \frac{1}{2\eta} \sqrt{(q+1+\eta)^2 - 4\eta z}.$$

Du développement taylorien, en  $z$ , de la dernière expression nous tirons enfin au moyen de l'opération  $\frac{1}{2\pi i} \int_1 e^{qz} \dots \frac{dz}{z}$  les formules

$$(8.46) \quad \left\{ \begin{aligned} g_n(t) &= \frac{\eta^{n-1}}{(1+\eta)^{2n-1}} \frac{(2n-2)!}{(n-1)! n!} \left( 1 - e^{-(1+\eta)t} \sum_{i=0}^{2n-2} \frac{(1+\eta)^i t^i}{i!} \right) \\ [n = 1, 2, \dots, f_1(t) &= 1 - e^{-t}, f_2(t) = 1 - e^{-\eta t}], \end{aligned} \right.$$

valables pour tout  $\eta > 0$ .

En utilisant (8.45), nous trouvons que la probabilité pour qu'une p. o. i. soit de classe finie, est dans le cas présent égale à

$$(8.47) \quad \sum_1^{\infty} g_n(\infty) = \sum_1^{\infty} \gamma_n(0) = \frac{1}{2\eta} (1 + \eta - |1 - \eta|) = 1 \quad (\eta \leq 1), \\ = \frac{1}{\eta} \quad (\eta > 1).$$

Donc pour  $\eta > 1$ , la probabilité pour qu'une p. o. i., une fois

commencée, ne prenne jamais fin, donc qu'elle soit de classe  $\infty$ , est égale à

$$p_\infty = 1 - \frac{1}{\eta} > 0.$$

**Détermination de  $p_\infty$  pour  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  arbitraires.** — La condition nécessaire et suffisante pour que la p. o. i. qui commence à l'instant  $X_0 = 0$ , soit de classe  $\infty$ , est constituée par les inégalités

$$\tau_i = \sum_{k=0}^{i-1} (T_k - Y_k) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots). \text{ Il vient donc}$$

$$(8.48) \quad p_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} E \prod_{i=1}^n s(\tau_i) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} E \left( \prod_{i=1}^n s(\tau_i) - \prod_{i=1}^{n+1} s(\tau_i) \right).$$

Comme l'équation (8.4) est maintenant valable pour tout  $\tau_i (i > 0)$ , nous avons, au moyen de la notation (8.7),  $\prod_{i=1}^n s(\tau_i) = \pi_n$  pour tout  $n$ ; en utilisant en outre (8.9), nous obtenons

$$(8.49) \quad p_\infty = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} E(\pi_n - \pi_{n+1}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(0) = 1 - \lim_{z \rightarrow -0} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \gamma_n(0).$$

Au moyen des équations (8.12) et (8.29) [où le signe de la variable d'intégration  $\zeta$  sera inversé], cette formule prend la forme

$$(8.50) \quad \left\{ \begin{aligned} p_\infty &= \lim_{z \rightarrow 1-0} \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \log(1 - z\varphi(-\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta} \right] \\ &[\varphi(\zeta) = \varepsilon_1(\zeta)\varepsilon_2(-\zeta)]. \end{aligned} \right.$$

La dernière intégrale se traite comme celle qui figure dans (7.16). Comme l'inégalité  $|\varphi(-\zeta)| \leq \varphi(-R(\zeta)) < 1$  est vérifiée pour  $-1 \ll R(\zeta) < 0$  ou pour  $0 < R(\zeta) \ll 1$ , selon que  $\varphi'(0) < 0$  ou  $> 0$ , nous amènerons dans le premier cas le chemin d'intégration dans le demi-plan gauche, d'où

$$(8.51) \quad \left\{ \begin{aligned} p_\infty &= \lim_{z \rightarrow 1-0} (1-z) \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \log(1 - z\varphi(-\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta} \right] \\ &[\varphi'(0) < 0], \end{aligned} \right.$$

tandis que pour  $\varphi'(0) > 0$ , nous conserverons (8.50).

Pour  $\varphi'(0) = 0$ , on prendra pour chemin d'intégration l'axe imaginaire, déformé à l'origine (suivant la figure 1a ou 1b) sous forme d'un demi-cercle de rayon  $r$  très petit, d'où à la limite  $r \rightarrow 0$

$$(8.52) \quad p_z = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{1-z} \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \log \frac{1-z\varphi(-it)}{1-z\varphi(it)} \frac{dt}{t} \right] \quad [\varphi'(0) = 0].$$

En vertu de (8.1), les trois dernières intégrales convergent [ respectivement pour  $\varphi'(0) > 0$ ,  $< 0$ ,  $= 0$  ] uniformément par rapport à  $z$  (pour  $|z| \leq 1$ ), de sorte que nous pouvons faire tendre  $z \nearrow 1$  sous les signes d'intégration. Ainsi il vient, en utilisant l'équation (7.29),

$$(8.53) \quad p_z = \begin{cases} 0 & [E(T) \leq E(Y)], \\ \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-1-z+0}^{1-z+0} \log(1-\varphi(-z)) \frac{d\zeta}{\zeta} \right] > 0 & [E(T) > E(Y)]. \end{cases}$$

Mentionnons enfin que dans le premier exemple de ce chapitre, on obtient directement en vertu de (8.33)

$$(8.54) \quad p_z = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(0) = -\frac{\zeta_0(0,1)}{\eta},$$

la racine  $\zeta_0(0,1)$  de (8.34) s'annulant à  $\varepsilon_1(0) < 0$ , selon qu'on a  $\varepsilon_1'(0) \leq \frac{1}{\eta}$  ou  $\varepsilon_1'(0) > \frac{1}{\eta}$ , c'est-à-dire selon que  $E(T) \leq E(Y)$  ou  $E(T) > E(Y)$ .

Dans notre deuxième exemple, on tire pour  $\varepsilon_2$  arbitraire des équations (8.49), (8.41) et (8.39), par le passage à la limite  $z \nearrow 1$ ,

$$(8.55) \quad p_z = 0 \quad [E(T) \leq E(Y)], \quad = 1 - \varepsilon_2'(0) = 1 - \frac{E(Y)}{E(T)} \quad [E(T) > E(Y)] \quad (*)$$

(\*) Les questions étudiées dans les chapitres I, VII et VIII ont été traitées récemment par M. L. Takács [23]. Concernant deux points de détail de ce travail (*loc. cit.*, p. 102 et 104) remarquons : 1° La théorie des problèmes stochastiques relatifs à un système de  $s > 1$  lignes interchangeable ne se limite nullement à des cas où, en raison des hypothèses admises, la queue d'attente se décompose automatiquement en  $s$  queues particulières. Les formules de A. K. Erlang pour le cas où (dans nos notations)  $f_1(t) = 1 - e^{-t}$ ,  $f_2(t) = 1 - e^{-\eta t}$ ,  $\eta < s$ , sont l'exemple contraire le plus ancien. 2° C'est nous qui, en 1930, avons établi dans [12] la formule (1.35) comme exemple d'une théorie plus générale; en 1932, M. Khintchine [8] en a donné une démonstration directe.

## CHAPITRE IX.

PROBLÈMES STOCHASTIQUES CONCERNANT DES « GUICHETS » SANS POSSIBILITÉ D'ATTENTE.

Des problèmes stochastiques d'une autre nature se posent dans l'hypothèse où les visiteurs qui se présentent pendant que le « guichet » est occupé, sont refusés. C'est l'exemple des réseaux téléphoniques sans dispositif d'attente, donc où sont refusés les appels qui, faute de lignes libres, ne peuvent être acheminés immédiatement, qui est à l'origine de cette hypothèse. Les problèmes de Calcul des Probabilités que soulève le fonctionnement d'une seule ligne, sont résolubles par les méthodes utilisées dans les chapitres précédents et nous en traiterons ci-après plusieurs exemples.

Nous conserverons les hypothèses (4.6) et (7.1) sur les v. a. i.  $T_n$  et  $Y_n = X_{n+1} - X_n$  et l'hypothèse (8.1) sur la f. c.  $\varepsilon_2(z)$  de  $f_2(t)$  qui implique la convergence absolue d'intégrales telles que

$$\int_{c-\delta'}^{c-\delta} \varepsilon_2(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \quad [c > 0, \delta' \geq 0];$$

les intégrales (4.26) et (7.2) seront supposées convergentes pour  $z < \delta$  ( $\delta > 0$ ). Par

$$(9.1) \quad s_n = s_n(T_0, Y_0, \dots, T_{n-1}, Y_{n-1}) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

nous désignons l'indicateur de l'événement : « *Le  $n^{\text{ième}}$  visiteur est traité* »;  $s_n$  est donc égal à 1 ou à 0, selon que le  $n^{\text{ième}}$  visiteur est accepté ou refusé.

Nous supposons qu'à l'i. a.  $X_0$  du visiteur initial, le guichet est non occupé, donc que

$$(9.2) \quad s_0 = 1.$$

Au moyen du symbole  $s_n$ , l'instant de départ du  $n^{\text{ième}}$  visiteur peut être écrit sous la forme  $X_n + s_n T_n$ , et pour l'instant de départ du dernier (du plus attardé) des  $n + 1$  premiers visiteurs nous obtenons ainsi

$$(9.3) \quad \max_{i=0, \dots, n} (X_i + s_i T_i).$$

Désignons par  $U_{n+1}$  l'intervalle de temps entre les instants  $X_{n+1}$  et (9.3), donc

$$(9.4) \quad \begin{cases} U_{n+1} = X_{n+1} - \max_{t=0, \dots, n} (X_t + s_t T_t) = \min_{t=0, \dots, n} (X_{n+1} - X_t - s_t T_t) \\ (n = 0, 1, \dots). \end{cases}$$

Dans l'hypothèse présente, le  $(n+1)^{\text{ème}}$  visiteur est traité ou refusé selon que  $U_{n+1} \geq 0$  ou  $< 0$ . Au moyen de la notation (1.12), il vient donc

$$(9.5) \quad s_n = s(U_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

et la probabilité pour que le  $(n+1)^{\text{ème}}$  visiteur soit traité est égale à

$$(9.6) \quad p_{n+1} = E s_{n+1} = E s(U_{n+1}) = 1 - \text{Prob}(U_{n+1} < 0) \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$E$  étant l'opérateur qui figure dans (1.15). De même que dans cette formule, la valeur attribuée dans (9.6) à  $s(0)$  est sans importance, car en raison de la continuité de  $f_2(\gamma)$  [qui résulte de (8.1)] et de l'équation (9.7), l'événement  $U_{n+1} = 0$  est de probabilité nulle.

Afin de démontrer que  $U_{n+1}$  est la différence de deux v. a. i. non négatives, retranchons  $X_n$  des deux termes du deuxième membre de (9.4). Il vient ainsi

$$(9.7) \quad U_{n+1} = Y_n - \max_{t=0, \dots, n} (X_t - X_n + s_t T_t) = Y_n - V_n,$$

la v. a.

$$(9.8) \quad \begin{cases} V_n = \max_{t=0, \dots, n} (X_t - X_n + s_t T_t) = V_n(T_0, \dots, T_n; Y_0, \dots, Y_{n-1}) \\ (n = 0, 1, \dots) \end{cases}$$

étant indépendante de  $Y_n$ , et non négative en raison de l'inégalité

$$V_n \geq s_n T_n \geq 0.$$

Au moyen de (9.7), nous trouvons

$$(9.9) \quad E e^{q U_{n+1}} = E e^{q(Y_n - V_n)} = E e^{q Y_n} E e^{-q V_n} = \varepsilon_2(q) E e^{-q V_n} \quad [0 \leq R(q) < \delta],$$

$\delta$  désignant l'abscisse de convergence de l'intégrale (7.2). Pour obtenir  $E e^{q U_{n+1}}$  et de là, la f. r.  $\text{Prob}(U_{n+1} < t)$ , nous n'avons donc qu'à construire l'e. m.  $E e^{-q V_n} [R(q) \geq 0]$ .

Établissons d'abord pour les  $V_n$  une formule de récurrence. En

utilisant la relation évidente

$$(9.10) \quad \max(a_0, \dots, a_{n+1}) = \max(a_{n+1}, \max(a_0, \dots, a_n)),$$

on tire de (9.8)

$$(9.11) \quad V_{n+1} = \max(s_{n+1} T_{n+1}, \max_{i=0, \dots, n} (X_i - X_{n+1} + s_i T_i)),$$

donc, en vertu de (9.4), (9.5) et (9.7),

$$(9.12) \quad V_{n+1} = \max(s_{n+1} T_{n+1}, -U_{n+1}) = \max(T_{n+1} s(Y_n - V_n), V_n - Y_n).$$

Il vient ainsi

$$V_{n+1} = -U_{n+1} \quad (\text{pour } U_{n+1} < 0), \quad = T_{n+1} s \quad (\text{pour } U_{n+1} > 0),$$

d'où l'on tire

$$e^{-qV_{n+1}} = e^{qU_{n+1}} \quad (U_{n+1} < 0), \quad = e^{-qT_{n+1}} \quad (U_{n+1} > 0),$$

ce qui, au moyen de la notation (1.2), peut s'écrire

$$(9.13) \quad \begin{aligned} e^{-qV_{n+1}} &= (1 - s(U_{n+1})) e^{qU_{n+1}} + s(U_{n+1}) e^{-qT_{n+1}} \\ &= (1 - s(U_{n+1})) e^{qV_{n+1}} + s(U_{n+1}) + s(U_{n+1}) (e^{-qT_{n+1}} - 1) \\ &= \exp[-q(-U_{n+1})^+] \\ &\quad + s(U_{n+1}) (e^{-qT_{n+1}} - 1) \quad (U_{n+1} \neq 0). \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (9.7) et la formule

$$e^{-qa^+} = \frac{q}{2\pi i} \int_C e^{-a\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta(q-\zeta)} \quad [R(q-\zeta) > 0, R(\zeta) > 0],$$

nous avons ensuite

$$(9.14) \quad e^{-qV_{n+1}} = \frac{q}{2\pi i} \int_C e^{\zeta(Y_n - V_n)} \frac{d\zeta}{\zeta(q-\zeta)} + s(Y_n - V_n) (e^{-qT_{n+1}} - 1),$$

et en effectuant ici l'opération  $\int_0^\infty \int_0^\infty \dots df_2(y_n) df_1(t_{n+1})$ , nous obtenons

$$(9.15) \quad \begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-qV_{n+1}} df_2(y_n) df_1(t_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-\zeta V_n} \varepsilon_2(\zeta) \frac{q d\zeta}{\zeta(q-\zeta)} + (1 - f_2(V_n)) (\varepsilon_1(-q) - 1). \end{aligned}$$

Comme les autres intégrations indiquées dans (1.15) peuvent être effectuées sous le signe  $\int$ , il vient ensuite

$$(9.16) \quad \begin{aligned} E e^{-qV_{n+1}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_c E e^{-zV_n \varepsilon_2(z)} \frac{q d\zeta}{\zeta(q-\zeta)} \\ &+ (\varepsilon_1(-q) - 1)(1 - E f_2(V_n)). \end{aligned}$$

Or, en vertu du théorème de P. Lévy et de la relation  $f_2(0) = 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} f_2(V_n) &= f_2(V_n) - f_2(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} (e^{zV_n} - 1) \varepsilon_2(-z) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} (e^{-zV_n} - 1) \varepsilon_2(z) \frac{d\zeta}{\zeta}, \end{aligned}$$

d'où

$$(9.17) \quad E f_2(V_n) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} (E e^{-zV_n} - 1) \varepsilon_2(z) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

D'autre part, il vient

$$(9.18) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_c E e^{-zV_n \varepsilon_2(z)} \frac{q d\zeta}{\zeta(q-\zeta)} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} E e^{-zV_n \varepsilon_2(z)} \frac{d\zeta}{q-\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} (E e^{-zV_n} - 1) \varepsilon_2(z) \frac{d\zeta}{\zeta} + 1. \end{aligned}$$

En portant les expressions (9.17) et (9.18) dans (9.16), nous trouvons

$$(9.19) \quad \left\{ \begin{aligned} E e^{-qV_{n+1}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} E e^{-zV_n \varepsilon_2(z)} \frac{d\zeta}{q-\zeta} \\ &+ \varepsilon_1(-q) \left( 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} (E e^{-zV_n} - 1) \varepsilon_2(z) \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\ &[R(q) > 0; n = 0, 1, \dots]. \end{aligned} \right.$$

En outre, nous tirons des équations (9.2), (9.8) (pour  $n = 0$ ) et (1.26)

$$(9.20) \quad V_0 = s_0 T_0 = T_0, \quad E e^{-qV_0} = \varepsilon_1(-q).$$

Introduisons maintenant la f. g.

$$(9.21) \quad V(q, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n E e^{-qV_n} \quad [R(q) \geq 0, |z| < 1];$$

cette série converge pour  $|z| < 1$ , puisque  $V_n \geq 0$ , donc  $|E e^{-qV_n}| \leq 1$  pour  $R(q) \geq 0$ .

Pour  $V(q, z)$  on déduit de (9.19) et (9.20) l'équation intégrale

$$(9.22) \quad V(q, z) - \frac{z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\zeta, z) \varepsilon_2(\zeta) \frac{d\zeta}{q - \zeta} = c(z) \varepsilon_1(-q),$$

où il a été posé

$$(9.23) \quad c(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( V(\zeta, z) - \frac{1}{1-z} \right) \varepsilon_2(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Substituons dans (9.22) la série

$$(9.24) \quad V(q, z) = c(z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(q) z^n,$$

intégrons au premier membre terme à terme et égalons ensuite le coefficient de  $z^n$  à zéro. Il vient ainsi

$$(9.25) \quad \begin{cases} a_0(q) = \varepsilon_1(-q), & a_n(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_2^2(\zeta) \varepsilon_1(-\zeta) \frac{d\zeta}{q - \zeta} \\ [R(q) > 0, n = 1, 2, \dots], \end{cases}$$

donc

$$(9.26) \quad \begin{cases} V(q, z) = c(z) \left( \varepsilon_1(-q) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z \varepsilon_2(\zeta)}{1 - z \varepsilon_2(\zeta)} \frac{\varepsilon_1(-\zeta) d\zeta}{q - \zeta} \right) \\ [|z| < 1, R(q) > 0]. \end{cases}$$

Au moyen de (9.25) et (8.2) on montre que

$$|a_n(iy)| < c' \quad [-\infty < y < \infty; n = 0, 1, \dots],$$

$c'$  désignant une constante appropriée, ce qui, en vue de la convergence de  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\varepsilon_2(\zeta) d\zeta}{q - \zeta} \right|$ , justifie le procédé d'intégration terme à terme de la série (9.24).

En introduisant la dernière expression dans le deuxième membre de (9.23), on obtient pour  $c(z)$  une équation linéaire dont la solution peut être écrite sous la forme

$$(9.27) \quad c(z) = \frac{1}{1-z} \left[ 1 + \frac{z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \varepsilon_1(-\zeta)}{1 - z \varepsilon_2(\zeta)} \frac{\varepsilon_2(\zeta) d\zeta}{\zeta} \right]^{-1} \quad (|z| < 1)$$

et pour la solution (9.26) de l'équation intégrale (9.22) nous

obtenons ainsi l'expression explicite

$$(9.28) \quad V(q, z) = \frac{1}{1-z} \left[ 1 + \frac{z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\varepsilon_1(-\zeta)}{1-z\varepsilon_2(\zeta)} \frac{\varepsilon_2(\zeta) d\zeta}{\zeta} \right]^{-1} \\ \times \left[ \varepsilon_1(-q) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\varepsilon_1(-\zeta)}{1-z\varepsilon_2(\zeta)} \frac{\varepsilon_2(\zeta) d\zeta}{q-\zeta} \right].$$

De même que la série (9.24), la série de Taylor, en  $z$ , de cette fonction converge uniformément sur les droites  $R(q) = \text{const.}$  et en la substituant dans (9.22), on est en droit d'intégrer terme à terme. De là résulte pour les coefficients tayloriens de (9.28) une formule de récurrence de la forme (9.19) qui, avec la condition initiale (9.20), les détermine de manière univoque. Donc, la fonction (9.28) est en effet celle des solutions de l'équation (9.22) dont les coefficients tayloriens sont les  $E e^{-q\lambda^n}$ .

Puisque dans nos hypothèses, l'intégrale

$$\varepsilon_1(\zeta) = \int_0^{\infty} e^{-\zeta t} df_1(t)$$

converge pour  $\zeta < \delta$  ( $\delta > 0$ ), nous pouvons prendre pour chemin d'intégration des intégrales de (9.28) la droite  $R(\zeta) = -\delta'$  ( $0 < \delta' < \delta$ ). Comme sur cette droite une inégalité de la forme  $|\varepsilon_2(\zeta)| \leq 1 - \delta'' < 1$  est vérifiée, il existe des constantes  $z_0 > 1$  telles que les intégrales qui figurent dans (9.28), considérées en tant que fonctions de  $z$ , soient holomorphes pour  $|z| \leq z_0$ . Nous sommes donc en droit d'étendre le chemin d'intégration de l'intégrale

$$(9.29) \quad E e^{-q\lambda^n} = \frac{1}{2\pi i} \oint V(q, z) z^{-n-1} dz.$$

au-delà du cercle unité, en vue d'évaluer  $E e^{-q\lambda^n}$  pour les grandes valeurs de  $n$ . Pour  $n \rightarrow \infty$ , nous obtenons ainsi, en admettant, ce qui sera démontré plus loin, que la fonction (9.28) n'a, pour  $|z| \leq 1$ , qu'un seul pôle (du premier ordre)  $z = 1$ ,

$$(9.30) \quad E e^{-q\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} E e^{-q\lambda^n} = \left[ 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-0}^{+\infty-0} \frac{1-\varepsilon_1(-\zeta)}{1-\varepsilon_2(\zeta)} \frac{\varepsilon_2(\zeta) d\zeta}{\zeta} \right]^{-1} \\ \times \left[ \varepsilon_1(-q) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-0}^{+\infty-0} \frac{z\varepsilon_1(-\zeta)}{1-\varepsilon_2(\zeta)} \frac{\varepsilon_2(\zeta) d\zeta}{q-\zeta} \right],$$

d'où, en vertu de (9.9), nous tirons

$$(9.31) \quad E e^{qU} = \lim_{n \rightarrow \infty} E e^{qU_n} = \varepsilon_2(q) E e^{-qV} \quad [0 \leq R(q) < \delta].$$

Il nous reste encore à démontrer que la fonction

$$(9.32) \quad f(z) = 1 + \frac{z}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1 - \varepsilon_1(-\zeta)}{1 - z \varepsilon_1(\zeta)} \frac{\varepsilon_2(\zeta) d\zeta}{\zeta}$$

qui figure au dénominateur de (9.28), ne s'annule pas pour  $|z| \leq 1$ . En amenant le chemin d'intégration de (9.32) à gauche de l'origine et en changeant ensuite le signe de  $\zeta$ , il vient

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \frac{z \varepsilon_1(-\zeta) \varepsilon_1(\zeta)}{1 - z \varepsilon_1(-\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \frac{z \varepsilon_2(-\zeta)}{1 - z \varepsilon_2(-\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

$[|z| \leq 1],$

la deuxième intégrale étant nulle en vertu de (8.2). Dans la première intégrale du deuxième membre, nous sommes en droit de remplacer  $\frac{1}{1 - z \varepsilon_1(-\zeta)}$  par la série  $\sum_0^{\infty} z^n \varepsilon_1^n(-\zeta)$  et d'intégrer terme à terme, d'où résulte la formule

$$(9.33) \quad f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \varepsilon_2^n(-\zeta) \varepsilon_1(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Or  $\varepsilon_2^n(\zeta) \varepsilon_1(-\zeta)$  est la f. c. de la v. a.

$$(9.34) \quad \Xi_n = Y_0 + \dots + Y_{n-1} - T_0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

En posant  $F_n(t) = \text{Prob}(\Xi_n < t)$  et en appliquant le théorème de P. Lévy, pour  $t = 0$ , sous la forme (1.24), on voit donc que le coefficient de  $z^n$ , dans (9.33), est égal à  $F_n(0)$ , de sorte que

$$(9.35) \quad f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n F_n(0);$$

nous en tirons la relation

$$(9.36) \quad (1-z)f(z) = 1 - [(1-F_1(0))z + (F_1(0)-F_2(0))z^2 + \dots].$$

Or il est évident qu'en vertu de (8.1),

$$F_1(0) < 1 \quad \text{et} \quad F_{n+1}(0) < F_n(0) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Pour  $|z| < 1$ , le module de la série entre crochets dont les coefficients sont  $> 0$  et ont pour somme 1, est donc  $< 1$ ; de même, pour  $|z| = 1$  et  $z \neq 1$ , le module de cette série est  $< 1$ . Il vient donc

$$(9.37) \quad f(z) \neq 0 \quad (|z| \leq 1).$$

C. Q. F. D.

**Calcul des probabilités  $p_n$  [équ. (9.6)].** — En vertu de (9.2), il vient  $p_0 = s_0 = 1$ , et au moyen des équations (9.6), (9.7) et (9.17) nous obtenons successivement

$$(9.38) \quad \begin{aligned} p_n &= E s(U_n) = E s(Y_{n-1} - V_{n-1}) = E \int_0^\infty df_2(y_{n-1}) s(y_{n-1} - V_{n-1}) \\ &= E(1 - f_2(V_{n-1})) = 1 - E f_2(V_{n-1}) \\ &= 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} (E e^{-\zeta V_{n-1}} - 1) \varepsilon_2(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

En utilisant les équations (9.21), (9.23), (9.27) et (9.32), nous trouvons ensuite la formule

$$(9.39) \quad \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n &= \frac{1}{1-z} + \frac{z}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left( V(\zeta, z) - \frac{1}{1-z} \right) \varepsilon_2(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= c(z) = [(1-z)f(z)]^{-1}. \end{aligned}$$

Au moyen de l'opération  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint \dots z^{-n-1} dz$  on en déduit

$$(9.40) \quad p = \lim p_n = \frac{1}{f(1)} = \left[ 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \frac{1 - \varepsilon_1(-\zeta)}{1 - \varepsilon_2(\zeta)} \frac{\varepsilon_2(\zeta) d\zeta}{\zeta} \right]^{-1}.$$

$p$  est la probabilité pour qu'en régime stationnaire un visiteur soit traité. En téléphonie, la probabilité contraire  $1 - p$  est appelée probabilité de perte ou « perte de communications ».

**Construction de f. r. à plusieurs variables.** — Des problèmes concernant des v. a. vectorielles, analogues à ceux qui ont été étudiés au chapitre VI et qui se traitent à peu près de la même manière, se posent aussi dans l'hypothèse présente. Mentionnons, à titre d'exemple, la f. r.

$$(9.41) \quad \text{Prob}(U_n < t, U_{n+n_1} < t_1) \quad (-\infty < t, t_1 < \infty)$$

qui correspond à la f. r. (6.1), et dont le calcul se ramène à la construction de la f. g. de sa f. c., à savoir de la série

$$(9.42) \quad \sum_{n, n_1=0}^{\infty} z^n z_1^{n_1} E e^{qU_n + q_1 U_{n_1}}, \quad [0 \leq R(q), R(q_1) < \delta; |z|, |z_1| < 1].$$

En vue d'obtenir cette f. g. on supposera, au lieu de (9.2), que le « guichet » est occupé jusqu'à l'instant  $X_0 - U_0$  et l'on construira d'abord la f. g.  $\sum_0^{\infty} z^n E e^{qU_n}$  en fonction du paramètre ( $U_0 \geq 0$ ) qui correspond au paramètre  $\tau_0$  des équations (1.44) et (7.15). Cela nécessite la résolution d'une équation intégrale de la forme (9.22) qui a pour deuxième membre la fonction  $(c(z) - 1) \varepsilon_1(-q) + a(q)$ ; on a posé ici

$$(9.43) \quad a(q) = \varepsilon_1(-q) s(U_0) + e^{qU_0} s(-U_0).$$

En procédant de la même manière que lors de la résolution de (9.22), on obtient la solution

$$(9.44) \quad \left\{ \begin{aligned} V(q, z; U_0) &= a(q) + \frac{z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(\zeta) \varepsilon_2(\zeta)}{1 - z \varepsilon_2(\zeta)} \frac{d\zeta}{q - \zeta} \\ &+ \frac{1}{f(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(\zeta) \varepsilon_0(\zeta)}{1 - z \varepsilon_2(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\times \left[ z \varepsilon_1(-q) + \frac{z^2}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_1(-\zeta) \varepsilon_2(\zeta)}{1 - z \varepsilon_2(\zeta)} \frac{d\zeta}{q - \zeta} \right] \\ &[|z| < 1, |z \varepsilon_2(\zeta)| < 1, R(q) > 0]. \end{aligned} \right.$$

Pour tirer de là la f. g. (9.42), on multipliera le deuxième membre de cette équation où  $q, z, U_0$  seront remplacés respectivement par  $q_1, z_1, U_n$ , par  $\varepsilon_2(q_1) z^n e^{qU_n}$ , sommerà ensuite de  $n = 0$  jusqu'à  $n = \infty$  et utilisera la formule (9.28).

*Exemple.* — Pour  $f_2(t) = 1 - e^{-\eta t}$ ,  $\varepsilon_2(\zeta) = \frac{\eta}{\eta - \zeta}$ , les équations (9.30) et (9.31) donnent respectivement

$$(9.45) \quad \left\{ \begin{aligned} E e^{-q\lambda} &= \frac{1}{1 + \eta \varepsilon_1'(0)} \left[ \frac{q - \eta}{q} \varepsilon_1(-q) + \frac{\eta}{q} \right], \\ E e^{qU} &= \frac{\eta}{1 + \eta \varepsilon_1'(0)} \left[ \frac{\eta}{\eta - q} - \varepsilon_1(-q) \right] \frac{1}{q}. \end{aligned} \right.$$

Il en résulte en vertu de (1.24) :

$$(9.46) \quad \text{Prob}(U < t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\eta t} \mathbb{E} e^{-\eta U} \frac{dq}{q}$$

$$= \frac{\eta}{1 + \eta \varepsilon'_1(0)} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\eta t} \left( \varepsilon_1(q) - \frac{\eta}{\eta + q} \right) \frac{dq}{q^2},$$

donc, en utilisant (1.26),

$$(9.47) \quad \text{Prob}(U < t) = 1 - \frac{1}{1 + \eta \varepsilon'_1(0)} e^{-\eta t} \quad (t \geq 0),$$

$$= \frac{\eta}{1 + \eta \varepsilon'_1(0)} \int_{-t}^{\infty} (x + t) df_1(x) \quad (t < 0),$$

et, en particulier,

$$(9.48) \quad p = \text{Prob}(U \geq 0) = 1 - \text{Prob}(U < 0) = \frac{1}{1 + \eta \varepsilon'_1(0)}.$$

De (9.32) et (9.39) résulte la formule

$$(9.49) \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{1}{1 - z \varepsilon_1(\eta z - \eta)} \quad [f_2(t) = 1 - e^{-\eta t}, |z| < 1].$$

Prenons ici pour  $f_1(t)$  la f. r. (2.13), normée suivant (1.33), dont la f. c. est donnée par (2.16), les positions permises du point  $(b_1, b_2)$  étant représentées sur la figure 3. En substituant cette f. c. dans (9.49), nous obtenons

$$\sum_0^{\infty} p_n z^n = 1 + \frac{1}{1 + \eta} \frac{z}{1 - z} + \frac{c_1 z}{1 - c_2 z},$$

où l'on a posé

$$c_1 = \frac{\eta^2}{1 + \eta} \frac{(b_1 - 1)(1 - b_2)}{(b_1 + \eta)(b_2 + \eta)}, \quad c_2 = 1 - \frac{(1 + \eta)b_1 b_2}{(b_1 + \eta)(b_2 + \eta)}$$

$$= \frac{\eta^2 + \eta(b_1 + b_2 - b_1 b_2)}{(b_1 + \eta)(b_2 + \eta)}.$$

En vertu de l'inégalité (2.18), il vient  $0 < c_2 < 1$ ; d'autre part, la figure 3 montre que selon le choix des paramètres  $b_1$  et  $b_2$ ,  $c_1$  sera positif, nul ou négatif.

Donc dans l'hypothèse d'une répartition poissonnienne des i. a., et sous la condition initiale (9.2), la probabilité  $p_n = \frac{1}{1 + \eta} + c_1 c_2^{n-1}$  tendra, selon le choix des paramètres de la f. r.  $f_1(t)$ , en croissant

ou en décroissant vers sa valeur limite  $\frac{1}{1+\eta}$ , ou sera même indépendante de  $n$ .

## NOTE.

## RÉSOLUTION DE DEUX ÉQUATIONS INTÉGRALES SINGULIÈRES DE DEUXIÈME ESPÈCE.

1° Pour traiter les problèmes du chapitre VII, nous avons besoin d'une certaine solution de l'équation intégrale

$$(1) \quad \begin{cases} u(x) - \frac{z}{2\pi i} \int_C \left( \frac{1}{x-\xi} + \frac{1}{\xi-x_0} \right) \varphi(-\xi) u(\xi) d\xi = e^{-\tau_0 x} \\ [R(x-\xi), R(\xi-x_0) > 0, |R'(\xi)| < \delta]. \end{cases}$$

Ici, l'intégrale de Stieltjes

$$(2) \quad \varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\xi t} df(t) \quad (|R(\xi)| < \delta)$$

qui, par hypothèse, converge pour  $|R(\xi)| < \delta$ , est la f. c. d'une f. r. donnée  $f(t)$ ;  $z$  et  $x_0$  sont des paramètres complexes et  $\tau_0 (\geq 0)$ , une constante.

La résolution de cette équation peut être ramenée à celle de l'équation intégrale

$$(3) \quad u(x) - \frac{z}{2\pi i} \int_C \left( \frac{1}{x-\xi} + \frac{1}{\xi-x_0} \right) \varphi(-\xi) u(\xi) d\xi = 1$$

qui, comme nous allons le montrer, est vérifiée par la fonction

$$(4) \quad \begin{cases} u(x, x_0, z) = \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\zeta} \left( \frac{1}{x-\zeta} + \frac{1}{\zeta-x_0} \right) \log(1-z\varphi(-\zeta)) d\zeta \right] \\ (R(x-\zeta), R(\zeta-x_0) > 0, |z| < z_0 = [\max_{\zeta \in C_\zeta} |\varphi(-\zeta)|]^{-1}) \end{cases}$$

Substituons ici à  $\log(1-z\varphi(-\zeta))$  la série

$$(5) \quad -\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n} \varphi^n(-\zeta) = -\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n} \int_{-x}^{\infty} \dots \int_{-x}^{\infty} e^{-\zeta \sum_1^n t_i} df(t_1) \dots df(t_n) \quad (|z| < z_0)$$

qui converge uniformément sur  $C_\zeta$ . En raison de la convergence

de  $\int_C \left| \frac{1}{x-\zeta} + \frac{1}{\zeta-x_0} \right| |d\zeta|$ , on peut alors intégrer terme à terme, d'où

$$(6) \quad u(x, x_0, z) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \left[ \underbrace{\int \dots \int e^{-x \sum_1^n t_i} df(t_1) \dots df(t_n)}_{\sum_1^n t_i \geq 0} + \underbrace{\int \dots \int e^{-x_0 \sum_1^n t_i} df(t_1) \dots df(t_n)}_{\sum_1^n t_i < 0} \right].$$

Par suite de la convergence de (2), cette fonction est bornée pour

$$(7) \quad R(x) \geq -\delta_0 > -\delta, \quad R(x_0) \leq \delta_0 < \delta, \quad |z^{-1}| \geq z_1^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\delta_0 |t|} df(t).$$

Par conséquent,  $u(x, x_0, z)$  satisfait à l'équation

$$(8) \quad \begin{cases} u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{x-\xi} + \frac{1}{\xi-x_0} \right) u(\xi) d\xi \\ [R(x-\xi), R(\xi-x_0) > 0, |R(\xi)| \leq \delta_0], \end{cases}$$

car,  $u(\xi, x_0, z)$  étant bornée à droite de  $C\xi$ , la dernière intégrale est égale au résidu de sa fonction à intégrer en  $\xi = x$ .

En multipliant ensuite l'équation (6) par

$$1 - z \varphi(-x) = \exp \left[ - \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n} \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^x e^{-x \sum_1^n t_i} df(t_1) \dots df(t_n) \right],$$

nous obtenons

$$(9) \quad (1 - z \varphi(-x)) u(x, x_0, z) = \exp \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n} \underbrace{\int \dots \int}_{\sum_1^n t_i < 0} \left( e^{-x_0 \sum_1^n t_i} - e^{-x \sum_1^n t_i} \right) df(t_1) \dots df(t_n),$$

et cette fonction est bornée pour  $R(x) \leq \delta_0$ ,  $R(x_0) \leq \delta_0 < \delta$  et  $|z|$  assez petit, et égale à 1 pour  $x = x_0$ . Donc  $u(x, x_0, z)$  satisfait à

## Équation

$$(10) \quad \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \left( \frac{1}{x-\xi} + \frac{1}{\xi-x_0} \right) (1-z\varphi(-\xi)) u(\xi) d\xi = 1 \right. \\ \left. [R(x-\xi), R(\xi-x_0) > 0], \right.$$

puisque,  $(1-z\varphi(-\xi)) u(\xi, x_0, z)$  étant bornée à gauche de  $C_\xi$ , le premier membre de (10) se réduit au résidu en  $\xi = x_0$ , lequel est = 1.

En ajoutant les équations (8) et (10) membre à membre, nous voyons que la fonction (4) satisfait à l'équation (3),

C. Q. F. D.

En effectuant maintenant dans les deux membres de l'équation (3) l'opération

$$(11) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{x e^{-x\tau_0}}{(x-x_0)x_0} \dots dx_0 \quad [R(x-x_0) > 0, R(x_0) > 0, \tau_0 \geq 0],$$

nous obtenons l'équation

$$(12) \quad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{x e^{-x\tau_0} u(x, x_0, z)}{(x-x_0)x_0} dx_0 - \frac{z}{(2\pi i)^2} \int_{C_{x_0}} \frac{x e^{-x\tau_0} dx_0}{(x-x_0)x_0} \\ \times \int_{\zeta} \frac{x-x_0}{(x-\xi)(\xi-x_0)} \varphi(-\xi) u(\xi, x_0, z) d\xi = e^{-x\tau_0}.$$

L'intégrale itérée qui figure ici converge absolument, car

$$|e^{-x\tau_0} \varphi(-\xi) u(\xi, x_0, z)|$$

est borné et  $\int_{C_{x_0}} \int_{\zeta} \left| \frac{dx_0 d\xi}{(x-\xi)(\xi-x_0)x_0} \right|$  converge. Les intégrations par rapport à  $x_0$  et à  $\zeta$  peuvent donc être interverties, ce qui montre que la fonction

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{u}(x, z; \tau_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{x e^{-x\tau_0} u(x, x_0, z)}{(x-x_0)x_0} dx_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{x e^{-x\tau_0}}{(x-x_0)x_0} \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \left( \frac{1}{x-\zeta} + \frac{1}{\zeta-x_0} \right) \log(1-z\varphi(-\zeta)) d\zeta \right] dx_0 \\ &[R(x-\zeta), R(\zeta-x_0), R(x_0) > 0, |R(\zeta)| < \delta] \end{aligned} \right.$$

satisfait à l'équation intégrale (1).

Il nous reste à démontrer que cette solution de (1) coïncide avec

la fonction  $\Phi(x, z) = \sum_0^{\infty} z^n E e^{-x\tau_n}$  [équ. (1.39) et (7.14)], dont les coefficients de Taylor satisfont à la formule de récurrence (7.13). Observons dans ce but que les coefficients de la série de Taylor

$$(14) \quad u(x, x_0, z) = \sum_0^{\infty} a_n(x, x_0) z^n$$

vérifient une inégalité de la forme

$$|a_n(x, x_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint u(x, x_0, z) z^{-n-1} dz \right| < cz_1^{-n},$$

puisque  $|u(x, x_0, z)| < c$  [pour des  $x, x_0, z$  suivant (7)].

Substituant la série (14) dans (3), nous sommes donc en droit d'intégrer terme à terme, d'où résulte pour les  $a_n$  la formule de récurrence

$$(15) \quad \begin{cases} a_{n+1}(x, x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\xi}} \frac{x-x_0}{(x-\xi)(\xi-x_0)} \varphi(-\xi) a_n(\xi, x_0) d\xi \\ [R(x-\xi), R(\xi-x_0) > 0]. \end{cases}$$

En effectuant ensuite dans les deux membres de cette formule l'opération (11) et en intervertissant, pour la même raison que dans (12), les intégrations  $\int_{C_{x_0}}$  et  $\int_{C_{\xi}}$ , nous obtenons pour les coefficients

$$(16) \quad A_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0} \frac{x e^{-x_0\tau_0}}{(x-x_0)x_0} a_n(x, x_0) dx_0$$

de la série de Taylor

$$(17) \quad \tilde{u}(x, z; \tau_0) = \sum_0^{\infty} A_n(x) z^n,$$

la formule de récurrence

$$(18) \quad \begin{cases} A_{n+1}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\xi}} \left( \frac{1}{x-\xi} + \frac{1}{\xi} \right) \varphi(-\xi) A_n(\xi) d\xi \\ (n = 0, 1, \dots; A_0(x) = e^{-x\tau_0}). \end{cases}$$

Cette formule coïncide, aux notations près, avec (7.13), ce qui démontre l'identité des fonctions  $\tilde{u}(x, z; \tau_0)$  et  $\Phi(x, z; \tau_0)$ .

2° En utilisant la notation

$$(19) \quad \int_{\mathcal{C}}^* \dots d\xi = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-iN+\delta_0}^{iN+\delta_0} \dots d\xi \quad (\delta_0 > 0),$$

considérons l'équation intégrale

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x) - \frac{z}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}}^* \varepsilon_1(\xi - q) \varepsilon_2(-\xi) u(\xi) \frac{d\xi}{\xi - x} = 1 \\ [\operatorname{R}(\xi - x) > 0, \operatorname{R}(\xi - q) < \delta] \end{array} \right.$$

qui est plus générale que l'équation (8.26) du chapitre VIII et où  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont les intégrales (1.26) et (7.2), supposées convergentes pour  $z < \delta$ . Cette équation est vérifiée par la fonction

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x, q, z) = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}}^* \log(1 - z \varepsilon_1(\zeta - q) \varepsilon_2(-\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta - x} \right] \\ [\operatorname{R}(\zeta - x) > 0, \operatorname{R}(\zeta - q) < \delta], \end{array} \right.$$

où nous avons posé

$$(22) \quad \alpha(z) = \exp \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{2n} \underbrace{\int \dots \int}_{\sum_1^n (l_{i-1}) = 0} e^{-\gamma \sum_1^n l_i} df_1(t_1) \dots df_1(t_n) df_2(\gamma_1) \dots df_2(\gamma_n).$$

La démonstration est tout analogue à celle qui a été donnée dans la première partie de cette Note, les équations (6), (8) et (10) étant respectivement remplacées par

$$(23) \quad u(x, q, z) = \frac{2}{1 + \alpha^2} \exp \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n} \underbrace{\int \dots \int}_{\sum_1^n (l_{i-1}) \geq 0} e^{(x-q) \sum_1^n l_i - z \sum_1^n \gamma_i} df_1(t_1) \dots df_2(\gamma_n),$$

$$(24) \quad u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}}^* u(\xi) \frac{d\xi}{\xi - x} + \frac{1}{2} u(-\infty) \quad [\operatorname{R}(\xi - x) > 0],$$

$$(25) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}}^* (1 - z \varepsilon_1(\xi - q) \varepsilon_2(-\xi)) u(\xi) \frac{d\xi}{\xi - x} = \frac{1}{1 + \alpha^2} = 1 - \frac{1}{2} u(-\infty).$$

Quand l'une au moins des f. r.  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  est continue, toutes les intégrales qui figurent dans (22), sont nulles, de sorte qu'alors  $\alpha(z) \equiv 1$ .

Or, l'équation intégrale (8.26) a été établie dans l'hypothèse (8.1) qui entraîne, outre la continuité de  $f_2(t)$  [d'où  $a(z) \equiv 1$ ], la convergence absolue des intégrales figurant dans (20) et (22), ce qui nous permet d'y écrire  $\int_C$  au lieu de  $\int_C^*$ . Dans l'hypothèse (8.1), la solution de (20) prend donc la forme

$$(26) \quad u(x, q, z) = \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_C \log(1 - z \varepsilon_1(\zeta - q) \varepsilon_2(-\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta - x} \right].$$

En raisonnant comme dans la première partie de cette Note, on démontre ensuite que les coefficients de la série de Taylor de (26) satisfont à une formule de récurrence de la forme (8.25), d'où résulte l'identité des fonctions (26) et  $I(x, q, z)$  [équ. 8.18].

Notons que dans [16] nous avons montré comment on parvient à établir que la solution en question (c'est-à-dire celle dont la série de Taylor en  $z$  peut être intégrée terme à terme) d'une équation intégrale telle que (3) doit pouvoir être représentée sous la forme (4).

---

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] É. BOREL, *Sur l'emploi du théorème de Bernoulli pour faciliter le calcul d'une infinité de coefficients. Application au problème de l'attente à un guichet* (C. R. Acad. Sc., t. 214, 1942, p. 452).
- [2] H. CRAMÉR, *Random variables and probability distributions* (Cambridge Tracts in Mathematics, n° 36, Cambridge, 1937).
- [3] H. CRAMÉR, *Mathematical methods of statistics*, Princeton, 1946.
- [4] A. K. ERLANG, *Œuvres complètes* (in E. BROCKMEYER, H. L. HALSTRØM et A. JENSEN. *The life and works of A. K. Erlang*, Copenhagen, 1948).
- [5] W. FELLER, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. I (New-York, Wiley, 1950).
- [6] D. G. KENDALL, *Some problems in the theory of queues* [J. R. Stat. Soc. (B), t. 13, 1951, p. 151-185].
- [7] D. G. KENDALL, *Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain* (Ann. Math. Stat., t. 24, 1953, p. 338-354).

- [8] A. J. KHINTCHINE, *Théorie mathématique de la queue stationnaire* (*Mat. Sbornik*, t. 39, 1932, p. 73-83).
- [9] P. LÉVY, *Calcul des Probabilités*, Paris, 1925.
- [10] P. LÉVY, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, 2<sup>e</sup> éd., Paris, 1954.
- [11] D. V. LINDLEY, *The theory of queues with a single server* (*Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 48, 1951, p. 277-289).
- [12] F. POLLACZEK, *Ueber eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie* (*Math. Z.*, t. 32, 1930, p. 64 et 729).
- [13] F. POLLACZEK, *Ueber zwei Formeln aus der Theorie des Wartens vor Schaltergruppen* (*Elektr. Nachrichtentechn.*, t. 8, 1931, p. 256-268).
- [14] F. POLLACZEK, *Gesprächsverluste und Wartezeiten* (*Elektr. Nachrichtentechn.*, t. 8, 1931, p. 279-289).
- [15] F. POLLACZEK, *Ueber das Warteproblem* (*Math. Z.*, t. 38, 1934, p. 492-537).
- [16] F. POLLACZEK, *Résolution de certaines équations intégrales de deuxième espèce* (*J. Math. pures et appl.*, 9<sup>e</sup> série, t. 24, 1945, p. 73-94).
- [17] F. POLLACZEK, *Répartition des délais d'attente des avions...* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1901 et 2286).
- [18] F. POLLACZEK, *Délais d'attente des avions atterrissant selon leur ordre d'arrivée sur un aéroport à  $s$  pistes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 1246).
- [19] F. POLLACZEK, *Sur la répartition des périodes d'occupation ininterrompue d'un guichet* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 2042).
- [20] F. POLLACZEK, *Fonctions caractéristiques de certaines répartitions définies au moyen de la notion d'ordre. Application à la théorie des attentes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 2334).
- [21] W. L. SMITH, *On the distribution of queueing times* (*Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 49, 1953, p. 449-461).
- [22] F. SMITHIES, *Singular integral equations* (*Proc. London Math. Soc.*, t. 46, 1940, p. 409-466).
- [23] L. TAKÁCS, *Investigation of waiting time problems by reduction to Markov processes*, (*Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, t. 6, 1955, p. 101-129).
- [24] E. C. TITCHMARSH, *The theory of functions*, Oxford, 1932.
- [25] É. VAULOT, *Délais d'attente des appels téléphoniques traités au hasard* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 222, 1946, p. 268).
- [26] E. T. WHITTAKER et G. N. WATSON, *A Course of modern analysis*, 4<sup>e</sup> éd., Cambridge, 1927.
- [27] R. COURANT et D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, New-York, 1953. t. 1, chap. VII, § 6.

## TABLE DES MATIÈRES.

---

INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I. — Répartition des délais d'attente dans l'hypothèse d'une répartition poissonnienne des instants d'arrivée.....	4
CHAPITRE II. — Application des formules du chapitre I.....	24
CHAPITRE III. — Répartition bernoullienne des instants d'arrivée....	35
CHAPITRE IV. — L'hypothèse du délai supplémentaire virtuel.....	50
CHAPITRE V. — Délais d'attente quantifiés.....	55
CHAPITRE VI. — Construction de fonctions de répartition à plusieurs variables.....	63
CHAPITRE VII. — Répartition non poissonnienne des instants d'arrivée (« general input »).....	75
CHAPITRE VIII. — Répartition des périodes d'occupation ininterrompue d'un guichet.....	93
CHAPITRE IX. — Problèmes stochastiques concernant des « guichets » sans possibilité d'attente.....	106
NOTE. — Résolution de deux équations intégrales singulières de deuxième espèce.....	116

