

GEORGES HEILBRONN

**Intégration des équations différentielles ordinaires
par la méthode de Drach**

Mémoires des sciences mathématiques, fascicule 133 (1956)

http://www.numdam.org/item?id=MSM_1956__133__1_0

© Gauthier-Villars, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,
 DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COIMBRE, CRACOVIE, KIEW,
 MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
 DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
 Professeur à la Sorbonne,
 Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXXXIII

Intégration des équations différentielles ordinaires
 par la méthode de Drach

Par Georges HEILBRONN



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1956



Copyright by Gauthier-Villars, 1956.
Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

INTÉGRATION
DES
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES
PAR LA MÉTHODE DE DRACH

Par Georges HEILBRONN.



INTRODUCTION.

Nous présentons aujourd'hui au public mathématique l'application de la théorie d' « intégration logique » de Drach aux équations différentielles. C'est le travail que nous annonçons lors de la parution du fascicule consacré aux équations aux dérivées partielles et nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance à M. Villat, qui rendant hommage au génie de Drach, a bien voulu, une fois encore, nous encourager à rédiger notre modeste Ouvrage et lui réserver une place dans la présente Collection.

Nous pensons donner ici une vue plus juste de la profondeur de la pensée de Drach, en montrant la puissance d'une méthode appliquée à des problèmes d'une grande variété, qui, tous, avaient arrêté les plus éminents analystes. C'est la raison pour laquelle nous avons insisté surtout sur les applications, de façon que le lecteur se rende compte qu'il ne s'agit pas ici de théories stériles, si harmonieuses en elles-mêmes, si séduisantes à l'esprit qu'elles puissent paraître.

Dans ce sens, nous tenons à souligner la finesse de l'analyse de l'équation des géodésiques, qui l'a conduit à la solution d'un problème que tant de géomètres avaient en vain tenté de résoudre ; l'élégance de la méthode qui lui a permis de déterminer les intégrales algébriques

de l'équation de Riccati, épuisant ainsi totalement la question. Le lecteur y trouvera, outre des résultats originaux, une synthèse des travaux d'une pléiade d'illustres analystes.

Enfin, nous tenons à rappeler les propres termes de Dirichlet, qui montrent clairement le but qu'il visait : « Tendance à la généralisation et à la simplification de la Science », « en reprenant tout à pied-d'œuvre, les éléments étudiés étant caractérisés dès le début par un petit nombre de propriétés, choisies en raison même des applications possibles ».

CHAPITRE I

L'INTEGRATION LOGIQUE

I — L'intégration logique [1]

1 Le problème de l'intégration logique consiste à déterminer la nature de la transcendante définie par une équation différentielle ou un système complètement intégrable. Ce problème s'oppose, dans sa nature intime, au problème de Cauchy et à tout problème d'intégration avec conditions aux limites.

La première question qui se pose, est la suivante : étant donné un domaine de rationalité $[\Delta]$, reconnaître si l'équation (ou le système) admet des solutions rationnelles dans ce domaine et les déterminer, si elles existent. Ce problème préliminaire devra être résolu dans chaque cas particulier. Ayant résolu ce problème et, éventuellement, écarté ces solutions, nous obtenons une équation (ou un système) irréductible S , définissant une fonction z .

2 Considérons maintenant une transcendante ζ définie par un système Σ . Deux cas sont possibles :

1° Le système $S + \Sigma$, aux inconnues z, ζ est *irréductible*, c'est-à-dire que toutes les relations rationnelles entre z, ζ et leurs dérivées sont des conséquences nécessaires des équations du système $S + \Sigma$. Dans ce cas, les transcendentes z et ζ sont étrangères l'une à l'autre. L'adjonction de ζ et du système Σ est inutile.

Dès maintenant, il est nécessaire d'introduire la distinction entre

dérivées principales et paramétriques. Les premières se calculent à l'aide des secondes dans les équations $S + \Sigma$.

Soit un système (Φ) de relations

$$\varphi_i(z, \zeta) = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

les φ_i étant rationnelles et ne portant que sur les dérivées paramétriques et les variables z et ζ elles-mêmes, que nous adjoignons au système $S + \Sigma$. Il conviendra de former alors les conditions d'intégrabilité du système $S + \Sigma + \Phi$, qui seront les conditions que doivent vérifier les φ_i , et de s'assurer s'il y a des solutions rationnelles. Si ce problème n'a pas de solution, le système est irréductible et les transcendentes z et ζ sont étrangères.

2° Dans le cas contraire, le système $S + \Sigma$ est réductible; nous dirons que le système S est *imprimitif* ⁽¹⁾. Le système $S + \Sigma$ doit être remplacé par $S + \Sigma + \Phi$.

La méthode que nous venons d'exposer, peut être appliquée à nouveau par adjonction d'une nouvelle transcendante ζ_1 définie par un système Σ_1 . Le nombre des dérivées principales, qui est fini, augmente par chaque adjonction aux dépens des dérivées paramétriques. Le nombre d'adjonctions utiles est donc fini.

Il est bien entendu que, pour que la méthode présente un intérêt, il faut que les transcendentes ζ, ζ_1, \dots soient connues. Il convient donc d'étudier au préalable des transcendentes dont les propriétés soient simples. C'est en l'adjonction successive de ces transcendentes que consiste l'« intégration logique ». Il est clair que ce problème est en général inabordable. On devra se contenter de solutions aussi étendues que possible, dépendant de constantes ou de fonctions arbitraires.

II. — Le groupe de rationalité.

3. Pour plus de clarté, nous supposons que le système se réduit à une seule équation aux dérivées partielles et que, de plus, cette

(1) Cette expression, empruntée à la théorie des groupes, sera justifiée par la considération du *groupe de rationalité* du système.

équation est linéaire ⁽²⁾ :

$$(1) \quad X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

et soit z_1, z_2, \dots, z_n un système fondamental de solutions. Toute transformation à n variables sur les z_i conduit à un nouveau système de solutions, également fondamental :

$$(2) \quad z_i = f_i(z_1, z_2, \dots, z_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Considérons maintenant les déterminants fonctionnels

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} D = \frac{D(z_1, \dots, z_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}, \quad D_1 = \frac{D(z, z_2, \dots, z_n)}{D(x, x_2, \dots, x_n)}, \quad \dots, \\ D_n = \frac{D(z, z_1, \dots, z_{n-1})}{D(x, x_1, \dots, x_{n-1})} \end{array} \right.$$

et la relation évidente

$$(4) \quad \frac{D(z, z_1, \dots, z_n)}{D(x, x_1, \dots, x_n)} = 0.$$

En développant celle-ci par rapport à la première ligne, il vient

$$(5) \quad D \frac{\partial z}{\partial x} + D_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + D_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

(5) doit être identique à (1); donc

$$(6) \quad \frac{D}{1} = \frac{D_1}{A_1} = \dots = \frac{D_n}{A_n},$$

où D est essentiellement différent de zéro.

Les expressions $\frac{D_1}{D}, \dots, \frac{D_n}{D}$ sont donc des invariants différentiels de la transformation opérée sur les z_i . Cette transformation n'est autre qu'une transformation du *groupe ponctuel général* à n variables Γ_n , dont nous venons de construire les n invariants différentiels indépendants. Il est facile de voir qu'il n'y en a pas d'autre. Soit en effet,

$$\Phi \left(z_1, \dots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \dots, \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \right)$$

un nouvel invariant. Le système

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z_i}{\partial x_1} + \dots + A_n \frac{\partial z_i}{\partial x_n} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(2) On sait que toute équation différentielle ordinaire peut se ramener à cette forme.

permet de calculer les $\frac{\partial z_i}{\partial x}$ à l'aide des A_k et des $\frac{\partial z_i}{\partial x_j}$. Φ devient

$$\Psi\left(\Lambda_i, \frac{\partial \Lambda_i}{\partial x_k}, z_j, \frac{\partial z_j}{\partial x_k}\right),$$

Ψ est évidemment indépendant des z_i , car il est invariant pour une transformation des z_i en $z_i + a_i$. Soit maintenant une transformation arbitraire (2). On doit avoir

$$\Psi\left(\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right) = \Psi\left(\frac{\partial Z_i}{\partial x_k}\right),$$

(où les indices i et k prennent toutes les valeurs de 1 à n), quelles que soient les f_i .

Supposons que les x_i dépendent d'un paramètre t . Ψ étant invariant, on doit avoir

$$\frac{d\Psi}{dt} = 0.$$

Or,

$$\frac{d\Psi}{dt} = \sum_i \sum_k \frac{\partial \Psi}{\partial \frac{\partial Z_i}{\partial x_k}} \frac{\partial \frac{\partial Z_i}{\partial x_k}}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = 0.$$

Cette égalité devant être identiquement vérifiée, il en résulte que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \frac{\partial Z_i}{\partial x_k}} = 0 \quad (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n).$$

4. Si l'équation (1) est générale, le système (6) est irréductible et ce système est invariant pour toute transformation du groupe ponctuel général Γ_n .

Si l'équation (1) est spéciale, on peut adjoindre au système (6) des relations rationnelles compatibles qui n'en sont pas des conséquences nécessaires. Le système (6) est alors réductible. En lui adjoignant des relations convenablement choisies, nous formerons un nouveau système que nous rendrons irréductible.

Ce nouveau système sera le plus simple possible, si nous choisissons le plus grand nombre possible de relations d'ordre zéro (entre les z_i mêmes), puis le plus grand nombre possible de relations du premier ordre et ainsi de suite. Ces opérations ne se continuent d'ailleurs pas

indéfiniment, car on sait qu'à partir d'un certain ordre, toutes les équations sont des conséquences d'équations d'ordre inférieur. Nous verrons plus loin (chap. IV, § 3) comment on peut donner à ces *systèmes irréductibles réguliers* une forme normale.

Ces systèmes étant mis sous forme canonique :

$$\Omega_i \left(z_1, \dots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial z_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \right) = z_i(x_1, \dots, x_n) \\ (i = 1, 2, \dots, k)$$

mettent en évidence les invariants différentiels du nouveau système (Σ).

À ces systèmes, on peut attacher un groupe Γ , dont les transformations sont définies par

$$\Omega_i \left(z_1, \dots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \right) = \Omega_i \left(Z_1, \dots, Z_n, \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial Z_n}{\partial x_n} \right) \\ (i = 1, 2, \dots, k).$$

Ce groupe Γ est le groupe de rationalité attaché à l'équation spéciale (1). Les transcendantes z_1, \dots, z_n sont des fonctions des $n + 1$ variables x, x_1, \dots, x_n attachées dans le domaine $[\Delta]$ au groupe Γ .

Il est clair que le groupe Γ n'est défini que par son *type*. Soit F une transformation de Γ , la transformée F' de F par une transformation Φ :

$$F' = \Phi F \Phi^{-1}$$

fait partie d'un groupe Γ' , de même type que Γ . La définition de Γ est donc établie à la transformation arbitraire Φ près, assujettie seulement à conserver la rationalité des équations de (Σ) qui sont rationnelles.

Nous sommes ainsi amenés à étudier la suite de composition du groupe Γ_n , qui nous fournira les différents types possibles de groupes Γ ; mais nous n'aborderons cette étude, qui est d'ailleurs un pur problème de théorie des groupes, qu'après avoir étudié les applications de la présente théorie au cas d'une équation unique du premier ou du second ordre.

Avant de laisser de côté ces généralités, nous tenons à souligner que l'idée directrice qui semble avoir guidé Drach, est l'analogie avec la théorie de Galois pour les équations algébriques, le groupe de rationalité possédant les deux mêmes propriétés fondamentales que le groupe attaché à une équation algébrique, à savoir :

1° Tout invariant du groupe est une fonction des variables x, x_1, \dots, x_n rationnelle dans $[\Delta]$.

2° Toute fonction rationnelle de z_1, \dots, z_n et de leurs dérivées est une fonction rationnelle des invariants.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

I. — Généralités [2].

§. Soit l'équation

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = A(x, y),$$

dont l'intégrale générale est

$$z(x, y) = \text{const.}$$

z vérifie l'équation

$$(2) \quad X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Cette équation (2) permet de calculer par dérivation successive toutes les dérivées $\frac{\partial^n z}{\partial x^i \partial y^k}$, telles que $i + k = n$, $i \geq 1$, au moyen des dérivées $\frac{\partial^p z}{\partial y^p}$ ($p = 1, \dots, n$) et de variables x et y . Les dérivées par rapport à y seul sont donc seules paramétriques.

Il est facile de classer les équations (1) d'après les différents types de sous-groupes du groupe ponctuel général à une variable, qui sont :

1° Transformation identique : $F = f$.

2° Groupe linéaire homogène ou groupe des translations : $F = af$
ou $F = f + a$.

3° Groupe linéaire spécial : $F = \varepsilon f + a(\varepsilon^n = 1)$.

4° Groupe linéaire général : $F = af + b$.

5° Groupe projectif : $F = \frac{af + b}{cf + d}$.

Nous savons que, si le groupe est le groupe ponctuel général lui-même, aucune réduction n'est possible. Sinon, conformément à la

théorie générale, il existe une relation

$$(3) \quad \Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots\right) = 0$$

compatible avec (2), sans en être une conséquence nécessaire.

1° L'équation admet une solution rationnelle en x et y :

$$z = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

On la choisira de façon que le polynôme $P - zQ$ ne soit pas décomposable, quel que soit z . La relation (3) est ici d'ordre zéro.

2° L'équation de définition du groupe est ici :

$$\frac{\partial F}{\partial f} = 1.$$

L'invariant est

$$\frac{\partial z}{\partial y} = L(x, y);$$

il vérifie la relation

$$(4) \quad \nabla(L) + L \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\Lambda L) = 0.$$

En effet, de la définition de L et de (2) on déduit

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\Lambda L.$$

puis

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(\Lambda L) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial L}{\partial y}.$$

D'où l'on déduit immédiatement l'équation (4), qui constitue la *résolvante* pour L . La relation de définition de L est ici la relation (3) du premier ordre. D'autre part l'équation (4) exprime que L est un multiplicateur ou facteur intégrant de (1) : celle-ci admet donc un multiplicateur rationnel. Dans ce cas, z est obtenu par une quadrature

$$z = \int L(dy - \Lambda dx).$$

3° L'équation de définition du groupe est

$$\left(\frac{\partial F}{\partial f}\right)^n = 1$$

et l'invariant caractéristique :

$$K = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^n.$$

Cette relation de définition de K , rationnel en x et y est la forme, dans le présent cas, de la relation (3). K vérifie l'équation

$$(5) \quad X(K) + nK \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0,$$

on obtient par un calcul à peu près identique au précédent cette résolvante pour K . z est encore donné par une quadrature

$$z = \int^n \sqrt{K} (dy - \Lambda dx).$$

4° L'équation de définition du groupe est du second ordre :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial f^2} = 0,$$

la relation de définition de l'invariant s'écrit

$$J(x, y) = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}}.$$

C'est donc ici la dérivée logarithmique d'un multiplicateur qui est rationnelle. Cherchons la résolvante pour J .

De la relation de définition de J et de (2), on déduit

$$(6) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \Lambda \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$(7) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y^2} + \Lambda \frac{\partial z}{\partial y} + 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Multiplions (6) par $-J$ et additionnons à (7); il vient, après simplification par $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$(8) \quad X(J) + J \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} = 0.$$

C'est la résolvante cherchée. Elle s'écrit aussi

$$(8') \quad \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Lambda J + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \right) = 0.$$

On obtient $\text{Log } \frac{\partial z}{\partial y}$ par une première quadrature

$$\text{Log } \frac{\partial z}{\partial y} = \int J dy - \left(AJ + \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx,$$

la valeur de $\frac{\partial}{\partial x} \text{Log } \frac{\partial z}{\partial y}$ étant donnée par l'équation (8') intégrée par rapport à y .

z est donné maintenant par une deuxième quadrature

$$z = \int e^{\int J dy} \left(A + \frac{\partial A}{\partial y} \right) dy (dy - A dx).$$

5° L'équation de définition du groupe est du troisième ordre. On prendra comme forme type de la relation (3) l'invariant de Cayley-Schwarz :

$$I = \{z, y\}, \quad \text{où } \{z, y\} = \frac{\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}}{\frac{\partial z}{\partial y}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}} \right)^2.$$

Pour déterminer la résolvante pour I , nous adjoindrons aux équations (6) et (7), l'équation obtenue en dérivant une fois de plus par rapport à y :

$$(9) \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^3} + A \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + 3 \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^3 A}{\partial y^3} \frac{\partial y}{\partial z} = 0.$$

On additionne (9), (7) multipliée par $-3J$, (6) multipliée par $-\frac{\partial J}{\partial y} + 2J^2$; on obtient alors

$$X(I) + 2 \frac{\partial A}{\partial y} \left(\frac{\partial J}{\partial y} - \frac{1}{2} J^2 \right) + \frac{\partial^3 A}{\partial y^3} = 0,$$

mais I vérifie l'équation

$$(10) \quad I = \frac{\partial J}{\partial y} - \frac{1}{2} J^2.$$

La résolvante s'écrit donc

$$(11) \quad X(I) + 2I \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial^3 A}{\partial y^3} = 0.$$

Remarquons que l'équation de Riccati est en général de ce type, puisque, pour une telle équation, la dérivée troisième de A est nulle et $I = 0$ est solution de l'équation (11).

z ne se détermine plus ici par quadratures mais sa détermination nécessite l'intégration de deux équations de Riccati, J étant déterminé par les équations (8) et (10), ce qui revient à un système de deux équations de Riccati. J étant ainsi déterminé, z est déterminé par les deux quadratures indiquées au 4°.

Remarquons encore que la relation (3) devant être d'ordre minimum, ne peut être d'ordre supérieur à *trois*, sinon les relations déduites de (2) par dérivation permettraient d'en abaisser le degré. C'est une confirmation, par une voie analytique directe, du résultat obtenu par la théorie des groupes et relatif à la formation des divers sous-groupes du groupe ponctuel général.

6° Il n'est pas nécessaire de supposer $A(x, y)$ rationnel. On peut le supposer algébrique, en adjoignant une relation algébrique entière

$$f(x, y, p) = 0$$

à l'équation proposée. C'est la méthode que nous emploierons pour étudier les équations $f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$, que nous remplacerons par le système $\frac{dy}{dx} = p$:

$$f(x, y, p) = 0.$$

A peut même être transcendant. Il suffira d'adjoindre des relations différentielles, définissant la transcendante, à l'équation proposée, après s'être assuré de la compatibilité du système (*voir* chap. I).

De la même manière, une équation de Riccati, dont on connaît une solution particulière $X(x)$ donne pour la résolvante J une solution rationnelle : $J = \frac{-2}{y-X}$. Il y a donc une réduction dans le domaine de rationalité, obtenue en lui adjoignant $X(x)$.

Nous nous contenterons de noter, en terminant ces généralités qu'une nouvelle classification des points singuliers, essentiellement logique, est possible en utilisant la théorie précédente. Il conviendrait de revoir à la lumière de ces principes, les résultats classiques de Picard, Poincaré, etc., l'étude de l'équation *au voisinage* du point singulier se faisant en utilisant la méthode ci-dessus.

II. — Applications [3].

A. — LIGNES DE LONGUEUR NULLE DES QUADRIQUES.

7. Cette intégration est classique. Nous montrerons sur cet exemple élémentaire, comment on peut appliquer les méthodes d'intégration logique.

Soit donc

$$(1) \quad ds^2 = (1 + p^2) dx^2 + 2pq dx dy + (1 + q^2) dy^2$$

le ds^2 d'une quadrique et

$$(2) \quad dy = m dx$$

une des deux familles de lignes de longueur nulle. Il s'agit d'intégrer (2), où m est racine de

$$(3) \quad (1 + q^2)m^2 + 2pqm + (1 + p^2) = 0$$

ou

$$(3') \quad 1 + m^2 + (p + qm)^2 = 0.$$

Calculons $\frac{\partial m}{\partial y}$. Pour cela, différencions totalement (3), en y remplaçant dy , par $m dx$:

$$m \left(\frac{\partial m}{\partial x} + m \frac{\partial m}{\partial y} \right) + (p + qm) \left[r + 2sm + tm^2 + q \left(\frac{\partial m}{\partial x} + m \frac{\partial m}{\partial y} \right) \right] = 0,$$

$$(4) \quad \left(\frac{\partial m}{\partial x} + m \frac{\partial m}{\partial y} \right) [pq + (1 + q^2)m] + (p + qm)(r + 2sm + tm^2) = 0.$$

Dérivons (3) par rapport à y :

$$m \frac{\partial m}{\partial y} + (p + qm) \left(s + tm + q \frac{\partial m}{\partial y} \right) = 0,$$

$$(5) \quad \frac{\partial m}{\partial y} [pq + (1 + q^2)m] + (p + qm)(s + tm) = 0.$$

De (4) et (5) on déduit

$$(6) \quad \frac{\frac{\partial m}{\partial y}}{s + tm} = \frac{\frac{\partial m}{\partial x} + m \frac{\partial m}{\partial y}}{r + 2sm + tm^2}.$$

Soit, d'autre part, $\Omega(x, y, z) = 0$ l'équation de la quadrique.

Différentions totalement trois fois cette équation ; il vient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z} (p dx + q dy) = 0, \\ & \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy \right)^{(2)} + 2 \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z} dx + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial z} dy \right) (p dx + q dy) \\ & \quad + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} (p dx + q dy)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial z} (r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2) = 0, \\ & \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy \right)^{(1)} \\ & \quad + 3 \left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial x^2 \partial z} dx^2 + 2 \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x \partial y \partial z} dx dy + \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y^2 \partial z} dy^2 \right) (p dx + q dy) \\ & \quad + 3 \left(\frac{\partial \Omega^3}{\partial x \partial z^2} dx + \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y \partial z^2} dy \right) (p dx + q dy)^2 + \frac{\partial^3 \Omega}{\partial z^3} (p dx + q dy)^3 \\ & \quad + 3 \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z} dx + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial z} dy + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} (p dx + q dy) \right] (r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2) \\ & \quad + \frac{\partial \Omega}{\partial z} (x dx^3 + 3\beta dx^2 dy + 3\gamma dx dy^2 + \delta dy^3) = 0 ; \end{aligned}$$

où

$$\alpha = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \beta = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \delta = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

En remplaçant dans cette différentielle totale troisième dy par $m dx$, il vient, compte tenu de ce que toutes les dérivées troisièmes de Ω sont nulles :

$$\begin{aligned} (7) \quad & \frac{\partial \Omega}{\partial z} (\alpha + 3\beta m + 3\gamma m^2 + \delta m^3) \\ & + 3 \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z} + p \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + m \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial z} + q \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right) \right] (r + 2sm + tm^2) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, si l'on écrit la condition pour que $\sigma_2^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} \right)^{-\frac{1}{2}}$, où on a posé $\sigma_2 = r + 2sm + tm^2$, soit un facteur intégrant pour $dy - m dx$, on obtient

$$\begin{aligned} & 2 \frac{dm}{d_1} + \frac{\alpha + 3\beta m + 3\gamma m^2 + \delta m^3 + 2(s + tm) \left(\frac{\partial m}{\partial x} + m \frac{\partial m}{\partial y} \right)}{\sigma_2} \\ & \quad + 3 \frac{\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z} + p \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + m \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial z} + q \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right)}{\frac{\partial \Omega}{\partial z}} = 0, \end{aligned}$$

ce qui est identique à (7), compte tenu de (6).

D'où il résulte que le carré d'un multiplicateur est rationnel : le groupe de rationalité attaché à l'équation (2) est donc

$$F = \pm f + a,$$

où l'on a adjoint au domaine de rationalité $i\sqrt{1+p^2+q^2}$, nécessité pour le calcul de m dans l'équation (3).

Enfin, les lignes cherchées sont données par la quadrature

$$\int \frac{dy - m dx}{\sqrt{\sigma_2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} \right)}} = C.$$

On retrouve ici bien entendu, une quadrature elliptique, comme par la méthode classique, où la surface est rapportée à ses lignes de courbure.

B. — LIGNES ASYMPTOTIQUES DES SURFACES DU TROISIÈME DEGRÉ.

8. Il convient au préalable, par une transformation projective, de mettre l'équation de la surface sous la forme

$$(1) \quad \Omega(x, y, z) = a_0 z^2 + \varphi_1(x, y)z + \varphi_2(x, y) = 0$$

de manière à annuler les dérivées

$$\frac{\partial^1 \Omega}{\partial x \partial z^2}, \quad \frac{\partial^1 \Omega}{\partial y \partial z^2}, \quad \frac{\partial^1 \Omega}{\partial z^3}, \quad \frac{\partial^1 \Omega}{\partial x^2 \partial z}, \quad \frac{\partial^1 \Omega}{\partial y^2 \partial z}, \quad \frac{\partial^1 \Omega}{\partial x \partial z}.$$

En différentiant totalement trois fois Ω , compte tenu des calculs du numéro précédent et de l'annulation des dérivées indiquées ci-dessus, il vient

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + m \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^{(1)} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \sigma_1 + 3 \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z} + m \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} (p + qm) \right] \sigma_2 = 0,$$

où on a posé

$$\sigma_1 = x + 3\beta m + 3\gamma m^2 + \delta m^3.$$

D'autre part, l'équation d'une famille de lignes asymptotiques s'écrit

$$(2) \quad dy - m dx = 0.$$

où m est racine de

$$(3) \quad \sigma_2 = r + 2sm + tm^2 = 0.$$

En différentiant totalement une quatrième fois, compte tenu de (3) et de $\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x} + m\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)^{(4)} = 0$, on obtient simplement

$$(4) \quad \frac{\partial\Omega}{\partial z} \sigma_4 + 4\sigma_7 \left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial x \partial z} + m \frac{\partial^2\Omega}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} (p + qm) \right] = 0,$$

où

$$\sigma_4 = \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 4m \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} + 6m^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + 4m^3 \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} + m^4 \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}.$$

Comme au numéro précédent, nous allons différentier (3) totalement :

$$(5) \quad \sigma_3 + 2 \left(\frac{\partial m}{\partial x} + m \frac{\partial m}{\partial y} \right) \sigma'_2 = 0, \quad \text{où } \sigma'_2 = s + mt,$$

puis dériver cette même équation par rapport à y :

$$(6) \quad \sigma'_3 = 2\sigma'_2 \frac{\partial m}{\partial y} = 0, \quad \text{où } \sigma'_3 = \beta + 2\gamma m + \delta m^2.$$

De (5) et de (6) ont déduit

$$(7) \quad \frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\sigma'_3}{\sigma_7} \left(\frac{\partial m}{\partial x} + m \frac{\partial m}{\partial y} \right).$$

D'autre part, si l'on écrit que $\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{3}} \sigma_7^{-\frac{1}{3}}$ est un multiplicateur pour $dy - m dx$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\partial z} \left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial x \partial z} + m \frac{\partial^2\Omega}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} (p + qm) \right] \\ & + \frac{\sigma_4}{\sigma_3} - 3 \frac{\sigma'_7}{\sigma_7} \left(\frac{\partial m}{\partial x} + m \frac{\partial m}{\partial y} \right) + 3 \frac{\partial m}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

qui, compte tenu de (7), se réduit à (4).

On peut donc conclure que le cube d'un multiplicateur est rationnel : le groupe de rationalité attaché à l'équation (2) est donc

$$F = jf + a, \quad \text{où } j^3 = 1.$$

Il convient d'adjoindre au domaine de rationalité $\sqrt{s^2 - rt}$ nécessaire au calcul de m .

Remarquons encore que les surfaces réglées sont exclues du présent calcul, mais la solution du problème est alors élémentaire.

Si le groupe se réduit, l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

admet une solution rationnelle dans le domaine de rationalité envisagé, donc algébrique et toutes les asymptotiques sont alors algébriques.

C. — LIGNES DE COURBURE DE LA SURFACE DES ONDES.

9. La méthode consiste à généraliser le résultat classique [11], qui avait permis l'intégration dans le cas où la fonction qui intervient dans l'équation est du second degré.

Soit donc

$$(1) \quad \Phi \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \Phi' u \frac{du}{dx} + u \Phi + \frac{u^2}{2} \Phi'' + \frac{u^3}{3} \Phi''' = 0,$$

l'équation différentielle de ces lignes de courbure, où

$$\Phi(x) = \alpha(x-a)(x-b)(x-c) = \alpha f(x).$$

1° *Cas particulier* : $f(x)$ est du second degré. — Nous poserons

$$(2) \quad \frac{du}{dx} = -\pi$$

et nous prendrons comme variable indépendante $\alpha + \frac{u}{\pi}$ au lieu de x dans Φ . L'équation (1) prend alors la forme

$$(3) \quad u^3(1-\pi) = \pi^3 \Phi \left(\alpha + \frac{u}{\pi} \right)$$

comme on le voit en appliquant la formule de Taylor à la fonction Φ . Suivant la méthode générale pour les équations de degré supérieur au premier, nous remplacerons l'équation (1) par le système (2), (3).

Soit maintenant l'équation aux dérivées partielles correspondant à l'équation (2) :

$$-\frac{\partial z}{\partial x} + \pi \frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

La résolvante en $K = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^3$ s'écrit

$$(4) \quad -\frac{\partial K}{\partial x} + \pi \frac{\partial K}{\partial u} + 3K \frac{\partial \pi}{\partial u} = 0,$$

et elle admet la solution rationnelle

$$K = \frac{1}{u^3(1-\omega)} = \frac{1}{\omega^3 \Phi \left(\alpha + \frac{u}{\omega} \right)}.$$

La transcendante z est alors définie aux transformations près du groupe linéaire spécial

$$Z = jz + a \quad (j^3 = 1)$$

et est donnée par la quadrature

$$z = \int \sqrt[3]{\frac{1}{\Phi} \left(\frac{du}{\omega} + dx \right)}.$$

Nous retrouvons le résultat classique : $\frac{1}{\omega \sqrt[3]{\Phi}}$ est un multiplicateur pour $du + \omega dx$.

10. 2° *Cas général* : $f(x)$ est du troisième degré. — C'est ce cas, qui, jusqu'à Drach, avait défié les efforts des géomètres. Le calcul, tel que nous l'avons présenté, se généralise sans trop de peines. On sait que l'équation (1) se conserve par la transformation $u = \frac{\Phi}{t}$, comme on le vérifie facilement en remarquant que $\frac{\Phi^{1V}}{24} = 1$.

En résolvant l'équation (1) en $\frac{du}{dx}$, on trouve

$$(5) \quad \frac{du}{dx} = \frac{u\Phi' + \omega}{\omega},$$

avec

$$(6) \quad \omega^2 = -4\Phi u' + u^2(\Phi'^2 - 2\Phi\Phi'') - 4\Phi^2 u,$$

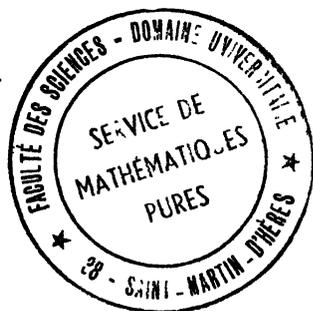
où ω n'est autre que le discriminant de l'équation (1), du second degré en $\frac{du}{dx}$.

L'équation aux dérivées partielles correspondante s'écrit

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{u\Phi' + \omega}{2\Phi} \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

et la résolvante en $K = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)'$ s'écrit

$$(7) \quad \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{u\Phi' + \omega}{2\Phi} \frac{\partial K}{\partial u} + 3K \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u\Phi' + \omega}{2\Phi} \right) = 0.$$



Elle admet la solution rationnelle

$$k = \frac{\Phi}{u(K_0 - \omega K_1)},$$

avec

$$K_0 = u[\Phi'(u^2 + \Phi) + u\Phi(2\alpha + f'')], \quad K_1 = u^2 - \Phi.$$

Le groupe de rationalité est le même que dans le cas particulier précédent. Il convient de remarquer que \bar{K} n'est rationnel que dans le domaine de rationalité, complété par l'adjonction de ω , ω et Φ étant liées par la relation (6), du neuvième degré entre les trois variables ω , z , u .

III. — Équation de la balistique extérieure [4].

11. Le problème consiste à étudier les cas de réduction de l'équation

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{P_1(x)}{P_1(y)},$$

où P_1 et P_1 , fonctions quelconques de x , sont des polynômes en y de degré égal à l'indice. Le but visé étant de trouver les cas où l'intégration de l'équation (1) se ramène aux quadratures, nous nous contenterons de quelques indications sur le cas où I est rationnel, puisque ce cas se ramène à un système de deux équations de Riccati irréductibles.

Soit donc l'équation

$$\frac{d(V \cos \alpha)}{d\alpha} = \frac{cVF(V)}{g},$$

où V est la vitesse du projectile et α l'angle de la tangente à la trajectoire avec l'horizon.

Nous poserons

$$\sin \alpha = v, \quad V = \text{Log } u, \quad \frac{cF(V)}{g} = \tau(u);$$

l'équation prendra la forme

$$(2) \quad \frac{dv}{du} = \frac{1-v^2}{1+\tau}.$$

C'est une des formes canoniques de l'équation (1), dans le cas où on connaît trois solutions particulières $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, qu'une transformation projective a transformées en $v = 1$, $v = -1$, $v = \infty$.

12. I. *Solution rationnelle.* — Soit z la solution rationnelle en v de l'équation aux dérivées partielle correspondante :

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1 - v^2}{v + \rho} \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Nous posons $z = \frac{f(v)}{g(v)}$, où les facteurs de f et g sont simples et en nombre égal :

$$z = \sigma \frac{\prod_{i=1}^k (v - a_i)}{\prod_{i=1}^k (v - b_i)},$$

que nous écrivons

$$(4) \quad z = \sigma + \sum_{i=1}^k \frac{B_i}{v - b_i}.$$

En substituant cette valeur (4) dans l'équation (3), il vient

$$\sigma' = 0, \quad \sum_{i=1}^k (B_i + B'_i) = 0, \quad \frac{B'_i}{B_i} = 1 + \frac{1 - \rho^2}{(b_i + \rho)^2}, \quad b'_i = \frac{1 - b_i^2}{b_i + \rho}$$

et l'équation (3) prend la forme

$$(5) \quad \frac{\partial z}{\partial u} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial z}{\partial b_i} \frac{1 - b_i^2}{b_i + \rho} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial z}{\partial B_i} \left[1 + \frac{1 - \rho^2}{(b_i + \rho)^2} \right] = 0.$$

D'autre part, on sait que $K = \frac{\partial z}{\partial v}$ est un multiplicateur de $dv - \frac{1 - v^2}{v + \rho} du$. En dérivant (4), on trouve

$$(6) \quad -K = \sum_{i=1}^k \frac{B_i}{(v - b_i)^2}.$$

K est donc une fraction rationnelle dont le numérateur est de degré $2k - 2$ et admet la racine $v = -\rho$ (correspondant à la solution $K = \infty$). Soient c_j ($j = 1, 2, \dots, 2k - 3$) les autres racines. Les valeurs correspondantes de z sont $2k - 3$ intégrales distinctes, si les racines de K sont distinctes. Soient

$$(7) \quad C_j = \sum_{i=1}^k \frac{B_i}{c_j - b_i} \quad (j = 1, 2, \dots, 2k - 3)$$

ces intégrales. Les racines $\nu = 1$ et $\nu = -1$ donnent deux autres intégrales

$$(8) \quad C_{2k-2} = \sum_{i=1}^k \frac{B_i}{1-b_i}, \quad C_{2k-1} = \sum_{i=1}^k \frac{B_i}{1+b_i}$$

Enfin l'équation (5) admet l'intégrale

$$(9) \quad C_{2k} = e^u \sum_{i=1}^k B_i$$

obtenue en intégrant l'expression

$$\sum_{i=1}^k (B_i + B'_i) = 0.$$

Les intégrales (7), (8), (9) donnent $2k$ relations qui définissent les $2k$ fonctions b_i et B_i en fonction des $2k$ constantes arbitraires C_1, C_2, \dots, C_{2k} . Les b_i et les B_i étant ainsi déterminées, z est donc connu.

Enfin, pour déterminer l'équation, il faut calculer ρ . On y parvient en déterminant une fonction symétrique des racines de K , donné par la relation (6). Si l'on utilise la somme, on trouve

$$(10) \quad -\rho + \sum_{i=1}^{2k-1} c_i = 2 \frac{\sum_{j=1}^k B_j (b_1 + \dots + b_{j-1} + b_{j+1} + \dots + b_k)}{\sum_{i=1}^k B_i}.$$

Dans le cas où toutes les racines ne sont pas distinctes, il est facile d'obtenir par dérivation de nouvelles intégrales de façon que leur nombre total soit précisément encore $2k$.

13. II. *Un multiplicateur K est rationnel.* — Pour abrégé, nous n'étudierons que le cas où K ne possède que des pôles simples, parmi lesquels nous avons vu que doivent figurer $+1$ et -1 :

$$(11) \quad K = \frac{P}{\nu-1} + \frac{Q}{\nu+1} + \sum_{i=1}^r \frac{A_i}{\nu-a_i} + L.$$

On sait que K vérifie l'équation résolvante

$$(12) \quad \frac{\partial K}{\partial u} + \frac{1-\nu^2}{\nu+\rho} \frac{\partial K}{\partial \nu} - K \left[\frac{1-\rho^2}{(\nu+\rho)^2} + 1 \right] = 0,$$

où l'on a écrit

$$\frac{1 - v^2}{v + \rho} = \frac{1 - \rho^2}{v + \rho} + \rho - v.$$

En substituant la valeur (11) dans l'équation (12), il vient

$$\begin{aligned} (1 + \rho)^2 \left[\frac{P'}{v-1} + \frac{Q'}{v+1} + \sum \frac{A'_i}{v-a_i} + \sum \frac{a'_i A_i}{(v-a_i)^2} + L' \right] \\ - (1 - \rho^2)(v + \rho) \left[\frac{P}{(v-1)^2} + \frac{Q}{(v+1)^2} + \sum \frac{A_i}{(v-a_i)^2} \right] \\ - [1 - \rho^2 + (v + \rho)^2] \left(\frac{P}{v-1} + \frac{Q}{v+1} + \sum \frac{A_i}{v-a_i} + L \right) = 0. \end{aligned}$$

Les termes en $\frac{1}{(v-a_i)^2}$ sont $(v + \rho) A_i [a'_i (v + \rho) - (1 - v^2)]$ qui se réduiront avec ceux en $\frac{1}{v-a_i}$, si $a'_i = \frac{1 - a_i^2}{a_i + \rho}$, c'est-à-dire si a_i est une solution particulière de l'équation (2).

Après réduction avec le terme en $\frac{1}{v-a_i}$, on obtient le terme entier :

$$(1 - \rho^2) \sum \frac{A_i}{a_i + \rho}.$$

De même, les termes en $\frac{1}{v-1}$ et $\frac{1}{v+1}$ donnent les quotients $P(1 - \rho)$ et $Q(1 + \rho)$. D'où les équations

$$(13) \quad P' = Q' = A'_1 = \dots = A'_k = 0; \quad L' = L;$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} a'_i &= \frac{1 - a_i^2}{a_i + \rho} \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ P(1 - \rho) + Q(1 + \rho) + \rho^2 L' - L + (1 - \rho^2) \sum \frac{A_i}{a_i + \rho} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Cette dernière condition, compte tenu de $L' = L$, s'écrit

$$(15) \quad \frac{P}{\rho + 1} + \frac{Q}{\rho - 1} + L + \sum \frac{A_i}{a_i + \rho} = 0.$$

(15) exprime simplement que $v = -\rho$ est une racine de $K = 0$.

Les intégrales $P = \text{const.}$, $Q = \text{const.}$, $A_i = \text{const.}$ ($i = 1, \dots, k$) expriment que les périodes de K relatives aux pôles simples $-1, +1, a_i$ sont indépendantes de u .

Il s'agit maintenant de déterminer z :

$$\begin{aligned} z &= \int k \, dv + \Phi(u) \\ &= P \text{Log}(v - 1) + Q \text{Log}(v + 1) + \sum A_i \text{Log}(v - a_i) + Lv + \Phi(u). \end{aligned}$$

On peut calculer $\frac{\partial z}{\partial u}$ en dérivant l'équation précédente et, d'autre part, en utilisant l'équation (3) :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \int_{v_0}'' \frac{\partial K}{\partial u} dv + \Phi'(u) = -K \frac{1-v^2}{v+\rho},$$

$$\Phi'(u) + \int_{v_0}'' \left[\frac{A_i \alpha_i'}{(v-\alpha_i)^2} + L' \right] dv = -\frac{1-v^2}{v+\rho} \left(\frac{P}{v-1} + \frac{Q}{v+1} + \sum \frac{A_i}{v-\alpha_i} + L \right).$$

En tenant compte de (13) :

$$\Phi'(u) - \sum \frac{A_i \alpha_i'}{v-\alpha_i} + L' v = -\frac{1-v^2}{v+\rho} \left(\frac{P}{v-1} + \frac{Q}{v+1} + \sum \frac{A_i}{v-\alpha_i} + L \right).$$

En tenant compte de (14), les termes en A_i s'écrivent

$$A_i \frac{1 + \alpha_i(v+\rho) + v\rho}{(\alpha_i+\rho)(v+\rho)} = A_i \left[1 + \frac{1-\rho^2}{(\alpha_i+\rho)(v+\rho)} \right]$$

et l'équation précédente devient

$$\Phi'(u) + L' \frac{v\rho+1}{v+\rho} = P \frac{v+1}{v+\rho} + Q \frac{v-1}{v+\rho} + \sum A_i \left[1 + \frac{1-\rho^2}{(\alpha_i+\rho)(v+\rho)} \right].$$

Si v augmente indéfiniment, on obtient

$$\Phi'(u) + L'\rho = P + Q + \sum A_i$$

et Φ , donc z , sera donné par quadratures, lorsqu'on aura choisi les constantes P , Q , A_1, \dots, A_k et la fonction $L = L_0 e^u$.

Enfin, les c_i , racines de $K = 0$, sont d'après le théorème d'Euler, des intégrales particulières de (2). Elles sont en nombre $m+1$, puisque l'une d'entre elles est $-\rho$.

En intégrant (11), il vient

$$z = P \operatorname{Log}(v-1) + Q \operatorname{Log}(v+1) + \sum A_i \operatorname{Log}(v-\alpha_i) + Lv + \Phi(u).$$

En y faisant $v = c_i$ ($i = 1, \dots, m+1$), il vient

$$z_i = P \operatorname{Log}(c_i-1) + Q \operatorname{Log}(c_i+1) + \sum_j A_j \operatorname{Log}(c_i-\alpha_j) + Lc_i + \Phi(u)$$

et les m différences $z_i - z_1$ sont des intégrales de (3).

Une autre intégrale nous est fournie par l'intégration de $L' = L$,

que nous écrirons : $C = u - \text{Log} L$. C'est la seule intégrale qui contiennent u .

Dans le cas exceptionnel où $L = 0$, K n'a que $m + 1$ racines et il n'y a plus que $m - 1$ intégrales, qui, jointes à

$$h(-\rho) = 0$$

définissent les a_i et ρ en fonction de l'un des a_i : a . Celui-ci est donné par

$$\frac{da}{du} = \frac{1 - a^2}{a + \rho}.$$

14. III. *La puissance première d'un multiplicateur est rationnelle.* — Soit $\sqrt[p]{K}$ le multiplicateur. Nous poserons

$$h = \sigma(\nu + \rho)^\rho (\nu - 1)^\lambda (\nu + 1)^\mu \prod_{i=1}^k (\nu - a_i)^{\alpha_i}.$$

Les calculs sont à peu près identiques à ceux du numéro précédent. Les périodes de l'intégrale $\int \sqrt[p]{K} d\nu$ sont des intégrales (3). On les obtient par la méthode classique en considérant des chemins fermés Γ , formant des doubles contours autour de deux des points critiques $+1, -1, a_1, \dots, a_k$.

Une dernière intégrale est fournie par

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \sum \alpha_i + \lambda + \mu + \nu \rho = s$$

ou, en intégrant :

$$C = u - \frac{1}{s} \text{Log} \sigma.$$

Dans le cas particulier où $s = 0, \sigma = \text{const.}$

15. IV. *La dérivée logarithmique d'un multiplicateur est rationnelle.* — Nous supposons essentiellement qu'il n'y a qu'une solution rationnelle, sinon on serait ramené au cas II ou III. Soit J cette dérivée logarithmique. Son équation résolvante s'écrit

$$(16) \quad \frac{\partial J}{\partial u} + \frac{1 - \nu^2}{\nu + \rho} \frac{\partial J}{\partial \nu} - \left[\frac{1 - \rho^2}{(\rho + \nu)^2} + 1 \right] J + 2 \frac{1 - \rho^2}{(\rho + \nu)^2} = 0.$$

Nous pouvons poser

$$J = \frac{1}{v + \rho} + J_1,$$

où J_1 n'admet plus le pôle $-\rho$ et nous nous bornerons ici encore, pour abrégér l'exposé, au cas où tous les pôles de J_1 sont simples.

J_1 vérifie l'équation

$$(17) \quad (v + \rho)^2 \frac{\partial J_1}{\partial u} + (1 - v^2)(v + \rho) \frac{\partial J_1}{\partial v} - J_1(1 + v^2 + 2v\rho) = 2\rho + \rho',$$

J_1 admettant les pôles $+1$ et -1 , nous poserons encore

$$J = \frac{\lambda}{v-1} + \frac{\mu}{v+1} + J_2$$

et l'équation (17) devient

$$\begin{aligned} & (v + \rho)^2 \left(\frac{\lambda'}{v-1} + \frac{\mu'}{v+1} + \frac{\partial J_2}{\partial u} \right) \\ & + (1 - v^2)(v + \rho) \left[\frac{-\lambda}{(v-1)^2} - \frac{\mu}{(v+1)^2} + \frac{\partial J_2}{\partial v} \right] \\ & - \left(\frac{\lambda}{v-1} + \frac{\mu}{v+1} + J_2 \right) (1 + v^2 + 2v\rho) = 2\rho + \rho'. \end{aligned}$$

Le coefficient de $\frac{1}{v-1}$ est $[(v + \rho)(v + 1) - (1 + v^2 + 2v\rho)]\lambda'$ qui se réduit à $(1 - \rho)(v - 1)$. Donc le facteur $v - 1$ s'élimine. Il en résulte que λ' est nécessairement nul. De même, $\mu' = 0$. J_2 vérifie simplement l'équation

$$(18) \quad (v + \rho)^2 \frac{\partial J_2}{\partial u} + (1 - v^2)(v + \rho) \frac{\partial J_2}{\partial v} - (1 + v^2 + 2v\rho) J_2 = (\lambda + \mu + 2)\rho + \rho' + \mu - \lambda.$$

Soit enfin,

$$J_2 = \sum \frac{A_i}{v - \alpha_i} + L.$$

On démontre, comme au n° 13, que α_i est une solution particulière de (2). Comme plus haut, le coefficient de A_i est divisible par $v - \alpha_i$; il en résulte que $A_i' = 0$ et les A_i sont des constantes. Enfin, $L' = L$.

Comme $\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial v} = f$,

$$k = \Phi(u)(v + \rho)(v - 1)^j(v + 1)^m \prod (v - \alpha_i)^{A_i} e^{L'v},$$

où K satisfait à l'équation (12). En substituant la valeur précédente de K dans cette équation, on trouve

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \lambda + \mu + \rho + \sum A_i - \rho L$$

qui donne Φ par une quadrature, si ρ et L sont connues.

Enfin,

$$z = \int_{v_0}^v k \, dv + \Psi(u),$$

où

$$\Psi(u) = - \left[\frac{1-v^2}{v+\rho} k \right]_{v=v_0},$$

comme on le voit en substituant cette valeur de z dans (3), compte tenu de (12), qui s'écrit

$$\frac{\partial K}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1-v^2}{v+\rho} k \right] = 0$$

Les diverses déterminations de z s'obtiendront à partir des périodes de $\int_{v_0}^v K \, dv$ ou

$$\int_{v_0}^v (v+\rho)(v-1)^\lambda (v+1)^\mu \prod_{i=1}^m (v-a_i)^{A_i} e^{L v} \, dv.$$

On obtiendra $m+2$ périodes distinctes en utilisant les contours doubles définis plus haut. Une nouvelle intégrale est

$$C = u - \text{Log } L.$$

Une dernière intégrale est obtenue en utilisant un contour passant par $v = \infty$, d'où la condition.

$$|e^{L v}| \rightarrow 0 \text{ pour } v \text{ infini.}$$

16. V. *Formes de d'Alembert.* — Avant d'aborder l'étude du cas où l'invariant I de Cayley-Schwarz est rationnel et qui ne conduit, on le sait, à aucun cas d'intégrabilité, nous allons indiquer rapidement comment l'étude précédente permet de retrouver les formes de la fonction ρ découvertes par d'Alembert, pour lesquelles l'équation est intégrable.

a. Supposons que K est de la forme

$$K = \sigma(\nu + \rho)(\nu - 1)^\lambda(\nu + 1)^\mu,$$

où nous supposons λ et μ quelconques. Alors, J est rationnel :

$$J = \frac{1}{\nu + \rho} + \frac{\lambda}{\nu - 1} + \frac{\mu}{\nu + 1}.$$

On a vu que σ , ρ , λ , μ , sont liés par

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \lambda + \mu + 2; \quad \rho' + \rho(\lambda + \mu + 2) + \mu - \lambda = 0.$$

D'où, les deux cas :

1° $\lambda + \mu \neq -2$:

$$\sigma = C e^{(\lambda + \mu + 2)u}, \quad \rho = \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu + 2} + C_1 e^{-(\lambda + \mu + 2)u}$$

et z est donné par la quadrature

$$z = \int \sigma e^{\lambda \text{Log}(v-1) + \mu \text{Log}(v+1)} [(v + \rho) dv - (1 - v^2) du].$$

C'est la première forme de d'Alembert.

2° $\lambda + \mu = -2$:

$$\sigma = C; \quad \rho = (\lambda - \mu)u + C_1;$$

$$z = C \int e^{\lambda \text{Log}(v-1) - (\lambda + 2) \text{Log}(v+1)} [(v + \rho) dv - (1 - v^2) du].$$

b. 1° $K = \sigma(\nu + \rho)(\nu - 1)^\lambda(\nu + 1)^\mu(\nu - a)^{-2}$. On sait que

$$a' = \frac{1 - a^2}{a + \rho} \quad \text{et} \quad \rho' = -(\lambda + \mu + 2)\rho + \lambda - \mu - 2 \frac{1 - \rho^2}{a + \rho}.$$

En divisant membre à membre :

$$\frac{d\rho}{du} = \frac{[(\lambda - \mu) - (\lambda + \mu + 2)\rho](a + \rho) - 2(1 - \rho^2)}{1 - a^2}.$$

C'est une équation de Riccati. Mais d'Alembert, au lieu d'intégrer cette équation (1), a envisagé la relation

$$a' = \frac{1 - a^2}{a + \rho} = \lambda(a + 1) + \mu(a - 1).$$

(³) On pourrait appliquer la méthode générale en cherchant les périodes des intégrales dans le plan complexe.

D'où

$$\alpha = A e^{(\lambda+\mu)u} + \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}$$

et l'on en déduit la forme de ρ : $\rho = \frac{1 - \alpha^2 - \alpha\alpha'}{\alpha'}$, λ et μ restant arbitraires. On peut aussi dire que ρ est de la forme

$$\rho = A e^{nu} + B e^{-nu} + C,$$

où A, B, C sont liés par la relation

$$\frac{1}{n^2} + \frac{AB}{n+1} = \frac{C^2}{(n+1)^2}$$

obtenue en éliminant λ et μ .

2° Si dans la relation précédente, on suppose $\lambda + \mu = 0$, on en déduit

$$\alpha' = 2\lambda; \quad a = 2\lambda u + c,$$

puis

$$\rho = \frac{1 - \alpha^2 - 2\alpha\lambda}{2\lambda} = -2\lambda u^2 - 2(c + \lambda)u - \left(c + \frac{c^2 - 1}{2\lambda}\right).$$

On peut aussi écrire

$$\rho = Au^2 + Bu + C,$$

où A, B, C sont liés par la relation

$$B^2 = A^2 + 4AC + 4.$$

L'équation proposée, résolue en $\frac{du}{dv}$ est une équation de Riccati qui admet une solution linéaire en v .

Nous espérons avoir montré sur ces exemples classiques, comment on peut construire des équations intégrables du type étudié.

17. VI. *L'invariant de Cayley-Schwarz est rationnel.* — On sait que, dans ce cas, l'équation n'est plus intégrable mais dépend de la résolution d'un système de deux équations de Riccati.

Pour débarrasser I du pôle $v = -\rho$, nous poserons

$$I = -\frac{3}{2(v+\rho)^2} + \frac{A}{v+\rho} + I_1,$$

I_1 vérifie l'équation

$$(19) \quad (\nu + \rho)^2 \frac{dI_1}{du} + (1 - \nu^2)(\nu + \rho) \frac{dI_1}{d\nu} - 2(\nu + 2\nu\rho + \nu^2) I_1 = A(\nu + \rho' + 3\rho) - A'(\nu + \rho),$$

où l'on a posé :

$$A = \frac{\rho' + 2\rho}{1 - \rho^2}.$$

Nous savons aussi que I admet le pôle $+1$. Nous poserons

$$I_1 = \frac{\lambda}{(\nu - 1)^2} + \frac{\lambda_1}{\nu - 1} + I_2$$

et I_2 vérifie l'équation

$$(20) \quad (\nu + \rho)^2 \left[\frac{\lambda'}{(\nu - 1)^2} + \frac{\lambda_1}{\nu - 1} + \frac{dI_2}{d\nu} \right] - (\nu + \rho)(\nu^2 - 1) \left[\frac{-2\lambda}{(\nu - 1)^2} - \frac{\lambda_1}{(\nu - 1)^2} + \frac{dI_2}{d\nu} \right] - (\nu^2 + 2\nu\rho + 1) \left[\frac{2\lambda}{(\nu - 1)^2} + \frac{2\lambda_1}{\nu - 1} + 2I_2 \right] = \nu(A' - A) + A\rho' - A'\rho + 3A\rho.$$

Le terme en $\frac{1}{(\nu - 1)^2}$ donne $\lambda' = 0$; λ est une constante. Puis le terme en $\frac{1}{\nu - 1}$ donne

$$\lambda_1(\nu + \rho)^2 - 2(\rho - 1)\lambda + \lambda_1(\nu + \rho)(\nu + 1) - 2\lambda_1(\nu^2 + 2\nu\rho + 1).$$

Ce terme doit être divisible par $\nu - 1$; d'où la condition

$$(21) \quad \lambda_1(\rho + 1) - 2\lambda_1 = 2\lambda \frac{\rho - 1}{\rho + 1}.$$

De même, nous poserons

$$I_2 = \frac{\mu}{(\nu + 1)^2} + \frac{\mu_1}{\nu + 1} + I.$$

On trouve encore que μ est une constante et que μ_1 doit vérifier la condition

$$(22) \quad \mu_1(\rho - 1) + 2\mu_1 = 2\mu \frac{\rho + 1}{\rho - 1}$$

et I_3 vérifie l'équation

$$(23) \quad (\nu + \rho)^2 \frac{dI_3}{d\nu} - (\nu + \rho)(\nu^2 - 1) \frac{dI_3}{d\nu} - 2(\nu^2 + 2\nu\rho + 1) I_3 = B\nu + C,$$

où

$$B = A - A' + \lambda'_1 + \mu'_1 - \lambda_1 - \mu_1,$$

$$C = A \rho' - A' \rho + 3 A \rho + \rho [2(\lambda'_1 + \mu'_1) - 3(\lambda_1 + \mu_1)] + \lambda'_1 - \mu'_1;$$

les fonctions λ_1 et μ_1 vérifiant les conditions (21) et (22) et λ et μ étant des constantes.

Ces équations permettent de construire divers types d'équations répondant à la question : par exemple, en supposant $I_1 = 0$, les fonctions ρ , λ_1 , μ_1 doivent vérifier le système formé des conditions (21), (22) et des équations $B = 0$, $C = 0$.

Si I_1 est fonction de u seul, on voit qu'il est de la forme $K e^{2u}$, où K est une constante; les autres équations ne sont pas modifiées, sauf $C = 0$, à laquelle il convient d'ajouter $2 K e^{2u}(\rho^2 - 1)$.

Supposons enfin que I_3 admette le pôle α :

$$I_3 = \frac{\alpha}{(\nu - \alpha)^2} + \frac{\alpha_1}{\nu - \alpha} + I_1.$$

On trouve, par un calcul analogue au précédent :

1° α est une solution particulière de l'équation (2) :

$$\alpha' = \frac{1 - \alpha^2}{\alpha + \rho}.$$

2° $\alpha' = 0$, donc α est une constante.

3° α_1 vérifie l'équation

$$\alpha'_1 (\alpha + \rho)^2 - \alpha_1 (\alpha^2 + 2\alpha + 1) = 2\alpha \frac{\rho^2 - 1}{\alpha + \rho}.$$

4° Il convient d'ajouter au second membre l'expression

$$(\nu + \alpha)(\alpha_1 - \alpha_1) + (2\alpha'_1 - 3\alpha_1) + \alpha_1 \frac{\alpha\rho + 1}{\alpha + \rho}.$$

IV. — Équation $\frac{dy}{dx} = \frac{A(x, y)}{B(x, y)}$ [5].

18. On peut étudier bien d'autres formes réduites de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_1(x, y)}{P_2(x, y)},$$

telles que :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)(x-\lambda)}{x(x-1)(y-\lambda)},$$

où la fonction $\lambda(x)$ joue le rôle de la fonction ρ du paragraphe précédent. On traitera de la même manière l'équation d'Appell :

$$\frac{dy}{dx} = \lambda + \varphi(x).$$

Nous allons examiner le cas où l'équation plus générale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A(x, y)}{B(x, y)},$$

où A et B sont des polynômes de degré m en x et y , admet une intégrale algébrique

$$P(x, y) + zQ(x, y) = 0$$

non décomposable quel que soit z . Or, z vérifie l'équation aux dérivées partielles correspondant à l'équation proposée

$$X(z) = B \frac{\partial z}{\partial x} + A \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ou, en remplaçant z par sa valeur :

$$B \left(P \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{\partial P}{\partial x} \right) + A \left(P \frac{\partial Q}{\partial y} - Q \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0.$$

On pose alors :

$$(1) \quad P \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{\partial P}{\partial x} = LA,$$

$$(2) \quad P \frac{\partial Q}{\partial y} - Q \frac{\partial P}{\partial y} = -LB.$$

En multipliant ces deux égalités respectivement par B et A puis en additionnant, il vient

$$Q X(P) = P X(Q).$$

Nous poserons donc

$$(3) \quad X(P) = MP,$$

$$(4) \quad X(Q) = MQ.$$

En multipliant (1) par $-\frac{\partial P}{\partial y}$ et (2) par $\frac{\partial P}{\partial x}$, il vient

$$P \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + L X(P) = 0$$

ou

$$(5) \quad \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} = LM.$$

Enfin, en dérivant (1) par rapport à y et (2) par rapport à x puis en retranchant, on obtient

$$(6) \quad X(L) = L \left(2M - \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right).$$

Les polynomes P et Q étant supposés de degré p , les égalités (1) et (2) montrent que L est de degré $2p - (m + 1)$. Nous allons voir que L n'est autre que le facteur de Darboux [12]. D'autre part, si pour $z = \zeta$, $P + \zeta Q$ admet le facteur multiple Φ à l'ordre de multiplicité a , L l'admet à l'ordre $a - 1$.

Supposons qu'il n'y ait que deux valeurs exceptionnelles, que nous supposerons être zéro et l'infini, où P et Q admettent des facteurs multiples :

$$P = \prod_{i=1}^h \Phi_i^{a_i}, \quad Q = \prod_{i=1}^k \Psi_i^{b_i}.$$

Le polynome $\Omega = \frac{PQ}{L}$ n'admet que des facteurs simples :

$$\Omega = \Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_h \Psi_1 \Psi_2 \dots \Psi_k$$

et il est de degré $m + 1 = 2p - [2p - (m + 1)]$. Enfin

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega} X(\Omega) &= \frac{1}{P} X(P) + \frac{1}{Q} X(Q) - \frac{1}{L} X(L) \\ &= M + M - 2M + \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x}, \end{aligned}$$

ce qui exprime que $\frac{1}{\Omega}$ est un multiplicateur de $B dy - A dx$, comme on le vérifie facilement. D'où la méthode :

- 1° Recherche du polynome Ω , de degré $m + 1$.
- 2° Décomposition de Ω en facteurs : $\Phi_1 \dots \Phi_h \Psi_1 \dots \Psi_k$.
- 3° L'identité

$$\frac{1}{\Omega} (B dy - A dx) = \sum a_i \frac{d\Phi_i}{\Phi_i} - \sum b_j \frac{d\Psi_j}{\Psi_j}$$

détermine les a_i et b_j , puisque $z = -\frac{P}{Q}$ est l'intégrale générale.

La méthode s'applique encore sans modifications importantes dans le cas où il y a trois valeurs exceptionnelles ; mais s'il y en a quatre, seulement si les facteurs sont doubles.

V. — Réduction de l'équation de Riccati.

19. La méthode d'intégration logique [6] a permis ici de systématiser les résultats de Jordan, Gordan, Schwarz, Fuchs, Halphen et Klein et d'en donner en quelque sorte, une vue synthétique. Il nous a semblé intéressant d'en donner ici un exposé plus détaillé, quoique A. Buhl y ait consacré un chapitre de son Cours d'Analyse.

L'introduction d'une transformation qui laisse invariante la forme de l'équation, permet de ramener celle-ci, dans le cas où toutes ses solutions sont algébriques, à des formes canoniques très simples, la recherche de l'intégrale générale se faisant à l'aide de procédés réguliers, indiqués par Drach dès 1912 [2].

20. I. *Généralités.* — Nous rappellerons d'abord les résultats classiques, qui seront utilisés dans la suite.

Soit l'équation

$$y'' + py' + qy = 0,$$

si l'on pose

$$y = e^{-\frac{p}{2}x}$$

l'équation prend la forme réduite

$$z'' + qz = 0.$$

C'est cette forme que nous adopterons comme forme canonique de l'équation linéaire homogène du second ordre. Nous l'écrivons, en revenant aux notations primitives :

$$(B) \quad y'' = qy.$$

Posant $u = \frac{y'}{y}$, nous obtenons la forme réduite de l'équation de Riccati :

$$(A) \quad \frac{du}{dx} + u^2 = q(x).$$

Si y_1 et y_2 sont deux solutions particulières de (B), linéairement

indépendantes, $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ satisfait à l'équation

$$(C) \quad [\eta, x] = -2q,$$

où $[\eta, x]$, est l'invariant de Cayley-Schwarz.

En effet, en dérivant logarithmiquement η , il vient

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_2'}{y_2},$$

puis

$$\frac{\eta''}{\eta} - \frac{\eta'^2}{\eta^2} = -\frac{y_1'^2}{y_1^2} + \frac{y_2'^2}{y_2^2}.$$

Donc

$$\frac{\eta''}{\eta'} - \frac{\eta'}{\eta} = -\frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_2'}{y_2}.$$

En dérivant cette dernière égalité, on obtient le résultat annoncé. D'autre part, les égalités précédentes, résolues en y_1 et y_2 , donnent

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{\eta'}{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\eta''}{\eta}, \quad \frac{y_2'}{y_2} = -\frac{1}{2} \frac{\eta''}{\eta}.$$

En les intégrant, on obtient y_1 et y_2 en fonction de η . Nous n'ajouterons pas de constantes d'intégration, car il s'agit de solutions particulières :

$$y_1 = \frac{\eta}{\sqrt{\eta'}}, \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{\eta'}}.$$

D'autre part, l'intégrale générale de l'équation (B) s'écrit

$$y = y_1 - C y_2,$$

où C est la constante d'intégration. Nous en déduirons l'intégrale générale de l'équation (A) :

$$u = \frac{y'}{y} = \frac{y_1' - C y_2'}{y_1 - C y_2} = \frac{\frac{y_1'}{y_1 y_2} - \frac{C y_2'}{y_1 y_2}}{\frac{1}{y_2} - \frac{C}{y_1}}.$$

En utilisant les valeurs précédentes de y_1 , y_2 et de leurs dérivées logarithmiques, on obtient l'intégrale générale de l'équation (A) :

$$u = \frac{\eta'}{\eta - C} - \frac{1}{2} \frac{\eta''}{\eta'}.$$

Notons enfin pour terminer ces généralités, que l'équation (A) garde sa forme par la transformation $S_{t,x}$:

$$t = \theta(x), \quad v = \frac{u}{\theta'} + \frac{1}{2} \frac{\theta''}{\theta'^2}.$$

qui transforme l'équation (A') :

$$\frac{dv}{dt} + v^2 = Q(t)$$

en l'équation (A), à condition de poser

$$q(x) = Q(\theta)\theta'^2 - \frac{1}{2} [\theta'', x].$$

Il est clair que, si θ appartient à un domaine de rationalité $[\Delta]$, q appartient à ce même domaine.

La transformation projective (T), portant sur la seule fonction, conserve aussi la forme de l'équation (A), mais elle n'aura pas la même importance dans la suite.

Soit $\frac{dv}{dx} + v^2 = R(x)$ l'équation.

Si l'on pose

$$w = \lambda - \frac{v}{u - \mu} \quad \text{ou} \quad u = \mu - \frac{v}{w - \lambda}.$$

La condition d'invariance est

$$\lambda' + \lambda^2 - R(x) = v.$$

D'où l'on tire $\lambda + \mu = -\frac{v'}{2v}$; enfin q est donné par

$$q = \mu' + \mu^2 - v.$$

Si l'on prend λ arbitraire dans $[\Delta]$, les formules précédentes donnent v puis μ .

Si l'on pose $\lambda - \mu = \alpha$, comme $\lambda' + \lambda^2 = \mu' + \mu^2$, il en résulte que $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{v'}{2v}$ ou, en intégrant :

$$\alpha = c\sqrt{v}, \quad \text{puis} \quad \lambda' + \mu' + \lambda^2 + \mu^2 = 2q + 2v$$

et enfin,

$$4q = -\frac{v'}{v} + \frac{5}{4} \frac{v'^2}{v^2} + (c^2 - 4)v.$$

Il faut donc que q puisse se mettre sous la forme précédente.

21. II. *Réduction.* — *a.* Si l'équation (A) n'a pas de solution algébrique dans $[\Delta]$, elle est générale dans $[\Delta]$.

b. Si elle admet *une* solution algébrique R, unique dans $[\Delta]$, R est rationnelle dans $[\Delta]$ et q vérifie l'équation évidente

$$q = R' + R^2.$$

L'intégration se fait par quadrature à partir de

$$R = -\frac{1}{2} \frac{\eta''}{\eta'},$$

la solution générale étant, on l'a vu,

$$u = \frac{\eta''}{\eta - C} - \frac{\eta''}{\eta'}.$$

c. Si elle admet *deux* solutions algébriques dans $[\Delta]$ et deux seulement, elles s'écrivent

$$u_1 = \alpha + \sqrt{\delta}, \quad u_2 = \alpha - \sqrt{\delta}.$$

En reprenant les expressions de u_1 et de u_2 en fonction de η et de ses dérivées, on obtient deux équations entre lesquelles on peut éliminer η , d'où on déduit une relation entre α et δ :

$$\alpha = -\frac{\delta'}{4\delta}.$$

On peut alors calculer $[\eta, x]$ et donc q en fonction de δ . On trouve

$$q = -\frac{\delta''}{4\delta} + \frac{5}{16} \frac{\delta'^2}{\delta^2} + \delta.$$

Il faut donc s'assurer que q puisse s'écrire de cette manière. L'intégration de l'équation (A) est alors donnée par la quadrature

$$\eta = C e^{\int \sqrt{\delta} dx}$$

et η est une *transcendante*.

Si δ est un carré parfait, l'équation admet deux solutions rationnelles et $\sigma = \frac{u - u_2}{u - u_1}$ est rationnelle. Dans ce cas, en posant $\delta = \beta^2$, q s'écrit

$$q = -\frac{\beta''}{2\beta} + \frac{3}{4} \frac{\beta'^2}{\beta^2} + \beta^2.$$

d. Si elle admet plus de deux solutions algébriques, la solution générale est aussi algébrique, puisque le birapport de quatre solutions est constant.

Dans le cas où il y a trois solutions rationnelles, on a

$$\frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3} = \frac{\eta - C_3}{\eta - C_2} \frac{C_1 - C_2}{C_1 - C_3}.$$

Il en résulte que η est rationnel et q est donné par

$$2q = -[\eta, x].$$

Reprenons le cas où les solutions sont algébriques et soit

$$\Phi(u) = u^n + \frac{n}{1} a_1 u^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

l'équation de degré minimum, dont les coefficients appartiennent à $[\Delta]$, vérifiée par une solution u de (A). Soit encore

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}(q - u^2) = 0$$

l'équation aux dérivées partielles correspondant à l'équation (A). Φ est invariante pour l'opérateur $X(f)$. On sait d'ailleurs que (voir [12] et chap. II, § 4)

$$X(\Phi) = + M\Phi;$$

$$\frac{n}{1} \frac{\partial a_1}{\partial x} u^{n-1} + \dots + [nu^{n-1} + n(n-1)a_1 u^{n-2} + \dots](q - u^2) = M(u^n + \dots + a_n).$$

En procédant par identification, on voit que M est linéaire en u et a pour valeur

$$M = n(a_1 - u).$$

En poursuivant l'identification, on obtient un système différentiel pour déterminer les a_i , où figure q .

Si l'on dérive l'équation $X(\Phi) = M\Phi$ par rapport à u , on obtient, en indiquant les dérivées par rapport à u par des accents :

$$\begin{aligned} X(\Phi') &= [na_1 - (n-2)u]\Phi' - n\Phi, \\ X(\Phi'') &= [na_1 - (n-4)u]\Phi'' - 2(n-1)\Phi'. \end{aligned}$$

Si $H = n\Phi\Phi'' - (n-1)\Phi'^2$ est le hessien de Φ , on trouve

$$\begin{aligned} X(H) &= n\Phi X(\Phi'') + n\Phi' X(\Phi) - 2(n-1)\Phi' X(\Phi') \\ &= 2[na_1 - (n-2)u]H \end{aligned}$$

et cette relation n'est pas identiquement vérifiée, car si $H = 0$, on en déduit

$$\Phi = (u + a_1)^n.$$

Remarquons encore que H est de degré $2(n - 2)$, les termes de plus haut degré s'éliminant. On calculera de même :

$$X(H) = 2[n\alpha_1 - (n - 3)u]H' - 2(n - 2)H.$$

Soit encore Ω le jacobien des formes Φ et H ; il est de degré $3(n - 2)$ et a pour expression (1) :

$$\begin{aligned} \Omega &= n\Phi H' - 2(n - 2)H\Phi' \\ X(\Omega) &= n\Phi X(H') + nH'X(\Phi) - 2(n - 2)\Phi'X(H) + HX(\Phi') \\ &= 3[n\alpha_1 - (n - 2)u]\Omega. \end{aligned}$$

Cette relation n'est pas non plus, identiquement vérifiée, car de $\Omega = 0$, on déduit

$$\Phi^{2(n-2)} = k(x)H^n.$$

Si $n > 2(n - 2)$, H divise Φ , qui est irréductible.

Si $n < 2(n - 2)$, Φ divise H , donc Φ^2 , ce qui est exclu.

Si $n = 4$, Φ et H sont identiques à $K(x)$ près, mais Φ est alors un carré.

D'autre part, on sait que, si f et g sont deux fonctions telles que

$$X(f) = Mf, \quad X(g) = Mg,$$

(1) Montrons comment on peut calculer H ; le calcul de Ω et Ω_1 se fera d'une manière en tous points analogue.

En coordonnées homogènes, suivant un procédé indiqué par Hilbert [17], Φ s'écrit

$$\Phi = u_2^n \Phi\left(\frac{u_1}{u_2}\right).$$

Nous désignerons les dérivées par rapport à u_1 par des accents; calculons les dérivées par rapport à u_2 en utilisant l'identité d'Euler :

$$\begin{aligned} n\Phi &= u\Phi' + \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}, & (n-1)\Phi' &= u\Phi'' + \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_1\partial u_2}, \\ n(n-1)\Phi &= u^2\Phi'' + 2u\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_1\partial u_2} + \frac{\partial^3\Phi}{\partial u_1^2\partial u_2}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$H = \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_1^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_2^2} - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_1\partial u_2}\right)^2.$$

En remplaçant les deux dérivées rapport à u_2 par les valeurs précédentes, après division par $n - 1$, on trouve la valeur de H .

avec le même coefficient M , \int_g est une intégrale de l'équation différentielle correspondant à l'opérateur linéaire X . En outre, si f vérifie la relation $X(f) = Mf$, f^p vérifiera

$$X(f^p) = \frac{M}{p} f.$$

Des deux relations vérifiées par H et Ω , on conclut donc que H et Ω^2 correspondent au même coefficient M et, par suite, $\frac{\Omega^2}{H^2} = \Gamma$, où Γ est une constante, est une expression de l'intégrale générale de (A). Remarquons que ce résultat n'est qu'un cas particulier du théorème : le quotient de deux multiplicateurs est une forme de l'intégrale générale de l'équation.

Formons enfin le jacobien Ω_1 de Φ et de Ω . Cette fonction de degré $4(n-2)$, s'écrit

$$\Omega_1 = n\Phi\Omega' - 3(n-2)\Omega\Phi', \quad X(\Omega_1) = 4[na_1 - (n-2)u]\Omega_1.$$

Comme plus haut, on en conclut que $\frac{\Omega_1}{H^2} = 6a$ (où a est une constante arbitraire) est aussi une forme de l'intégrale générale.

Ces deux formes de l'intégrale générale n'étant pas identiques, Φ doit vérifier une condition. Nous obtiendrons celle-ci, en déterminant a . En effet, si l'on écrit

$$\Omega_1 - 6aH^2 = 0,$$

on trouve, en remplaçant Ω_1 et H par leur valeur en fonction de Φ , et en remarquant que Φ' est premier avec Φ (Φ n'a pas de racine multiple, puisqu'il est de degré minimum) :

$$a = \frac{(n-2)^2}{n-1}.$$

L'équation $\Omega_1 - 6aH^2 = 0$, où a a la valeur précédente, donne la condition que doit vérifier Φ . Elle s'écrit, après suppression du facteur Φ^2 :

$$\Sigma(\Phi) = n(n-1)\Phi\Phi'' - 4(n-1)(n-3)\Phi'\Phi'' + 3(n-2)(n-3)\Phi''^2 = 0.$$

$\Sigma(\Phi)$ est un covariant; c'est, d'après les notations des algébristes allemands, le quatrième « rejet » (Überschiebung) de la forme Φ avec elle-même. Gordan le désigne par $(\Phi, \Phi)_4$.

L'identité $\Sigma(\Phi) = 0$ donne entre les coefficients de Φ des relations quadratiques, constituant un système invariant, qui s'ajoute aux n équations différentielles déduites de

$$X(\Phi) = n(a_1 - u)\Phi.$$

22. A l'aide du facteur de Darboux, nous allons pouvoir déterminer une nouvelle forme de l'intégrale générale, qui nous permettra de déterminer les valeurs acceptables de n .

$\frac{\Omega^2}{H^3}$ étant une intégrale de $X(f) = 0$, le facteur de Darboux est défini par

$$L = -\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\Omega^2}{H^3} \right) H^6 = H^2(2\Omega'H - 3\Omega H') = \Omega H^2 \Theta.$$

Calculons Θ :

$$\Theta\Phi = 2H\Phi\Omega' - 3\Phi\Omega H'.$$

Or,

$$\Phi H' = \frac{1}{n} [\Omega + 2(n-2)H\Phi'].$$

Donc

$$-\frac{n}{3}\Theta\Phi = -\frac{2n}{3}H\Phi\Omega' + \Omega[\Omega + 2(n-2)H\Phi'] = \Omega^2 - \frac{2}{3}H\Omega_1.$$

Or, $\Omega_1 = \alpha H^2$, où α a la valeur précédemment trouvée.

Donc

$$-\frac{n}{3}\Theta\Phi = \Omega^2 - \alpha H^3, \quad \text{avec } \alpha = -4 \frac{(n-2)^2}{n-1}.$$

Remarquons que pour cette valeur particulière α de la constante Γ , $\Omega^2 - \Gamma H^3$ admet le facteur Φ^3 .

Dérivons l'équation précédente par rapport à u :

$$-\frac{n}{3}(\Theta\Phi' + \Phi\Theta') = 2\Omega\Omega' - 3\alpha H^2 H'.$$

Or,

$$\Omega' = \frac{\Theta + 3\Omega H'}{2H}.$$

D'où, enfin,

$$\Phi\Theta' = \left(5 - \frac{12}{n} \right) \Theta\Phi'.$$

Puisque Φ et Θ font partie du même domaine de rationalité $[\Delta]$,
 $5 - \frac{12}{n}$ est un entier $k - 1$ et $\Theta = \Phi^{k-1} \cdot \text{const.}$

L'égalité $-\frac{n}{3} \Theta \Phi = \Omega^2 - \alpha H^3$ s'écrit maintenant

$$(I) \quad \Omega^2 = \alpha H^3 + \beta \Phi^k$$

où β est une constante. C'est une *identité* entre les trois fonctions Φ , H , Ω .

D'après l'égalité $6 - \frac{12}{n} = k$, n , qui est supérieur à 2, ne peut prendre que les valeurs : 3, 4, 6 ou 12.

Pour $n = 3$ ou 4, $\frac{\Omega^2}{H^3} = \Gamma$ n'est pas l'intégrale irréductible. D'après l'identité (I), c'est $\frac{\Phi^k}{H} = \gamma$ qui est cette intégrale.

Quel que soit k , l'identité (I) nous permet de donner à l'intégrale générale une troisième forme remarquable : il suffit de remplacer dans (I) Ω^2 par ΓH^3 ; pour obtenir cette forme :

$$\frac{\Phi^k}{H^3} = \frac{\Gamma - \alpha}{\beta}.$$

De cette forme de l'intégrale générale et des deux équations donnant $X(\Phi)$ et $X(H)$, on déduit l'égalité

$$kn(a_1 - u) = 6[na_1 - (n-2)u]$$

et comme $k \neq 6$, nous en concluons que a_1 est nul.

23. III. Formes canoniques. — Φ peut donc être de degré 3, 4, 6 ou 12 et doit vérifier les deux équations

$$X(\Phi) = -nu\Phi \quad (\text{puisque } a_1 = 0)$$

et

$$\Sigma(\Phi) = 0.$$

Cherchons l'équation que doit vérifier q , en éliminant Φ entre ces deux équations. Nous poserons

$$\Phi = u^n + a_2 u^{n-2} + a_3 u^{n-3} + \dots + a_n.$$

Par identification, la première relation donne les valeurs des a_i en

H a pour source : $na_0 n(n-1)a_2 - (n-1)n^2 a_1^2$, par application de la relation de définition de H. D'où

$$H = n^2(n-1) \times [(a_0 a_2 - a_1^2) u^{2n-4} + (n-2)(a_0 a_3 - a_1 a_2) u^{2n-6} + \dots + a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2].$$

Ω se détermine par un calcul analogue. On trouve enfin,

$$\Sigma(\Phi) = n^2(n-1)^2(n-2)(n-3)[(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2) u^{2n-6} + (n-4) \times (a_0 a_5 - 3 a_1 a_4 + 2 a_2 a_3) u^{2n-8} + \dots].$$

D'où les identités

$$\begin{aligned} a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 &= 0, \\ a_0 a_5 - 3 a_1 a_4 + 2 a_2 a_3 &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Étudions maintenant les cas $n = 3, 4, 6, 12$, avec la condition supplémentaire, démontrée précédemment : $a_1 = 0$.

1° Cas $n = 3$. — Il convient de faire une étude directe, car H est du second degré et Φ n'est pas de degré minimum :

$$\begin{aligned} \Phi &= u^3 + 3 a_2 u + a_3, & H &= 18 (a_2 u^2 + a_3 u - a_2^2); \\ \Omega &= 54 (- a_3 u^1 + 2 a_2^2 u^2 + 3 a_2 a_3 u + a_3^2 + 2 a_2^3). \end{aligned}$$

L'identité $\Sigma(\Phi) = 0$ disparaît. Le système différentiel s'écrit

$$\begin{cases} 2 a_2 + q = 0, \\ a_2' + a_3 = 0, \\ a_3' + 3 a_2 q = 0. \end{cases}$$

Il se résoud : $a_2 = -\frac{1}{2} q, a_3 = \frac{1}{2} q'$, avec la condition $q'' = 3q^2$. L'identité (I) est une intégrale première de cette dernière équation : $q'^2 - 2q^3 = \delta$.

L'intégrale générale est ici $\frac{\Omega}{\Phi} = \text{const.}$

2° Cas $n = 4$. — H et Φ sont tous deux du quatrième degré. $\frac{H}{\Phi} = \text{const.}$ sera la forme la plus simple de l'intégrale générale. Le système différentiel s'écrit

$$\begin{cases} 3 a_2 + q = 0, \\ a_2' + 2 a_3 = 0, \\ a_3' + a_4 + 3 a_2 q = 0, \\ a_4' + 4 a_3 q = 0. \end{cases}$$

D'où

$$a_2 = -\frac{q}{3}, \quad a_3 = \frac{1}{6} q', \quad a_4 = -\frac{1}{6} q'' + q^2, \quad \text{avec } q''' = 16qq'.$$

$\Sigma(\Phi) = 0$ donne

$$a_4 + 3a_2^2 = 0 \quad \text{ou} \quad q'' = 8q^2.$$

L'identité (I) donne encore une intégrale première de cette dernière équation, qui, ici aussi, est une condition suffisante.

3° Cas $n = 6$ et $n = 12$. — Le système différentiel permet encore de calculer les a_i en fonction de q . On trouve

$$a_2 = -\frac{q}{n-1}, \quad a_3 = \frac{q'}{(n-1)(n-2)}, \quad \dots$$

L'identité (I) donne

$$a_3^2 + 4a_2^3 = \delta$$

ou

$$q'^2 - 4\frac{(n-2)^2}{n-1}q^3 = (n-1)^2(n-2)^2\delta$$

qui est une intégrale première de

$$q'' = 6\frac{(n-2)^2}{n-1}q^2.$$

En poursuivant le calcul des a_i , on vérifie que cette dernière condition est suffisante.

24. L'équation

$$q'' = 6aq^2, \quad \text{où } a = \frac{(n-2)^2}{n-1}$$

s'intègre à l'aide de la fonction $p(x)$ de Weierstrass, sous la forme

$$q = \frac{1}{\alpha} p(x), \quad \text{où } g_2 = 0;$$

g_3 est une constante d'intégration.

En multipliant x par une constante λ , g_3 est divisé par λ^3 ce qui permet de donner à g_3 une valeur arbitraire, par exemple : $g_3 = 4$. Nous obtiendrons la forme canonique de l'équation en lui appliquant la transformation $S_{x,\xi}$ avec $\xi = p(x)$.

L'équation

$$\frac{du}{dx} + u^2 = q(x)$$

devient

$$\frac{dv}{d\xi} + v^2 = r(\xi),$$

avec

$$q = a \quad \text{et} \quad r = q \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 - \frac{1}{2} [x, \xi].$$

D'ailleurs

$$\frac{d\xi}{dx} = 2\sqrt{\xi^2 - 1} \quad \text{et} \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

qui permet de calculer les dérivées successives de x par rapport à ξ .
On obtient alors

$$r = \frac{\xi}{16} \frac{C_0 \xi^3 - 4C_1}{(\xi^2 - 1)^2}, \quad \text{avec} \quad C_0 = \frac{4}{a} - 3, \quad C_1 = \frac{1}{a} + 6.$$

Une nouvelle transformation $S_{\xi, t}$ où $\xi^2 = \frac{-t}{1-2t}$, transforme l'équation

$$\frac{dv}{d\xi} + v^2 = r(\xi)$$

en

$$\frac{dw}{dt} + w^2 = Q(t),$$

où

$$Q(t) = \frac{1}{4} \left[\frac{1-\lambda^2}{t^2} + \frac{1-\nu^2}{(1-t)^2} - \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - 1}{t(1-t)} \right],$$

avec

$$\lambda = \frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{1}{2}, \quad \nu = \frac{n}{6(n-2)} = \frac{1}{k}.$$

Cette équation n'est autre que celle que Schwarz a déduite de l'équation de Gauss et correspondant aux polyèdres réguliers :

$n = 3$: trièdre équi-facial à face de $\frac{\pi}{3}$;

$n = 4$: tétraèdre;

$n = 6$: cube ou octaèdre;

$n = 12$: dodécaèdre ou icosaèdre.

La fonction $w(t)$ est la fonction polyédrique, qui demeure invariante par les $2N$ substitutions linéaires du groupe, correspondant au groupe de rotation du polyèdre. Les valeurs de N se déduisant facilement de celles de n .

La transformation directe $S_{x,t}$ permet de construire les formes Φ à partir de $Q(t)$. On déduit en effet par cette transformation, q de Q , puis Φ de q , comme il a été indiqué au numéro précédent.

25. On obtient une nouvelle forme canonique de l'équation (A), en prenant comme variable η au lieu de x et en appliquant à l'équation (A) la transformation $S_{x,\eta}$. D'après l'équation (C), le second membre de l'équation transformée est nul :

$$\frac{dw}{d\eta} + w^2 = 0, \quad \text{où } w = \frac{1}{\eta - C}.$$

On retrouve pour u la forme connue

$$u = w\eta' - \frac{\eta''}{2\eta}.$$

Nous sommes donc amené ici à considérer u comme une fonction de C puis à effectuer une transformation homographique sur η :

$$\eta_i = \alpha + \frac{\beta}{\eta - \gamma},$$

à laquelle correspond la même transformation sur C :

$$C_i = \alpha + \frac{\beta}{C - \gamma}.$$

Enfin,

$$\Phi(u) = \prod (u - u_i) = M \frac{(C - C_i)}{(\eta - C)^n}$$

et nous poserons

$$\varphi(c) = \prod (c - c_i).$$

D'où la conclusion : les opérations qui ont conduit à H et Ω à partir de Φ mènent à partir de $\varphi(c)$, dont les coefficients sont constants à $h(c)$ et $\omega(c)$, les trois polynomes étant toujours liés par l'identité (I) :

$$\omega^2 = \alpha h^3 + \beta \varphi^4.$$

Les expressions étant les mêmes pour η que pour C et u , l'invariant $\frac{\omega^2(\eta)}{h^3(\eta)}$ est donc rationnel dans $[\Delta]$ et η est défini par

$$\frac{\omega^2(\eta)}{h^3(\eta)} = R(x),$$

où R est une expression rationnelle quelconque dans $[\Delta]$.

Nous prendrons donc la variable canonique : $t = \frac{\omega^2(\eta)}{\alpha h^3(\eta)}$ au lieu de x . Calculons $\frac{d\eta}{dt}$.

Pour cela, différencions l'égalité précédente :

$$\alpha dt = \frac{\omega}{h^4} (2\omega' h - 3\omega h') d\eta.$$

Or,

$$2\omega' h - 3\omega h' = \theta, \quad \text{avec } \theta = \beta \varphi^{k-1}.$$

Nous obtenons donc

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{h^4 \varphi^{1-k}}{\omega}.$$

Or $t = \frac{\omega^2}{\alpha h^3}$ et, d'après l'identité (1) :

$$t - 1 = \frac{\omega^2 - \alpha h^3}{\alpha h^3} = \frac{\beta \varphi^k}{\alpha h^3}.$$

Nous tirerons d'abord ω de la première :

$$\frac{d\eta}{dt} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \varphi^{1-k}.$$

Nous tirerons maintenant h de la deuxième :

$$\frac{d\eta}{dt} = \alpha^{-\frac{1}{3}} \beta^{-\frac{1}{6}} t^{-\frac{1}{2}} (t-1)^{-\frac{1}{6}} \varphi^{1-\frac{k}{6}}.$$

D'ailleurs $1 - \frac{k}{6} = \frac{2}{n}$,

$$\varphi = \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^{\frac{n}{2}} \alpha^{\frac{n}{6}} \beta^{\frac{n}{12}} t^{\frac{n}{4}} (t-1)^{\frac{5n}{12}}$$

qui donne la solution complète du problème pour les valeurs de n considérées.

Si l'on calcule $[\eta, t]$ à partir de la valeur précédente de $\frac{d\eta}{dt}$, on retrouve $[\eta, t] = -2Q(t)$, Q étant le même que plus haut.

Enfin, une transformation $S_{t,x}$, où $t = R(x)$, R étant une expression rationnelle quelconque dans $[\Delta]$, donne toutes les solutions du problème à partir des valeurs de Φ déduites de celles de φ .

VI. — Équation $y' = \varphi A(x, y)$, les caractéristiques d'Ampère [7].

26. Il est facile de montrer que l'équation $\frac{dy}{dx} = \varphi A + B$, où φ est un paramètre et A et B des fonctions de x et y , se ramène à la forme

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \varphi A,$$

à condition de poser

$$y = u + \int B dx.$$

Nous obtiendrons les différents cas de réduction, lorsque l'un des éléments

$$z, K = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^p, \quad J = \frac{\partial}{\partial y} \text{Log} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad I = [z, y],$$

où z est solution de l'équation

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi A \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

est rationnel en φ .

I. z est un polynome en φ . — Nous poserons

$$z = \beta_0 \varphi^m + \dots + \beta_m.$$

En substituant cette valeur dans (2), il vient

$$(\Sigma) \quad \frac{\partial \beta_0}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \beta_0}{\partial x} + A \frac{\partial \beta_1}{\partial y} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial \beta_m}{\partial x} = 0.$$

C'est par l'utilisation des caractéristiques d'Ampère du système que Drach a pu intégrer (Σ) . Nous verrons, sur le présent exemple, qui est l'illustration la plus schématique de la méthode, comment celle-ci doit être utilisée.

La première et la dernière équation de (Σ) permettent de poser $\beta_0 = x$ et $\beta_m = y$; puis $A \frac{\partial \beta_1}{\partial y} = -1$, qui détermine A .

Considérons le multiplicateur $\frac{\partial z}{\partial y}$ de l'équation (1) : c'est un polynôme de degré $m - 1$, parce que $\beta_0 = x$; son premier terme est $-\frac{1}{A} \varphi^{m-1}$. Si $\omega_1, \dots, \omega_{m-1}$ sont ses racines, il s'écrira

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{A} \prod_{i=1}^{m-1} (\varphi - \omega_i)$$

et

$$dz = \frac{\partial z}{\partial y} (dy - \varphi A dx) = d\beta_0 \varphi_m + \dots + d\beta_m.$$

Nous allons établir la propriété suivante, qui est fondamentale : les expressions $\omega_i = \text{const.}$ sont les intégrales générales de

$$dy - \omega_i A dx = 0.$$

Autrement dit, les ω_i sont les variables caractéristiques d'Ampère de (Σ). En prenant comme inconnue $\beta_{m-1} = \lambda$, on peut remplacer le système (Σ) par une équation unique (E) aux dérivées partielles à deux variables x et y d'ordre $m - 1$, où les ω_i sont les combinaisons intégrables des caractéristiques de Cauchy de cette équation (E).

Pour établir la propriété énoncée, il suffit d'écrire la résolvante en K :

$$(4) \quad \frac{\partial K}{\partial x} + \varphi A \frac{\partial K}{\partial y} + \varphi K \frac{\partial A}{\partial y} = 0,$$

où K a l'expression (3).

Si dans l'équation (4) on fait $\varphi = \omega_i$, $\frac{\partial K}{\partial x}$ et $\frac{\partial K}{\partial y}$ se réduisent à

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \prod_k' (\omega_i - \omega_k), \quad \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \prod_k' (\omega_i - \omega_k);$$

où le symbole \prod_k' indique que l'on donne à k toutes les valeurs de 1 à $m - 1$ sauf la valeur i .

L'équation (4) prend donc pour cette valeur de φ la forme

$$(5) \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + A \omega_i \frac{\partial \omega_i}{\partial y} = 0$$

et la propriété est démontrée.

D'autre part $z(\omega_i)$ est aussi l'intégrale de cette même équation : $dy - A\omega_i dx = 0$. Donc $z(\omega_i)$ est une fonction arbitraire de ω_i . Les ω_i vérifient donc le système

$$(S_1) \quad x\omega_i^n + \beta_1\omega_i^{n-1} + \dots + \beta_{m-1}\omega_i + y = f_i(\omega_i) \quad (i = 1, \dots, m-1),$$

où les f_i sont arbitraires.

Enfin, les ω_i sont racines de (3); donc, puisque

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \sum_i \frac{\partial z}{\partial \omega_i} d\omega_i = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -A\omega_i \frac{\partial z}{\partial y},$$

on en conclut $\frac{\partial z}{\partial \omega_i} = 0$. Les ω_i vérifient aussi le système

$$(S_2) \quad m x \omega_i^{n-1} + \dots + \beta_{m-1} = f'_i(\omega_i) \quad (i = 1, \dots, m-1).$$

Les systèmes (S_1) et (S_2) comprennent donc $2m - 2$ équations aux $2m - 2$ inconnues ω_i, β_i , dont les expressions dépendent de $m - 1$ fonctions arbitraires des $m - 1$ variables caractéristiques ω_i .

Dans le cas où une racine ω_k est double, on adjoint au système (S_2) l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \omega_k^2} = f''_k(\omega_k)$$

qui remplace l'équation en ω_{m-1} .

27. II. z est rationnel en φ . — Nous supposons que tous les pôles sont simples :

$$z(\varphi) = A_0 + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\varphi - a_i}.$$

Le multiplicateur K possède ici $2n - 1$ racines ω_i , qui sont encore les variables d'Ampère, $\omega_i = \text{const.}$ étant l'intégrale de $dy - \omega_i A dx = 0$. Une transformation ponctuelle permet de poser

$$A_0 = x, \quad z(0) = x - \sum \frac{A_i}{a_i} = j.$$

Les systèmes (S_1) et (S_2) s'écrivent

$$(S_1) \quad x + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\omega_i - a_k} = f_i(\omega_i) \quad (i = 1, \dots, 2n - 1),$$

$$(S_2) \quad - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(\omega_i - a_k)^2} = f'_i(\omega_i) \quad (i = 1, \dots, 2n - 1).$$

On peut alors obtenir z par des intégrales dans le plan complexe, où les points b_i sont supposés fixés.

En effet,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = K = B_0 + \sum_{i=1}^n \frac{f_i(b_i) \frac{\partial b_i}{\partial y}}{\varphi - b_i},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\varphi A \frac{\partial z}{\partial y} = -\varphi - B_0 \sum_{i=1}^n \frac{f_i(b_i) \frac{\partial b_i}{\partial x}}{\varphi - b_i}.$$

Mais [1^{re} équation (Σ)] :

$$\frac{1}{B_0} \frac{\partial b_i}{\partial y} = -\frac{1}{b_i} \frac{\partial b_i}{\partial x}.$$

Donc

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\varphi + \varphi \sum_{i=1}^n \frac{f_i(b_i) \frac{\partial b_i}{\partial x}}{b_i(\varphi - b_i)}.$$

Enfin, pour $\varphi = 0$, on a posé $K(0) = g(y)$. Donc

$$z = -\varphi x + \int g(y) dy + \varphi \int^{b_i} \frac{f(b) db}{b(\varphi - b)}.$$

Par un raisonnement analogue à celui du n° 26, on conclut que, si ω_k est une racine de $K = 0$ ($k = 1, \dots, n$), $\omega_k = \text{const.}$ est l'intégrale de $dy - \omega_k A dx = 0$. Les ω_k sont donc aussi des variables caractéristiques. En écrivant que $z(\omega_k)$ est une fonction arbitraire de ω_k , on obtient le système

$$(S_1) \quad -x \omega_k + \int g(y) dy + \omega_k \sum_{i=1}^n \int^{b_i} \frac{f(b) db}{b(\omega_k - b)} = F_k(\omega_k) \quad (k = 1, \dots, n).$$

où les F_k sont arbitraires.

Puis, en écrivant que $\frac{\partial z}{\partial \omega_k} = 0$, après avoir remarqué que

$$\omega_k \sum_{i=1}^n \int^{b_i} \frac{f(b) db}{b(\omega_k - b)} = \sum_{i=1}^n \left[\int^{b_i} \frac{f(b)}{b} db + \int^{b_i} \frac{f(b)}{\omega_k - b} db \right],$$

on obtient le système

$$(S_2) \quad -x - \sum_{i=1}^n \int^{b_i} \frac{f(b) db}{(\omega_k - b)^2} = F'_k(\omega_k) \quad (k = 1, \dots, n).$$



Ces $2n$ relations définissent les $2n$ variables caractéristiques d'Ampère ω_k ($k = 1, \dots, n$) et b_i ($i = 1, \dots, n$) au moyen de x et y .

Il reste à déterminer $A(x, y)$ pour déterminer l'équation

$$A = \frac{1}{B_0} \quad \text{et} \quad B_0 = g(y) + \sum \frac{B_i}{b_i}.$$

Or,

$$B_i = f_i(b_i) \frac{db_i}{dy}.$$

Donc

$$\frac{1}{A} = g(y) + \sum_{i=1}^n \frac{f_i(b_i)}{b_i} \frac{db_i}{dy}.$$

Comme précédemment, dans le cas des racines multiples d'ordre α , le système (S_2) est formé des dérivées jusqu'à l'ordre α de la racine multiple considérée, ce qui diminue d'autant d'unités le nombre des ω_k distincts, mais le système (S_2) comprend toujours le même nombre n de relations.

29. IV. *La dérivée logarithmique du multiplicateur est rationnelle.* — Nous poserons

$$J = \frac{\sigma'}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\varphi - b_i}$$

et nous nous bornerons d'abord au cas où les m_i sont constants. Dans ces conditions, K sera algébrique et nous pourrons encore utiliser la résolvante de K et non celle de J .

K et z seront définis par

$$K = \sigma \prod_{i=1}^n (\varphi - b_i)^{m_i},$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = K(dy - \varphi A dx),$$

d'après l'équation (2).

En formant la résolvante en K et en y substituant la valeur précédente de K , l'identification de l'expression en φ obtenue donne le

système

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \Lambda \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial b_i}{\partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \text{Log}(\Lambda \sigma) = 0; \\ \frac{\partial b_i}{\partial x} + \Lambda b_i \frac{\partial b_i}{\partial y} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \end{array} \right.$$

Les b_i sont donc ici encore des variables caractéristiques. Nous poserons ensuite $\Lambda \sigma = 1$.

Enfin, la première équation (Σ) devient, compte tenu de la troisième :

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{b_i} \frac{\partial b_i}{\partial x} = 0.$$

Donc $\text{Log}(\sigma \prod b_i^{m_i})$ est une fonction de y seul, que nous pouvons supposer égale à 1. Alors dz devient

$$dz = \frac{\prod (\varphi - b_i)^{m_i}}{\prod b_i^{m_i}} \left(dy - \varphi \prod b_i^{m_i} dx \right).$$

Il s'agit de déterminer les b_i en fonction de x et y , de façon que dz soit une différentielle exacte, quel que soit φ .

Pour y parvenir, Drach pose *a priori* :

$$dz = \prod_{i=1}^n (\varphi - b_i)^{m_i+1} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i db_i}{\varphi - b_i}.$$

En écrivant les conditions d'intégrabilité de cette forme, on trouve :

$$1^\circ \quad \lambda_i = \frac{\partial \theta}{\partial b_i} \quad (i = 1, \dots, n);$$

2° la fonction unique θ des n variables b_i doit satisfaire au système

$$(T) \quad (b_k - b_i) \frac{\partial^2 \theta}{\partial b_i \partial b_k} - \frac{\partial \theta}{\partial b_k} (m_i + 1) + \frac{\partial \theta}{\partial b_i} (m_k + 1) = 0.$$

Ce système de $\frac{n(n-1)}{2}$ équations est la généralisation de l'équation d'Euler et Poisson rencontrée par Darboux [13]. Voici comment on

le résoud. On obtient des solutions particulières en posant

$$\prod (\sigma - b_i) = \varphi,$$

où φ est un paramètre. Les racines $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ sont les solutions particulières cherchées.

La solution générale est alors

$$\theta = \sum_{i=1}^n \int \sigma_i F_i(\varphi) d\varphi,$$

les intégrales étant prises entre des limites constantes ou le long de contours fermés et les F_i étant arbitraires.

Enfin, il faut identifier les deux formes de dz , ce qui donne l'identité en φ

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i db_i}{\varphi - b_i} = \frac{dy - \varphi \prod b_i^{m_i} dx}{\prod b_i^{m_i} (\varphi - b_i)}.$$

De la théorie élémentaire de la décomposition des fractions rationnelles, on en déduit le système

$$(S) \quad \lambda_k db_k = \frac{dy - b_k \prod b_i^{m_i} dx}{\prod b_i^{m_i} \prod (b_k - b_i)}, \quad \text{où } \lambda_k = \frac{\partial \theta}{\partial b_k} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Il résulte de ce qui précède que le système (S) est complètement intégrable. On obtient n intégrales, qui donnent $n - 2$ relations entre les b_i et deux équations définissant x et y en fonction des b_k .

Exemple. — 1° $n = 2$. Le système (S) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial b_1} db_1 &= \frac{dy - b_1^{m_1+1} b_2^{m_2} dx}{b_1^{m_1} b_2^{m_2} (b_1 - b_2)}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial b_2} db_2 &= \frac{dy - b_1^{m_1} b_2^{m_2+1} dx}{b_1^{m_1} b_2^{m_2} (b_2 - b_1)}; \end{aligned}$$

θ vérifie l'équation

$$(T) \quad (b_1 - b_2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial b_1 \partial b_2} - (m_2 + 1) \frac{\partial \theta}{\partial b_1} + (m_1 + 1) \frac{\partial \theta}{\partial b_2} = 0.$$

Les combinaisons intégrables du système (S) sont

$$\begin{aligned} dx &= -d\theta, \\ dy &= -b_1^{m_1+1} b_2^{m_2+1} \left(\frac{\partial\theta}{\partial b_1} \frac{db_1}{b_1} + \frac{\partial\theta}{\partial b_2} \frac{db_2}{b_2} \right). \end{aligned}$$

2° $n = 3$: On obtient sans peine les combinaisons intégrables :

$$\begin{aligned} d\theta &= 0, \\ dy &= -b_1^{m_1+1} b_2^{m_2+1} b_3^{m_3+1} \left(\frac{\partial\theta}{\partial b_1} \frac{db_1}{b_1} + \frac{\partial\theta}{\partial b_2} \frac{db_2}{b_2} + \frac{\partial\theta}{\partial b_3} \frac{db_3}{b_3} \right), \\ dx &= -\mathbf{S}(b_2 + b_3) \frac{\partial\theta}{\partial b_1} db_1, \end{aligned}$$

\mathbf{S} désignant le signe de sommation de Lamé.

θ , bien entendu, vérifie le système (T).

30. V. *L'invariant J est rationnel.* — Nous poserons

$$J = \frac{\partial \text{Log } \sigma}{\partial y} + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\varphi - b_i},$$

mais, maintenant, les m_i ne sont plus des constantes. En formant la résultante en J :

$$\frac{\partial J}{\partial x} + \varphi A \frac{\partial J}{\partial y} + \varphi J \frac{\partial A}{\partial y} + \varphi \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0,$$

en y substituant la valeur précédente de J et en identifiant à zéro l'expression en φ obtenue, on trouve le système

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial^2 \text{Log } \sigma}{\partial x \partial y} + \sum \frac{\partial(m_i A)}{\partial y} = 0; \\ (2) \quad & \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial \text{Log } \sigma}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0; \\ (3) \quad & \frac{\partial m_i}{\partial x} + A \frac{\partial}{\partial y} (b_i m_i) + m_i b_i \frac{\partial A}{\partial y} = 0 \quad (i = 1, \dots, n); \\ (4) \quad & \frac{\partial b_i}{\partial x} + A b_i \frac{\partial b_i}{\partial y} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \right.$$

De (4), nous déduisons que les b_i sont encore des variables d'Ampère; d'après (3), m_i est aussi un multiplicateur de

$$dy - b_i A dx = 0.$$

Nous poserons donc

$$m_i = f_i(b_i) \frac{\partial b_i}{\partial y} \quad (i = 1, \dots, n),$$

où les f_i sont arbitraires.

D'autre part, en intégrant (1), nous obtenons

$$\frac{\partial \text{Log } \sigma}{\partial x} + \Lambda \sum m_i = 0$$

en faisant une transformation ponctuelle, de façon à annuler la fonction arbitraire.

En remplaçant m_i par la valeur précédente :

$$\frac{\partial \text{Log } \sigma}{\partial x} + \sum \Lambda f_i(b_i) \frac{\partial b_i}{\partial y} = 0$$

qui, en utilisant (4), devient

$$\frac{\partial \text{Log } \sigma}{\partial x} - \sum \frac{f_i(b_i)}{b_i} \frac{\partial b_i}{\partial x} = 0,$$

que l'on peut intégrer, en posant

$$f_i(b_i) = b_i F'_i(b_i).$$

D'où

$$\text{Log } \sigma = g(y) + \sum F_i(b_i).$$

Enfin Λ est donné par l'équation (2), qui s'intègre une première fois :

$$\Lambda \left(g + \sum F'_i \frac{\partial b_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = f(x).$$

Si $f(x)$ n'est pas nulle, on ne peut intégrer cette équation linéaire sans conserver des signes de quadrature :

$$\Lambda = \left[f_1(x) + f(x) \int \sigma dy \right] \frac{1}{\sigma}.$$

K est donné par

$$\text{Log } K = \int J dy,$$

puis z par

$$dz = K(dy - \varphi \Lambda dx).$$

Dans le cas où I est rationnel en φ , les intégrales ne permettent plus de représenter la solution, le système (Σ) n'étant pas intégrable.

Nous tenons à souligner le caractère, profondément original de la méthode d'intégration du système (Σ) ou de l'équation unique aux dérivées partielles d'ordre n ou $2n$ et à deux variables x et y . Nous pensons que c'est ici que se trouve en puissance, la méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, dont l'exposé est l'objet du fascicule n° 129, que nous avons consacré à cette question.

VII. — Équation $y' = f(x, y, \varphi)$.

31. Pour ne pas nous entraîner à des redites, nous n'étudierons que le cas où les équations de la forme indiquée admettent pour intégrale un polynôme en φ . Nous supposerons l'équation réduite de manière à admettre la solution

$$y = \text{const.} \quad \text{pour } \varphi = 0 \quad \text{et} \quad x = \text{const.} \quad \text{pour } \varphi = \infty.$$

Soit donc l'équation

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \sigma\varphi \frac{\prod_{i=1}^m (\varphi - c_i)}{\prod_{i=1}^m (\varphi - b_i)} = \sigma\varphi \frac{Q}{P}.$$

L'équation aux dérivées partielles correspondante est

$$(2) \quad P \frac{\partial z}{\partial x} + \sigma\varphi Q \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

et nous cherchons les conditions, pour qu'elle admette la solution

$$(3) \quad z = B_0 + \varphi B_1 + \dots + \varphi^n B_n.$$

Par identification dans (2) du polynôme en φ obtenu, il vient

$$\frac{\partial B_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial B_n}{\partial y} = 0,$$

ce qui permet de poser

$$B_0 = y, \quad B_n = x.$$

Puis

$$(4) \quad P \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \varphi \frac{\partial B_2}{\partial x} + \dots + \varphi^{n-1} \right) + \sigma Q \left(1 + \varphi \frac{\partial B_1}{\partial y} + \dots + \varphi^{n-1} \frac{\partial B_{n-1}}{\partial y} \right) = 0.$$

Cette identité n'est possible que si

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} + \dots + \varphi^{n-1} = QR; \quad 1 + \varphi \frac{\partial B_1}{\partial y} + \dots + \varphi^{n-1} \frac{\partial B_{n-1}}{\partial y} = -\frac{PR}{\sigma}.$$

D'où il résulte que $n - 1 \geq m$ et R est de degré $r = n - 1 - m$.

Nous poserons

$$R = \prod_{i=1}^r (\varphi - a_i).$$

Un raisonnement très simple va nous montrer que les a_i sont les variables d'Ampère. En effet, elles annulent à la fois $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ donc rendent z constant. D'autre part, $a_i = \text{const.}$ est l'intégrale de

$$(5) \quad P(a_i) dy - \sigma a_i Q(a_i) dx = 0.$$

On démontre cette proposition comme au paragraphe précédent, en formant la résolvante en K :

$$\frac{\partial K}{\partial x} + \sigma \varphi \frac{Q}{P} \frac{\partial K}{\partial y} + \varphi K \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{Q}{P} \right) = 0,$$

où

$$K = \frac{z}{y} = 1 + \varphi \frac{\partial B_1}{\partial y} + \dots + \varphi^{n-1} \frac{\partial B_{n-1}}{\partial y} = -\frac{PR}{\sigma}.$$

Si, dans cette équation, on fait $\varphi = a_i$, K s'annule et $\frac{\partial K}{\partial x}$ se réduit à $\frac{\partial a_i}{\partial x}$ multiplié par $\frac{P}{\sigma} \prod_k' (a_i - a_k)$. De même $\frac{\partial K}{\partial y}$ se réduit à $\frac{\partial a_i}{\partial y}$ multiplié par le même facteur. Après suppression de ce facteur, il reste donc

$$\frac{\partial a_i}{\partial x} + \sigma a_i \frac{Q}{P} \frac{\partial a_i}{\partial y} = 0$$

qui démontre la propriété énoncée.

Les a_i sont les variables d'Ampère du système aux inconnues B_i , a_i , b_j , c_k . Comme plus haut, on forme les deux systèmes

$$(S_1) \quad z(a_i) = y + a_i B_1 + \dots + a_i^n x = f_i(a_i) \quad (i = 1, \dots, r),$$

$$(S_2) \quad z'(a_i) = B_1 + \dots + n a_i^{n-1} x = f'_i(a_i) \quad (i = 1, \dots, r);$$

où les f_i sont arbitraires.

En exprimant que les b_i sont racines de $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et les c_i de $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, on obtient le système

$$(T) \quad \begin{cases} \frac{\partial B_1}{\partial x} + c_1 \frac{\partial B_2}{\partial x} + \dots + c_i^{n-1} & = 0 \quad (i = 1, \dots, m), \\ 1 + b_i \frac{\partial B_1}{\partial y} + \dots + b_i^{n-1} \frac{\partial B_{n-1}}{\partial y} & = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \end{cases}$$

qui détermine les b_i et les c_i , les B_i ayant été déterminés par les systèmes (S_1) et (S_2) . Enfin, dans l'équation (4), les termes de degré $m + n - 1$ donnent σ :

$$\sigma \frac{\partial B_{n-1}}{\partial y} + 1 = 0.$$

Discussion. — 1° $n = m + 1, r = 0$: il n'y a pas de variables d'Ampère; le système (T) subsiste seul. Les B_i sont arbitraires.

2° $m + 1 < n < 2m + 1$: les $2r$ relations (S_1) et (S_2) déterminent $2(n - m - 1)$ des B_i au moyen des autres, qui demeurent arbitraires et des $n - m - 1$ variables d'Ampère.

3° $n > 2m + 1$: Tous les B_i sont déterminés; il reste $r - m$ relations permettant d'exprimer $r - m$ des a_i au moyen des m autres, qui demeurent arbitraires.

32. Exemple : $\frac{dy}{dx} = \sigma \varphi \frac{\varphi - c}{\varphi - b}$.

1° Soit l'intégrale

$$z = y + \varphi B + x \varphi^2.$$

On a aussitôt

$$C = -\frac{\partial B}{\partial x}, \quad \text{puis} \quad \sigma \frac{\partial B}{\partial y} = -1, \quad b = \sigma = -\frac{1}{\frac{\partial B}{\partial y}}.$$

Il n'y a pas de variable d'Ampère. B est arbitraire. C'est le cas 1° de la discussion précédente.

2° Soit l'intégrale

$$z = y + \varphi B_1 + \varphi^2 B_2 + x \varphi^3.$$

Il y a une variable d'Ampère α . Les équations (S_1) et (S_2) :

$$(S_1) \quad y + \alpha B_1 + \alpha^2 B_2 + x \alpha^3 = f(\alpha),$$

$$(S_2) \quad B_1 + 2\alpha B_2 + 3x \alpha^2 = f'(\alpha)$$

définissent B_1 et B_2 au moyen de α et de la fonction arbitraire $f(\alpha)$.

Puis b , c et σ sont donnés par le système (T) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial x} + \varphi \frac{\partial B_2}{\partial x} + \varphi^2 &= (\varphi - c)(\varphi - a), \\ \sigma \left(1 + \varphi \frac{\partial B_1}{\partial y} + \varphi^2 \frac{\partial B_2}{\partial y} \right) &= -(\varphi - b)(\varphi - a). \end{aligned}$$

D'où

$$\sigma = -\frac{1}{\frac{\partial B_2}{\partial y}}; \quad c + a = -\frac{\partial B_2}{\partial x}; \quad b + a = \sigma \frac{\partial B_1}{\partial y}.$$

La solution admet donc, en définitive, comme arbitraires a et $f(a)$.

3° Quand l'ordre du polynôme z augmente d'une unité, les B_i et les a_i augmentent d'une unité et le nombre des équations de deux unités. Il y a donc toujours un seul a_i arbitraire.

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE.

I. — Généralités.

33. Soit l'équation

$$(1) \quad y'' = f(x, y, y'),$$

où f est rationnelle par rapport à tous ses arguments.

L'intégrale générale sera définie par

$$\varphi_1(x, y, y') = C_1, \quad \varphi_2(x, y, y') = C_2;$$

où φ_1 et φ_2 forment un système fondamental de l'équation linéaire aux dérivées partielles :

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} f = 0.$$

Les cas de réduction sont obtenus par l'étude des sous-groupes du groupe ponctuel à deux variables Γ_2 . Le nombre de ces groupes est considérable mais le nombre des groupes *primitifs* n'est que de six. Les groupes finis sont linéaires ou projectifs et n'auront pas à notre point de vue de conséquences intéressantes.

Les deux groupes primitifs infinis sont :

1° Le groupe défini par

$$d\left[\frac{D(F_1, F_2)}{D(f_1, f_2)}\right] = 0.$$

Les dérivées logarithmiques d'un multiplicateur sont rationnelles.

2° Le groupe défini par

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(f_1, f_2)} = 1.$$

Un multiplicateur et un seul est rationnel.

Parmi les groupes imprimitifs et infinis, nous citerons :

1° $F_1 = \Phi(f_1)$, où Φ est arbitraire, avec

$$F_2 = \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial f_1}} \left(f_2 + \frac{\frac{\partial^2 F_1}{\partial f_1^2}}{\frac{\partial F_1}{\partial f_1}} \right),$$

où on pourra déterminer successivement f_1 et f_2 ,

2° $F_1 = \Phi(f_1)$, où Φ est arbitraire avec

$$F_2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\right)^2} (f_2 + [F_1, f_1]),$$

où $[F_1, f_1]$ est l'invariant de Cayley-Schwarz.

Dans les deux cas, f_1 sera une solution de

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A(x, y, y') \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

où A vérifie

$$(4) \quad f \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} y' + \frac{\partial A}{\partial y'} f \right) = (A - y') \left(\frac{\partial f}{\partial x} + A \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

comme on le voit en formant le crochet des équations (2) et (3), compte tenu de

$$(y' - A) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0.$$

f_2 sera alors déterminé à partir des résolvantes en J ou I , qui devront admettre des solutions rationnelles, avec

$$J = f_2 \frac{df_1}{dy} - \frac{\frac{d^2 f_1}{dy^2}}{\frac{df_1}{dy}} \quad \text{et} \quad I = f_2 \left(\frac{df_1}{dy} \right)^2 - [f_1, y].$$

D'une façon générale, si $A(x, y, y') = \text{const.}$ est une intégrale première de (1), il conviendra pour cette nouvelle équation, d'étudier tous les cas de réduction rencontrés au premier ordre.

Réservant pour un dernier chapitre l'étude des équations linéaires, où la théorie classique de Picard est éclairée d'un jour nouveau, nous allons aborder aussitôt l'équation $y'' = f(x, y)$ dont l'étude s'est montrée particulièrement féconde.

II. — Équation $y'' = F(x, y)$ admettant une intégrale première rationnelle en y' [8].

34. Soit

$$(1) \quad y'' = F(x, y)$$

l'équation à étudier, et

$$(2) \quad X(f) = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} y' + \frac{df}{dy'} F(x, y) = 0$$

l'équation aux dérivées partielles correspondante.

Cette équation doit être identique à

$$(3) \quad \frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(x, y, y')} = 0,$$

où φ et ψ sont deux intégrales premières.

D'où il résulte

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(y, y')} = M, \quad \frac{D(\varphi, \psi)}{D(y', x)} = M y', \quad \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y')} = M F;$$

M est le multiplicateur de Jacobi. Il vérifie l'équation

$$(4) \quad \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial(M y')}{\partial y} + \frac{\partial(M F)}{\partial y'} = 0$$

qui n'est autre que $X(M) = 0$ et admet la solution évidente $M = 1$.

Il est clair que, dans ces conditions, $\iint dx dy$ est un invariant intégral de l'équation (2). Donc, si φ et ψ sont deux solutions fondamentales de (2) : $X(\varphi) = 0$, $X(\psi) = 0$, elles doivent vérifier en outre :

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = 1$$

et ces solutions fondamentales sont définies aux transformations près du groupe défini par

$$\frac{D(\Phi, \Psi)}{D(\varphi, \psi)} = 1.$$

Si $\varphi(x, y, y') = C$ est une intégrale première, une deuxième est donnée par

$$\psi = \int \frac{dy - y' dx}{\frac{\partial \varphi}{\partial y'}}$$

où y' est remplacée par sa valeur en x, y, C . Démontrons que $\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial y'}}$ est un multiplicateur de $dy - y' dx$. Pour cela, résolvons φ en y' : $y = \chi(x, y, C)$ et montrons que $\frac{\partial \chi}{\partial C}$, qui est l'inverse de $\frac{\partial \varphi}{\partial y'}$ est un multiplicateur de $dy - y' dx$.

Dérivons y' , il vient

$$1 = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} y'$$

puis dérivons par rapport à C :

$$0 = \frac{\partial^2 \chi}{\partial C \partial x} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial C \partial y} y' + \frac{\partial \chi}{\partial C} \frac{\partial y'}{\partial y'}$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

33. Nous n'étudierons ici que le cas où φ est un polynome en y' , de degré n . La méthode apparaîtra clairement sur ce cas simple. Soit

$$(5) \quad \varphi = a_0 y'^n + \frac{n}{1} a_1 y'^{n-1} + \dots + a_n.$$

En écrivant que $X(\varphi) = 0$ est une identité en y' , on obtient le

système

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \frac{\partial a_0}{\partial y} = 0, & \frac{\partial a_0}{\partial x} + n \frac{\partial a_1}{\partial y} = 0, & \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{n-1}{2} \frac{\partial a_2}{\partial y} + a_0 F = 0, & \dots; \\ n \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial a_n}{\partial y} + n(n-1) a_{n-2} F = 0, & \frac{\partial a_n}{\partial x} + a_{n-1} F = 0. \end{cases}$$

On peut remplacer ce système de n équations par une équation unique (E) d'ordre $n-1$, à une seule inconnue a_{n-1} , fonction des deux variables x et y . On obtient cette équation (E), en éliminant successivement les autres a_i dans les équations (Σ).

Une transformation ponctuelle sur $x : X = \alpha(x)$, et linéaire sur $y : Y = \beta(x)y + \gamma(x)$, permet de poser

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0.$$

Pour intégrer (Σ), nous allons le remplacer par un système (S), où figureront les variables caractéristiques d'Ampère du système (Σ) ou de l'équation (E) équivalente.

Soit

$$(6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = n \prod_{i=1}^{n-1} (y' - \omega_i)$$

et posons $\varphi_i = \varphi(\omega_i)$. L'équation $X(\varphi_i) = 0$ se réduit à

$$(S) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \omega_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Le système (S) exprime, conformément à la théorie générale, que $\varphi_i = \text{const.}$ est l'intégrale générale de $dy - \omega_i dx = 0$. Les φ_i sont donc les variables caractéristiques d'Ampère de l'équation (E) ou du système (Σ). L'intégration de (E) ou de (Σ) est donc bien équivalente à celle de (S).

36. Intégration du système (S). — L'idée directrice consiste à prendre les φ_i comme variables indépendantes. Voici comment nous procéderons : nous décomposerons $d\psi$ en éléments simples, ψ étant l'intégrale première déduite de φ par le procédé, d'ailleurs classique, du n° 34. Soit donc

$$d\psi = \frac{dy - y' dx}{\frac{\partial \varphi}{\partial y'}} = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \frac{d\varphi_i}{y' - \omega_i}.$$

La méthode élémentaire de décomposition des fractions rationnelles permet de calculer les A_i :

$$A_i = \frac{1}{\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \prod_{k=1}^{n-1} (\omega_i - \omega_k)}$$

Posons encore

$$\varphi = \prod_{j=1}^n (y' - \mu_j)$$

et nous désignerons par ψ_j les valeurs de ψ pour $y' = \mu_j$.

Les ψ_j vérifient le système

$$(S_1) \quad d\psi_j = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \frac{d\varphi_i}{\mu_j - \omega_i} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Ce système aux différentielles totales sera intégrable, si nous déterminons les A_i de façon que les seconds membres soient des différentielles exactes. Dans ces conditions, le système

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = \frac{1}{A_i \prod_{k=1}^{n-1} (\omega_i - \omega_k)} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

est compatible.

Pour faire le changement des n variables μ_j aux n variables φ_i et Φ , où l'on a posé

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \mu_i,$$

il est commode de remarquer que les n coordonnées :

$$\varphi_i = \text{const.} \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad \text{et} \quad \Phi - \sum_{j=1}^n \mu_j = \text{const.}$$

forment un système orthogonal à n variables. En effet, Φ est orthogonal à chacun des φ_i :

$$\sum_j \frac{\partial \Phi}{\partial \mu_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_j} = 0$$

puisque

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mu_j} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi_i} \sum_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_j} = - \sum_j \frac{1}{\omega_i - \mu_j} = 0,$$

cette dernière égalité résultant de

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \sum_j \frac{1}{\omega - \mu_j} = 0$$

d'après la définition même des ω .

De même, φ_i et φ_k sont orthogonales :

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_j} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mu_j} &= \varphi_i \varphi_k \sum_j \frac{1}{(\omega_i - \mu_j)(\omega_k - \mu_j)} \\ &= \frac{\varphi_i \varphi_k}{\omega_k - \omega_i} \sum_j \left(\frac{1}{\omega_i - \mu_j} - \frac{1}{\omega_k - \mu_j} \right) \end{aligned}$$

et chacune des deux sommes est séparément nulle.

D'après les résultats classiques [14] :

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_i^2} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_k} \right)^2 \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ \frac{1}{H_n^2} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu_k} \right)^2 = n. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{j=1}^n d\mu_j^2 = \sum_{i=1}^{n-1} H_i^2 d\varphi_i^2 + \frac{1}{n} d\Phi^2.$$

D'autre part,

$$X_j = H_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_j} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mu_j}{\partial \varphi_i}$$

sont les coefficients d'une substitution orthogonale.

Or,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_j} = \frac{-1}{\varphi_i} \frac{1}{\omega_i - \mu_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mu_k} = 1.$$

Donc

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial \varphi_i} = H_i^2 \varphi_i \frac{1}{\mu_j - \omega_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mu_j}{\partial \Phi} = \frac{1}{n}.$$

Calculons enfin,

$$\frac{1}{H_i^2} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_j} \right)^2.$$

Or,

$$\sum_j \frac{1}{\varphi_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_j} = - \sum_j \frac{1}{\omega_i - \mu_j} = - \frac{\varphi'(\omega_i)}{\varphi_i}, \quad \text{où } \varphi'(\omega_i) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_i}.$$

Dérivons cette égalité par rapport à ω_i :

$$\sum \frac{1}{(\omega_i - \mu_j)^2} = - \frac{\varphi''(\omega_i)}{\varphi_i} + \frac{\varphi'^2(\omega_i)}{\varphi_i^2}.$$

On sait que

$$\frac{\varphi'(\omega_i)}{\varphi_i} = 0$$

et

$$\sum \frac{1}{(\omega_i - \mu_j)^2} = \frac{1}{\varphi_i^2 H_i^2} = - \frac{\varphi''(\omega_i)}{\varphi_i} \quad \text{ou} \quad H_i^2 \varphi_i = - \frac{1}{\varphi''(\omega_i)}$$

et, enfin,

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial \varphi_i} = \frac{-1}{\varphi''(\omega_i)} \frac{1}{\mu_j - \omega_i}.$$

En faisant $\Phi = 0$, c'est-à-dire $\alpha_i = 0$, avec les notations primitives, hypothèse que nous avons été amené à faire, on obtient un système de détermination des A_i .

37. Nous pouvons aussi déterminer les A_i par un calcul direct. En effet, les conditions d'intégrabilité du système (S_1) s'écrivent

$$(S_2) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \left(\frac{A_i}{\mu_j - \omega_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left(\frac{A_k}{\mu_j - \omega_k} \right),$$

où j prend toutes les valeurs de 1 à n , alors que i et k forment toutes les combinaisons deux à deux des $n - 1$ expressions ω .

Pour expliciter les équations qui forment le système (S_2) , il est nécessaire de calculer $\frac{\partial \mu_j}{\partial \varphi_k}$ et $\frac{\partial \omega_i}{\partial \varphi_k}$. La première expression a été calculée au numéro précédent par application de la méthode des substitutions orthogonales. Nous allons refaire ce calcul directement. De

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \sum_j \frac{1}{\omega - \mu_j},$$

on tire, en dérivant par rapport à ω :

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} = \left(\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right)^2 - \sum_j \frac{1}{(\omega - \mu_j)^2},$$

donc

$$\frac{1}{\varphi_l} \varphi''(\omega_l) = - \sum \frac{1}{(\omega_l - \mu_j)^2}.$$

D'autre part, si l'on dérive logarithmiquement par rapport à φ_l :

$$\varphi_l = \prod_j (\omega_l - \mu_j),$$

on obtient

$$\frac{1}{\varphi_l} = \sum_j \frac{\frac{\partial \omega_l}{\partial \varphi_l}}{\omega_l - \mu_j} - \sum_j \frac{\frac{\partial \mu_j}{\partial \varphi_l}}{\omega_l - \mu_j},$$

où le premier terme est nul, parce que

$$\sum_j \frac{1}{\omega_l - \mu_j} = 0.$$

En reportant cette valeur de $\frac{1}{\varphi_l}$ dans l'expression précédente :

$$- \sum_j \frac{\frac{\partial \mu_j}{\partial \varphi_l}}{\omega_l - \mu_j} \varphi''(\omega_l) = - \sum_j \frac{1}{(\omega_l - \mu_j)^2}$$

ce qui donne la valeur de

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial \varphi_l} = \frac{1}{\varphi''(\omega_l)} \frac{1}{\omega_l - \mu_j},$$

résultat identique à celui qui avait été précédemment trouvé.

Calculons de même $\frac{\partial \omega_l}{\partial \varphi_k}$. On dérive par rapport à φ_k l'égalité

$$\sum_j \frac{1}{\omega_l - \mu_j} = 0 :$$

$$\sum_j \frac{\frac{\partial \omega_l}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial \mu_j}{\partial \varphi_k}}{(\omega_l - \mu_j)^2} = 0.$$

Remplaçons $\frac{\partial \mu_j}{\partial \varphi_k}$ par sa valeur

$$\frac{\partial \omega_l}{\partial \varphi_k} \sum_j \frac{1}{(\omega_l - \mu_j)^2} = \frac{1}{\varphi''(\omega_k)} \sum_j \frac{1}{(\omega_l - \mu_j)^2 (\omega_k - \mu_j)}.$$

Décomposons cette dernière fraction en éléments simples :

$$\frac{1}{(\omega_i - \mu_j)^2 (\omega_k - \mu_j)} = \frac{1}{(\omega_i - \omega_k)^2} \left(\frac{1}{\omega_k - \mu_j} - \frac{1}{\omega_i - \mu_j} \right) - \frac{1}{(\omega_i - \omega_k) (\omega_i - \mu_j)^2},$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial \varphi_k} \sum_j \frac{1}{(\omega_i - \mu_j)^2} = \frac{1}{\varphi''(\omega_k) (\omega_i - \omega_k)^2} \left(\sum_j \left[\frac{1}{\omega_k - \mu_j} - \frac{1}{\omega_i - \mu_j} \right] \right) - \frac{1}{\varphi''(\omega_k) (\omega_i - \omega_k)} \sum_j \frac{1}{(\omega_i - \mu_j)^2}.$$

D'où

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial \varphi_k} = - \frac{1}{\varphi''(\omega_k) (\omega_i - \omega_k)}.$$

En remplaçant dans le système (S₂) $\frac{\partial \omega_i}{\partial \varphi_k}$ et $\frac{\partial \mu_j}{\partial \varphi_k}$ par les valeurs précédentes, on trouve sans difficulté, le système

$$(T) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \left(\omega_i \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left(\omega_j \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_k} \right),$$

où l'on a posé

$$A_i = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i}.$$

Les A_i sont donc les dérivées partielles d'une même fonction θ , celle-ci devant être une solution du système (T) à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations. Le système (T) est la généralisation due à Darboux de l'équation d'Euler et Poisson. C'est le même que celui que nous avons rencontré au chapitre II (§ 6, n° 29). Nous l'intégrerons ici aussi en considérant l'équation

$$\prod_j (\sigma - \mu_j) = \varphi,$$

où φ est un paramètre.

On a vu comment on déduit la solution générale de ces solutions particulières.

38. Calcul des φ_i en fonction de x et y . — Il reste à identifier les deux formes de $d\psi$:

$$d\psi = \frac{dx}{\frac{\partial \varphi}{\partial y'}} - \sum_{i=1}^n A_i \frac{d\varphi_i}{y' - \omega_i}, \quad \text{où } \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = \prod_j (y' - \omega_j).$$

En chassant le dénominateur :

$$dy - y' dx = \sum_i A_i \prod_k (y' - \omega_k) d\varphi_i.$$

Cette égalité est une identité en y' : le terme de degré $n - 1$ donne

$$(1) \quad \sum_i A_i d\varphi_i = 0.$$

Cherchons le terme de degré $n - 2$. Soient S_1, S_2, \dots, S_{n-1} les fonctions symétriques élémentaires des ω_i . On trouve

$$\sum_i A_i (S_1 - \omega_i) d\varphi_i = 0$$

ou, compte tenu de (1) :

$$(2) \quad \sum_i A_i \omega_i d\varphi_i = 0.$$

Terme de degré $n - 3$:

$$\sum_i A_i (S_2 - \omega_i S_1 + \omega_i^2) d\varphi_i = 0$$

ou, compte tenu de (1) et (2) :

$$(3) \quad \sum_i A_i \omega_i^2 d\varphi_i = 0.$$

Ce procédé est évidemment un procédé de récurrence et conduit au système

$$(Q) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i A_i \omega_i^k d\varphi_i = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-4), \\ \sum_i A_i \omega_i^{n-3} d\varphi_i = -dx, \\ \sum_i A_i \omega_i^{n-2} d\varphi_i = dy. \end{array} \right.$$

Ce système (Q) détermine les φ_i en x et y . Il est complètement intégrable, puisque les A_i vérifient le système (T).

Nous allons former les combinaisons intégrables de (Q). La première équation (Q) est évidemment intégrable :

$$\sum_i A_i d\varphi_i = d\theta.$$

La deuxième l'est également, ses conditions d'intégrabilité étant (T) :

$$\sum_i A_i \omega_i d\varphi_i = d\theta_1.$$

Les suivantes sont obtenues en ajoutant à la $k^{\text{ième}}$, affectée du coefficient $+1$, les équations correspondant à des valeurs de l'exposant inférieur à k , dont les multiplicateurs sont des combinaisons isobariques des a_i (le poids d'un a_i étant égal à son indice) et de poids k , multipliées éventuellement par des coefficients numériques.

Pour établir cette propriété, il faut calculer $\frac{\partial a_k}{\partial \varphi_i}$. On y parvient en utilisant les sommes de puissances semblables des racines de $\varphi = 0$.

Nous avons posé

$$na_1 = \sum \mu_k = 0,$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} a_2 &= -\frac{1}{2} \left[\left(\sum \mu_k \right)^2 - \sum \mu_k^2 \right], \\ a_2 &= \frac{1}{n(n-1)} \sum \mu_k^2, \\ \frac{\partial a_2}{\partial \varphi_i} &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_k \mu_k \frac{\partial \mu_k}{\partial \varphi_i} = \frac{-2}{n(n-1)} \sum_k \frac{\mu_k}{\varphi''(\omega_i)(\mu_k - \omega_i)} \\ &= \frac{-2}{n(n-1)\varphi''(\omega_i)} \sum_k \left(\frac{\mu_k - \omega_i}{\mu_k - \omega_i} + \frac{\omega_i}{\mu_k - \omega_i} \right) = \frac{-2}{(n-1)\varphi''(\omega_i)}. \end{aligned}$$

On établit ainsi la troisième combinaison intégrable :

$$\sum_i A_i \left(\omega_i^2 + \frac{n-1}{2!} a_2 \right) d\varphi_i = d\theta_2.$$

De même,

$$a_3 = \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum_k \mu_k^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial a_3}{\partial \varphi_i} = \frac{-6}{(n-1)(n-2)} \frac{\omega_i}{\varphi'(\omega_i)}.$$

D'où la quatrième combinaison

$$\sum_i A_i \left[\omega_i^3 + (n-1)a_2\omega_i + \frac{(n-1)(n-2)}{3!} a_3 \right] d\varphi_i = d\theta_3$$

et ainsi de suite, les combinaisons θ_{n-3} et θ_{n-2} donnant x et y :

$$0 = \text{const.}, \quad \theta_1 = \text{const.}, \quad \dots, \quad \theta_{n-3} = -x + \text{const.}, \quad \theta_{n-2} = y + \text{const.}$$

Les φ_i sont ainsi connus en x et y , ce qui permet de déterminer ψ en fonction de x et y également. On connaît donc deux intégrales premières et le problème est résolu.

39. *Exemples.* — 1° Si φ est du second degré en y' , on voit immédiatement qu'il n'y a pas de variable d'Ampère. Si l'on pose

$$\varphi = y'^2 - a_2,$$

où a_2 est fonction de y seul. Alors

$$d\psi = \frac{dy - y' dx}{y'} = \frac{dy}{y'} - dx, \quad \text{où } y' = \sqrt{\varphi + a_2}$$

et l'intégration est immédiate, puisque a_2 ne dépend que de y . Enfin, F est donné par

$$\frac{da_2}{dy} + F = 0.$$

2° φ est du troisième degré en y' :

$$\varphi = y'^3 - 3a_2 y' + a_3,$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = y'^2 - a_2, \quad \omega_1 = \sqrt{a_2}, \quad \omega_2 = -\sqrt{a_2};$$

$$d\psi = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{y' - \omega_1} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_2} \frac{d\varphi_2}{y' - \omega_2};$$

où θ vérifie l'équation

$$(T) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_2} \omega_2 \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} \omega_1 \right).$$

Il s'agit maintenant de prendre φ_1 et φ_2 comme variables indépendantes. Ils sont définis par

$$\varphi_1 = -2a_2^{\frac{3}{2}} + a_3 = -2\omega_1^3 + a_3,$$

$$\varphi_2 = +2a_2^{\frac{3}{2}} + a_3 = -2\omega_2^3 + a_3.$$

On en déduit

$$a_3 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2},$$

$$\omega_1 = \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{4} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\omega_2 = \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{4} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

L'équation (T) s'écrit alors

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} + \frac{8}{3(\varphi_1 - \varphi_2)} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_2} \right) = 0,$$

dont l'intégrale générale s'écrit [15] :

$$\begin{aligned} 0 &= (\varphi_2 - \varphi_1)^{-1} \int_0^1 f[\varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1)t] t^{-\frac{1}{3}} (1-t)^{\frac{2}{3}} dt \\ &+ \int_0^1 g[\varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1)t] \left(\frac{1-t}{t} \right)^{\frac{8}{3}} dt, \end{aligned}$$

où f et g sont des fonctions arbitraires de l'argument indiqué.

La fonction θ étant ainsi choisie, $\theta = C_1$ est une première intégrale du système, les deux autres donnant x et y :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} \omega_1 d\varphi_1 + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_2} \omega_2 d\varphi_2 = -dx$$

et

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} \omega_1^2 d\varphi_1 + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_2} \omega_2^2 d\varphi_2 = dy.$$

Il reste à calculer ψ par

$$d\psi = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{y' - \omega_1} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_2} \frac{d\varphi_2}{y' - \omega_2},$$

où y' est exprimée en fonction de φ , φ_1 et φ_2 et où φ est un paramètre :

$$y' - 3 \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{4} \right)^{\frac{2}{3}} y' + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \varphi = 0.$$

Enfin,

$$F(x, y) = -\frac{1}{a_2} \frac{\partial a_2}{\partial x}.$$

III. — Intégration de l'équation des lignes géodésiques, dans le cas où elle admet une intégrale première rationnelle en v' [9].

40. Le ds^2 étant exprimé en fonction des paramètres des lignes de longueur nulle :

$$ds^2 = \lambda(u, v) du dv,$$

il s'agit de déterminer ce ds^2 , c'est-à-dire la fonction $\lambda(u, v)$, de façon que l'équation des lignes géodésiques admette une intégrale première rationnelle en v' .

En variables u, v , l'équation différentielle des géodésiques s'écrit

$$(1) \quad v'' = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} v' - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} v'^2.$$

Nous ferons le changement de variables, $\omega = \lambda v'$:

$$\omega' = \lambda v'' + v' \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} v' \right).$$

Donc

$$v'' = \frac{\omega'}{\lambda} - \frac{v'}{\lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} v' \right).$$

Portant cette valeur de v'' dans (1) :

$$(2) \quad \omega' = \frac{2}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \omega = F(u, v, \omega).$$

A cette équation différentielle, correspond l'équation aux dérivées partielles :

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} v' + \frac{\partial f}{\partial \omega} F = 0,$$

que nous écrirons

$$A(f) = \lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \omega \frac{\partial f}{\partial v} + 2\omega \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0.$$

A une intégrale première $\varphi(u, v, \omega) = C$, on peut en faire correspondre une deuxième par la quadrature

$$d\psi = \frac{dv - v' du}{v' \sqrt{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}} = \frac{\lambda dv - \omega du}{\omega^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}}.$$

En effet [16] si l'on cherche un multiplicateur de $\lambda dv - \omega du$ de façon que l'intégrale $z = \text{const.}$ vérifie l'équation

$$(4) \quad F = pq - \lambda = 0, \quad \text{où } p = \frac{\partial z}{\partial u}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial v},$$

on trouve pour ce multiplicateur : $\omega^{-\frac{1}{2}}$.

La fonction z , donnée par la quadrature précédente, où ω est remplacé par sa valeur, tirée de $\varphi(u, v, \omega) = C$ contiendra la constante C . La fonction ψ ne sera autre que que $\frac{\partial z}{\partial C}$: on l'obtient donc en

dérivant z sous le signe d'intégration :

$$\psi = \int \frac{dv - v du}{\omega^{\frac{3}{2}}} \frac{d\omega}{\partial \zeta}.$$

Mais

$$\frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = 1$$

et l'on obtient la valeur de ψ annoncée.

D'après les résultats classiques, on sait que l'intégration de (1) ou de (4) sont des problèmes équivalents.

Le problème a été traité, dans le cas où l'on connaît une intégrale $\varphi(p, q) = \text{const.}$ de

$$(5) \quad (F, \varphi) = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$$

dans les cas où φ est : *a.* homogène; *b.* linéaire; *c.* quadratique; *d.* fractionnaire et du premier degré en p et q .

Enfin, puisque p et q vérifient la relation évidente :

$$p du + q dv = 0,$$

on en déduit

$$p = \sqrt{\lambda v'}, \quad q = \sqrt{\frac{\lambda}{v'}}$$

ou encore

$$p = v^{\frac{1}{2}}, \quad q = \lambda v^{-\frac{1}{2}}.$$

41. Intégrales entières d'ordre impair. — φ est ici un polynome d'ordre $m = 2n + 1$ en p et q :

$$\varphi = a_0 p^m + \dots + a_m q^m.$$

Nous obtiendrons une forme type à l'aide d'une transformation ponctuelle sur les u et v , en posant

$$a_0 = a_m = 1.$$

En utilisant la variable ω , on écrira

$$\varphi = \omega^{\frac{m}{2}} + \dots + \lambda^m \omega^{-\frac{m}{2}} = \omega^{-\frac{m}{2}} (\omega^m + \dots + \lambda^m,)$$

que nous écrirons, en mettant en évidence les racines $\gamma_1, \dots, \gamma_m$.

$$\varphi = w^{-\frac{m}{2}} \prod_{i=1}^m (w - \gamma_i).$$

D'où

$$\lambda^m = -\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m,$$

avec le signe —, puisque m est impair.

De même,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} = \frac{m}{2} w^{-\frac{m}{2}-1} (w^m + \dots - \lambda^m),$$

que nous écrirons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} = \frac{m}{2} w^{-\frac{m}{2}-1} \prod_{l=1}^m (w - \zeta_l).$$

Nous remarquons que les γ_i et les ζ_k correspondent aux μ_j et ω_i du paragraphe précédent, la seule différence provenant de ce que le nombre des γ_i et des ζ_k est le même.

Le système (Σ) est obtenu en identifiant à zéro le polynôme en w : $A(\varphi) = 0$, où les inconnues sont les coefficients a_1, \dots, a_{m-1} du polynôme φ . On peut ici remplacer le système (Σ) par une équation unique (E) d'ordre m , à une inconnue a_{m-1} , et à deux variables u et v . Nous allons remplacer le système (Σ) par le système (S) :

$$\Lambda(\varphi_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, m), \quad \text{où } \varphi_i = \varphi(\zeta_i).$$

L'équation $\Lambda(\varphi_i) = 0$ se simplifie, parce que $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)_{w=\zeta_i} = 0$ et le système (S) se réduit à

$$(S) \quad \lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} + \zeta_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

L'équation précédente exprime que $\varphi_i = \text{const.}$ est l'intégrale générale de $\lambda dv - \zeta_i du = 0$.

Les φ_i sont donc les variables caractéristiques d'Ampère de l'équation (E) ou du système (Σ).

Pour intégrer le système (S), on peut employer encore la méthode des substitutions orthogonales, qui permet de remplacer les variables γ_i par les φ_i .

Le système des φ_i est orthogonal, ainsi que celui des x_i , à condition de poser $\gamma_i = x_i^2$.

À cette modification près, le calcul est en tous points analogue à celui du paragraphe précédent.

Nous allons reprendre en détail le calcul direct, pour mettre en évidence les quelques modifications dues à la nouvelle forme de φ .

1° Calcul de $\frac{\partial \gamma_k}{\partial \varphi_i}$. — On part de

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = -\frac{m}{2\omega} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{\omega - \gamma_k}$$

qui, dérivé par rapport à ω , donne

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} - \left(\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right)^2 = \frac{m}{2\omega^2} - \sum_k \frac{1}{(\omega - \gamma_k)^2}.$$

Faisons $\omega = \zeta_i$ dans l'égalité précédente :

$$\frac{1}{\varphi_i} \varphi''(\zeta_i) = \frac{m}{2\zeta_i^2} - \sum_k \frac{1}{(\zeta_i - \gamma_k)^2}.$$

Mais

$$\frac{m}{2\zeta_i} = \sum_k \frac{1}{\zeta_i - \gamma_k}.$$

Donc

$$\frac{1}{\varphi_i} \varphi''(\zeta_i) = \frac{1}{\zeta_i} \sum_k \frac{1}{\zeta_i - \gamma_k} - \sum_k \frac{1}{(\zeta_i - \gamma_k)^2}.$$

D'autre part, dérivons

$$\varphi_i = \zeta_i^{-\frac{m}{2}} \prod_k (\zeta_i - \gamma_k)$$

logarithmiquement par rapport à φ_i :

$$\frac{1}{\varphi_i} = \left(-\frac{m}{2\zeta_i} + \sum_k \frac{1}{\zeta_i - \gamma_k} \right) \frac{\partial \zeta_i}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial \gamma_k}{\partial \varphi_i} \sum_k \frac{1}{\zeta_i - \gamma_k}.$$

En portant cette valeur de $\frac{1}{\varphi_i}$ dans l'égalité précédente et en égalant les coefficients de $\frac{1}{\zeta_i - \gamma_k}$ dans les deux membres, il vient

$$-\varphi''(\zeta_i) \frac{\partial \gamma_k}{\partial \varphi_i} = \frac{1}{\zeta_i} - \frac{1}{\zeta_i - \gamma_k}.$$

D'où

$$\frac{d\gamma_k}{d\varphi_i} = \frac{-\gamma_k}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i) (\zeta_i - \gamma_k)}.$$

2° Calcul de $\frac{d^2\gamma_k}{d\varphi_i^2}$. — On dérive par rapport à φ_i l'égalité

$$-\frac{m}{2\zeta_k} + \sum_j \frac{1}{\zeta_k - \gamma_j} = 0,$$

$$\left[\frac{m}{2\zeta_k^2} - \sum_j \frac{1}{(\zeta_k - \gamma_j)^2} \right] \frac{d\zeta_k}{d\varphi_i} + \sum_j \frac{1}{(\zeta_k - \gamma_j)^2} \frac{d\gamma_k}{d\varphi_i} = 0,$$

$$\left[\frac{1}{\zeta_k} \sum_j \frac{1}{\zeta_k - \gamma_j} - \sum_j \frac{1}{(\zeta_k - \gamma_j)^2} \right] \frac{d\zeta_k}{d\varphi_i} = \frac{1}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i)} \sum_j \frac{\gamma_j}{(\zeta_i - \gamma_j)(\zeta_k - \gamma_j)^2}.$$

Décomposons en éléments simples la fraction du second membre :

$$\frac{1}{(\zeta_i - \gamma_j)(\zeta_k - \gamma_j)^2} = \frac{1}{(\zeta_i - \zeta_k)^2} \left[\frac{1}{\zeta_i - \gamma_j} - \frac{1}{\zeta_k - \gamma_j} \right] - \frac{1}{(\zeta_i - \zeta_k)(\zeta_k - \gamma_j)^2}.$$

Après multiplication par γ_j et sommation par rapport à l'indice j , chacun des termes entre crochets a pour somme $-\frac{m}{2}$. Ce terme entre crochets est donc nul. Il ne reste que

$$-\frac{1}{\zeta_k} \sum_j \frac{\gamma_j}{(\zeta_k - \gamma_j)^2} \frac{d\zeta_k}{d\varphi_i} = \frac{-1}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i) (\zeta_i - \zeta_k)} \sum_j \frac{\gamma_j}{(\zeta_k - \gamma_j)^2}.$$

D'où

$$\frac{d\zeta_k}{d\varphi_i} = \frac{\zeta_k}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i) (\zeta_i - \zeta_k)}.$$

42. Intégration du système (S). — Nous allons remplacer le système (S) par le système (S₁) :

$$(S_1) \quad d\psi_j = \sum_{h=1}^m \frac{A_h d\varphi_h}{\gamma_j - \zeta_h} \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Ce système devra être complètement intégrable; nous remplacerons donc le système (S₁) par le système

$$(S_2) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \left(\frac{A_h}{\gamma_j - \zeta_h} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_h} \left(\frac{A_k}{\gamma_j - \zeta_k} \right).$$

En effectuant les calculs, $\frac{\partial \gamma_j}{\partial \varphi_k}$ et $\frac{\partial \zeta_h}{\partial \varphi_k}$ ayant les valeurs calculées au

numéro précédent, on obtient

$$(\zeta_k - \zeta_h)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_h \partial \varphi_k} - \frac{1}{\varphi''(\zeta_k)} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_h} - \frac{1}{\varphi''(\zeta_h)} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_k} = 0,$$

où l'on a posé

$$A_h = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_h}.$$

Ce système de $\frac{m(m-1)}{2}$ équations, peut s'écrire

$$(T) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \left(\frac{1}{\zeta_h} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_h} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_h} \left(\frac{1}{\zeta_k} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_k} \right).$$

Le système (T) s'intègre encore par la méthode qu'Appell a su appliquer aux systèmes de la forme précédente, qui constituent, on l'a vu, une généralisation de l'équation d'Euler et Poisson.

Si l'on pose

$$\varphi = \prod_j (w - \gamma_j),$$

où φ est un paramètre et si l'on désigne les racines de cette équation en w par w_1, w_2, \dots, w_m , l'intégrale générale s'écrit

$$\theta = \sum_i \int w_i F_i(\varphi) d\varphi,$$

où les F_i sont arbitraires.

43. Calcul des φ_i en u et v . — Calculons au préalable $\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_i}$. Pour cela, nous dériverons la relation $\lambda^m = -\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m$:

$$\frac{m}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_i} = \sum_k \frac{1}{\gamma_k} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \varphi_i} = \frac{-1}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i)} \sum_k \frac{1}{\zeta_i - \gamma_k}.$$

Or,

$$\sum \frac{1}{\zeta_i - \gamma_k} = \frac{m}{2\zeta_i} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_i} = \frac{1}{2\zeta_i^2 \varphi''(\zeta_i)}.$$

Nous devons identifier les deux valeurs obtenues pour $d\psi$:

$$d\psi = \frac{\lambda dv - w du}{w^{\frac{3}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial w}} = \sum_{i=1}^m \frac{A_i d\varphi_i}{w - \zeta_i}.$$

Or

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \omega^{-\frac{m}{2}-1} \prod_i (\omega - \zeta_i).$$

Donc

$$(\lambda d\nu - \dot{\omega} du) \omega^n = \sum_i A_i \prod_k' (\omega - \zeta_k) d\varphi_i,$$

où $n = \frac{m-1}{2}$ et \prod_k' signifie que k prend toutes les valeurs de 1 à m , sauf la valeur i .

Soient S_1, S_2, \dots, S_{2n} les fonctions symétriques élémentaires des ζ_k ; l'expression précédente s'écrit

$$(\lambda d\nu - \omega du) \omega^n = \sum_i A_i [\omega^{2n} - (S_1 - \zeta_i) \omega^{2n-1} + (S_2 - \zeta_i S_1 + \zeta_i^2) \omega^{2n-2} + \dots + (S_{2n} - \zeta_i S_{2n-1} + \dots + \zeta_i^{2n})] d\varphi_i.$$

L'identification des termes de degré $2n$ donne immédiatement :

$$\sum_{i=1}^m A_i d\varphi_i = 0.$$

Le terme de degré $2n-1$, compte tenu de l'égalité précédente, donne

$$\sum A_i \zeta_i d\varphi_i = 0.$$

D'une façon générale, nous en déduisons

$$(U) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i A_i \zeta_i^k d\varphi_i = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-2), \\ \sum_i A_i \zeta_i^{n-1} d\varphi_i = -du. \end{array} \right.$$

Au lieu de poursuivre l'identification, pour obtenir les $n+1$ relations restantes, ce qui nous donnerait

$$\sum_i A_i \zeta_i^n d\varphi_i = \lambda d\nu,$$

$$\sum_i A_i \zeta_i^k d\varphi_i = 0 \quad (k = n+1, \dots, 2n).$$

nous remarquerons que $d\psi$ est invariant, si l'on remplace u par v et \sqrt{w} par $\frac{\lambda}{\sqrt{w}}$

Les $n + 1$ dernières relations s'écrivent alors

$$(V) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum A_i \left(\frac{1}{\zeta_i}\right)^k d\varphi_i = 0 \quad (k = 1, \dots, n), \\ \lambda^{2n} \sum A_i \left(\frac{1}{\zeta_i}\right)^{n+1} d\varphi_i = dv. \end{array} \right.$$

Ce système (U), (V) de $2n + 1 = m$ relations entre les m variables φ_i et les deux variables u et v , est complètement intégrable. Il possède m combinaisons intégrables, formées comme au paragraphe précédent, par des combinaisons isobariques et de poids k des k premières relations (U), le coefficient de w^{m-k} étant de poids k :

$$\varphi = w^{\frac{m}{2}} (w^m + a_1 w^{m-1} + \dots + a_m).$$

De chaque combinaison intégrable déduite du système (U), on déduit une combinaison relative au système (V), en utilisant la transformation, qui a permis d'obtenir le système (V).

Pour former ces combinaisons intégrables, il faut calculer les dérivées $\frac{\partial a_k}{\partial \varphi_i}$. Nous allons calculer les deux premières :

$$\frac{\partial a_1}{\partial \varphi_i} = \sum_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial \varphi_i} = \frac{1}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i)} \sum_k \frac{-\gamma_k}{\zeta_i - \gamma_k}.$$

Nous savons (n° 41) que cette dernière somme a pour valeur $-\frac{m}{2}$.
Donc

$$\frac{\partial a_1}{\partial \varphi_i} = \frac{m}{2 \zeta_i \varphi''(\zeta_i)}.$$

Calculons de même $\frac{\partial a_2}{\partial \varphi_i}$.

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2} \left[\left(\sum \gamma_k \right)^2 - \sum \gamma_k^2 \right] = -\frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} \sum \gamma_k^2, \\ \frac{\partial a_2}{\partial \varphi_i} &= -a_1 \frac{\partial a_1}{\partial \varphi_i} + \sum \gamma_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial \varphi_i} \\ &= \frac{-m}{2 \zeta_i \varphi''(\zeta_i)} \sum \gamma_k + \sum \frac{-\gamma_k^2}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i) (\zeta_i - \gamma_k)} \\ &= \frac{-m}{2 \zeta_i \varphi''(\zeta_i)} \sum \gamma_k + \frac{1}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i)} \left[\sum \gamma_k + m \zeta_i - \frac{m}{2} \zeta_i \right], \end{aligned}$$

où l'on a remplacé $-\gamma_k^2$ par $\zeta_i^2 - \gamma_k^2 - \zeta_i^2$.

D'où, enfin,

$$\frac{\partial a_2}{\partial \varphi_i} = \frac{m \zeta_i + (m-2) a_1}{2 \zeta_i \varphi'(\zeta_i)}.$$

On obtient ainsi les premières combinaisons intégrables :

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} d\varphi_i &= d\theta, \\ \sum \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} \left(a_1 + \frac{m}{2} \zeta_i \right) d\varphi_i &= d\theta_1, \\ \sum \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} \left(a_2 - \frac{m-6}{2m} a_1^2 + 2 a_1 \zeta_i + \frac{m}{2} \zeta_i^2 \right) d\varphi_i &= d\theta_2, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Ce procédé nous donne n combinaisons intégrables relatives au système (U). On obtient les autres en changeant u en v et \sqrt{w} en $\frac{\lambda}{\sqrt{w}}$. Dans ces conditions, a_k est transformé en $\frac{\lambda^{2k} a_{m-k}}{a_m}$.

La première combinaison intégrable est une conséquence du système (T) lui-même :

$$\sum \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} \frac{1}{\zeta_i} d\varphi_i = d\theta_{-1}.$$

La deuxième s'écrit

$$\sum \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} \left(\frac{\lambda^2 a_{m-1}}{a_m} + \frac{m}{2} \frac{\lambda^2}{\zeta_i^2} \right) \frac{1}{\zeta_i} d\varphi_i = d\theta_{-2}.$$

La $n^{\text{ème}}$ intégrale du système (U) donne u en fonction des φ_i et la $(n+1)^{\text{ème}}$ du système (V) donne v . θ est une solution du système (T). Enfin, λ donc le ds^2 , est donné par la relation

$$\lambda^m = -\gamma_1 \dots \gamma_m = \zeta_1 \dots \zeta_m.$$

L'équation des géodésiques est donnée enfin par la quadrature de $d\psi$.

44. Exemple : $m = 3, n = 1$:

$$\begin{aligned} \varphi &= w^{-\frac{3}{2}} (w - \gamma_1) (w - \gamma_2) (w - \gamma_3) = w^{-\frac{3}{2}} (w^3 + a_1 w^2 + a_2 w + \lambda^3), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial w} &= \frac{3}{2} w^{-\frac{5}{2}} \left(w^3 + \frac{a_1}{3} w^2 - \frac{a_2}{3} w - \lambda^3 \right) = \frac{3}{2} w^{-\frac{5}{2}} (w - \zeta_1) (w - \zeta_2) (w - \zeta_3), \\ \varphi''(\zeta_i) &= \frac{3}{2} \zeta_i^{-\frac{5}{2}} (\zeta_i - \zeta_h) (\zeta_i - \zeta_k); \end{aligned}$$

où i prend les valeurs 1, 2, 3, h et k prenant les deux autres valeurs parmi ces trois nombres.

Le système (T) s'écrit

$$(T) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} - \frac{2}{3(\zeta_i - \zeta_k)^3} \left(\frac{\zeta_i^{\frac{3}{2}}}{\zeta_i - \zeta_h} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_k} + \frac{\zeta_k^{\frac{3}{2}}}{\zeta_k - \zeta_h} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} \right) = 0,$$

où i et k sont deux des nombres 1, 2, 3, h étant le troisième.

Les combinaisons intégrables sont

$$0 + u = u_0; \quad \theta_{-1} = C; \quad \nu - \theta_{-2} = \nu_0.$$

Il ne semble pas possible de pousser les calculs plus loin sans particulariser les données, les relations entre les φ_i et les ζ_k :

$$\varphi_i = \zeta_i^{-\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^i (\zeta_i - \zeta_k) \quad (i = 1, 2, 3)$$

ne permettant pas le calcul explicite des uns en fonction des autres, même ici où la relation n'est que du troisième degré.

45. Intégrales entières d'ordre pair : $m = 2n$. — Nous écrivons, comme dans le cas où $m = 2n + 1$:

$$\varphi = w^{-m} (w^m + \dots + \lambda_m) = w^{-n} (w^{2n} + \dots + \lambda^{2n}) = w^{-n} \prod_{i=1}^{2n} (w - \zeta_i).$$

Les variables caractéristiques sont les $2n$ expressions

$$\varphi_i = \varphi(\zeta_i)$$

où les ζ_i sont les racines de $\frac{\partial \varphi}{\partial w} = 0$.

On peut encore opérer directement ou en utilisant les propriétés des substitutions orthogonales, les valeurs des dérivées $\frac{\partial \zeta_k}{\partial \varphi_i}$

et $\frac{\partial \zeta_k}{\partial \varphi_i}$ restant valables.

Considérons

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\lambda dv - w du}{w^{\frac{3}{2}} \frac{d\varphi}{dv}} = \frac{2}{n} \frac{(\lambda dv - w du) w^{n-\frac{1}{2}}}{\prod_{i=1}^{2n} (w - \zeta_i)} \\ &= \sqrt{w} \sum_{i=1}^{2n} \frac{A_i d\varphi_i}{w - \zeta_i}. \end{aligned}$$

C'est ce facteur \sqrt{w} qui modifie les équations.

Nous obtenons maintenant le système

$$(S_i) \quad d\psi_j = \sqrt{\gamma_j} \sum_{i=1}^{2n} \frac{A_i d\varphi_i}{\gamma_j - \zeta_i} \quad (j = 1, 2, \dots, 2n)$$

et ses $n(2n-1)$ conditions d'intégrabilité; qui s'écrivent, après avoir posé $A_i = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i}$,

$$2(\zeta_k - \zeta_i)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} - (\zeta_i + \zeta_k) \left[\frac{1}{\zeta_k \varphi''(\zeta_k)} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} + \frac{1}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i)} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_k} \right] = 0,$$

que l'on peut écrire aussi :

$$(T') \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \left(\frac{\lambda}{\zeta_i} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left(\frac{\lambda}{\zeta_k} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_k} \right).$$

Ce système (T') remplace le système (T).

Si l'on considère encore l'équation

$$\prod_i (\omega - \zeta_i) = \varphi,$$

dont les racines sont $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2n}$, $\sqrt{\omega_i}$ est une solution particulière de (T'). Donc la solution générale s'écrira

$$\theta = \sum_{i=1}^{2n} \int \sqrt{\omega_i} F_i(\varphi) d\varphi,$$

où les F_i sont arbitraires.

L'identification des deux formes de $d\psi$ se fait sans modifications :

$$d\psi = \frac{(\lambda dv - \omega du) \omega^{n-1} \sqrt{\omega}}{\prod_{i=1}^{2n} (\omega - \zeta_i)} = \sqrt{\omega} \sum_{i=1}^{2n} \frac{A_i d\zeta_i}{\omega - \zeta_i}.$$

D'où les deux systèmes

$$(U) \quad \begin{cases} \sum_i A_i \zeta_i^k d\zeta_i = 0 & (k = 0, 1, \dots, n-2), \\ \sum_i A_i \zeta_i^{n-1} d\zeta_i = -du; \end{cases}$$

$$(V) \quad \begin{cases} \lambda^{2k-1} \sum_i A_i \left(\frac{1}{\zeta_i} \right)^k d\zeta_i = 0 & (k = 1, 2, \dots, n-1), \\ \lambda^{2n-1} \sum_i A_i \left(\frac{1}{\zeta_i} \right)^n d\zeta_i = dv. \end{cases}$$

Mais les combinaisons intégrables sont différentes, car le système (T') est différent du système (T). La formation des combinaisons intégrables se fait suivant la même méthode, les dérivées $\frac{\partial a_k}{\partial \varphi_i}$ ayant les mêmes expressions. On obtient ainsi pour les système (U) :

$$\sum \frac{\partial^j}{\partial \varphi_i^j} d\varphi_i = d\theta,$$

$$\sum \frac{\partial^j}{\partial \varphi_i^j} \left(n \zeta_i + \frac{a_1}{2} \right) d\varphi_i = d\theta_1.$$

Puis, pour le système (V) :

$$\sum \frac{\partial^j}{\partial \varphi_i^j} \lambda \zeta_i d\varphi_i = d\theta_{-1},$$

$$\sum \frac{\partial^j}{\partial \varphi_i^j} \lambda \left[\frac{\lambda^2}{\zeta_i^2} + \frac{\lambda^2}{\zeta_i} \frac{a_{2n-1}}{2na_{2n}} \right] d\varphi_i = d\theta_{-2},$$

.....

Nous rappelons que le passage des combinaisons intégrables relatives au système (V) se déduisent de celles qui sont relatives au système (U) par le changement de w en $\frac{\lambda^2}{w}$, a_k devant être remplacé par $\frac{\lambda^{2k} a_{2n-k}}{a_{2n}}$, où $a_{2n} = \lambda^{2n}$. Enfin $\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i}$ doit être remplacé par $\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} \lambda \zeta_i d\varphi_i$.

46. Exemples. — 1° $n = 1$:

$$\varphi = w^{-1}(w^2 + a_1 w - \lambda^2),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} = \frac{w^2 + \lambda^2}{w^2} = \frac{(w - \zeta_1)(w - \zeta_2)}{w^2}.$$

Donc

$$\zeta_1 = i\lambda, \quad \zeta_2 = -i\lambda;$$

$$\varphi_1 = a_1 + 2i\lambda, \quad \varphi_2 = a_1 - 2i\lambda.$$

On peut calculer ζ_1, ζ_2 et a_1 en fonction de φ_1 et φ_2 .

L'équation (T) se réduit à

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} = 0.$$

Donc

$$0 = \Phi_1 + \Phi_2,$$

où Φ_1 est une fonction de φ_1 et Φ_2 , une fonction de φ_2 . D'où

$$\Phi_1 + \Phi_2 = u_0 - u, \quad i(\Phi_1 - \Phi_2) = v - v_0.$$

Ces résultats ne diffèrent que par la forme des résultats classiques du ds^2 de Liouville.

2° $n = 2$:

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega^2 + a_1 \omega + a_2 + \frac{a_3}{\omega} - \frac{\lambda^4}{\omega^2}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} &= 2\omega + a_1 - \frac{a_3}{\omega^2} + \frac{2\lambda^4}{\omega^3} = \frac{2}{\omega^3}(\omega - \zeta_1) \dots (\omega - \zeta_3), \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \left(-\frac{3}{\omega} + \frac{1}{\omega - \zeta_1} + \dots + \frac{1}{\omega - \zeta_3} \right), \\ \varphi''(\zeta_i) &= \frac{2}{\zeta_i^2} (\zeta_1 - \zeta_h) (\zeta_l - \zeta_k) (\zeta_i - \zeta_l). \end{aligned}$$

Le système (T) comprendra $C_i^2 = 6$ équations :

$$\begin{aligned} 4(\zeta_k - \zeta_i)^4 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} \\ - (\zeta_l + \zeta_k) \left[\frac{\zeta_k^2}{(\zeta_k - \zeta_h)(\zeta_k - \zeta_l)} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} - \frac{\zeta_l^2}{(\zeta_l - \zeta_h)(\zeta_l - \zeta_i)} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_k} \right] = 0, \end{aligned}$$

en désignant par i, k, h, l une des permutations circulaires des nombres 1, 2, 3, 4.

Les combinaisons intégrables sont

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} d\varphi_i = d\theta = 0, \quad \sum \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} \frac{\lambda}{\zeta_i} d\varphi_i = d\theta_{-1} = 0, \\ \sum \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} \left(2\zeta_i + \frac{a_1}{2} \right) d\varphi_i = d\theta_1 = -du \sum \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} \left(\frac{\lambda^4}{\zeta_i^2} + \frac{a_3}{4\lambda\zeta_i} \right) d\varphi_i = d\theta_{-2} = dv. \end{aligned}$$

On détermine enfin ψ par quadratures.

47. Intégrales de la forme $\varphi = \sigma v^{m_0} \prod_{i=1}^n (\omega - \gamma_i)^{m_i}$. — Nous

supposons que les m_i sont des constantes. En variables p, q , φ s'écrit

$$\varphi = \sigma p^{2m_0 + \sum m_i} \prod_{i=1}^n \left(p - \frac{\gamma_i}{\lambda} q \right)^{m_i}$$

et nous supposons que

$$\prod \gamma_i^{m_i} = \lambda^{\sum m_i}.$$

En revenant à la variable ω , on retrouve la forme indiquée.

Si l'on calcule $\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial w}$:

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial w} = \frac{m_0}{w} + \sum \frac{m_i}{w - \gamma_i} = \frac{(m_0 + \sum m_i) \prod (w - \zeta_i)}{w \prod (w - \gamma_k)},$$

équation de degré m , dont les racines sont les ζ_i .

u et v ne sont pas caractéristiques, si cette équation n'a pas de racine nulle (auquel cas v serait caractéristique), ni infinie (auquel cas u serait caractéristique), c'est-à-dire : si 1° $m_0 \neq 0$; 2° $\sum m_i + m_0 \neq 0$.

Si l'on pose encore $\varphi_i = \varphi(\zeta_i)$, $\varphi_i = \text{const.}$ est intégrale générale de $\lambda dv - \zeta_i du = 0$ et les φ_i sont les caractéristiques d'Ampère.

Avant de poursuivre l'intégration du système (S) :

$$(S) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} + \zeta_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

remarquons que le calcul antérieur des dérivées $\frac{\partial \gamma_k}{\partial \varphi_i}$ et $\frac{\partial \zeta_k}{\partial \varphi_i}$ reste entièrement valable, la présence des coefficients m_j ne changeant rien au calcul. On trouve donc

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial \varphi_i} = \frac{-\gamma_k}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i) (\zeta_i - \gamma_k)}; \quad \frac{\partial \zeta_k}{\partial \varphi_i} = \frac{\zeta_k}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i) (\zeta_i - \zeta_k)}.$$

La différentielle $d\psi$ sera modifiée du fait que $\frac{\partial \varphi}{\partial w}$ n'étant pas rationnel, φ devra être remplacé par $\text{Log } \varphi$ dont la dérivée est rationnelle et $d\psi$ se trouvera remplacé par $\varphi d\psi$:

$$\varphi d\psi = \frac{(\lambda dv - w du)}{w^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \varphi}{\gamma w}} = \frac{(\lambda dv - w du) \prod (w - \gamma_k)}{w^{\frac{1}{2}} \prod (w - \zeta_k)}$$

et nous décomposerons en éléments simples $w^{-\frac{1}{2}} \varphi d\psi$:

$$w^{-\frac{1}{2}} \varphi d\psi = \frac{A}{w} + B + \sum \frac{A_i d\varphi_i}{w - \zeta_i}.$$

On trouve, en faisant $w = 0$,

$$A = \lambda dv \frac{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n}{\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_n}.$$

Or, si l'on compare les deux valeurs de $\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v}$, en identifiant les termes constants, il vient

$$m_0 \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n = \left(m_0 + \sum m_i \right) \zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_n.$$

Donc.

$$A = \lambda \, dv \frac{m_0 + \sum m_i}{m_0}.$$

Puis on trouve immédiatement : $B = -du$,

$$\varphi \, d\psi = \frac{m_0 + \sum m_i}{m_0} \frac{\lambda \, dv}{\sqrt{w}} - \sqrt{w} \, du + \sum \frac{\sqrt{w} A_i \, d\varphi_i}{w - \zeta_i}.$$

En posant

$$\theta = \frac{m_0 + \sum m_i}{m_0} \lambda \, v - u + \omega,$$

A_i est encore égal à $\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i}$ et ω vérifie le même système (T') que θ dans le cas des intégrales d'ordre pair (voir n° 45) :

$$(\Omega) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \left(\frac{\lambda}{\zeta_i} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left(\frac{\lambda}{\zeta_k} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi_k} \right)$$

et l'on formera les combinaisons intégrables en considérant le polynome

$$\prod (w - \zeta_i) = w^p + a_1 w^{p-1} + \dots + a_p.$$

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS LINÉAIRES [10].

I. — Le groupe ponctuel et ses sous-groupes.

48. Nous nous contenterons de rappeler les résultats classiques de Lie et ses successeurs, auxquels E. Cartan a su donner une forme définitive, les sous-groupes du groupe ponctuel général sont :

1° *Groupes infinis à n variables :*

a. Groupe V_n des transformations, qui conservent les volumes, c'est-à-dire l'intégrale $\int \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n$. L'équation du groupe est

$$\frac{D(X_1, X_2, \dots, X_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 1.$$

b. Groupe W_n des transformations de contact, qui conservent l'équation

$$dz - \sum p_i dx_i = 0,$$

c'est-à-dire

$$dz - \sum_{i=1}^n P_i d\lambda_i = \left(dz - \sum_{i=1}^n p_i dx_i \right) \rho$$

dans le cas où le nombre des variables $n = 2m + 1$ est *impair*.

c. Groupe qui conserve l'intégrale de surface :

$$\iint \sum_{i=1}^m dx_i dy_i$$

dans le cas où le nombre des variables $n = 2m$ est *pair*.

2° **GROUPES FINIS :**

a. *Groupe projectif* à $(n + 1)^2 - 1 = n(n + 2)$ paramètres. Nous le désignerons par $G_{n(n+2)}$. Une transformation du groupe s'écrit

$$x'_k = \frac{\sum a'_k x_i + a_k^{n+1}}{\sum a'_{n+1} x_i + a_{n+1}^{n+1}}.$$

On sait d'ailleurs que ce groupe est primitif.

b. *Groupe linéaire* : Si l'on écrit les équations précédentes :

$$x'_k = \frac{X_k}{D},$$

on obtient le groupe linéaire général $\Gamma_{n(n+1)}$ dans le cas où $D = 1$.

c. *Groupe linéaire spécial* : Si l'on suppose en outre que $|\alpha'_k| = 1$ (cette notation représentant le déterminant des α'_k) le groupe linéaire est alors *spécial* $\Gamma_{n(n+1)-1}$.

Si des deux groupes précédents on écarte les translations, on obtient :

d. *Groupe linéaire et homogène* : Γ_{n^2} .

e. *Groupe linéaire et homogène spécial* : Γ_{n^2-1} .

f. *Groupe linéaire et homogène qui conservent la quadratique* $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ que nous désignerons par $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$.

g. Si n est pair, il existe encore le groupe qui laisse invariante la forme $\sum_{i=1}^m x_i dy_i - y_i dx_i$, où on a posé $n = 2m$.

Remarquons enfin que, pour les petites valeurs de n , il se présente des singularités sur lesquelles nous n'insisterons pas.

II. — Le groupe de Picard.

49. Soit l'équation linéaire

$$(1) \quad f(u) = au + a_1 \frac{du}{dx} + \dots + a_n \frac{d^n u}{dx^n} = 0.$$

Cherchons les relations

$$(2) \quad \varphi(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) = \text{const.},$$

où

$$u' = \frac{du}{dx}, \quad \dots, \quad u^{(n-1)} = \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}.$$

qui soient compatibles avec (1).

En dérivant (2) par rapport à x , il vient

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} u' + \dots + \frac{\partial^{(n-1)} \varphi}{\partial u^{(n-1)}} u^{(n)} = 0,$$

où $u^{(n)}$ doit être remplacé par sa valeur (1).

un système fondamental :

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nous remplacerons l'équation (1) par le système

$$F(u_i) = a_n u_i^{(n)} + \dots + a u_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

qui, résolu par rapport aux a_k , s'écrit

$$(\Sigma) \quad \frac{D}{a_n} = \frac{D'}{a_{n-1}} = \dots = \frac{D^{(n)}}{a}.$$

Toute autre solution s'écrira

$$U_i = \sum_{k=1}^n a_i^k u_k,$$

où i prend les valeurs de 1 à n . Les $D^{(j)}$ sont multipliés par $|\alpha_i^k|$.

Les transformations sont donc bien celles du groupe *linéaire homogène général* Γ_n , et les quotients

$$\frac{D'}{D}, \quad \dots, \quad \frac{D^{(n)}}{D}$$

en sont les *invariants différentiels*.

Le système (Σ) peut être réductible ou irréductible :

1° (Σ) est *irréductible* : Les transcendentes u sont attachées dans le domaine $[\Delta]$ des coefficients au groupe Γ_n . Nous pouvons ramener ce groupe au groupe spécial Γ_{n-1} . En effet

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} D.$$

Donc

$$D = C e^{-\int \frac{a_{n-1}}{a_n} dx}.$$

L'*adjonction* de cette transcendante réduit Γ_n à Γ_{n-1} .

2° (Σ) est *réductible* : Il existe des relations

$$(\Phi) \quad \begin{cases} \Phi_j(x, u_1, \dots, u_n, u'_1, \dots, u'_n, \dots, u_1^{(n-1)}, \dots, u_n^{(n-1)}) = 0 \\ (j = 1, 2, \dots, k) \end{cases}$$

compatibles avec (Σ) . Le système (Σ) (Φ) est irréductible. Nous définirons le système irréductible régulier de la manière suivante : on prendra, parmi les systèmes, ceux qui renferment le plus grand nombre d'équations d'ordre zéro en u_i , puis, parmi ceux-ci, ceux qui renferment le plus grand nombre d'équations du premier ordre et ainsi de suite.

III. — Systèmes irréductibles réguliers.

50. Chacune des relations Φ_j est un polynome. Considérons le nouveau polynome

$$P(x, u) = \sum_{i=1}^k \mu_i(x) \Phi_i(x, U) = 0,$$

où les μ_i sont des fonctions arbitraires de x et où l'on a écrit $P(x, u)$ pour $P(x, u_1, \dots, u_n, \dots, u_1^{(n-1)}, \dots, u_n^{(n-1)})$.

Considérons la dérivée de P :

$$P_1 = \frac{dP}{dx} = X(P) = \frac{\partial P}{\partial x} + \sum \frac{\partial P}{\partial U_i} U_i' + \dots + \sum \frac{\partial P}{\partial U_i^{(n-1)}} U_i^{(n-1)'} = 0$$

où l'on remplace $U_i^{(n)}$ par $-\frac{\alpha_{n-1} U_i^{(n-1)} + \dots + \alpha U_i}{\alpha_n}$.

En répétant cette opération, on voit que le système $P = 0, P_1 = 0, \dots, P_{k-1} = 0$ est équivalent au système (Φ) .

Si l'on fait sur les U_i une transformation linéaire (T) d'ailleurs arbitraire :

$$U_i = \sum \alpha_j' u_j,$$

les u_j sont alors arbitraires et P s'écrit

$$P(x, u) = \sum_{i=1}^{\rho} l_i(\alpha) \xi_i(x, u),$$

où les l_i sont des polynomes en α_j^k et où ρ est le plus petit possible, c'est-à-dire que les l_i sont linéairement indépendants, ainsi que les ξ_i .

Les dérivées de P s'écriront

$$\begin{aligned}
 P_1(x, U) &= \sum_{i=1}^{\rho} l_i(\alpha) X(\xi_i) = 0, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 P_{k-1}(x, u) &= \sum_{i=1}^{\rho} l_i(\alpha) X_{k-1}(\xi_i) = 0,
 \end{aligned}$$

P_k étant une conséquence des relations précédentes.

Les l_i sont les coordonnées du polynome P. En effet, si l'on fait une deuxième transformation : $U_i = \sum \beta'_j v_j$,

$$P = \sum l_i(\alpha) \xi_i(x, u) = \sum l_i(\beta) \xi_i(x, v).$$

D'autre part,

$$u_k = \sum \gamma'_k v_j.$$

Donc

$$\beta'_i = \sum \alpha_i^k \gamma'_k$$

et

$$l_i(\beta) = \sum \lambda_i^k(\gamma) l_k(\alpha), \quad \text{avec } |\lambda_i^k| \neq 0.$$

De même,

$$\sum l_i(\alpha) \xi_i(x, u) = \sum \lambda_j^k(\gamma) l_k(\alpha) \xi_j(x, v)$$

et, en identifiant :

$$\xi_i(x, u) = \sum \lambda_i^k \xi_k(x, v).$$

Ainsi, les l_i et les ξ_i ne sont déterminés qu'à une transformation linéaire et homogène près.

Exemples. — 1° D n'a qu'une coordonnée : $|\alpha_i^k|$.

2° Un polynome $A_0 U + \dots + A_{n-1} U^{(n-1)}$ a n coordonnées.

§1. THÉORÈME. — *Le nombre de coordonnées de P est égal au nombre de relations de (Φ) augmenté d'une unité.*

En effet, 1° si $\rho \leq k$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_k \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{\lambda-1}(\xi_1) & \dots & X_{\lambda-1}(\xi_k) \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est impossible, les ξ_i étant linéairement indépendants.

2° Si $\rho = k + m$, avec $m > 1$, en résolvant (Φ) par rapport à l_1, \dots, l_k :

$$l_i = l_{k+1}\Omega_{i,1}(x, u) + \dots + l_{k+m}\Omega_{i,m}(x, u) \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

En appliquant à ces relations l'opérateur X , il vient

$$0 = l_{k+1}X(\Omega_{i,1}) + \dots + l_{k+m}X(\Omega_{i,m}) 0.$$

Donc

$$X(\Omega_{i,1}) = 0, \quad \dots, \quad X(\Omega_{i,m}) = 0.$$

Or, on a choisi les $\Omega_{i,j}$ algébriquement distincts. On obtient donc les mk équations :

$$\Omega_{i,j}(x, u) = \Omega_{i,j}(x_0, u_0).$$

Si ces mk relations se réduisent à k seulement, c'est qu'il y a des relations entre elles, donc entre les ξ , ce qui est impossible. Il ne reste donc plus qu'une hypothèse : $m = 1$.

Nous écrirons alors le système (Φ) sous la forme canonique

$$(\Phi) \quad \frac{l_i(x)}{l_0(x)} = \Omega_i(x, u) \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

le système (Φ) comprenant $k + 1$ inconnues homogènes, on peut le résoudre par rapport aux quotients de k d'entre elles par la dernière.

Considérons la transformation identique $\alpha^t = \varepsilon_{ik}$, où $\varepsilon_{ik} = 0$, pour $i \neq k$ et $\varepsilon_{kk} = 1$; $l_i(\alpha)$ se réduit à un nombre L_i et U est déterminé par

$$(\Phi_0) \quad \frac{L_i}{L_0} = \Omega_i(x, U), \quad L_0 \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Les u sont solutions du même système. Donc les l_i vérifient le système

$$(\Gamma) \quad \frac{l_i(\alpha)}{l_0(\alpha)} = \frac{L_i}{L_0},$$

chacune des équations étant invariante, le système (Γ) constitue le système d'invariants d'un groupe : le groupe de rationalité Γ .

§2. **Invariants différentiels du groupe de rationalité.** — Si nous supposons maintenant les u constants, nous déterminons les α à l'aide des U .

Soit $u_j^{(k-1)} = \varepsilon_{jk}$, on obtient alors

$$\alpha_i = U_i^{(k-1)}.$$

Le système (Φ) s'écrit

$$\frac{l_i(U)}{l_0(U)} = \Omega_i(x, \varepsilon_{jk}) = \omega_i(x).$$

Nous désignerons ce système par (Φ_1) , où les ω_i sont les invariants différentiels du groupe Γ , dans lequel les U sont fonctions de x .

Equations résolvantes. — Soit la transformation

$$l_i(\beta) = \sum \lambda'_i(\gamma) l_j(\alpha)$$

et où

$$\beta_i^k = \alpha_i^k + \varepsilon X(\alpha_i^k) = \alpha_i^k + \varepsilon \theta_i^k.$$

Mais $\alpha_i^k = U_i^{(k-1)}$, donc $\theta_i^k = \alpha_i^{k+1}$, si $k \leq n-1$; pour $k = n$, on remplace $U_i^{(n)}$ par sa valeur tirée de l'équation (1).

L'égalité précédente devient

$$l_i(\beta) = l_i(\alpha) + \varepsilon X[l_i(\alpha)] = l_i(\alpha) + \varepsilon \sum \lambda'_i(\gamma) l_j(\alpha)$$

puisque

$$\lambda'_i = 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad \lambda'_j = \varepsilon.$$

Donc,

$$X[l_i(\alpha)] = \sum \lambda'_i(\gamma) l_j(\alpha).$$

C'est le système résolvant pour les l_i .

Pour les invariants absolus : $\Lambda_i = \frac{l_i}{l_0}$,

où on suppose $l_0 = D = |\alpha^k|$. On peut écrire immédiatement :

$$X(\Lambda_i) = \frac{X(l_i)}{l_0} - \frac{l_i}{l_0^2} X(l_0).$$

Mais

$$X(l_0) = -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} l_0$$

Donc

$$-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \Lambda_i + X(\Lambda_i) = \sum \lambda'_i(\gamma) \Lambda_j.$$

C'est le système résolvant des invariants absolus. C'est aussi celui des ω_i , puisque d'après (Φ_1) : $\Lambda_i = \omega_i$,

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} \omega_i + X(\omega_i) = \sum \lambda_i^j(\gamma) \omega_j.$$

Pour les ξ_j , il suffit d'éliminer les l_i entre $P = 0, P_1 = 0, \dots, P_{k-1} = 0$, auxquelles on adjoint $P_k = 0$. On obtient

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_k(\xi_1) & \dots & X_k(\xi_{k+1}) \end{vmatrix} = 0.$$

Comme les ξ_i sont indépendants, ils vérifient une même relation

$$X_k(\xi_i) = R_1 X_{k-1}(\xi_i) + \dots + R_k \xi_i,$$

où les R_j sont rationnels, puisqu'ils sont invariants par une transformation linéaire sur les u .

Enfin, les ξ_i sont linéairement indépendants mais non fonctionnellement distincts. Ils sont liés par des relations,

$$\sum C_{m_0} \dots m_k l_0^{m_0} \dots l_k^{m_k} = 0$$

qui ne sont autres que les syzygies de Sylvester.

IV. — Applications.

53. 1° La méthode précédente n'ajoute rien de nouveau, à la théorie de Picard; on retrouve également les résultats de Fuchs et de Darboux sur les intégrales algébriques. Nous nous contenterons d'indiquer la liaison entre la théorie précédente et celle de Picard.

Si l'on pose

$$Z = \sum_{i=1}^n \eta^i U_i,$$

où les η^i sont des fonctions rationnelles de x et que l'on fasse la transformation

$$U_i = \sum \alpha_i^k u_k,$$

Z devient

$$Z = \sum_i \sum_k \eta^i \alpha_i^k u_k.$$

Elle prend n^2 valeurs et n'est autre que la fonction sensible de Schlesing.

Elle vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre n^2 dont les coefficients sont fonctions des a_i et de leurs dérivées.

Mais on peut aussi résoudre en u_k :

$$u_k = A_{k,1}Z + \dots + A_{k,n^2-1} \frac{d^{n^2-1}Z}{dx^{n^2-1}}.$$

En remplaçant dans le système, les u_k par ces valeurs, on obtient un système en Z , qui n'est autre que le système résolvant de Picard.

54. 2° Soit à former l'équation la plus générale correspondant au groupe infini V_n qui conserve les volumes : l'équation de définition est

$$\frac{D(X_1, \dots, X_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = 1$$

et soit $X(f)$ l'équation cherchée, où les x_i sont fonctions de t, u_1, \dots, u_n :

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum A_i \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0.$$

L'invariant différentiel unique est

$$\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(u_1, \dots, u_n)} = D.$$

En calculant ses dérivées en t et u_i , on voit que tous les termes se détruisent, sauf $X(D)$ et $-D \sum \frac{\partial A_i}{\partial u_i}$.

La résolvante en D est donc

$$X(D) + D \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial u_i} = 0.$$

Nous résoudrons cette équation, qui n'est autre que celle du multiplicateur de Jacobi, en posant

$$D \cdot A_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \quad (i = 1, \dots, n),$$

avec

$$D + \sum \frac{\partial \omega_i}{\partial u_i} = 0,$$

où les ω_i sont des fonctions arbitraires des arguments u_1, \dots, u_n et t , dans le domaine de rationalité $[\Delta]$.

En remplaçant A_i et D par les valeurs précédentes dans l'équation proposée, celle-ci s'écrit

$$X(f) = \sum_{i=1}^n \frac{D(\omega_i, f)}{D(t, u_i)} = 0.$$

Ainsi, dans le cas simple de deux variables, toute équation admettant le groupe de rationalité V_2 , qui conserve les aires, s'écrira $\frac{D(\omega, f)}{D(t, u)} = 0$, où ω est une fonction arbitraire et f , la fonction inconnue. Il s'ensuit que f est une fonction arbitraire de ω .

55. 3° *Équations aux dérivées partielles du premier ordre.* — On sait qu'une intégrale complète de l'équation [18] :

$$(1) \quad Z(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = a, \quad \text{où } p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i},$$

est définie par

$$(2) \quad X_i(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = a_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

les Z et les X_i satisfaisant à

$$(3) \quad dz - \sum P_i dx_i = \rho (dz - \sum p_i dx_i).$$

Les Z , X_i , P_i vérifient le système

$$\begin{aligned} [Z, X_i] &= [X_i, X_k] = [P_i, P_k] = [P_i, X_k] = 0; \\ [P_i, X_i] &= \rho; \quad [P_i, Z] = \rho P_i; \\ [Z, \rho] &= \rho \frac{\partial Z}{\partial z} - \rho^2; \quad [X_i, \rho] = \rho \frac{\partial X_i}{\partial z}; \quad [P_i, \rho] = \rho \frac{\partial P_i}{\partial z}; \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$[f, g] = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial p_i} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial g}{\partial z} \right) - \frac{\partial g}{\partial p_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right].$$

Les X_i et les P_i sont, d'après (3), définis à une transformation de contact près, qui conserve Z . Toute transformation de contact,

admettant parmi les équations directrices, $Z = z$ répondra à la question.

Soit le cas simple :

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

l'équation proposée, que nous pourrons supposer résolue en q :

$$q = f(x, y, z, p).$$

La méthode de Lagrange consiste à déterminer $\varphi(x, y, z, p)$ telle que

$$dz = p dx + f dy,$$

où p est donné par

$$\varphi(x, y, z, p) = a$$

soit intégrable.

p est donc solution de $[q - f, \varphi] = 0$, c'est-à-dire

$$\Lambda(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(f - p \frac{\partial f}{\partial p} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0.$$

Soit $\psi(x, y, z, p) = b$ une solution de cette équation. Pour qu'elle soit compatible avec $\varphi(x, y, z, p) = a$, il est nécessaire que

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\frac{\partial \psi}{\partial x} + p \frac{\partial \psi}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p}}{\frac{\partial \psi}{\partial p}}.$$

D'où l'on déduit

$$dz - p dx - f dy = \lambda (d\varphi - \omega d\psi), \quad \text{où } \omega = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p}}{\frac{\partial \psi}{\partial p}},$$

les trois éléments ω, φ, ψ étant définis à une transformation de contact près.

Il conviendrait d'étudier tous les cas de réduction. On voit, par exemple, que, si z disparaît de l'équation proposée :

$$q = f(x, y, p)$$

on cherche

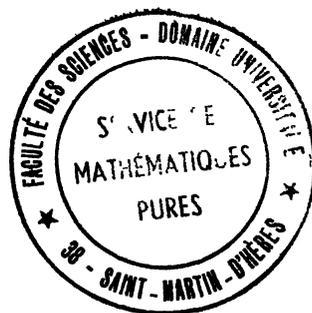
$$\varphi(x, y, p) = a.$$

Le crochet $[q - f, \varphi]$ se simplifie :

$$-\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

et admet le multiplicateur 1. Le groupe de rationalité est alors défini par

$$\frac{D(\Phi, \Psi)}{D(\varphi, \psi)} = 1.$$



BIBLIOGRAPHIE.

J. DRACH :

- [1] *Thèse*, chap. III, Paris, 1898.
- [2] *Intégration logique des équations différentielles ordinaires (Int. Congress of Math., Cambridge, 1912, p. 2 à 11)*.
- [3] *Ibid.*, p. 19-22.
- [4] *Équation différentielle de la balistique extérieure et son intégration par quadratures (Ann. Ec. Norm. Sup., t. 38, 1920, p. 1-94)*.
- [5] *Intégration logique des équations différentielles ordinaires (Int. Congress of Math., Cambridge, 1912, p. 14)*.
- [6] *Sur la réduction de l'équation générale de Riccati (C. R. Acad. Sc., t. 205, 1937, p. 700-705)*.
- [7] *Sur quelques applications de l'intégration logique des équations différentielles (C. R. Congrès Int. des Math., Strasbourg, 1920, p. 10-19)*.
- [8] *Ibid.*, p. 19-25.
- [9] *Sur l'intégration logique des équations différentielles : applications aux équations de la Géométrie et de la Mécanique (Proc. Int. Math. Congress Toronto, 1924, p. 484-494)*.
- [10] *Intégration logique des équations différentielles ordinaires (Int. Congress of Math., Cambridge, 1912, p. 26-60)*.

DARBOUX :

- [11] *Théorie des surfaces*, t. IV, note VIII, p. 484.
- [12] *Bull. Sc. Math.*, t. II, 1878, p. 60-96.
- [13] *Théorie des surfaces*, t. IV, n^{os} 1039-1046.
- [14] *Systèmes orthogonaux et coordonnées curvilignes*, livre I, chap. VI et livre II, chap. I.
- [15] *Théorie des surfaces*, t. II, chap. III.
- [16] *Ibid.*, p. 431.

D. HILBERT :

- [17] *Math. Ann.*, Band 27, 1886, p. 158.

E. GOURSAT :

- [18] *Leçons sur le problème de Pfaff*, p. 201.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

L'INTÉGRATION LOGIQUE.

	Pages.
I. L'intégration logique.....	2
II. Le groupe de rationalité.....	3

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

I. Généralités.....	7
II. Applications.....	12
III. Équation de la balistique extérieure.....	18
IV. Équation $\frac{dy}{dx} = \frac{A(x,y)}{B(x,y)}$	29
V. Réduction de l'équation de Riccati.....	32
VI. Équation $\frac{dy}{dx} = \varphi A(x,y)$. Les caractéristiques d'Ampère.....	47
VII. Équation $y' = f(x, y, \varphi)$	57

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE.

I. Généralités.....	60
II. Équation $y'' = F(x, y)$ admettant une intégrale première rationnelle en y'	62
III. Équation des géodésiques, admettant une intégrale première rationnelle en φ'	73

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS LINÉAIRES.

I. Le groupe ponctuel et ses sous-groupes.....	88
II. Le groupe de Picard.....	90
III. Systèmes irréductibles réguliers.....	93
IV. Applications.....	97
